

V ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2018

IV одделение

1. Учениците од едно одделение отишле во слаткарница и сите јаделе сладолед. Во одделението има 34 ученици при што
- 12 деца сакаат сладолед од јагоди,
 - 5 деца сакаат сладолед од јагода и од ванила,
 - 9 деца сакаат сладолед само од чоколадо, и
 - другите деца сакаат само сладолед од ванила.
- Колку деца сакаат сладолед од ванила?

Решение. Според условот на задачата, 9 деца сакаат сладолед само од чоколадо, па остануваат $34 - 9 = 25$ деца.

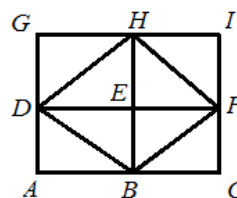
Понатаму, 12 деца сакаат сладолед од јагоди, а 5 деца сакаат сладолед од јагода и од ванила, па затоа 7 деца сакаат само сладолед од јагода.

Значи, имаме $25 - 7 = 18$ деца што сакаат сладолед од ванила.

2. Определи го збирот на сите трицифрени броеви кои се запишани со цифрите 0, 5 и 9, и кај кои цифрите не се повторуваат.

Решение. Трицифрени броевите кои се запишани со цифрите 0, 5 и 9, и кај кои цифрите не се повторуваат се: 509, 590, 905 и 950, а нивниот збир е 2954.

3. Колку триаголници и колку правоаголници има на цртежот десно. Што има повеќе и за колку? Испиши ги сите триаголници и сите правоаголници.



Решение. На цртежот десно се дадени триаголниците:

$ABD, BDE, BCF, BEF, EFH, HFI,$
 $DEH, DHG, DFH, DBF, DBH, HBF,$

и четириаголниците:

$ABED, BCFE, EFIH, DEHG, ACFD, BCIH, DFIG, ABHG, ACIG.$

Значи, на цртежот има вкупно 12 триаголници и 9 правоаголници. Повеќе се триаголници, и тоа за $12 - 9 = 3$.

4. Два сидни часовника се наместени е навиеени на 21.5.2016 година во 10 часот наутро. Едниот часовник работи точно, а другиот оди побрзо 3 минути на секој час. На кој датум и во колку часот двата часовника ќе имаат иста положба на стрелките како во моментот кога се навиеени?

Решение. Часовниците ќе покажуваат исто време кога часовникот кој оди побрзо достигне предност од 12 часа. Бидејќи во 12 часа има $12 \cdot 60 = 720 \text{ min}$, за да другиот часовник достигне предност од 12 часа треба да поминат $720 : 3 = 240$ часа, што значи дека треба да поминат $240 : 24 = 10$ дена.

Бараниот датум е 31.5.2016 година во 10 часот наутро.

V одделение

1. Тројца браќа добиле на игра на среќа извесна сума пари. Првиот брат добил 126 денари, вториот брат 2 пати повеќе од него, а третиот брат колку првиот и вториот заедно. По колку денари добил секој од нив? Колку денари добиле сите заедно?

Решение. *Прв начин.* Првиот брат добил 126 денари. Вториот брат добил $2 \cdot 126 = 252$ денари. Третиот брат добил $126 + 252 = 378$ денари. Тројцата добиле вкупно $126 + 252 + 378 = 756$ денари.

Втор начин. Првиот брат добил еден дел, што изнесува 126 денари. Вториот брат добил два вакви дела, а третиот брат добил колку првиот и вториот заедно, значи три дела, а сите тројца шест дела. Првиот брат добил 126 денари. Вториот брат добил $2 \cdot 126 = 252$ денари. Третиот брат добил $3 \cdot 126 = 378$ денари. Тројцата добиле вкупно $6 \cdot 126 = 756$ денари.

2. Во 2017, Марија секој месец одела по 21 ден на училиште, освен во јуни, јули и август. Од парите кои ги добивала за ужинка секој ден и останувале по 17 денари и овие пари Марија ги штедела. Колку денари заштедела Марија таа година? Колку пари ќе заштедела Марија ако одела на училиште секој ден во текот на целата година?

Решение. Ако дневно штедела по 17 денари, и тоа 21 ден во текот на 9 месеци, Марија вкупно заштедела $21 \cdot 17 \cdot 9 = 1071$ денари. Ако одела секој ден на училиште, ќе заштедела $365 \cdot 17 = 6205$ денари.

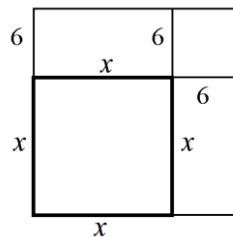
3. Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 2 и со 5 и чиј збир на цифри е еднаков на 9.

Решение. За да биде бројот делив со 2 и 5, тој треба да е делив со 10. Тоа значи дека крајната цифра (цифрата на единици) на трицифрениот број треба да биде 0. Останатите две цифри треба да имаат збир 9. Бараните броеви се: 180, 810, 270, 720, 360, 630, 540 и 450.

4. Ако страната на еден квадрат се зголеми за 6 cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 120 cm^2 . Определи ја страната на квадратот.

Решение. Нека должината на страната на квадратот е x . Со зголемување на страната за 6 cm , плоштината на квадратот се зголемува за плоштината на квадрат со страна 6 cm и плоштината на два правоаголници со страни 6 cm и x (цртеж десно). Според тоа,

$$\begin{aligned}6 \cdot 6 + 2 \cdot 6x &= 120 \\36 + 12x &= 120 \\12x &= 120 - 36 = 84 \\x &= 84 : 12 = 7\text{ cm}.\end{aligned}$$



VI одделение

1. Во својата овошна градина баба Рада собрала помалку од 100, а повеќе од 50 праски. Праските можела да ги подели еднакво на 2, на 3 или на 5 внуци, но не можела да ги подели на 4 внуци. Колку праски набрала баба Рада?

Решение. Бројот на праските треба да биде меѓу 50 и 100, да е деллив со 2, со 3 и со 5, но да не е делив со 4. За да биде деллив со 2, со 3 и со 5, тој треба да е нивни најмал заеднички содржател или тој број помножен со некој природен број. Бидејќи $\text{NZS}(2,3,5) = 30$, можни броеви се 30, 60, 90, 120, ... итн. Од овие броеви поголеми од 50, а помали од 100 се броевите 60 и 90. Понатаму, бидејќи 60 е делив со 4, а 90 не е делив со 4, заклучуваме дека бараниот број е 90.

2. Зоки планирал во текот на следните неколку дена, секој ден да решава по 15 задачи. Меѓутоа тој решавал секој ден по 3 задачи повеќе од планираното, така што за последните три дена му останало да решава

само по 4 задачи дневно. Колку денови решавал? Колку задачи планирал да реши Зоки?

Решение. Ако Зоки се држел до почетниот план, последните три дена требало да реши $3 \cdot 15 = 45$ задачи. Меѓутоа, последните три дена тој ги решил преостанатите $3 \cdot 4 = 12$ задачи. Според тоа, $45 - 12 = 33$ задачи решил во претходните денови. Бидејќи секој ден решавал по 3 задачи повеќе од планираното, тој овие задачи ги решил за $33 : 3 = 11$ дена. Значи вкупниот број на денови за решавање на задачите е $11 + 3 = 14$, а бројот на задачи кои планирал да ги реши е $14 \cdot 15 = 210$.

3. Пресметај ја плоштината на штрафираниот дел на геометриската фигура дадена на цртежот десно?

Решение. Правоаголникот во кој имаме штрафиран триаголник да го поделиме на два правоаголници како што е прикажано на долниот цртеж.

Од дадените должини заклучуваме дека горниот правоаголник е квадрат со должина на страна еднаква на 6 cm , а должините на страните на средниот правоаголник се еднакви на 7 cm и 2 cm .

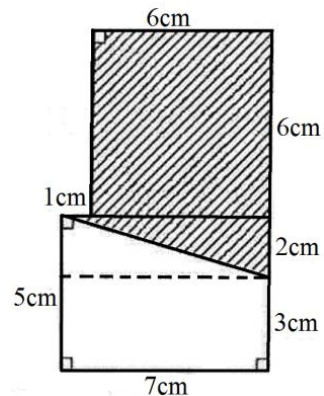
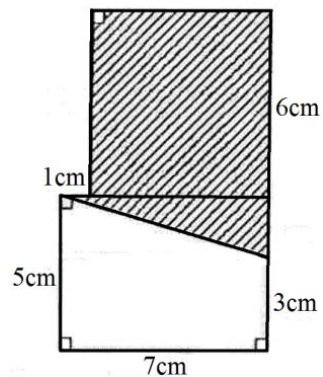
Штрафираниот дел од дадената геометриска фигура се состои од квадрат со должина на страна еднаква на 6 cm и плоштина $6 \cdot 6 = 36\text{ cm}^2$ и триаголник кој е половина од правоаголник со должини на страни 2 cm и 7 cm , па затоа плоштината на овој дел од фигурата е еднаква на

$$\frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 2) = 7\text{ cm}^2.$$

Според тоа, плоштината на штрафираниот дел од дадената геометриска фигура е еднаква на $36 + 7 = 43\text{ cm}^2$

4. Одреди го најмалиот четирицифрен број чиј производ на цифри е 756.

Решение. Дадениот број го разложуваме на прости множители $756 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Бидејќи бараме четирицифрен број, делителите на



756 ги групираме во четири групи, така што нивниот производ да е 756, т.е. 4, 9, 3, 7 или 2, 6, 9, 7. Најмалиот број од првата група е 3479 а од втората 2679. Бројот кој се бара е 2679 (да забележиме дека според условот на задачата не може да се добие број кој ќе почнува со 1 иако 1 е делител на секој број).

VII одделение

- Во едно пакување има 240 семиња. Сања ги посадила сите. 60% од нив изртеле, 75% од оние што изртеле се развиле во растенија. $\frac{1}{3}$ од растенијата имаат жолти цветови, а преостанатите имаат црвени цветови. Колку растенија имаат црвени цветови?

Решение. Според условот на задачата изртите $\frac{60}{100} \cdot 240 = 144$ семиња.

Понатаму, од изртените семиња во растенија се развиле $\frac{75}{100} \cdot 144 = 108$.

Значи, бројот на растенијате кои имаат жолти е $\frac{1}{3} \cdot 108 = 36$. Според тоа, растенија има $108 - 36 = 72$ со црвени цветови.

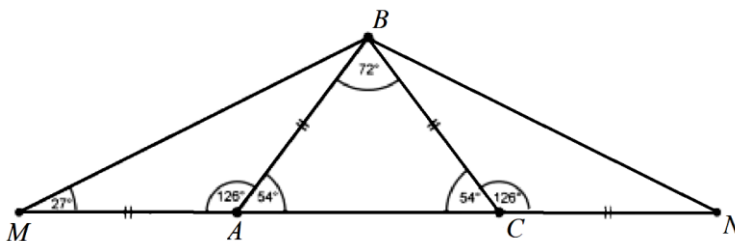
- Во рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{BC}$) аголот при врвот е еднаков на 72° . Основата AC е продолжена на двете страни до точки M и N такви што $\overline{MA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CN}$. Определи ги внатрешните агли на $\triangle MNB$.

Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак па затоа $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 54^\circ$ (види цртеж). Според тоа,

$$\sphericalangle MAB = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ \text{ и } \sphericalangle NCB = 126^\circ.$$

Значи, внатрешните агли на $\triangle MNB$ се

$$\sphericalangle M = \sphericalangle N = 27^\circ \text{ и } \sphericalangle MBN = 72^\circ + 54^\circ = 126^\circ.$$



3. Надворешните димензии на една дрвена кутија со капак се: должина 30 cm , ширина 25 cm и висина 2 dm . Дебелината на дрвото од кое е направена кутијата насекаде е 1 cm . Определи колку дрво е искористено за правење на кутијата.

Решение. Надворешниот волумен на целата кутија изнесува:

$$30 \cdot 25 \cdot 20 = 15000\text{ cm}^3.$$

Понатаму, дебелината на дрвото насекаде е 1 cm и кутијата има капак, па затоа должината, ширината и висината на внатрешноста на кутијата се по 2 cm помали од димензиите на кутијата. Според тоа, внатрешноста на кутијата има должина 28 cm , ширина од 23 cm и висина од 18 cm . Внатрешниот волумен на издлабениот дел изнесува:

$$28 \cdot 23 \cdot 18 = 11592\text{ cm}^3.$$

Значи, дрвото има волумен:

$$15000 - 11592 = 3408\text{ cm}^3.$$

4. Определи ги сите четирицифрени броеви \overline{abba} такви што

$$\overline{abba} \cdot 2 = \overline{ccdd}$$

каде a, b, c и d се различни цифри.

Решение. Очигледно $a < 5$, бидејќи за $a \geq 5$ бројот на десната страна на равенката ќе биде петцифрен број, што не е можно. Понатаму, левата страна на равенката е делива со 2, па затоа и десната страна е делива со 2, т.е. бројот \overline{ccdd} е парен. Значи, d може да биде 0, 2, 4, 6 или 8.

Ако $d = 0$, тогаш цифрата a може да биде 0 или 5, што не е можно бидејќи $a < 5$ и a, b, c и d се различни цифри.

Ако $d = 2$, тогаш цифрата a може да биде 1 или 6. Но, $a < 5$, па затоа $a = 1$. Ако $a = 1$, тогаш цифрата b може да биде 1 или 6. Но, a и b се различни цифри, па затоа $b = 6$. Сега за $b = 6$ добиваме $c = 3$. Бараниот четирицифрен број е $\overline{abba} = 1661$ и притоа $\overline{ccdd} = 3322$.

Ако $d = 4$, тогаш цифрата a може да биде 2 или 7. Но, $a < 5$, па затоа $a = 2$. Ако $a = 2$, тогаш цифрата b може да биде 2 или 7. Но, a и b се различни цифри, па затоа $b = 7$. Сега за $b = 7$ добиваме $c = 5$. Бараниот четирицифрен број е $\overline{abba} = 2772$ и притоа $\overline{ccdd} = 5544$.

Ако $d = 6$, тогаш цифрата a може да биде 3 или 8. Но, $a < 5$, па затоа $a = 3$. Ако $a = 3$, тогаш цифрата b може да биде 3 или 8. Но, a и b се

различни цифри, па затоа $b = 8$. Сега за $b = 8$ добиваме $c = 7$. Бараниот четирицифрен број е $\overline{abba} = 3883$ и притоа $\overline{ccdd} = 7766$.

Ако $d = 8$, тогаш цифрата a може да биде 4 или 9. Но, $a < 5$, па затоа $a = 4$. Ако $a = 4$, тогаш цифрата b може да биде 4 или 9. Но, a и b се различни цифри, па затоа $b = 9$. Сега за $b = 9$ добиваме $c = 9$, што не е можно, бидејќи a, b, c и d се различни цифри.

VIII одделение

1. Во еден базен од една цевка се влеваат $15\frac{1}{3} hl$, а од втора цевка се влева уште $18\frac{5}{6} hl$ вода на час. Истовремено од базенот од други две цевки истекуваат $13\frac{3}{4} hl$ и $16\frac{5}{8} hl$ вода на час. Колку литри вода ќе има во базенот по 2,4 часа?

Решение. За еден час во базенот се влеваат вкупно

$$15\frac{1}{3} + 18\frac{5}{6} = \frac{46}{3} + \frac{113}{6} = \frac{92+113}{6} = \frac{205}{6} hl \text{ вода,}$$

а истекуваат вкупно

$$13\frac{3}{4} + 16\frac{5}{8} = \frac{55}{4} + \frac{133}{8} = \frac{110+133}{8} = \frac{243}{8} hl \text{ вода.}$$

Значи, за еден час во базенот ќе има вкупно

$$\frac{205}{6} - \frac{243}{8} = \frac{205 \cdot 4 - 243 \cdot 3}{24} = \frac{820 - 729}{24} = \frac{91}{24} hl \text{ вода.}$$

Според тоа, за 2,4 часа во базенот ќе има вкупно

$$\frac{91}{24} \cdot 2,4 = \frac{91}{24} \cdot \frac{24}{10} = \frac{91}{10} = 9\frac{1}{10} hl \text{ вода.}$$

2. Марко при решавањето на равенката: $\frac{5x-3}{2} - \frac{3x-5}{4} = 5$ наместо коефициентот 3 пред x во втората дробка запишал некој друг број и на тој начин добил за 18 поголема вредност на непознатата x од нејзината вистинска вредност. Кој број го запишал Марко наместо коефициентот 3?

Решение. Решение на дадената равенка е $x = 3$. Со a да го означиме бројот кој Марко во втората дробка го запишал наместо коефициентот 3. Значи, Марко ја решавал равенката

$$\frac{5x-3}{2} - \frac{ax-5}{4} = 5$$

и добил решение кое е за 18 поголемо од вистинското решение, т.е. добил решение $18 + 3 = 21$. Според тоа, мора да важи

$$\frac{5 \cdot 21 - 3}{2} - \frac{21a - 5}{4} = 5.$$

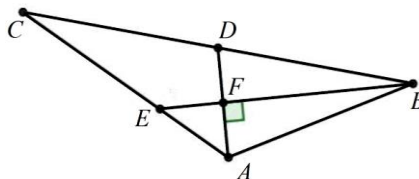
Решение на последната равенка е $a = 9$, што значи дека наместо коефициентот 3 Марко запишал коефициент 9.

3. Даден $\triangle ABC$ во кој тежишната линија AD и симетралата BE на $\sphericalangle ABC$ се заемно нормални. Пресметај ја должината на страната AB , ако $\overline{BC} = 12 \text{ cm}$.

Решение. Нека $\{F\} = AD \cap BE$. Бидејќи $FB \perp AD$ и FB е симетрала на $\sphericalangle ABC$ добиваме дека $\triangle ADB$ е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AB} = \overline{BD}$. Понатаму, бидејќи точката D е средина на отсечката BC важи

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm},$$

од каде наоѓаме $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$.



4. Определи ја 2018-тата цифра после запирката во децималниот запис на бројот $\frac{21}{37}$.

Решение. Со елементарна пресметка добиваме дека $\frac{21}{37} = 0,567$ (заградите значат периода). Понатаму, $2018 = 3 \cdot 672 + 2$, па затоа 2018-тата цифра после децималната запирка во записот на бројот $\frac{21}{37}$ е втората цифра од периодата, т.е. тоа е цифрата 6.

IX одделение

1. Колку петцифрени броеви постојат такви што првата цифра е парна, третата непарна, а последната прост број?

Решение. Првата цифра на броевите кои го задоволуваат условот на задачата е од множеството $\{2, 4, 6, 8\}$, втората е од множеството од $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, третата цифра е од множеството $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ четвртата цифра е од множеството $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и последната циф-

ра е од множеството $\{2, 3, 5, 7\}$. Значи, постојат $4 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 = 8000$ броеви со саканите својства.

2. Елена купила кујна што чинела 24000 денари. Таа платила 35% од вкупната цена. Остатокот требало да го плати на 24 еднакви месечни рати. Колку изнесува нејзината месечна рата?

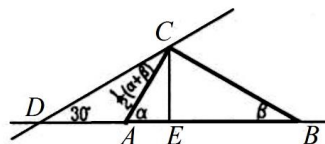
Решение. Остатокот што требало да го плати Елена изнесува 65% од 24000 денари, односно $\frac{65}{100} \cdot 24000 = 15360$ денари. Таа сума треба да се подели на 24 еднакви месечни рати, и добиваме $15360 : 24 = 640$ денари. Според тоа, месечната рата изнесува 640 денари.

3. Еден работник сам може да заврши некоја работа за 20 дена, а друг работник истата таа работа сам може да ја заврши за 30 дена. Ако на првиот и вториот работник им се придружи трет работник, тогаш сите тројца работата заедно може да ја завршат за 8 дена. За кое време третиот работник сам може да ја заврши работата?

Решение. Нека x е бројот на деновите за кои третиот работник сам може да ја заврши работата. Првиот работник за еден ден завршува $\frac{1}{20}$ од работата, вториот работник за еден ден завршува $\frac{1}{30}$ од работа и третиот работник за еден ден завршува $\frac{1}{x}$ од работата. Сите тројца за еден ден завршуваат $\frac{1}{8}$ од работата, па затоа $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$. Решението на последната равенка е $x = 24$, што значи дека третиот работник сам ќе ја заврши работата за 24 дена.

4. Во остроаголниот $\triangle ABC$ ($\overline{BC} > \overline{AC}$) е дадена висината CE . Симетралата на надворешниот агол во темето C ја сече правата AB во точката D , така што $\overline{CD} = 2\overline{CE}$. Докажи дека $\alpha - \beta = 60^\circ$, каде α, β се аглиите во темињата A, B , соодветно.

Решение. Бидејќи $\overline{CD} = 2\overline{CE}$ и $\triangle CDE$ е правоаголен добиваме дека тој е половина од рамностран триаголник, па затоа $\angle CDE = 30^\circ$. Понатаму, надворешниот агол во темето C е еднаков



на $\alpha + \beta$, па затоа $\angle DCA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Јасно, $\angle BAC = \alpha$ како надворешен за $\triangle DAC$ е еднаков на збирот на аглиите $\angle ADC = 30^\circ$ и $\angle DCA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, односно $\alpha = 30^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Конечно, од последното равенство добиваме дека $\alpha - \beta = 60^\circ$.