XVI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Најди ги сите двоцифрени и трицифрени броеви a, такви што помножени со 7 даваат куб на природен број.

2. Една продавница треба да добие 1100 бонбониери. Во складиштето за снабдување има доволно пакети од по 70, 40 и 25 бонбониери. Цените на превозот за еден пакет се соодветно 20, 10 и 7 денари. Од кои пакети и во колкава количина треба продавницата да порача за трошоците на превозот да бидат најмали?

3. Даден е полиномот $P(x)=2x^4+x^3+4x^2+x+2$.

а) Разложи го полиномот $P(x)$ на производ од два полинома од втор степен.

б) Докажи дека полиномот $P(x)$ е делив со 2 за секој природен број x.

4. Околу рамностраниот триаголник ABC опишана е кружница. На кружниот лак AB избрана е произволна точка M. Докажи дека $\overline{MC}=\overline{MA}+\overline{MB}$.

5. Две кружници $k_1(S_1,r)$ и $k_2(S_2,r)$ се сечат во точките A и B и притоа $S_2\in k_1$. Низ точката A повлечена е права p, која кружниците k_1 и k_2 ги сече во точките C и D. Докажи дека триаголникот BDC е рамностран.

XVI (91.VII.1)

Од условот $7a=b^3$ следува дека b е делив со 7, т.е. $b=7k$. Тогаш:

$$7a=(7k)^3,\ a=49k^3.$$

1) Ако $k=1$, тогаш $a=49$.
2) Ако $k=2$, тогаш $a=392$.
3) Ако $k=3$, тогаш $a=1323$ (четирицифрен број).

Следствено, бараните броеви се 49 и 392.

XVI (91.VII.2)

Цената на превозот на една бонбониера од првиот вид пакети, со 70 бонбониери, е $\frac{20}{70}$, односно $\frac{2}{7}$ денари, од вториот вид пакети е $\frac{1}{4}$ денари, а од третиот е $\frac{7}{25}$ денари. Бидејќи $\frac{1}{4}<\frac{7}{25}<\frac{2}{7}$, следува дека најевтин е превозот на бонбониерите од вториот вид пакети. Но, $1100 = 40\cdot27 + 20$. Тоа значи дека ако се земат 27 пакети од по 40 бонбониери, ќе недостасуваат 20 бонбониери, а пакети од по 20 бонбониери нема. Понатаму од:

$$\begin{aligned}1100 &= 40\cdot26 + 60\\ &= 40\cdot25 + 100\\ &= 40\cdot25 + 25\cdot4,\end{aligned}$$

заклучуваме дека треба да се порачаат 25 пакети од по 40 бонбониери и 4 пакети од по 25 бонбониери. (Во тој случај цената е најмала и изнесува $25\cdot10 + 4\cdot7 = 278$ денари.)

XVI (91.VII.3)

а)
$$\begin{aligned}P(x)&=2x^4+x^3+4x^2+x+2=(2x^4+4x^2+2)+x^3+x=\\ &=2(x^4+2x^2+1)+x(x^2+1)=2(x^2+1)^2+x(x^2+1)=\\ &=(x^2+1)[2(x^2+1)+x]=(x^2+1)(2x^2+x+2).\end{aligned}$$

б) Го запишуваме полиномот во видот $P(x)=2(x^2+1)^2+x(x^2+1)$. Очигледно, првиот собирок е делив со 2 за секој $x\in\mathbb{N}$. За $P(x)$ да биде делив со 2, треба да покажеме дека и вториот собирок, изразот $x(x^2+1)$, е делив со 2. Броевите x и x^2+1 се со различна парност, т.е. еден од нив е секогаш парен, па нивниот производ е сигурно делив со 2 за секој $x\in\mathbb{N}$. Следствено и полиномот $P(x)$ е делив со 2 за секој $x\in\mathbb{N}$.

XVI (91.VII.4)

Нека M е произволна точка на лакот AB од опишаната кружница околу триаголникот ABC. Треба да покажеме дека:

(*) $$\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{MC}.$$

За таа цел, на отсечката MC избираме точка D таква што:

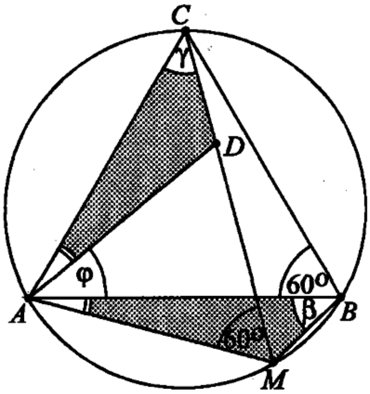
(1) $$\overline{MD}=\overline{MA}.$$

Тогаш триаголникот AMD е рамностран, бидејќи $\measuredangle AMD=\measuredangle ABC=60°$, како периферни агли на ист кружен лак AC (црт. 1). Треба уште да докажеме дека:

(2) $$\overline{MB}=\overline{DC}$$

па имајќи го предвид равенството (1) ќе следува и точноста на равенството (*).

За да ја докажеме точноста на равенството (2), ќе докажеме дека $\Delta BMA\cong\Delta CDA$.



Црт. 1

1^0 $\overline{BA}=\overline{CA}$, како страни на рамностран триаголник.

2^0 $\beta=\gamma$, како периферни агли над ист кружен лак AM.

3^0 $$\left.\begin{aligned}\measuredangle CAD=\measuredangle CAB-\measuredangle DAB=60°-\varphi\\ \measuredangle BAM=\measuredangle DAM-\measuredangle DAB=60°-\varphi\end{aligned}\right\}\Rightarrow \measuredangle CAD=\measuredangle BAM.$$

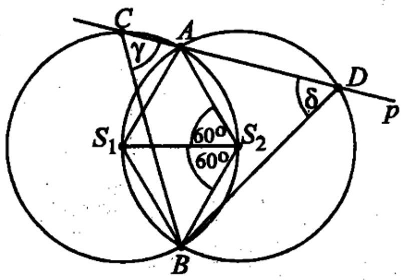
Следствено, $\Delta\ BMA\cong\Delta\ CDA$ по признакот АСА. Оттука следува точноста на равенството (2), па имајќи го предвид равенството (1) добиваме:

$$\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{MD}+\overline{DC}=\overline{MC}.$$

Со тоа равенството (*) е докажано.

XVI (91.VII.5)

Нека кружниците $k_1(S_1, r)$ и $k_2(S_2, r)$ се сечат во точките A и B и нека правата p што минува низ точката A ги сече кружниците во точките C и D (црт. 2). За да докажеме дека $\Delta\, BCD$ е рамностран, доволно е да докажеме дека тој има два агла од по $60°$. (Зошто?)



Црт.2

Очигледно, триаголниците S_1S_2A и S_1S_2B се рамнострани, бидејќи $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1A} = \overline{S_1B} = \overline{S_2A} = \overline{S_2B} = r$. Значи, $\measuredangle AS_1B = \measuredangle AS_2B = 120°$, а нивните соодветни периферни агли се $\gamma = \delta = 60°$.

Следствено, во $\Delta\, BCD$ два агла γ и δ се еднакви на $60°$, од што следува дека тој триаголник е рамностран.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Докажи дека збирот $1^{1991}+2^{1991}+3^{1991}+4^{1991}$ е делив со 10.

2. Докажи дека во круг со дијаметар 18 *cm* не можат да се сместат 400 точки, такви што растојанието помеѓу кои било две од нив да биде поголемо од 1 *cm*.

3. Еден патник тргнал од местото *A* кон железничката станица. За првиот час тој поминал 3,5 *km* и пресметал дека ако се движи со истата брзина ќе задоцни 1 час. Затоа почнал да се движи со брзина од 5 *km* на час и пристигнал 30 минути пред тргнувањето на возот. Пресметај го растојанието од местото *A* до железничката станица.

4. Во рамнокрак триаголник *ABC*, со крак $\overline{AC}=\overline{BC}=12\,cm$, повлечена е висината *CD* на основата *AB*. Низ средината *S* на висината повлечена е права *p* - паралелна со еден од краците, која ги сече другите две страни во точките *M* и *N*. Пресметај ја должината на отсечката *MN*.

5. На страната *AC* на триаголникот *ABC* избрана е точка *S*, а на страната *BC* точка *P*, такви што $\overline{AS}:\overline{SC}=1:3$ и $\overline{BP}:\overline{PC}=1:4$. Одреди го односот $\overline{ST}:\overline{TB}$, ако *T* е пресечна точка на отсечките *AP* и *BS*.

XVI (91.VIII.1)

За да докажеме дека дадениот збир е делив со 10, доволно е да докажеме дека тој збир завршува на 0. За таа цел е потребно да ја одредиме последната цифра на секој од степените 1^{1991}, 2^{1991}, 3^{1991} и 4^{1991}.

Очигледно $1^{1991}=1$. Бидејќи $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64, \dots$ заклучуваме дека степените на бројот 2 завршуваат на една од цифрите: 2, 4, 8 или 6 и по тој ред се повторуваат, во зависност од тоа дали показателот при делење со 4 дава остаток 1, 2, 3 или е делив со 4. Бидејќи 1991 = 4·497 + 3, т.е. при делење со 4 дава остаток 3, степенот 2^{1991} ќе завршува на 8.

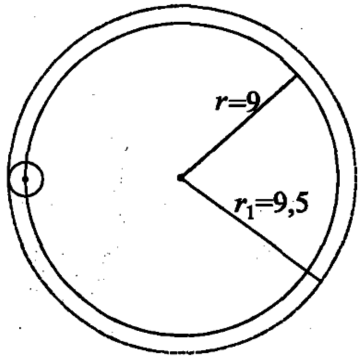
Бидејќи $3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ 3^6=729, \dots$ заклучуваме дека степените на бројот 3 завршуваат на 3, 9, 7 или 1, во зависност од тоа дали показателот при делење со 4 дава остаток 1, 2, 3 или е делив со 4. Но, 1991 = 4·497+3, па следува дека степенот 3^{1991} ќе завршува на 7.

Од $4^1=4,\ 4^2=16,\ 4^3=64,\ 4^4=256, \dots$ заклучуваме дека степените на бројот 4 завршуваат на 4 или на 6, во зависност од тоа дали показателот е непарен или парен број. Значи, 4^{1991} ќе завршува на 4.

Следствено, збирот $1^{1991}+2^{1991}+3^{1991}+4^{1991}$ ќе завршува на 1+8+7+4, т.е. на 0, од каде што следи дека тој збир е делив со 10.

XVI (91.VIII.2)

Нека секоја од точките биде центар на круг со радиус $0{,}5\ cm$. Бидејќи, по услов, растојанието помеѓу кои било од нив е поголемо од $1\ cm$, ќе следува дека кои било два круга немаат заедничка област. Но, точки можеме да распоредиме и на самата кружница (црт. 3). Да ја споредиме плоштината на кругот со радиус $9{,}5\ cm$ со збирот на плоштините на сите 400 кругови со радиус $0{,}5\ cm$. Имаме:



Црт. 3

$$P_1 = 9{,}5^2\pi = 90{,}25\pi$$
$$P_2 = 400\cdot 0{,}5^2\pi = 100\pi$$

Бидејќи $P_2 > P_1$, следува дека во круг со радиус $9\ cm$ не можат да се распоредат 400 точки, такви што растојанието помеѓу кои било две од нив да е поголемо од $1\ cm$.

XVI (91.VIII.3)

Прв начин Нека x е должината на преостанатиот пат. Ако патникот се движи со брзина од 3,5 *km/h* тој ќе задоцни 1 час, т.е. потребното време во тој случај е $\frac{x}{3,5}-1$ часови. Ако, пак, патникот се движи со брзина од 5 *km/h*, тогаш тој стигнува половина час порано, па времето во овој случај е $\frac{x}{5}+\frac{1}{2}$ часови. Според тоа, ја имаме равенката $\frac{x}{3,5}-1=\frac{x}{5}+\frac{1}{2}$, од каде што добиваме:

$$\begin{aligned}20x-70&=14x+35\\20x-14x&=70+35\\6x&=105\\x&=17,5\,.\end{aligned}$$

Следствено, растојанието од местото A до железничката станица е: 3,5 *km* + 17,5 *km* = 21 *km*.

Втор начин. Нека t е времето од поаѓањето на патникот до тргнувањето на возот. Ако патникот се движел со брзина од 3,5 *km/h*, ќе му треба време од (t+1) часови, па изминатиот пат $S=3,5(t+1)$. Но, патникот 1 час се движел со брзина од 3,5 *km/h*, а $t-1-\frac{1}{2}$ часови со брзина од 5 *km/h*, т.е. изминал пат $S=3,5+5(t-1,5)$. Од равенката:

$$3,5(t+1)=3,5+5(t-1,5)$$

добиваме дека $t=5$ часа. Тогаш за патот S наоѓаме:

$$S=3,5(t+1)=3,5\cdot 6=21,$$

т.е. растојанието од местото A до железничката станица е 21 *km*.

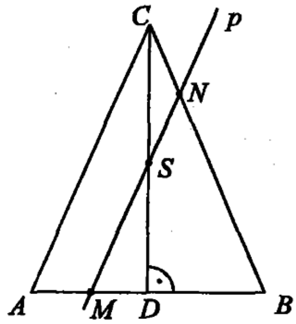
Трет начин. Нека t е времето по изминатите 3,5 *km*, тогаш од условот $3,5(t+1)=5(t-0,5)$ добиваме $t=4$, а потоа $S=3,5+3,5(t+1)=21$.

Значи, растојанието од местото A до железничката станица е 21 *km*.

XVI (91.VIII.4)

Нека ΔABC е рамнокрак со крак $\overline{AC}=\overline{BC}=12\ cm$ и нека правата p, што минува низ средината S на висината CD и е паралелна со кракот AC, ја сече основата AB во точката M, а кракот BC во точката N (црт. 4). Треба да ја одредиме должината на отсечката MN.

Отсечката MS е средна линија во триаголникот ADC, бидејќи S е средина на страната CD и $MS \| CD$. Оттука следува дека M е средина на страната AD, т.е. $\overline{AM}=\overline{MD}$. Но, $\overline{AD}=\overline{DB}$, па следува дека $\overline{AM}=\frac{1}{4}\overline{AB}$, а $\overline{MB}=\frac{3}{4}\overline{AB}$, т.е.



Црт. 4

(1) $$\overline{MB}:\overline{AB}=3:4.$$

Очигледно, триаголниците MBN и ABC се слични ($\measuredangle B$ е заеднички, а $\measuredangle M=\measuredangle A$ како агли со паралелни краци). Од сличноста на овие триаголници следува пропорцијата:

$$\overline{MN}:\overline{AC}=\overline{MB}:\overline{AB}$$

Имајќи го предвид равенството (1) и условот $\overline{AC}=12$ добиваме:

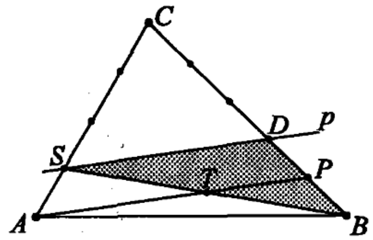
$$\overline{MN}:12=3:4$$

$$\overline{MN}=\frac{3\cdot 12}{4}=9$$

Значи, должината на отсечката MN е 9 cm.

XVI (91.VIII.5)

Нека точките S и P се такви што $\overline{AS}:\overline{SC}=1:3$ и $\overline{BP}:\overline{PC}=1:4$ (црт. 5). Треба да го одредиме односот $\overline{ST}:\overline{TB}$. За таа цел низ S повлекуваме права $p\|AP$. Нека со D го означиме пресекот на правата p и отсечката BC. Тогаш, според Талесовата теорема, имаме:



Црт. 5

$$\overline{AS}:\overline{AC}=\overline{PD}:\overline{PC}$$

$$1:4=\overline{PD}:\overline{PC}$$

$$\overline{PD}=\frac{1}{4}\overline{PC}.\ \text{Но}\ \overline{PC}=\frac{4}{5}\overline{BC},$$

па добиваме

$$\overline{PD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\overline{BC}=\frac{1}{5}\overline{BC}.$$

По услов $\overline{BP}=\frac{1}{5}\overline{BC}$, па следува дека $\overline{BP}=\overline{PD}$, т.е. точката P е средина на отсечката BD. Бидејќи $TP\|SD$, следува дека отсечката TP е средна линија во ΔBDS, односно точката T е средина на отсечката BS. Следствено:

$$\overline{ST}:\overline{TB}=1:1.$$

Забелешка. Задачата може на сличен начин да се реши ако низ темето B се повлече права $p\|AP$ и нејзиниот пресек со правата AC се означи со D. Во тој случај треба да се докаже дека AT е средна линија на триаголникот DBS. Направи цртеж и спроведи го доказот сам.