

Виктор Јанекоски, Скопје

ЕДЕН ДИРЕКТЕН ДОКАЗ НА ШТАЈНЕРОВАТА ТЕОРЕМА ЗА РАМНОКРАК ТРИАГОЛНИК

Во литературата постојат повеќе планиметриски, воглавно индиректни докази на Штајнеровата теорема: *Ако симетралите на двата агли на триаголникот се еднакви, тогаш триаголникот е рамнокрак.* Овде ќе биде изложен еден директен доказ на горната теорема.

Нека е

$$\vec{AB} = \vec{c}, \vec{BC} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b},$$

каде

$$AB = c, BC = a, CA = b$$

при што (црт. 1)

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0. \tag{1}$$

Треба да се покаже дека од еднаквоста на симетралата AD на внатрешниот агол A со симетралата BE на внатрешниот агол B на дадениот триаголник ABC

$$AD = BE \tag{2}$$

следува дека $a = b$.

Симетралите на внатрешните агли A и B се одредени со векторите:

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \lambda'(\vec{c}_0 - \vec{b}_0) = \lambda(\vec{bc} - \vec{cb}) & (\lambda = \lambda'/bc), \\ \vec{BE} &= \mu'(\vec{a}_0 - \vec{c}_0) = \mu(\vec{ca} - \vec{ac}) & (\mu = \mu'/ca), \end{aligned} \tag{3}$$

при што засега λ, μ се неопределени скалари, а $\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{c}_0$ се единечни вектори во насока со дадените вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ соодветно. Од друга страна

$$\vec{AD} = \vec{c} + m\vec{a}, \quad \vec{BE} = \vec{a} + n\vec{b} \tag{4}$$

при што m, n се исто така неопределени скалари засега.

Со изедначување на изразите (3) и (4) кои го одредуваат векторот \vec{AD} , од релацијата (1), добиваме

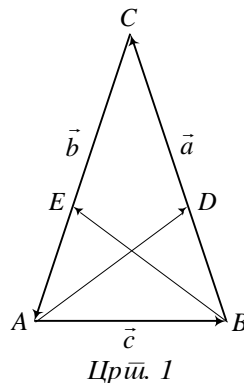
$$(\lambda c - m)\vec{b} + (1 - m - \lambda b)\vec{c} = 0$$

од каде заради нелинеарната зависност на векторите \vec{b} и \vec{c} , добиваме

$$\lambda = \frac{1}{b+c}, \quad m = \frac{c}{b+c}. \tag{5}$$

Со вредноста на λ од (5) и од (3) имаме,

$$\vec{AD} = \frac{bc - c\vec{b}}{b+c} \tag{6}$$



од каде што со циклична замена $\vec{b} \rightarrow \vec{c} \rightarrow \vec{a}$, $b \rightarrow c \rightarrow a$ добиваме

$$\overrightarrow{BE} = \frac{c\vec{a} + a\vec{c}}{c+a}. \quad (7)$$

Бидејќи според (1),

$$2\vec{b} \cdot \vec{c} = a^2 - (b^2 + c^2), \quad 2\vec{c} \cdot \vec{a} = b^2 - (c^2 + a^2),$$

за квадратите на интензитетите на векторите дадени со (6) и (7) добиваме:

$$AD^2 = bc \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}, \quad (8)$$

$$BE^2 = ca \frac{(c+a+b)(c+a-b)}{(c+a)^2}. \quad (9)$$

Сега условот (2), со помош на изразите (8) и (9) гласи

$$b(c+a)^2(b+c) - ab(c+a)^2 = a(b+c)^2(c+a) - ab(b+c)^2$$

што напишано како

$$ab[a(b+c)^2 - (c+a)^2] + (b+c)(c+a)[b(c+a) - a(b+c)] = 0,$$

или

$$ab(a+b+2c)(b-a) + (b+c)(c+a)(b-a)c = 0,$$

конечно добиваме

$$(b-a)[ab(a+b+2c) + c(b+c)(c+a)] = 0. \quad (10)$$

Бидејќи сите изрази во средната заграда од релацијата (10), добиваме дека $b-a=0$, што и требаше да се докаже.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ