XX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Најди четирицифрен број кој помножен со 9 дава четирицифрен број запишан со истите цифри, но во обратен ред.

2. Легура од бакар и цинк, со тежина 24 N, при потопување во вода е полесна за $2\frac{8}{9}$ N. Одреди колку бакар и колку цинк има во легурата, ако е познато дека бакарот потопен во вода е полесен за $11\frac{1}{9}$ % од својата тежина, а цинкот потопен во вода е полесен за $14\frac{2}{7}$ % од својата тежина.

3. Двајца мотоциклисти истовремено тргнале од Скопје за Неготино. Првиот мотоциклист, половината од патот се движел со брзина од 40 km/h, а втората половина од патот со брзина од 60 km/h. Вториот мотоциклист половината од времето се движел со брзина од 40 km/h, а втората половина од времето со брзина од 60 km/h. Кој мотоциклист пристигнал прв во Неготино? Образложи го одговорот!

4. Низ темињата B и C на триаголникот ABC повлечени се симетралите на надворешните агли. Од темето A повлечени се нормали на овие симетрали кои ги сечат симетралите во точките M и N. Докажи дека должината на отсечката MN е еднаква на половина од периметарот на триаголникот ABC.

5. На правата AB што не припаѓа на страната AB на рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$) избрана е произволна точка M. Докажи дека разликата на растојанијата од точката M до краците на триаголникот ABC е еднаква на висината на кракот на тој триаголник.

XX (95.VII.1)

Нека $\overline{abcd}$ е бараниот четирицифрен број, тогаш

(*) $$\overline{abcd}\cdot 9 = dcba$$

Бидејќи $1100\cdot 9 = 9900$, а $1200\cdot 9 = 10800$, заклучуваме дека $\overline{abcd} < 1200$, т.е. $\overline{ab} < 12$. Значи: $a=1$, $b<2$, па имаме:

$$\overline{1bcd}\cdot 9 = \overline{dcb1}.$$

Оттука: $d=9$, па условот (*) го добива видот:

$$\overline{1bc9}\cdot 9 = \overline{9cb1}.$$

Бројот $\overline{9cb1}$ е делив со 9, следствено $b+c=8$ или $b+c=17$. Но $b<2$, т.е. $b=0$ или $b=1$, па следува дека $b+c=8$, т.е.

$$b=0,\quad c=8 \qquad \text{или} \qquad b=1,\quad c=7.$$

Со проверка заклучуваме дека само за $b=0$, $c=8$ е исполнет условот (*). Значи, бараниот четирицифрен број е 1089.

XX (95.VII.2)

Ако со xја означиме тежината на цинкот во легурата, тогаш тежината на бакарот ќе биде $24-x$. Бидејќи:

$$11\frac{1}{9}\% = \frac{100}{9}\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{9},\quad 14\frac{2}{7}\% = \frac{1}{7}$$

следува дека бакарот потопен во вода е полесен за $\frac{1}{9}$ од својата тежина, а цинкот за $\frac{1}{7}$ од својата тежина, па имаме:

$$\frac{1}{7}x+\frac{1}{9}(24-x)=2\frac{8}{9}$$

$$\frac{1}{7}x+\frac{24}{9}-\frac{1}{9}x=\frac{26}{9}$$

$$\frac{1}{7}x-\frac{1}{9}x=\frac{26}{9}-\frac{24}{9}$$

$$(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})x=\frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{63}x=\frac{2}{9},\qquad x=7;\qquad 24-x=17$$

Следствено, во легурата имало $17N$ бакар и $7N$ цинк.

XX (95.VII.3)

Прв начин. Прв ќе пристигне мотоциклистот чија средна брзина е поголема. Очигледно, средната брзина на вториот мотоциклист е:

$$y=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{40+60}{2}=50,\qquad y=50km/h.$$

Да ја одредиме сега и средната брзина x на првиот мотоциклист. Ако со $2S$ го означиме патот од Скопје до Неготино, тогаш: првата половина S од патот е измината со брзина од 40 *km/h* за време t_1, втората половина S е измината со брзина од 60 *km/h* за време t_2, а целиот пат $2S$ е изминат со брзина x за време t_1+t_2. Значи имаме:

$$t_1+t_2=t$$
$$\frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_2}=\frac{2S}{x}$$
$$\frac{1}{40}+\frac{1}{60}=\frac{2}{x}$$
$$\frac{3+2}{120}=\frac{2}{x}$$
$$\frac{1}{24}=\frac{2}{x},\qquad x=48km/h.$$

Значи, прв во Неготино ќе пристигне вториот мотоциклист.

Втор начин. Задачата можеме да ја решиме и со споредување на времињата, т.е. прв ќе пристигне оној мотоциклист чие време на движење е помало.

Нека вториот мотоциклист го изминал патот од Скопје до Неготино за време $t_2=2x$ часови. Тогаш растојанието S од Скопје до Неготино е $(S=v\cdot t)$

$$S=40x+60x=100x,$$

а половина од патот е $50x$.

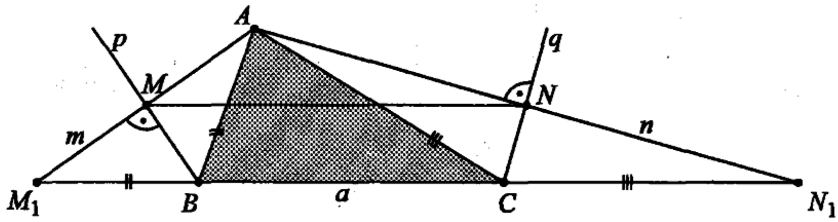
Првиот мотоциклист растојанието $\frac{S}{2}=50x$ го минува со брзина од 40 *km/h*, а втората половина од патот - со брзина од 60 *km/h*, па за времето t_1 добиваме:

$$t_1=\frac{50x}{40}+\frac{50x}{60}=\frac{150x+100x}{120}=\frac{250x}{120}=2\frac{1}{12}x.$$

Бидејќи $t_2=2x$, а $t_1=2\frac{1}{12}x$, следува $t_2<t_1$, т.е. прв во Неготино ќе пристигне вториот мотоциклист и тоа за 5 минути порано од првиот.

XX (95.VII.4)

Нека p и q се симетралите на надворешните агли во темињата B и C на ΔABC, m и n нормали повлечени од темето A на тие симетрали, а M и N пресеците на p и m, односно q и n (црт. 1). Треба да докажеме дека: $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$.



Црт. 1

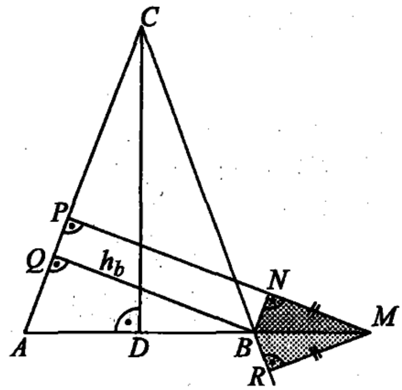
Нека со M_1 и N_1 ги означиме пресеците на правите m и n со правата BC, тогаш триаголникот AM_1B е рамнокрак, бидејќи симетралата на аголот низ неговиот врв B е нормална на основата AM_1. Значи M е средина на отсечката AM_1 и $\overline{AB}=\overline{M_1B}$. На сличен начин заклучуваме дека ΔAN_1C е рамнокрак, т.е. дека N е средина на отсечката AN_1 и $\overline{CA}=\overline{CN_1}$.

Следствено, MN е средна линија на ΔM_1N_1A, па имаме:

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{M_1N_1}=\frac{1}{2}(\overline{M_1B}+\overline{BC}+\overline{CN_1})=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$

Со тоа доказот е завршен.

Забелешка. За оние што сакаат да истражуваат и до целта да стигнат и по друг пат, им предлагаме поинаква идеја за решавање на оваа задача. Најдете $B_1=S_M(B)$ и $C_1=S_N(C)$ и докажете дека четириаголникот BCC_1B_1 е трапез со средна линија MN.



Црт. 2

XX (95.VII.5)

Нека MP и MR се нормали на краците на рамнокракиот ΔABC, а $BQ = h_b$ е висина на кракот (црт.2).

Треба да докажеме дека:

$$\overline{MP} - \overline{MR} = h_b$$

Прв начин. За таа цел повлекуваме $BN \perp PM$, тогаш четириаголникот $BNPQ$ е правоаголник (има три прави агли). Ќе покажеме дека:

$$\Delta BMN \cong \Delta BMR \,.$$

Тоа се два правоаголни триаголника со заедничка хипотенуза BM, па според тоа доволно е да докажеме дека $\measuredangle BMN = \measuredangle BMR$. Имаме:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle BMN = \measuredangle ACD = \dfrac{\gamma}{2} \\ \measuredangle BMR = \measuredangle BCD = \dfrac{\gamma}{2} \end{array}\right. \text{ (како агли со заемно нормални краци),}$$

а оттука следува дека $\measuredangle BMN = \measuredangle BMR$.

Од складноста на овие триаголници следува дека $\overline{MN} = \overline{MR}$. Конечно добиваме:

$$\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$$
$$\overline{MP} = \overline{MR} + \overline{BQ}$$
$$\overline{MP} - \overline{MR} = h_b$$

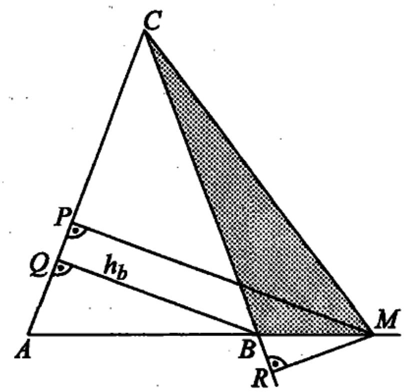
Втор начин. Ја поврзуваме точката M со темето C и го добиваме триаголникот AMC. Имаме:

$$P_{ABC} = P_{AMC} - P_{BMC}$$
$$\frac{\overline{AC} \cdot h_b}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{MP}}{2} - \frac{\overline{BC} \cdot \overline{MR}}{2}$$

Имајќи предвид дека $\overline{AC} = \overline{BC}$, добиваме:

$$h_b = \overline{MP} - \overline{MR} \,.$$

Забелешка. Обиди се, на сличен начин, да докажеш дека $h_b = \overline{MP} + \overline{MR}$, ако M е произволна точка од отсечката AB.



Црт. 3

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Докажи дека збирот $2+2^2+2^3+\ldots+2^{1995}$ е делив со 7.

2. Од Скопје за Неготино тргнал автобус и за да стигне навреме се движел со брзина од 45 *km/h*. Кога изминал 40% од патот, се задржал 12 минути. Останатиот дел од патот го изминал со брзина од 60 *km/h* и во Неготино пристигнал пет минути порано од предвиденото време. Одреди го растојанието од Скопје до Неготино.

3. Во еден рамнокрак трапез дијагоналата е два пати поголема од средната линија. Пресметај ја плоштината на трапезот, ако должината на средната линија е s.

4. Дијагоналите на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката E и притоа $\overline{AB}=\overline{BC}$. Пресметај ја должината на дијагоналата BD, ако $\overline{AB}=6\ cm$ и $\overline{BE}=4\ cm$.

5. Во триаголник ABC избрана е произволна точка M. Нека d_1, d_2 и d_3 се растојанијата од точката M до страните a, b и c, соодветно, а h_a, h_b и h_c висини на триаголникот на тие страни. Докажи дека

$$\frac{d_1}{h_a}+\frac{d_2}{h_b}+\frac{d_3}{h_c}=1$$

XX (95.VIII.1)

Од
$$2+2^2+2^3=2(1+2+2^2)=2\cdot 7,$$
$$2^4+2^5+2^6=2^4(1+2+2^2)=2^4\cdot 7$$

воочуваме дека збирот на три последователни степени на бројот 2 е делив со 7. Бидејќи бројот 1995 е делив со 3, за збирот $S=2+2^2+...+2^{1995}$ добиваме:

$$\begin{aligned}S&=(2+2^2+2^3)+(2^4+2^5+2^6)+...+(2^{1993}+2^{1994}+2^{1995})\\&=2(1+2+2^2)+2^4(1+2+2^2)+...+2^{1993}(1+2+2^2)\\&=7(2+2^4+2^7+...+2^{1993}),\end{aligned}$$

од каде што следува дека $7|S$.

Забелешка. Можеш ли да докажеш дека збирот S е делив со 31?

XX (95.VIII.2)

Прв начин. Нека со t го означиме времето за коешто автобусот требало да го измине патот S од Скопје до Неготино, со брзина од 45 *km/h*. Ако со t_1 го означиме времето за кое автобусот се движел со брзина од 45 *km/h* и изминал 40% од патот, т.е. изминал само $\frac{2}{5}$ од S, а со t_2 го означиме времето за кое автобусот ги изминал останатите $\frac{3}{5}$ од патот S со брзина од 60 *km/h*, тогаш, имајќи предвид дека се задржал 12 минути на патот и дека стигнал 5 минути порано од предвиденото време t, добиваме:

$$t = t_1 + t_2 + \frac{12}{60} + \frac{5}{60}$$

$$\frac{S}{45} = \frac{2S}{225} + \frac{S}{100} + \frac{12}{60} + \frac{5}{60} \,/\, 900$$

$$20S = 8S + 9S + 180 + 75$$

$$3S = 255, \qquad S = 85$$

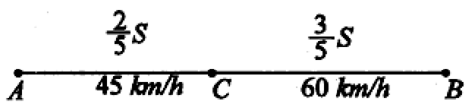
Значи, растојанието од Скопје до Неготино е 85 *km*.

Втор начин. Нека со t го означиме предвиденото време за коешто автобусот требало да стигне од Скопје до Неготино, тогаш имајќи ги предвид условите на задачата, равенствата $40\% = \frac{2}{5}$ и $60\% = \frac{3}{5}$ и цртежот 4, добиваме:

$$\overline{AB} = 45t$$

$$\overline{AC} = 45 \cdot \frac{2}{5} t$$

$$\overline{CB} = 60\left(\frac{3}{5}t - \frac{17}{60}\right)$$



Црт. 4

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

$$45 \cdot \frac{2}{3} t + 60\left(\frac{3}{5}t - \frac{17}{60}\right) = 45t$$

$$18t + 36t - 17 = 45t$$

$$9t = 17, \quad t = \frac{17}{9}$$

$$\overline{AB} = 45 \cdot \frac{17}{9} = 85$$

Значи, растојанието од Скопје до Неготино е 85 *km*.

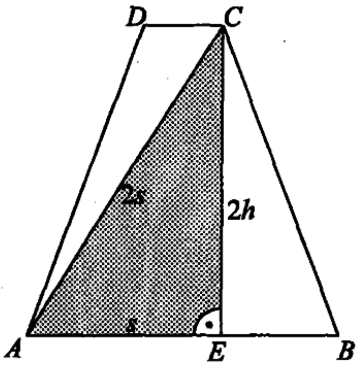
XX (95.VIII.3)

Прв начин. Нека должината на средната линија во рамнокракиот трапез $ABCD$ е s, тогаш неговата дијагонала е $2s$ (црт. 5). Треба да ја изразиме плоштината на трапезот во зависност од s.

Бидејќи $P = m \cdot h$, треба прво да ја одредиме висината h на трапезот. Неа ја одредуваме од правоаголниот триаголник AEC, за чија катета $\overline{AE}$ наоѓаме:

$$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE} = \overline{AB} - \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = s$$



Црт. 5

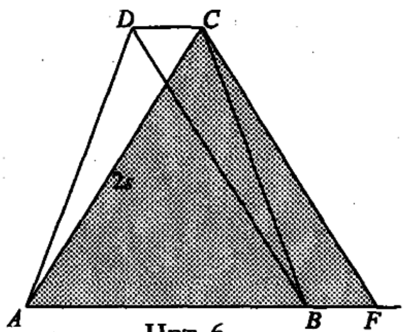
Тогаш: $h^2 = (2s)^2 - s^2 = 3s^2$, $h = s\sqrt{3}$, па за плоштината добиваме:

$$P = m \cdot h = s \cdot s\sqrt{3} = s^2\sqrt{3}.$$

Втор начин. Повлекуваме $CF \| BD$ и го добиваме триаголникот AFC, чија плоштина е еднаква на плоштината на рамнокракиот трапез $ABCD$ (црт. 6). Овој триаголник е рамностран, (зошто?), со страна $2s$, па неговата плоштина е:

$$P = \frac{(2s)^2\sqrt{3}}{4} = s^2\sqrt{3}.$$

Значи, плоштината на трапезот $ABCD$ е $s^2\sqrt{3}$.



Црт. 6

XX (95.VIII.4)

Нека дијагоналите на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката E и нека $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ и $\overline{BE} = 4$ (црт. 7). Треба да ја најдеме должината на дијагоналата BD.

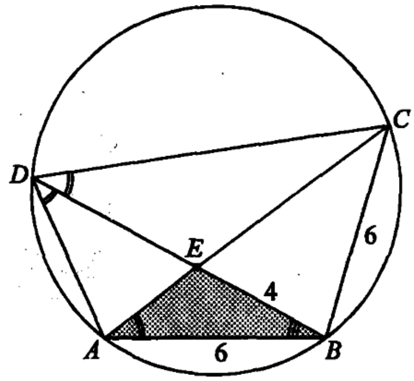
Од:

$\measuredangle ADB = \measuredangle BDC$ (над еднакви тетиви)

$\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ (над ист лак)

следува дека:

$\measuredangle ADB = \measuredangle BAC.$



Црт. 7

Бидејќи $\measuredangle ABD$ е заеднички за триаголниците ABE и DBA, следува дека тие се слични, од каде што имаме:

$$\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{DB} : \overline{BA}$$

$$6 : 4 = \overline{DB} : 6, \quad \overline{DB} = 9$$

Значи, дијагоналата BD на четириаголник $ABCD$ е 9 cm.

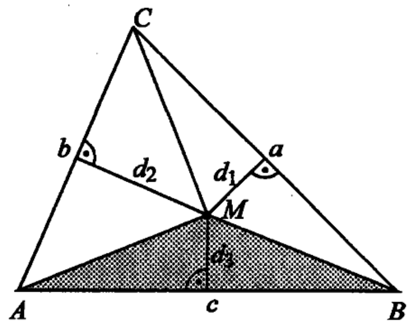
XX (95.VIII.5)

Нека M е произволна точка во ΔABC, а d_1, d_2 и d_3 нека се растојанијата од точката M до неговите страни a,b,c, соодветно. Со отсечките AM, BM и CM триаголникот ABC е поделен на три триаголника (црт. 8), чиј збир на плоштините е еднаков на плоштината P на ΔABC. Значи имаме:

$$P_{BCM} + P_{CAM} + P_{ABM} = P$$

$$\frac{ad_1}{2} + \frac{bd_2}{2} + \frac{cd_3}{2} = P \quad / : P$$

$$\frac{ad_1}{2P} + \frac{bd_2}{2P} + \frac{cd_3}{2P} = 1$$



Црт. 8

Имајќи предвид дека:

$$2P = ah_a = bh_b = ch_c,$$

добиваме:

$$\frac{ad_1}{ah_a} + \frac{bd_2}{bh_b} + \frac{cd_3}{ch_c} = 1$$

$$\frac{d_1}{h_a} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_c} = 1.$$