Самоил Малчески, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. ВОВЕД

При решавање на различни проблемски ситуации имаме потреба да пребројуваме елементи од некоја популација, т.е. од некое множество. Притоа, често пати пребројувањето можеме да го направиме користејќи ги комбинациите, веријациите и пермутациите со и без повторување, кои се дел од нашите знаења од конбинаториката. Меѓутоа, комбинаториката е далеку поширока и поразновидна област, во чија основа се наоѓаат множествата и пресликувањата. Така, за добивање на формулите за основните комбинаторни конфигурации, потребни ни се основните комбинаторни принципи и тоа: принцип на еднаквост, принцип на збир, принцип на производ и принцип на вклучување и исклучување. Последното значи дека ни се потребни соодветни теориски предзнаења за еквивалентните множества. Меѓутоа, голем број на комбинаторни и други проблеми може едноставно да се решат со помош на таканаречениот принцип на Дирихле, кој во натамошните разгледsвања подетално ќе го разработиме.

2. ЕЛЕМЕНТАРЕН ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле е еден од наједноставните комбинаторни принципи. Меѓутоа, тој често пати се користи во решавањето на проблеми во многу области на математиката. Едноставно кажано, овој принцип тврди дека ако, на пример, четири гулаби се сместени во три кафези, тогаш барем во еден кафез ќе има најмалку два гулаби.

Во следната теорема ќе дадеме прецизна доказ на принципот на Дирихле.

Теорема 1. (***елементарен принцип на Дирихле***)**.** Нека n е природен број. Ако $n+1$ предмети на произволен начин се распоредени во n кутии, тогаш во една кутија има најмалку два предмета.

Доказ. Нека претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет. Имаме n кутии, па затоа во нив се распоредени најмногу $n \cdot 1 = n$ предмети. Последното противречи на претпоставката дека се распоредени $n+1$ предмети. Конечно од добиената противречност следува дека во една кутија има најмалку два предмети. ■

Ќе разгледаме неколку примери, во кои ќе ја илустрираме примената на принципот на Дирихле во најразлични ситуации. Прво ќе разгледаме неколку задачи од теорија на броеви

Пример 1. Докажи, дека меѓу било кои шест природни броеви постојат два броја чија разлика е делива со 5.

Решение. Нека се $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ произволни природни броеви. При делење на природен број со 5 се добива остаток 0, 1, 2, 3 или 4. Значи, имаме шест броеви и пет остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека два од дадените шест броеви при делење со 5 даваат ист остаток. Нека тоа се броевите a_i и a_k. Тоа значи дека постојат броеви $m, n, r \in \mathbb{N}$ такви што $a_i = 5m + r$ и $a_k = 5n + r$. Но, тоа значи дека

$$a_i - a_k = 5m + r - (5n + r) = 5(m - n),$$

со што тврдењето е докажано. ■

Пример 2. Докажи, дека меѓу 26 различни непарни броеви помали од 100 постојат барем два чиј што збир е еднаков на 100.

Решение. Нека ги разгледаме класите од броеви такви што секоја од нив се состои од два непарни броеви чијшто збир е еднаков на 100. Тие класи се:

$$(1,99);(3,97);...;(47,53);(49,51).$$

Бидејќи се 25 класи, а 26 броеви, според принципот на Дирихле постои класа во која се наоѓаат два од дадените броеви. Тие два непарни броеви имаат збир 100. ■

Пример 3. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се цели броеви. Тогаш постојат $p, q \in \{0,1, 2,..., n\}$, $p < q$ така што $n \mid a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q$. Докажи!

Решение. Ги формираме збировите:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, ..., b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Ако еден од овие броеви на пример b_i е делив со n, тогаш решение на задачата е $p = 0, q = i$. Нека ниту еден од броевите не е делив со n и за секој $1 \leq i \leq n$ важи $b_i = c_i n + r_i$ при што $0 < r_i < n$. Бидејќи има n остатоци $r_1, r_2, ..., r_n$, а тие можат да примат $n-1$ вредности $1, 2, ..., n-1$, според принципот на Дирихле**,** следува дека барем два од тие остатоци се еднакви, т.е. постојат $p < q$ такви што $r_p = r_q$, а тоа е и бараното решение, бидејќи

$$a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q = b_q - b_p = n(c_q - c_p). ■$$

Пример 4. Нека n е природен број. Докажи, дека од произволни $n+1$ цели броеви, може да се изберат два броја така што нивната разлика да е делива со n.

Решение. Прво да забележиме дека за секој цел број k, постојат (еднозначно определени) цел број s и $r \in \{0,1,..., n-1\}$, така што $k = s \cdot n + r$. Навистина, знаеме дека ова важи кога k е природен број. Ако k е цел негативен број или 0, тогаш постои цел број m така што $k + n \cdot m$ е природен број. Тогаш постојат (еднозначно определени) цел број s' и $r \in \{0,1,...,n-1\}$ така што $k+n\cdot m = s'\cdot n+r$. Значи, $k=(s'-m)\cdot n+r = s\cdot n+r$ каде s е цел број. По договор земаме дека во овој случај s е количникот, а r е остатокот при делењето на целиот број k со бројот n. Да ги разгледаме сега остатоците на дадените $n+1$ броеви при делење со n. Имаме $n+1$ броеви, а секој од нив е еден од следните n броеви: $0,1,2,...,n-1$. Затоа, постојат два броја кои при делење со n имаат ист остаток, од што следува дека нивната разлика е делива со n. ■

Пример 6. а) Докажи дека за секој природен број n постои барем еден број од облик $777....77700...000$ (во декаден запис), кој е делив со n.

б) Докажи дека за секој природен број n кој е заемно прост со 10, т.е. $2 \nmid n$ и $5 \nmid n$, постои барем еден број од облик $777...777$ (во декаден запис), кој е делив со n.

Решение. а) Да ги разгледаме следните $n+1$ броеви

$$7, 77, 777, ..., \underbrace{777........777}_{n+1-\text{седумка}}$$

Според претходната задача, меѓу нив постојат барем два броја чија разлика е делива со n. Но со одземање на помалиот од поголемиот од тие два броја се добива број од облик $777....77700...000$, и со тоа задачата под а) е решена.

б) Користејќи ја задачата под а) добиваме дека постои број од облик $777....77700...000$ кој е делив со n. Бидејќи $2 \nmid n$ и $5 \nmid n$, со бришење на нулите од овој број се добива број $777....777$ кој повторно е делив со n. ■

Пример 5. Докажи, дека постои природен број кој е делив со 1994, а првите десет цифри му се 1234567890.

Решение. Да ги разгледаме следните 1995 броеви

$$a_1 = 1234567890$$

$$a_2 = 12345678901234567890$$

$$a_3 = 123456789012345678901234567890$$

$$..$$

$$a_{1995} = 12345678901234567890....1234567890$$

(1995 пати се повторува групата цифри 1234567890). При делење на броевите $a_1, a_2, ..., a_{1995}$ со 1994 можеме да ги добиеме остатоците $0,1,2,....,1993$, т.е нај-многу 1994 различни остатоци меѓу вкупно 1995 остатоци. Значи, барем два остатоци се еднакви и нека се тоа остатоцита на броевите a_i и a_j, $a_i > a_j$. Значи, бројот $a_i - a_j$ е делив со 1994 и има облик

$$1234567890...1234567890\underbrace{0000.......00}_{10(i-j)-\text{нули}}$$

а групата цифри 1234567890 се повторува $i-j$ пати. ■

Пример 6. Докажи дека меѓу $n+1$ различни природни броеви помали од $2n$ може да се изберат три, такви што еден од нив да е еднаков на збирот од останатите два броја.

Решение. Нека броевите се $k_1 < k_2 < k_3 < .... < k_n < k_{n+1}$. Да ги разгледаме множествата $A = \{k_2 - k_1, k_3 - k_1, ..., k_{n+1} - k_1\}$ и $B = \{k_2, k_3, ..., k_{n+1}\}$. Секое од овие две множества се состои од n (различни) природни броеви помали од $2n$. Вкупно се $2n$ природни броеви помали од $2n$. Затоа меѓу тие $2n$ броеви постојат два кои се еднакви. Јасно е дека тие припаѓаат на различни множества. Значи постојат броеви *i* и *j* такви што $k_i - k_1 = k_j$, т.е. $k_i = k_1 + k_j$. ■

Пример 7. Земаме произволни 51 број од множеството $\{1, 2, 3, ..., 100\}$. Докажи, дека меѓу овие 51 броеви секогаш мора да постојат барем два броја такви што едниот е делив со другиот.

Решение. Во множеството од првите 100 природни броеви има точно 50 непарни природни броеви. Секој број од множеството $A = \{1, 2, ..., 100\}$ може да се запише на единствен начин во облик $2^m q$, каде m е ненегативен цел број, а q е непарен број. Сите броеви од A ги делиме според q во 50 класи. Да забележиме дека со оваа поделба секој број припаѓа во единствена класа. Сега за земените 51 броја според принципот на Дирихле барем два од нив мора да припаѓаат на иста класа, а тоа се всушност бараните броеви. ■

Пример 8. Дадено е множество кое содржи 7 природни броеви, кои имаат различни остатоци при делење со 20. Докажи дека меѓу овие броеви може да се изберат четири броеви a, b, c и d такви што $a+b-c-d$ е делив со 20.

Решение. Од дадените 7 броеви можеме да формираме $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$-но двоелементно подмножество. За секое од тие 21-но множество $\{a, b\}$ ќе го пресметаме збирот $a+b$ и ќе го определиме остатокот при делење со 20.

На тој начин добиваме 21 остаток. При делење со природниот број 20 се добива некој од 20-те остатоци $\{0, 1, 2, ..., 19\}$. Според принципот на Дирихле, меѓу 21 остаток има два кои се еднакви. Со други зборови, постојат множества $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ такви што $a+b$ и $c+d$ имаат ист остаток при делење со 20.

Бидејќи броевите даваат различни остатоци при делење со 20, броевите се различни меѓу себе. Уште повеќе $c \neq a$. Навистина, ако $a = c$, тогаш броевите b и d би имале ист остаток при делење со 20, што не е можно.

Аналогно и $b \neq d$. Заради тоа $a+b-c-d$ е делив со 20. ■

Во следните неколку примери ќе видиме како принципот на Дирихле може да се примени при решавање на логочко-комбинаторни проблеми.

Пример 9. На еден шаховски турнир учествувале n шахисти, при што секој шахист играл со секој од останатите шахисти по една партија. Докаже дека во секој момент на турнирот постојат барем двајца шахисти со еднаков број на до тогаш одиграни партии.

Решение. Можни се два случаи:

а) постои барем еден шахист кој играл со сите други шахисти, и

б) не постои шахист кој играл со сите други шахисти.

Во првиот случај бројот на партиите кои секој шахист ги одиграл во некој момент припаѓа на множеството $\{1,2,...,n-1\}$, а во вториот случај е елемент на множеството $\{0,1,2,...,n-2\}$. Бидејќи и двете множества имаат по $n-1$ елемент во секој момент постојат барем двајца учесници на турнирот со еднаков број одиграни партии. ■

Пример 10. Во полињата на квадрат 3×3 распоредени се броевите 1,2 и 3. Дали е можен распоред при кој збирот на броевите во секоја колона, редица и дијагонала да биде различен?

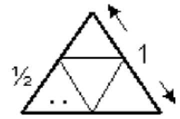
Решение. Редици, колони и дијагонали во квадрат 3×3 има вкупно 8, а можни збирови се 7 (најмалиот е еднаков на $1+1+1=3$, а најголемиот на $3+3+3=9$). Според принципот на Дирихле меѓу збировите на броевите во редиците, колоните и дијагоналите мора да има барем два еднакви. ■

Пример 11. Дали броевите $-1,0,1$ можат да се распоредат во квадратна таблица 5×5, така шго збирот на броевите во секоја колона, редица и дијагонала да биде различен?

Решение. Збир на пет броеви од множеството $\{-1,0,1\}$ може да биде цел број m таков што $-5\le m\le 5$. Бидејќи имаме вкупно 11 збирови кои треба да се распределат во 12 колони, редици и дијагонали, од принципот на Дирихле следува дека барем два збира мора да бидат еднакви. ■

Пример 12. Во рамностран триаголник со страна $a=1cm$ на случаен начин се избрани 5 точки. Докажи дека постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво на $\frac{1}{2}cm$.

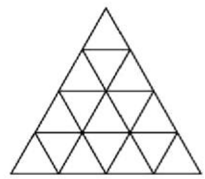
Решение. Рамностраниот триаголник со страна $a=1cm$ го делиме на 4 помали рамнострани триаголници со страна $a_1=\frac{1}{2}cm$, види цртеж. Имаме 5 точки и 4 триаголници, од



принцип на Дирихле следува дека сигурно во еден од четирите рамнострани триаголници со должина на страна $a_1 = \frac{1}{2}cm$ има барем две точки, а нивната одалеченост е сигурно помала или еднаква на $\frac{1}{2}cm$. ■

Пример 13. Во рамностран триаголник со должина на страна $4cm$ на случаен начин се избрани 17 точки. Докажи дека постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво на $1cm$.

Решение. Нека триаголникот го поделиме на 16 рамнострани триаголници, како на цртежот десно. Тогаш од принципот на Дирихле следува дека во еден од овие 16 триаголници ќе има барем две точки. Јасно растојанието меѓу овие две точки ќе биде помало или еднакво на $1cm$. ■



3. ОБОПШТЕН ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле може да се искаже и во поопшта форма, со чија помош можеме да решаваме посложени комбинаторни проблеми. Тоа ќе го направиме во следната теорема.

Теорема 2 (обопштен принцип на Дирихле). Нека $k \cdot n + r$ предмети, $r \geq 1$ се сместеии во n кутии. Докажи дека барем во една кутија има барем $k+1$ предмети.

Доказ. Нека претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по k предмети. Тогаш бидејќи има n кутии, следува дека во кутиите се распоредени најмногу $n \cdot k$ предмети, што противречи на претпоставката дека се распоредени $n \cdot k + r$ предмети. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на теоремата. ■

Како и претходно ќе разгледаме неколку примери од теоријата на броеви за чие решавање ќе го користиме обопштениот принцип на Дирихле.

Пример 1. Множеството броеви $\{1, 2, ..., 30\}$ е разбиено на четири групи. Докажи, дека постои група во која збирот на броевите не е помал од 117.

Решение. Збирот на броевите во сите четири групи е

$$1 + 2 + ... + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2} = 465 .$$

Но, $465 = 116 \cdot 4 + 1$, па од принципот на Дирихле следува дека постои група во која збирот на броевите не е помал од 117. ■

Пример 2. Дали секогаш е возможно меѓу произволни 100 цели броеви да се изберат 15 броеви такви што разликата на било кои два од избраните броја да биде делива со 7?

Решение. Остатоци кои може да се добијат при делење на било кои броеви со 7, ќе ги сместиме во 7 класи. Во секоја од класите припаѓаат броевите кои при делење со 7 даваат остаток 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Секој цел број припаѓа во некоја од овие класи, па тоа важи и за нашите 100 броеви. Но, $100 = 7 \cdot 14 + 2$ па од принципот на Дирихле следува дека во една класа мора да има најмалку $14 + 1 = 15$ броеви. За два броја x и y од иста класа имаме $x = 7k_1 + r,\ y = 7k_2 + r,\ 0 \le r \le 6$. Затоа $x - y = 7(k_1 - k_2)$, што значи дека одговорот на нашето прашање е потврден. ■

Пример 3. Докажи дека меѓу 11 природни броеви секогаш има шест чиј збир е делив со 6.

Решение. Меѓу секои пет природни броеви, постојат три чиј збир е делив со три (од принципот на Дирихле, меѓу произволни пет броеви секогаш има три кои даваат ист остаток при делење со три или има три броеви кои даваат различни остатоци при делење со 3). Тие формираат група броеви 1.

Броевите од групата 1 ги тргаме настрана од 11-те броја, а постапката се повторува со останатите осум броеви. Од нив произволно бираме пет. Меѓу нив постојат три чиј збир е делив со три и тие ја формираат групата броеви 2. Нив ги отстрануваме. Од последните пет броеви формираме трета група од три броја чиј збир е делив со 3.

Од трите групи од по три броја чии збирови се деливи со три, бираме две групи кои имаат збир со иста парност. Тие ја формираат бараната група од шест броја. Збирот на овие шест броја е делив со 2, а исто така и со 3, значи е делив со 6. ■

Во следните примери ќе покажеме како обопштениот принцип на Дирихле може да се примени при решавање на логичко комбинаторни задачи.

Пример 4. Во едно одделение има 30 ученици и сите работеле тест. Еден од нив, Филип, работејќи го тестот направил 13 грешки. Останатите ученици направиле помалку грешки. Докажи, дека барем три ученици направиле ист број на грешки (може да има ученици кои не направиле грешка.).

Решение. Останатите 29 ученици направиле 0,1,2,...,12 грешки, па затоа ќе ги поделиме во 13 групи: во група без грешки, со една грешка, со две грешки, ... , со 12 грешки. Бидејќи $29 = 2 \cdot 13 + 3$, јасно е дека во некоја од 13-те групи мора да има повеќе од 2 ученика. Затоа постојат најмалку три ученици кои направиле ист број на грешки. ■

Пример 5. Во едно одделение 40 ученици правеле по три писмени работи. Ниту еден не добил оценка помала од 3 и секој од нив добил по три различни оценки. Александар тврдел дека во одделението има најмалку 7 ученици кои имаат иста оценка на секоја од трите писмени работи. Дали Александар е во право?

Решение. За секој ученик постојат 6 можности, т.е. дека ги добил оценките: (3,4,5), (3,5,4). (4,3,5), (4,5,3), (5,3,4) и (5,4,3), па затоа учениците ќе ги распоредиме во 6 групи. Во одделението има 40 ученици, значи повеќе од 36, па затоа во некоја од шесте групи мора да има повеќе од 6 ученици, т.е. најмалку 7 ученинци. Според тоа, Александар бил во право. ■

Пример 6. Страните и дијагоналите на шестаголникот $ABCDEF$ се обоени со црвена и жолта боја. Докажи, дека постои триаголник со темиња во множеството $\{A,B,C,D,E,F\}$ чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Да ги разгледаме отсечките AB, AC, AD, AE, AF. Овие пет отсечки се обоени во две бои, па затоа барем три од нив се обоени со иста боја. Нека, на пример, AC, AD, AF се обоени во црвена боја. Сега да ги разгледаме отсечките CD, CF, DF. Ако овие три отсечки се обоени во иста боја, тогаш CDF е бараниот триаголник. Ако овие три отсечки не се обоени во иста боја, тогаш барем една од нив е обоена во црвена боја. На пример, нека DF е обоена во црвена боја. Тогаш ADF е бараниот триаголник. ■

Пример 7. Во шаховска табла со страна 1 произволно се распоредени 65 точки така што не постојат три точки кои лежат на иста права. Докажи, дека постојат 3 точки кои формираат триаголник чија плоштина p е помала или еднаква на 1.

Решение. Нека таблата ја разделиме на 32 правоаголници со димензии 1×2. Имаме $65 = 2\cdot 32+1$ точки, па од принципот на Дирихле следува дека постои правоаголник во кој се наоѓаат барем три точки. Плоштината на триаголникот со темиња во тие точки е помала или еднаква на $\frac{1\cdot 2}{2}=1$, и тоа се бараните точки од условот на задачата. ■

Пример 8. Повлечени се девет прави секоја од кои даден квадрат го дели на два четириаголници чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Докажи дека постојат три од нив кои се сечат во една точка.

Решение. Секоја од деветте прави го дели квадратот на два трапези (секоја од нив сече две паралелни страни на квадратот). Секој од тие два трапези се правоаголни, а нивна висина е страната на трапезот. Ако a и b се должините на основите на делбен трапез, тогаш неговата плоштина е $P=\frac{a+b}{2}h=\frac{a+b}{2}m$, каде m е должината на страната на квадратот. Но, $\frac{a+b}{2}$ е должината на неговата средна линија. Таа е дел од средната линија на квадратот. Останатиот дел од квадратот е исто така трапез со основи n и k и висина m. Неговата плоштина е $P=\frac{n+k}{2}m$. Но $\frac{n+k}{2}$ е должина на неговата средна линија. Значи средната линија на квадратот е поделена на два дела, при што $\frac{a+b}{2}:\frac{n+k}{2}=\frac{a+b}{2}m:\frac{n+k}{2}m=P_1:P_2=2:3$. Значи секоја делбена права минува низ точка од средна линија на квадратот која ја дели во однос $2:3$. Квадратот има две средни линии, а на секоја од нив може да се изберат по две точки, и секоја од нив ја дели во однос $2:3$. Значи деветте прави минуваат низ четири точки. Според Принципот на Дирихле три од нив минуваат низ иста точка. ■

Пример 9. Квадрат $n\times n$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Некои од квадратчињата се обоени со црна боја, а останатите се обоени со бела боја. За секои два реда и секои две колони четирите квадратчиња кои се наоѓаат во тие два реда и тие две колони не се обоени со иста боја. Определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. Ќе докажеме дека бараната најголема вредност е $n=4$. Табелата дадена на цртежот десно, квадратчињата означени со X се обоени во црна боја, докажува дека $n\geq 4$.

		X	X
	X	X	
X	X		
X			X

Нека претпоставиме дека квадрат со страна $n\geq 5$ го има саканото својство. Тогаш постои и квадрат со страна $n=5$ со саканото својство. Од принципот на Дирихле следува дека барем три од квадратчињата во првиот ред се обоени со иста боја (нека тие квадратчиња се црни). Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се првите три квадратчиња. Ако во првите три квадратчиња на произволен ред од останатите четири реда има барем две црни квадратчиња, тогаш постојат два реда и две колони за кои четирите пресечни квадратчиња се еднобојни (црни), што е противречност.

Според тоа, меѓу првите три квадратчиња на секој ред освен првиот има најмногу едно црно квадратче, а останатите две се бели. Но, на три места две бели квадратчиња може да се распоредат на три различни начини, а имаме 4 редови, па затоа во два реда ќе имаме ист распоред на белите квадратчиња, што повторно епротивречност. ■

Пример 10. Седумнаесет научници се допишуваат, секој со секого на три различни теми. Секој пар се допишува само на по една тема. Докажи дека постојат барем три научници, кои меѓусебно се допишуваат на една иста тема.

Решение. Да избереме произволен научник од групата од 17 научници. Бидејќи тој се допишува со останатите 16, а преписката се врши на три теми, постои барем една тема за која тој се допишува со барем 6 од останатите научници. Имено, кога тој за секоја тема би се допишувал со не повеќе од 5 научници, со оглед на тоа дека постојат три теми, вкупниот број на останатите научници нема да биде поголем од 15, што не е можно.

Да избереме една таква група од 6 научници со која избраниот научник се допишува на иста тема. Ако меѓу овие 6 научници постојат барем двајца кои меѓу себе се допишуваат на истата тема како и со избраниот, тогаш тие заедно со избраниот научник се бараните тројца научници. Ако тоа не е точно, тогаш сите 6 научници меѓу себе се допишуваат само на преостанатите две теми. Да избереме еден од тие шест научници. Помеѓу преостанатите 5 научници постојат барем тројца со кои тој се допишува на една иста тема (останаа само две теми). Ако барем двајца од тие тројца се допишуваат на истата тема како и со него, тогаш со него ја сочинуваат бараната тројка научници. Во спротивно, сите тројца се допишуваат на преостанатата една тема, па повторно ја имаме бараната тројка. Значи, бараната тројка научници која се допишува на иста тема секогаш постои, што и требаше да докажеме. ■

4. ГЕОМЕТРИСКИ ФОРМА НА ПРИНЦИПОТ НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле е познат и во таканаречената *геометриска форма*. Во овој случај нема да дадеме некои посебни теориски објаснувања, туку истиот ќе го објасниме со примери.

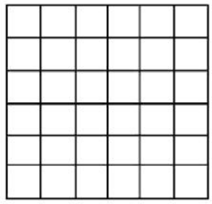
Пример 1. Во круг со радиус $9cm$ произволно се сместени 362 точки. Докажи, дека постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво на $1cm$.

Решение. Околу секоја точка да опишеме круг со радиус $\frac{1}{2}cm$. Тогаш збирот на плоштините на овие 400 кругови е еднаков на $362\cdot\frac{1}{2^2}\pi=90,5\pi cm^2$. Но, $90,5\pi cm^2>(9+\frac{1}{2})^2\pi cm^2$, што според принципот на Дирихле значи дека имаме барем два круга кои што се препокриваат. Јасно, растојанието меѓу центрите на овие два круга е помало од $1cm$, што значи дека меѓу дадените 362 точки постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво на $1cm$. ■

Пример 2. Во круг со радиус $1m$ на произволен начин се сместени 51 точка, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи, дека постојат три точки меѓу нив кои формираат триаголник чија плоштина е помала од $12,6dm^2$.

Решение. Кругот го делиме на 25 складни исечоци чиј централен агол е $360^\circ:25=14,4^\circ$. Според принципот на Дирихле, ќе постои исечок во кој се наоѓаат барем три точки. Избираме произволни три од тие точки. Плоштината на триаголникот што тие го формираат е помала од плоштината на кружниот исечок. Плоштината на кружниот исечок е $\frac{\pi}{25}m^2<12,6dm^2$. ■

Пример 3. Во внатрешноста на квадрат со страна $1dm$ се наоѓаат 110 точки. Докажи дека постои кружница со радиус $\frac{1}{8}dm$ во која се наоѓаат најмалку 4 од дадените точки.

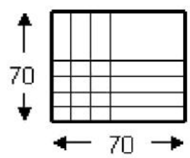


Решение. Да го поделиме квадратот така да се добијат 36 квадрати со должина на страна $\frac{1}{6}dm$, цртеж десно. Бидејќи $110=36\cdot 3+2$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постои квадрат со должина $\frac{1}{6}dm$ во кој се наоѓаат најмалку 4 од дадените точки. Нека d е должината на дијагоналата на малите квадрати. Тогаш $d^2=(\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^2$, па затоа $d=\frac{\sqrt{2}}{6}dm$. Според тоа, кружницата опишана околу квадратот во кој се наоѓаат најмалку 4 од дадените точки има радиус $r=\frac{d}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}dm$. Но, $\frac{\sqrt{2}}{12}<\frac{1}{8}$, па затоа во концентричната кружница на опишаната кружница, а чиј радиус е $\frac{1}{8}dm$ се наоѓаат најмалку 4 од дадените точки. ■

Пример 4. Во рамнина се дадени 31 точка такви што меѓу било кои три постојат две кои се на растојание помало или еднакво на 1. Докажи дека постојат најмалку 16 точки кои можат да се покријат со круг со радиус 1.

Решение. Меѓу дадените 31 точки постојат две кои се на најголемо растојание. Околу нив да опишеме кружници со радиус 1. Тогаш, од условот на задачата следува дека било која од останатите 29 точки мора да се најде во некоја од овие две кружниците. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку 15 од овие 29 точки се наоѓаат во една од двете опишани кружниците. Јасно, овие 15 точки заедно со точката околу која е опишана кружницата се 16 точки кои можат да се покријата со круг со радиус 1. ■

Пример 5. Војник пука во мета која е во облик на квадрат со должина на страната од 70*cm*. Тој испукал 50 пати и секојпат ја погодил метата. Докажи, дека на таа мета може да се најдат две дупки од погодените чие меѓусебно растојание е помало од 15cm.



Решение. Квадратот со страна од 70*cm* го делиме на 49 помали квадрати со должина на страните од 10*cm*. Бидејќи има 50 погодоци, тогаш од принципот на Дирихле, барем во еден од квадратите со страна 10 *cm* има 2 погодоци (дупки од куршум). Нивното растојание е помало или еднакво од $10\sqrt{2}$ (дијагонала на квадрат со страна од 10*cm*), т.е.

$$d(x_1,x_2)\leq 10\sqrt{2}<15,$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 6. Во коцка со раб со должина 7 произволно се сместени 344 точки. Докажи, дека меѓу овие точки постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво на $\sqrt{3}$.

Решение. Дадената коцка ја делиме на $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ помали еднакви коцки со раб со должина 1. Од принципот на Дирихле следува дека постои коцка со раб со должина 1 во која се наоѓаат најмалку две од дадените точки. Јасно, растојанието помеѓу овие две точки е помало или еднакво на дијагоналата на малите коцки, т.е. на тоа е помало или еднакво на $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. ■

Пример 7. Нека во сфера со радиус 1 се дадени 9 точки. Докажи, дека постојат две точки кои се наоѓаат на растојание помало или еднакво на $\sqrt{3}$.

Решение. Околу сферата да опишуваме коцка. Работ на опишаната коцка има должина 2. Коцката ја делиме на 8 помали еднакви коцки, чиј раб има должнина 1. Од принципот на Дирихле следува дека постојат две точки кои се наоѓаат во некоја од помалите коцки и нивното растојание е помало или еднакво на должината на дијагоналата на коцката, т.е. е помало или еднакво на $\sqrt{3}$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson, J. A., Lewis, J., Saylor, O. D.: *Discrete Mathematics with Combinatorics,* Pearson Education, Inc., 2004
2. Berge, C. *Principles of Combinatorics*, Academic Press, New York, 1971
3. Cvetković, D.; Simić, S. *Diskretna matematika,* Prosveta, Niš, 1995
4. Rosen, K., Michaels, J., Gross, J., Grossman, J., Shier, D. *Discrete and Combinatorial Mathematics,* CRC Pres, New York, 2000
5. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б., *Практикум по елементарна математика,* Просветно дело, Скопје, 1993
6. **Малчески, Р.** (2019). Математички талент 8 (олимписки теми – втор дел, геометрија и комбинаторика), Армаганка, Скопје
7. **Малчески, Р.**, Аневска, К., Малчески, С. (2019). Математички талент 5 (збирка задачи за VIII одделение), Просветно дело, Скопје
8. **Малчески, Р.**, Малчески, С., Аневска, К. (2018). Математички талент 4 (збирка задачи за VII одделение), Просветно дело, Скопје
9. **Малчески, Р.,** Малчески, С., Аневска, К. (2020). Математички талент 6 (збирка задачи за IX одделение), Просветно дело, Скопје (во печат)