ЧЕТВРТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: ЈУНИОРИ

Ден 1: Сабота, 17. Декември 2022

Задача 1. Низ дадена точка O во рамнината се повлечени n прави. Одредете ја најголемата можна вредност k (зависно од n) за која секогаш можеме некои k од тие n прави да обоиме црвено без притоа да формираме пар заемно нормални црвени прави.

Задача 2. Нека a, b, c, d се цели броеви. Докажете дека за секој позитивен цел број n, постојат барем $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ позитивни цели броеви $m \leq n$ такви што $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$ не е полн квадрат. (За секој реален број x, со $\lfloor x \rfloor$ се означува најголемиот цел број $\leq x$.)

Задача 3. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за сите $x, y > 0$ важи

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

Ден 2: Недела, 18. Декември 2022

Задача 4. Дали равенката

$$z(y-x)(x+y)=x^3$$

има конечно или бесконечно многу решенија во множеството позитивни цели броеви x, y, z? (Образложете го одговорот.)

Задача 5. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што $AB = AD + BC$ и $CD < AB$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка P, а правите AD и BC се сечат во точка Q. Симетралата на $\angle APB$ ја сече страната AB во точка T. Докажете дека центарот на опишаната кружница на $\triangle CTD$ лежи на опишаната кружница на $\triangle CQD$.

Задача 6. Во едно училиште со 1000 ученици, секој ученик има точно четири пријатели. За група од три ученика велиме дека е *пријателска тројка* ако секои двајца од групата се пријатели. Одредете го најголемиот можен број на пријателски тројки во училиштето.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

Категорија: СЕНИОРИ

Ден 1: Сабота, 17. Декември 2022

Задача 1. Нека a, b, c, d се цели броеви. Докажете дека за секој позитивен цел број n, постојат барем $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ позитивни цели броеви $m \leq n$ такви што $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$ не е полн квадрат. (За секој реален број x, со $\lfloor x \rfloor$ се означува најголемиот цел број $\leq x$.)

Задача 2. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за сите $x, y > 0$ важи

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

Задача 3. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник впишан во кружницата ω со центар O. Правите AD и BC се сечат во точка E, а правите AB и CD се сечат во точка F. Нека P е точка на отсечката EF таква што $OP \perp EF$. Кружницата Γ_1 минува низ точките A и E при што ја допира ω во A. Кружницата Γ_2 минува низ точките C и F при што ја допира ω во C. Ако Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките X и Y, докажете дека PO е симетрала на $\angle XPY$.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

Ден 2: Недела, 18. Декември 2022

Задача 4. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што $AB = AD + BC$ и $CD < AB$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка P, а правите AD и BC се сечат во точка Q. Симетралата на $\angle APB$ ја сече страната AB во точка T. Докажете дека центарот на опишаната кружница на $\triangle CTD$ лежи на опишаната кружница на $\triangle CQD$.

Задача 5. Во едно училиште со 1000 ученици, секој ученик има точно четири пријатели. За група од три ученика велиме дека е *пријателска тројка* ако секои двајца од групата се пријатели. Одредете го најголемиот можен број на пријателски тројки во училиштето.

Задача 6. Нека $\mathbb{N}$ е множеството позитивни цели броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што:

- За секој позитивен цел број $a > 2023^{2023}$ важи $f(a) \leq a$.
- За секои $a, b \in \mathbb{N}$ количникот $\frac{a^2 f(b)+b^2 f(a)}{f(a)+f(b)}$ е цел број.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

Категорија: ЈУНИОРИ

Решенија и распределба на поени

Задача 1. Низ дадена точка O во рамнината се повлечени n прави. Одредете ја најголемата можна вредност k (зависно од n) за која секогаш можеме некои k од тие n прави да обоиме црвено без притоа да формираме пар заемно нормални црвени прави.

Решение. Ќе докажеме дека одговорот е: $k = \frac{n}{2}$ ако n е парен и $k = \frac{n+1}{2}$ ако n е непарен. Да разгледаме *најголемо* можно подмножество A од тие n прави така што никои две прави од A не се заемно нормални **(1п)**. Нека A се состои од точно a прави, т.е. $|A| = a$. Со $\bar{A}$ го означуваме множеството од преостанатите $n - a$ прави. Да забележиме дека секоја права од $\bar{A}$ е нормална на некоја права од A. Имено, во спротивно би можеле да префрлиме од $\bar{A}$ во A некоја права што не го исполнува споменатиот услов - со тоа би добиле поголемо подмножество прави од кои никои две не се заемно нормални, што противречи на претпоставената максималност на A. За секоја права $\ell \in A$, најмногу една права од $\bar{A}$ е нормална на ℓ. Следствено, $n - a \leq a$. Еквивалентно, $a \geq \frac{n}{2}$. Да забележиме дека ако ги обоиме во црвено токму правите од A добиваме едно посакувано боење. Значи, бидејќи a е природен број, секогаш можеме да обоиме $k = \frac{n}{2}$ прави на посакуваниот начин кога n е парен и $k = \frac{n+1}{2}$ кога n е непарен **(2п)**.

Останува да докажеме дека постои конфигурација од n прави низ точката O која не дозволува да се обојат во црвено повеќе од $\frac{n}{2}$ прави за парно n односно $\frac{n+1}{2}$ прави за непарно n. Без губење на општоста, да претпоставиме дека O е координатниот почеток на рамнината. За $n = 2m$, избираме m различни прави низ O такви што секоја има позитивен коефициент на правец, и кон нив придодаваме уште m прави низ O секоја од кои е нормална на една од првите m прави. Вторите m прави имаат различни негативни коефициенти на правец, што значи дека имаме вкупно n различни прави кои можеме да ги поделиме во m парови од заемно нормални прави. Да разгледуваме произволно посакувано боење. Во секој пар може да постои најмногу една црвена права, и оттука $k \leq m = \frac{n}{2}$ **(2п)**. Ако $n = 2m + 1$, ја користиме претходната

конструкција со m прави со позитивни коефициенти на правец и m прави нормални на нив. Ја додаваме правата $x = 0$. Така имаме m парови кои можат да содржат најмногу една црвена права и уште ја имаме правата $x = 0$. Затоа, за непарно n, не постојат повеќе од $m + 1 = \frac{n+1}{2}$ црвени прави така што никои две не се заемно нормални **(2п)**. $\square$

Задача 2. Нека a, b, c, d се цели броеви. Докажете дека за секој позитивен цел број n, постојат барем $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ позитивни цели броеви $m \leq n$ такви што $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$ не е полн квадрат. (За секој реален број x, со $\lfloor x \rfloor$ се означува најголемиот цел број $\leq x$.)

Решение. Нека $P(m) = m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$. Прво да претпоставиме дека $m \equiv 0 \pmod 4$. Тогаш $P(m) \equiv a \pmod 4$. **(1п)** Затоа, ако за такво m, $P(m)$ е полн квадрат, мора да важи или $a \equiv 0 \pmod 4$ или $a \equiv 1 \pmod 4$. **(1п)**

Да претпоставиме сега дека $m \equiv 2 \pmod 4$. Тогаш $P(m) \equiv m + a \equiv 2 + a \pmod 4$. **(1п)** Затоа, ако за такво m, $P(m)$ е полн квадрат, тогаш мора да важи или $a + 2 \equiv 0 \pmod 4$ или $a + 2 \equiv 1 \pmod 4$, односно, или $a \equiv 2 \pmod 4$ или $a \equiv 3 \pmod 4$. **(1п)**

Оттука, ако $a \equiv 2 \pmod 4$ или $a \equiv 3 \pmod 4$, тогаш $P(m)$ не е полн квадрат ни за едно m такво што $m \equiv 0 \pmod 4$. **(1п)** Од друга страна, ако $a \equiv 0 \pmod 4$ или $a \equiv 1 \pmod 4$, тогаш $P(m)$ не е полн квадрат ниту за едно m такво што $m \equiv 2 \pmod 4$. **(1п)** Сега е јасно дека за секој природен број n, имаме барем $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ природни броеви $m \leq n$ такви што $P(m)$ не е полн квадрат. **(1п)** $\square$

Задача 3. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за сите $x, y > 0$ важи

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

Решение. Ќе дадеме три начини на решавање.

Прв начин. Да докажеме прво дека f е инјективна. Претпоставувајќи го спротивното, постојат $0 < p < q$ така што $f(p) = f(q) = r$. Земаме $x = p$ и $y = \frac{1}{p}$ и добиваме

$$f(1 + f(p)) = \frac{f(p)}{p} + p.$$

Слично, земајќи $x = q$ и $y = \frac{1}{q}$, добиваме

$$f(1 + f(q)) = \frac{f(q)}{q} + q.$$

Оттука

$$p + \frac{f(p)}{p} = f(1 + f(p)) = f(1 + f(q)) = q + \frac{f(q)}{q}.$$

Со други зборови, имаме $p^2q + qr = pq^2 + pr$. Ова е еквивалентно со $pq(p - q) + (q - p)r = 0$ односно со $(q - p)(r - pq) = 0$. Бидејќи претпоставивме дека $q > p$, следува $pq = r$. **(1п)** Но земајќи $x = p$ добиваме дека: $f(py + pq) = pqy + p$ за секое $y > 0$. Слично, $x = q$ ни дава дека: $f(qy + pq) = pqy + q$ за секое $y > 0$. Значи $f(2pq) = pq^2 + p$ и $f(2pq) = p^2q + q$, па така

$$pq^2+p=p^2q+q \implies (pq-1)(q-p)=0 \implies pq=1.$$

Но, тогаш би важело $f(py+1)=y+p$ и $f(qy+1)=y+q$ за секое $y>0$. Следствено,

$$\frac{q}{p}+p=f(q+1)=1+q \implies \frac{1}{p}+p^2=1+p \iff p^3-p^2-p+1=0$$
$$\iff (p^2-1)(p-1)=0 \iff p=1.$$

Од $pq=1$ добиваме $q=p=1$. Оваа противречност докажува дека f е инјективна. **(1п)**

Сега да земеме $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)}$. Тогаш за $t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)}+f\left(\frac{1}{2}\right)$ имаме

$$f(t)=\frac{1}{2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Фиксираме произволно $a>1$. Ако земеме $x=t$ и $y=\frac{a-1}{t}>0$ добиваме

$$f\left(t\cdot\frac{a-1}{t}+f(t)\right)=\frac{a-1}{t}\cdot f(t)+t \iff f(a)=\frac{1}{t}\cdot a+t-\frac{1}{t}.$$

Со тоа имаме формула за $f(a)$ кога $a>1$. **(2п)** Земајќи $x=y=2>1$ и применувајќи ја горенаведената формула го добиваме следново:

$$f(4+f(2))=2f(2)+2 \iff f(4+\frac{2}{t}+t-\frac{1}{t})=2\cdot\left(\frac{2}{t}+t-\frac{1}{t}\right)+2$$
$$\iff f\left(4+t+\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{t}+2t+2 \iff \frac{1}{t}\cdot\left(4+t+\frac{1}{t}\right)+t-\frac{1}{t}=\frac{2}{t}+2t+2$$
$$\iff \frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}=t+1 \iff t^3+t^2-t-1=0 \iff (t^2-1)(t+1)=0 \iff t=1.$$

Ако користиме $t=1$ во формулата за $f(a)$ кога $a>1$, добиваме дека $f(a)=a$ за секој $a>1$. Исто така имаме $f(1)=f(t)=1$. **(1п)**

Нека $a<1$. Земаме $x=a$ и $y=\frac{1}{f(a)}$, и добиваме

$$f\left(\frac{a}{f(a)}+f(a)\right)=\frac{1}{f(a)}\cdot f(a)+a=a+1.$$

Заради $a+1>1$ имаме $f(a+1)=a+1$. Но f е инјективна, што значи дека $\frac{a}{f(a)}+f(a)=a+1$. Еквивалентно,

$$a+f(a)^2=(a+1)f(a) \iff f(a)^2-(a+1)f(a)+a=0 \iff (f(a)-1)(f(a)-a)=0.$$

Кога $a<1$, од инјективноста добиваме $f(a)\neq 1$, па оттука $f(a)=a$ за секој $a<1$. **(1п)** Заклучуваме дека $f(a)=a$ за секое $a>0$. Лесно се проверува дека оваа функција е навистина решение. **(1п)** □

Втор начин. Нека смената во дадената функција е $P(x,y)$.
Да претпоставиме дека постојат $a,b\in\mathbb{R}^+$ за кои $f(a)=f(b)$. Смените $P(a,\frac{1}{af(a)})$ и $P(b,\frac{1}{bf(b)})$ ни даваат

$$\frac{1}{b}+b=f\left(\frac{1}{f(b)}+f(b)\right)=f\left(\frac{1}{f(a)}+f(a)\right)=\frac{1}{a}+a,$$

што е еквивалентно со $(ab-1)(a-b)=0$. Значи равенството $f(a)=f(b)$ имплицира $a=b$ или $a=\frac{1}{b}$ (1). **(2п)**

Смената $P(\frac{x}{2}, \frac{x}{2f(\frac{x}{2})})$ ни дава:

$$f\left(\frac{x^2}{4\cdot f(\frac{x}{2})}+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)=x,$$

што повлекува дека функцијата f е сурјективна. Понатаму, ова имплицира дека постои $k \in \mathbb{R}^+$ таков што $f(k) = 1$. Сега, смената $P(k, x)$ ни дава $f(kx + 1) = x + k$ (2). **(1п)** Разгледуваме три случаи:

1° $k > 1$
Заменувајќи $\frac{k-1}{k}$ за x (2) имплицира $1 = f(k) = f(k \cdot \frac{k-1}{k} + 1) = \frac{k-1}{k} + k$, т.е. $k^2 = 1$, што е контрадикција со претпоставката $k > 1$. **(1п)**

2° $k = 1$
Равенството (2) е сега еквивалентно со $f(x + 1) = x + 1$, т.е. $f(x) = x$ за $x \in (1, +\infty)$. Земајќи доволно големо y така што $y > 1$ и $xy + f(x) > 1$ и заменувајќи го во почетната функционална равенка имаме $xy + f(x) = yf(x) + x$, односно $(y-1)(f(x)-x) = 0$. Со оглед на тоа дека $y > 1$, добиваме дека $f(x) = x$ за сите $x \in \mathbb{R}^+$. **(1п)**

3° $k < 1$
Заменувајќи $1 - k$ за x во (2) имаме $f(k - k^2 + 1) = 1 = f(k)$, што според (1) имплицира $k - k^2 + 1 = k$ т.е. $k^2 = 1$ (што противречи на $0 < k < 1$) или пак $k - k^2 + 1 = \frac{1}{k}$, што е еквивалентно со $(k-1)^2(k+1) = 0$ (но ова повторно противречи на $0 < k < 1$). **(1п)**

Оттука, единственото можно решение на дадената функционална равенка е $f(x) = x$. Лесно се проверува дека идентичната функција ја задоволува равенката. **(1п)** $\square$

Трет начин. Бирајќи $y = 1$ добиваме $f(x+f(x)) = x+f(x)$. Оттука, постои $u \in \mathbb{R}^+$ таков што $f(u) = u$. **(2п)** Заменувајќи $x = u$ во дадената равенка добиваме дека: $f(u(y + 1)) = u(y + 1)$ за секое $y \in \mathbb{R}^+$; ова имплицира дека $f(v) = v$ за секој $v > u$. **(2п)** Сега за произволни x и $y > \max\{1, \frac{u}{x}\}$, бидејќи $xy + f(x) > u$, добиваме:

$$xy + f(x) = f(xy + f(x)) = yf(x) + x\,.$$

Ова е еквивалентно со $(y - 1)(f(x) - x) = 0$, а како $y > 1$, заклучуваме дека $f(x) = x$ за секој $x \in \mathbb{R}^+$. **(2п)** Лесно се проверува дека идентичната функција ја задоволува дадената функционална равенка. **(1п)** $\square$

Задача 4. Дали равенката

$$z(y-x)(x+y) = x^3$$

има конечно или бесконечно многу решенија во множеството позитивни цели броеви x, y, z? (Образложете го одговорот.)

Решение. Одговорот е: равенката има бесконечно многу решенија во множеството позитивни цели броеви. Имено, таа е еквивалентна со

$$y^2z - x^2z = x^3.$$

Делејќи со z^3, ја добиваме еквивалентната равенка

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z}\right)^2 = \left(\frac{x}{z}\right)^3.$$

Нека $X = \left(\frac{x}{z}\right)$ и $Y = \left(\frac{y}{z}\right)$. **(2п)** Со овие смени, горната равенка добива облик:

$$Y^2 - X^2 = X^3.$$

Со оглед на тоа дека паротот $X = 0, Y = 0$ ја задоволува добиената равенка, ајде да побараме (позитивни рационални) решенија од обликот $Y = tX$. Заменувајќи го Y со tX добиваме **(2п)**:

$$(t^2 - 1)X^2 = t^2X^2 - X^2 = X^3.$$

Значи, имаме решенија од обликот $\frac{x}{z} = t^2 - 1$ и $\frac{y}{z} = t(t^2 - 1)$, каде t е рационален број таков што $t, t^2 - 1 > 0$. **(1п)** Оттука, една бесконечна фамилија решенија на почетната равенка е $(x, y, z) = (t^2 - 1, t^3 - t, 1)$, за целите броеви $t \geq 2$. **(2п)** □

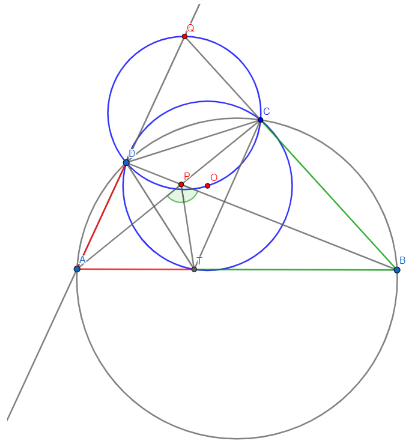
Забелешка за распределбата на поените: Последните два поена се доделуваат и доколку само се наведе низа од решенија (без доказ).

Задача 5. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што $AB = AD + BC$ и $CD < AB$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка P, а правите AD и BC се сечат во точка Q. Симетралата на $\angle APB$ ја сече страната AB во точка T. Докажете дека центарот на опишаната кружница на $\triangle CTD$ лежи на опишаната кружница на $\triangle CQD$.

Решение. Нека T' е точка на отсечката AB така што важи $AT' = AD$. Тогаш условот $AB = AD + BC$, заедно со $AB = AT' + BT'$ и $AT' = AD$, ни дава $BT' = BC$. **(1п)** Триаголниците ADP и BCP се слични **(1п)**, бидејќи $ABCD$ е тетивен. Следствено,

$$\frac{AT'}{BT'} = \frac{AD}{BC} = \frac{AP}{BP} = \frac{AT}{BT},$$

каде последното равенство се добива од теоремата за симетрала на агол. **(1п)** Заклучуваме дека $T' = T$. **(1п)** Значи, триаголникот TAD е A-рамнокрак, додека триаголникот TBC е B-рамнокрак. Нека $\angle BAQ = 2x$ и $\angle ABQ = 2y$. Да го означиме со O центарот на опишаната кружница на триаголникот CTD.



Имаме:

$$\angle COD = 2 \cdot \angle CTD = 2 \cdot (180^\circ - \angle ATD - \angle BTC)$$

$$= 2 \cdot (180^\circ - (90^\circ - x) - (90^\circ - y)) = 2x + 2y.$$

Да забележиме и дека $\angle CQD = 180^\circ - 2x - 2y$. Оттука, $\angle COD + \angle CQD = 180^\circ$. **(2п)** Ова кажува дека центарот O на опишана кружница на триаголникот CTD лежи на опишаната кружница на триаголникот CQD, што и се бараше да се докаже. **(1п)** □

Забелешки за распределбата на поените:
1. Вториот поен може да се додели и само ако се констатира наведената сличност, без да се изведе пропорцијата меѓу страните на двата триаголници. Изведување на истата пропорција не носи екстра поени.
2. Третиот поен се доделува за користење или барем наведување на теоремата за симетрала на агол, независно од тоа дали е поврзана со дефинираната точка T'.
3. Наоѓање на било кој од аглите $\angle COD$ и $\angle CQD$ носи поен. Наоѓање на двата агла носи два поена, како што е наведено.
4. Заклучокот врз основа на збирот на агли носи еден поен. Заклучокот на било кој (точен) алтернативен начин го носи истиот поен.

Задача 6. Во едно училиште со 1000 ученици, секој ученик има точно четири пријатели. За група од три ученика велиме дека е *пријателска тројка* ако секои двајца од групата се пријатели. Одредете го најголемиот можен број на пријателски тројки во училиштето.

Решение. Ќе докажеме дека одговорот е 2000. Најпрво докажуваме дека овој број е достижен. Доколку во училиштето постојат 200 попарно дијсунктни групи од по 5 ученика, при што два ученика се пријатели ако и само ако се во иста група, тогаш бројот на пријателски тројки изнесува

$$\binom{5}{3} \cdot 200 = 2000. \quad \textbf{(1п)}$$

Да докажеме дека не е можно да има повеќе од 2000 пријателски тројки во училиштето. Нека T е вкупниот број на пријателски тројки. Со N го означуваме бројот на парови (t, p), каде t е пријателска тројка и p е (неподреден) пар на пријатели во таква тројка.

Секоја пријателска тројка $\{A, B, C\}$ допринесува со 3 во бројот N (бидејќи дава точно три пара пријатели: $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ и $\{A, C\}$). Оттука имаме дека $N = 3T$. **(1п)**

Да фиксираме еден пар пријатели $p = \{A, B\}$. Тврдиме дека p учествува во не повеќе од три пријателски тројки. Навистина, ако p учествува во барем 4 пријателски тројки, тогаш постојат (различни) ученици $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq B$ кои се пријатели со A. Меѓутоа, B е исто така пријател со A, па A би имал 5 пријатели, што не е можно. Затоа, секој пар на пријатели p е дел од најмногу 3 пријателски тројки. **(1п)**

Нека P е вкупниот број на парови p (од двајца пријатели). Ако го броиме N по втората компонента (т.е. по парови пријатели) и го искористиме фактот дека секој пар учествува во најмногу 3 пријателски тројки, добиваме $N \leq P \cdot 3 = 3P$. Заклучуваме дека

$$3T = N \leq 3P \text{ и оттука } T \leq P. \quad \textbf{(2п)}$$

Од друга страна, P може едноставно да се пресмета. Имено, означувајќи го со d_i бројот на пријатели на i-тиот ученик ($i = 1, 2, ..., 1000$), имаме $d_i = 4$ за секое i. Оттаму

$$4 \cdot 1000 = d_1 + d_2 + ... + d_{1000} = 2P,$$

бидејќи секој пар на пријатели го броиме точно два пати во збирот $d_1 + d_2 + ... + d_{1000}$. Ова ни дава $P = 2000$. Значи $T \leq P = 2000$, што и сакавме да докажеме **(2п)**. □

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Категорија: СЕНИОРИ

Решенија и распределба на поени

Задача 1. Нека a, b, c, d се цели броеви. Докажете дека за секој позитивен цел број n, постојат барем $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ позитивни цели броеви $m \leq n$ такви што $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$ не е полн квадрат. (За секој реален број x, со $\lfloor x \rfloor$ се означува најголемиот цел број $\leq x$.)

Решение. Нека $P(m) = m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$. Прво да претпоставиме дека $m \equiv 0 \pmod 4$. Тогаш $P(m) \equiv a \pmod 4$. **(1п)** Затоа, ако за такво m, $P(m)$ е полн квадрат, мора да важи или $a \equiv 0 \pmod 4$ или $a \equiv 1 \pmod 4$. **(1п)**

Да претпоставиме сега дека $m \equiv 2 \pmod 4$. Тогаш $P(m) \equiv m + a \equiv 2 + a \pmod 4$. **(1п)** Затоа, ако за такво m, $P(m)$ е полн квадрат, тогаш мора да важи или $a + 2 \equiv 0 \pmod 4$ или $a + 2 \equiv 1 \pmod 4$, односно, или $a \equiv 2 \pmod 4$ или $a \equiv 3 \pmod 4$. **(1п)**

Оттука, ако $a \equiv 2 \pmod 4$ или $a \equiv 3 \pmod 4$, тогаш $P(m)$ не е полн квадрат ни за едно m такво што $m \equiv 0 \pmod 4$. **(1п)** Од друга страна, ако $a \equiv 0 \pmod 4$ или $a \equiv 1 \pmod 4$, тогаш $P(m)$ не е полн квадрат ниту за едно m такво што $m \equiv 2 \pmod 4$. **(1п)** Сега е јасно дека за секој природен број n, имаме барем $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ природни броеви $m \leq n$ такви што $P(m)$ не е полн квадрат. **(1п)** □

Задача 2. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за сите $x, y > 0$ важи

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

Решение. Ќе дадеме три начини на решавање.

Прв начин. Да докажеме прво дека f е инјективна. Претпоставувајќи го спротивното, постојат $0 < p < q$ така што $f(p) = f(q) = r$. Земаме $x = p$ и $y = \frac{1}{p}$ и добиваме

$$f(1 + f(p)) = \frac{f(p)}{p} + p.$$

Слично, земајќи $x = q$ и $y = \frac{1}{q}$, добиваме

$$f(1 + f(q)) = \frac{f(q)}{q} + q.$$

Оттука

$$p + \frac{f(p)}{p} = f(1 + f(p)) = f(1 + f(q)) = q + \frac{f(q)}{q}.$$

Со други зборови, имаме $p^2q + qr = pq^2 + pr$. Ова е еквивалентно со $pq(p - q) + (q - p)r = 0$ односно со $(q - p)(r - pq) = 0$. Бидејќи претпоставивме дека $q > p$, следува $pq = r$. **(1п)** Но земајќи $x = p$ добиваме дека: $f(py + pq) = pqy + p$ за секое $y > 0$. Слично, $x = q$ ни дава дека: $f(qy + pq) = pqy + q$ за секое $y > 0$. Значи $f(2pq) = pq^2 + p$ и $f(2pq) = p^2q + q$, па така

$$pq^2 + p = p^2q + q \implies (pq - 1)(q - p) = 0 \implies pq = 1.$$

Но, тогаш би важело $f(py + 1) = y + p$ и $f(qy + 1) = y + q$ за секое $y > 0$. Следствено,

$$\frac{q}{p} + p = f(q + 1) = 1 + q \implies \frac{1}{p} + p^2 = 1 + p \iff p^3 - p^2 - p + 1 = 0$$
$$\iff (p^2 - 1)(p - 1) = 0 \iff p = 1.$$

Од $pq = 1$ добиваме $q = p = 1$. Оваа противречност докажува дека f е инјективна. **(1п)**

Сега да земеме $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)}$. Тогаш за $t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)} + f\left(\frac{1}{2}\right)$ имаме

$$f(t) = \frac{1}{2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Фиксираме произволно $a > 1$. Ако земеме $x = t$ и $y = \frac{a-1}{t} > 0$ добиваме

$$f\left(t \cdot \frac{a-1}{t} + f(t)\right) = \frac{a-1}{t} \cdot f(t) + t \iff f(a) = \frac{1}{t} \cdot a + t - \frac{1}{t}.$$

Со тоа имаме формула за $f(a)$ кога $a > 1$. **(2п)** Земајќи $x = y = 2 > 1$ и применувајќи ја горенаведената формула го добиваме следново:

$$f(4 + f(2)) = 2f(2) + 2 \iff f(4 + \frac{2}{t} + t - \frac{1}{t}) = 2 \cdot \left(\frac{2}{t} + t - \frac{1}{t}\right) + 2$$

$$\iff f\left(4 + t + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} + 2t + 2 \iff \frac{1}{t} \cdot \left(4 + t + \frac{1}{t}\right) + t - \frac{1}{t} = \frac{2}{t} + 2t + 2$$

$$\iff \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = t + 1 \iff t^3 + t^2 - t - 1 = 0 \iff (t^2 - 1)(t + 1) = 0 \iff t = 1.$$

Ако користиме $t = 1$ во формулата за $f(a)$ кога $a > 1$, добиваме дека $f(a) = a$ за секој $a > 1$. Исто така имаме $f(1) = f(t) = 1$. **(1п)**

Нека $a < 1$. Земаме $x = a$ и $y = \frac{1}{f(a)}$, и добиваме

$$f\left(\frac{a}{f(a)}+f(a)\right)=\frac{1}{f(a)}\cdot f(a)+a=a+1.$$

Заради $a+1>1$ имаме $f(a+1)=a+1$. Но f е инјективна, што значи дека $\frac{a}{f(a)}+f(a)=a+1$. Еквивалентно,

$$a+f(a)^2=(a+1)f(a) \iff f(a)^2-(a+1)f(a)+a=0 \iff (f(a)-1)(f(a)-a)=0.$$

Кога $a<1$, од инјективноста добиваме $f(a)\neq 1$, па оттука $f(a)=a$ за секој $a<1$. **(1п)** Заклучуваме дека $f(a)=a$ за секое $a>0$. Лесно се проверува дека оваа функција е навистина решение. **(1п)** □

Втор начин. Нека смената во дадената функција е $P(x,y)$.
Да претпоставиме дека постојат $a,b\in\mathbb{R}^+$ за кои $f(a)=f(b)$. Смените $P(a,\frac{1}{af(a)})$ и $P(b,\frac{1}{bf(b)})$ ни даваат

$$\frac{1}{b}+b=f\left(\frac{1}{f(b)}+f(b)\right)=f\left(\frac{1}{f(a)}+f(a)\right)=\frac{1}{a}+a,$$

што е еквивалентно со $(ab-1)(a-b)=0$. Значи равенството $f(a)=f(b)$ имплицира $a=b$ или $a=\frac{1}{b}$ (1). **(2п)**

Смената $P(\frac{x}{2},\frac{x}{2f(\frac{x}{2})})$ ни дава:

$$f\left(\frac{x^2}{4\cdot f(\frac{x}{2})}+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)=x,$$

што повлекува дека функцијата f е сурјективна. Понатаму, ова имплицира дека постои $k\in\mathbb{R}^+$ таков што $f(k)=1$. Сега, смената $P(k,x)$ ни дава $f(kx+1)=x+k$ (2). **(1п)** Разгледуваме три случаи:

1° $k>1$
Заменувајќи $\frac{k-1}{k}$ за x (2) имплицира $1=f(k)=f(k\cdot\frac{k-1}{k}+1)=\frac{k-1}{k}+k$, т.е. $k^2=1$, што е контрадикција со претпоставката $k>1$. **(1п)**

2° $k=1$
Равенството (2) е сега еквивалентно со $f(x+1)=x+1$, т.е. $f(x)=x$ за $x\in(1,+\infty)$. Земајќи доволно големо y така што $y>1$ и $xy+f(x)>1$ и заменувајќи го во почетната функционална равенка имаме $xy+f(x)=yf(x)+x$, односно $(y-1)(f(x)-x)=0$. Со оглед на тоа дека $y>1$, добиваме дека $f(x)=x$ за сите $x\in\mathbb{R}^+$. **(1п)**

3° $k<1$
Заменувајќи $1-k$ за x во (2) имаме $f(k-k^2+1)=1=f(k)$, што според (1) имплицира $k-k^2+1=k$ т.е. $k^2=1$ (што противречи на $0<k<1$) или пак $k-k^2+1=\frac{1}{k}$, што е еквивалентно со $(k-1)^2(k+1)=0$ (но ова повторно противречи на $0<k<1$). **(1п)**

Оттука, единственото можно решение на дадената функционална равенка е $f(x)=x$. Лесно се проверува дека идентичната функција ја задоволува равенката. **(1п)** □

Трет начин. Бирајќи $y=1$ добиваме $f(x+f(x))=x+f(x)$. Оттука, постои $u\in\mathbb{R}^+$ таков што $f(u)=u$. **(2п)** Заменувајќи $x=u$ во дадената равенка добиваме дека: $f(u(y+1))=u(y+1)$ за секое $y\in\mathbb{R}^+$; ова имплицира дека $f(v)=v$ за секој $v>u$. **(2п)** Сега за произволни x и $y>\max\{1,\frac{u}{x}\}$, бидејќи $xy+f(x)>u$, добиваме:

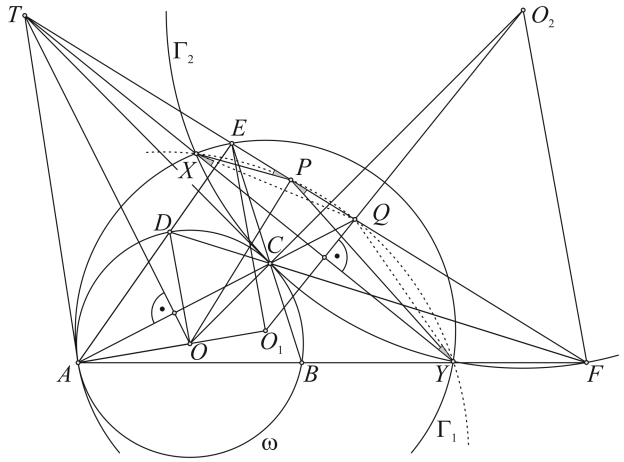
$$xy + f(x) = f(xy + f(x)) = yf(x) + x\,.$$

Ова е еквивалентно со $(y-1)(f(x)-x) = 0$, а како $y > 1$, заклучуваме дека $f(x) = x$ за секој $x \in \mathbb{R}^+$. **(2п)** Лесно се проверува дека идентичната функција ја задоволува дадената функционална равенка. **(1п)** □

Задача 3. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник впишан во кружницата ω со центар O. Правите AD и BC се сечат во точка E, а правите AB и CD се сечат во точка F. Нека P е точка на отсечката EF таква што $OP \perp EF$. Кружницата Γ_1 минува низ точките A и E при што ја допира ω во A. Кружницата Γ_2 минува низ точките C и F при што ја допира ω во C. Ако Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките X и Y, докажете дека PO е симетрала на $\angle XPY$.

Решение. Ќе дадеме два начини на решавање.

Прв начин. Нека O_1 и O_2 се центрите на Γ_1 и Γ_2, соодветно, и нека Q е пресечната точка на AC и EF. Од сличностите $\triangle AOD \sim \triangle AO_1E$ и $\triangle COD \sim \triangle CO_2F$ (рамнокраки триаголници со заеднички агол) добиваме дека $DO \parallel EO_1 \parallel FO_2$. Овие три прави се сечат во бесконечна точка, што значи дека триаголниците $\triangle OO_1O_2$ и $\triangle DEF$ се перспективни. Од теоремата на Дезарг, заклучуваме дека Q е на O_1O_2. **(2п)** Бидејќи O_1O_2 е симетралата на XY, заклучуваме дека $\triangle XYQ$ е рамнокрак и дека $\angle QXY = \angle XYQ$. **(1п)**



Нека T е пресекот на тангентите на ω повлечени во точките A и C. Од дефинициите на Γ_1 и Γ_2, имаме дека T е радикалниот центар на тројката кружници ω, Γ_1 и Γ_2. Поради тоа T, X и Y се колинеарни. Од теоремата на Паскал, применета на дегенерираниот шестаголник $AABCCD$, добиваме дека E, F и T се колинеарни. Заради тоа, точките T, P и Q исто така се колинеарни. **(1п)**

Бидејќи $\angle OAT = \angle OCT = \angle OPT = 90°$, точките A, O, C, P и T лежат на иста кружница. Оттука

$$\angle PCT = \angle POT = \angle 90° - \angle PTO = \angle CQT. \ (OT \perp CQ)$$

Следствено, $\triangle TCP \sim \triangle TQC$, што ни дава $TP \cdot TQ = TC^2 = TX \cdot TY$. Заклучуваме дека точките X, Y, P и Q се на иста кружница. **(1п)** Имајќи предвид дека $\angle QXY = \angle XYQ$, добиваме $\angle QPY = \angle QXY = \angle XYQ = \angle EPX$. Така, бидејќи $OP \perp EF$, аглите $\angle XPO$ и $\angle OPY$ се еднакви. Значи правата PO е симетралата на $\angle XPY$. **(2п)** □

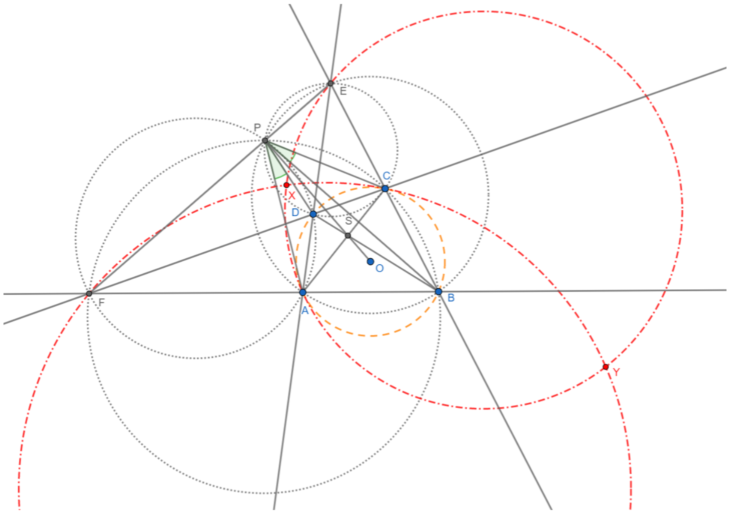
Втор начин. Нека Ψ е инверзијата во однос на ω. Да претпоставиме дека дијагоналите AC и BD се сечат во S. Нека $\Psi(S) = S'$. Ќе докажеме дека $S' = P$. Забележуваме дека $OS \cdot OS' = OD^2 = OC^2$, што значи дека OD е тангента на $\odot SDS'$ и OC е тангента на $\odot SCS'$. Оттука добиваме

$$\angle CS'D = \angle CS'S + \angle DS'S = \angle OCA + \angle ODB =$$

$$90^\circ - \angle ABC + 90^\circ - \angle BAD = \angle CED.$$

Значи S' лежи на $\odot CED$. Слично покажуваме дека S' е на $\odot AFD$. Затоа S' е Микеловата точка на четириаголникот $ABCD$, па следува дека S' лежи на $\odot ABE$ и $\odot BCF$.

Од теоремата на Брокар, правата EF е полара за точката S. По дефиниција, поларата на S е правата што минува низ S' и е нормална на OS. Тоа значи дека S' лежи на EF и дека OS' е нормална на EF, па S' мора да се совпаѓа со P. Заклучуваме дека P е Микеловата точка од $ABCD$. **(3п)**



Специјално, P е центарот на спиралната сличност што го праќа $\triangle APD$ во $\triangle BPC$. Тоа значи дека $\angle APD = \angle BPC$ и $\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP}$, па $AP \cdot CP = BP \cdot DP = r^2$ за некое $r > 0$. Нека Φ е композицијата на инверзијата со центар во точката P и радиус r заедно со осната симетрија во однос на симетралата на $\angle BPD$.

Да забележиме дека $BP \cdot DP = r^2$ повлекува $\Phi(B) = D$ и обратно. Исто така имаме дека $AP \cdot CP = r^2$. Уште повеќе, $\angle APD = \angle BPC$ повлекува дека аглите $\angle APC$ и $\angle BPD$ имаат иста симетрала, па добиваме и дека $\Phi(A) = C$ и обратно. Така имаме $\Phi(\omega) = \Phi(\odot ABCD) = \odot\Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)\Phi(D) = \odot CDAB = \omega$, па ω е фиксна при Φ. **(2п)**

Сега да забележиме дека $\Phi(AD)$ е кружница што минува низ P, $\Phi(A) = C$ и $\Phi(D) = B$, па мора да важи $\Phi(AD) = \odot BCF$, затоа што P е Микеловата точка од $ABCD$. Слично, имаме дека $\Phi(BC) = \odot ADF$. Од $E \in AD \cap BC$ добиваме дека $\Phi(E) \in \odot BCF \cap \odot ADF$, што заедно со $\Phi(E) \neq P$ ни дава $\Phi(E) = F$. Оттука имаме и $\Phi(F) = E$, затоа што Φ е инволуција. Покрај тоа, симетралата на $\angle BPD$ е и симетрала на $\angle EPF$, па мора да биде нормална на правата EF. Со други зборови, симетралата на аголот $\angle BPD$ е правата PO.

Конечно, ќе докажеме дека $\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Имаме дека $A, E \in \Gamma_1$, па $\Phi(A) = C \in \Phi(\Gamma_1)$, $\Phi(E) = F \in \Phi(\Gamma_1)$. Знаеме и дека Γ_1 ја допира ω во A, но ω е фиксна при Φ и $\Phi(A) = C$, па $\Phi(\Gamma_1)$ ја допира ω во C. Оваа кружница е единствена (заедно со условот дека ја содржи точката F), па затоа $\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Користејќи дека Φ е инволуција исто така ни дава $\Phi(\Gamma_2) = \Gamma_1$.

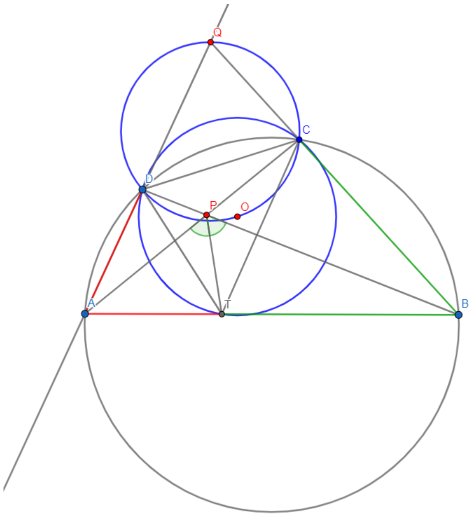
Сега ако $X \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, имаме дека $\Phi(X) \in \Phi(\Gamma_1) \cap \Phi(\Gamma_2) = \Gamma_2 \cap \Gamma_1$. Но $\Phi(X) \neq X$, па $\Phi(X) = Y$ и $\Phi(Y) = X$. Тоа значи дека симетралата на $\angle XPY$ е и симетрала на $\angle BPD$, што е всушност правата PO. **(2п)** $\square$

Задача 4. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што $AB = AD + BC$ и $CD < AB$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка P, а правите AD и BC се сечат во точка Q. Симетралата на $\angle APB$ ја сече страната AB во точка T. Докажете дека центарот на опишаната кружница на $\triangle CTD$ лежи на опишаната кружница на $\triangle CQD$.

Решение. Нека T' е точка на отсечката AB така што важи $AT' = AD$. Тогаш условот $AB = AD + BC$, заедно со $AB = AT' + BT'$ и $AT' = AD$, ни дава $BT' = BC$. **(1п)** Триаголниците ADP и BCP се слични **(1п)**, бидејќи $ABCD$ е тетивен. Следствено,

$$\frac{AT'}{BT'} = \frac{AD}{BC} = \frac{AP}{BP} = \frac{AT}{BT},$$

каде последното равенство се добива од теоремата за симетрала на агол. **(1п)** Заклучуваме дека $T' = T$. **(1п)** Значи, триаголникот TAD е A-рамнокрак, додека триаголникот TBC е B-рамнокрак. Нека $\angle BAQ = 2x$ и $\angle ABQ = 2y$. Да го означиме со O центарот на опишаната кружница на триаголникот CTD.



Имаме:

$$\angle COD = 2 \cdot \angle CTD = 2 \cdot (180° - \angle ATD - \angle BTC)$$

$$= 2 \cdot (180° - (90° - x) - (90° - y)) = 2x + 2y.$$

Да забележиме и дека $\angle CQD = 180° - 2x - 2y$. Оттука, $\angle COD + \angle CQD = 180°$. **(2п)** Ова кажува дека центарот O на опишана кружница на триаголникот CTD лежи на опишаната кружница на триаголникот CQD, што и се бараше да се докаже. **(1п)** □

Забелешки за распределбата на поените:

1. Вториот поен може да се додели и само ако се констатира наведената сличност, без да се изведе пропорцијата меѓу страните на двата триаголници. Изведување на истата пропорција не носи екстра поени.
2. Третиот поен се доделува за користење или барем наведување на теоремата за симетрала на агол, независно од тоа дали е поврзана со дефинираната точка T'.
3. Наоѓање на било кој од аглите $\angle COD$ и $\angle CQD$ носи поен. Наоѓање на двата агла носи два поена, како што е наведено.
4. Заклучокот врз основа на збирот на агли носи еден поен. Заклучокот на било кој (точен) алтернативен начин го носи истиот поен.

Задача 5. Во едно училиште со 1000 ученици, секој ученик има точно четири пријатели. За група од три ученика велиме дека е *пријателска тројка* ако секои двајца од групата се пријатели. Одредете го најголемиот можен број на пријателски тројки во училиштето.

Решение. Ќе докажеме дека одговорот е 2000. Најпрво докажуваме дека овој број е достижен. Доколку во училиштето постојат 200 попарно дијсунктни групи од по 5 ученика, при што два ученика се пријатели ако и само ако се во иста група, тогаш бројот на пријателски тројки изнесува

$$\binom{5}{3} \cdot 200 = 2000. \quad \textbf{(1п)}$$

Да докажеме дека не е можно да има повеќе од 2000 пријателски тројки во училиштето. Нека T е вкупниот број на пријателски тројки. Со N го означуваме бројот на парови (t, p), каде t е пријателска тројка и p е (неподреден) пар на пријатели во таква тројка.

Секоја пријателска тројка $\{A, B, C\}$ допринесува со 3 во бројот N (бидејќи дава точно три пара пријатели: $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ и $\{A, C\}$). Оттука имаме дека $N = 3T$. **(1п)**

Да фиксираме еден пар пријатели $p = \{A, B\}$. Тврдиме дека p учествува во не повеќе од три пријателски тројки. Навистина, ако p учествува во барем 4 пријателски тројки, тогаш постојат (различни) ученици $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq B$ кои се пријатели со A. Меѓутоа, B е исто така пријател со A, па A би имал 5 пријатели, што не е можно. Затоа, секој пар на пријатели p е дел од најмногу 3 пријателски тројки. **(1п)**

Нека P е вкупниот број на парови p (од двајца пријатели). Ако го броиме N по втората компонента (т.е. по парови пријатели) и го искористиме фактот дека секој пар учествува во најмногу 3 пријателски тројки, добиваме $N \leq P \cdot 3 = 3P$. Заклучуваме дека

$$3T = N \leq 3P \text{ и оттука } T \leq P. \quad \textbf{(2п)}$$

Од друга страна, P може едноставно да се пресмета. Имено, означувајќи го со d_i бројот на пријатели на i-тиот ученик ($i = 1, 2, ..., 1000$), имаме $d_i = 4$ за секое i. Оттаму

$$4 \cdot 1000 = d_1 + d_2 + ... + d_{1000} = 2P\,,$$

бидејќи секој пар на пријатели го броиме точно два пати во збирот $d_1 + d_2 + ... + d_{1000}$. Ова ни дава $P = 2000$. Значи $T \leq P = 2000$, што и сакавме да докажеме **(2п)**. □

Задача 6. Нека $\mathbb{N}$ е множеството позитивни цели броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што:

- За секој позитивен цел број $a > 2023^{2023}$ важи $f(a) \leq a$.
- За секои $a, b \in \mathbb{N}$ количникот $\frac{a^2 f(b) + b^2 f(a)}{f(a) + f(b)}$ е цел број.

Решение. Да забележиме дека идентичната функција, $f(a) = a$ за секој $a \in \mathbb{N}$, е едно решение. Вториот услов може да се запише вака:

$$f(a) + f(b) | a^2 f(b) + b^2 f(a).$$

Забележуваме дека важи и:

$$f(a) + f(b) | a^2 f(a) + a^2 f(b).$$

Оттука добиваме:

$$f(a)+f(b)|(b^2-a^2)f(a)=(a^2f(b)+b^2f(a))-(a^2f(a)+a^2f(b)),$$

за сите позитивни цели броеви a и b. Нека $p>2$ е непарен прост број. Тогаш $2|p-1$ и $2|p+1$. Избираме $b=\frac{p+1}{2}$ и $a=\frac{p-1}{2}$, со што добиваме:

$$f\left(\frac{p-1}{2}\right)+f\left(\frac{p+1}{2}\right) \mid p\cdot f\left(\frac{p-1}{2}\right). \quad \textbf{(1п)}$$

Тоа значи дека постои позитивен цел број k_p (зависен од p) таков што:

$$p\cdot f\left(\frac{p-1}{2}\right)=k_p\cdot f\left(\frac{p-1}{2}\right)+k_p\cdot f\left(\frac{p+1}{2}\right)>k_p\cdot f\left(\frac{p-1}{2}\right).$$

Следствено, $0<k_p<p$, па p и k_p се заемно прости. Сега користејќи дека

$$p\Big|k_p\left[f\left(\frac{p-1}{2}\right)+f\left(\frac{p+1}{2}\right)\right]$$

имаме:

$$p\Big|f\left(\frac{p-1}{2}\right)+f\left(\frac{p+1}{2}\right). \quad \textbf{(2п)}$$

Избираме произволен прост број $p>2\cdot 2023^{2023}+1$ (ваков прост број постои бидејќи има бесконечно многу прости броеви). Тогаш истовремено важат неравенствата $\frac{p-1}{2}>2023^{2023}$ and $\frac{p+1}{2}>2023^{2023}$. Со тоа добиваме: $f\left(\frac{p-1}{2}\right)\le\frac{p-1}{2}$ и $f\left(\frac{p+1}{2}\right)\le\frac{p+1}{2}$. Од

$$p\Big|f\left(\frac{p-1}{2}\right)+f\left(\frac{p+1}{2}\right)\le\frac{p-1}{2}+\frac{p+1}{2}=p$$

заклучуваме дека ова е возможно само ако $f\left(\frac{p-1}{2}\right)=\frac{p-1}{2}$ и $f\left(\frac{p+1}{2}\right)=\frac{p-1}{2}$. Бидејќи постојат бесконечно прости броеви $p>2023^{2023}$, имаме и бесконечно броеви од облик $t_p=\frac{p-1}{2}$ такви што $f(t_p)=t_p$. **(2п)**

За крај, фиксираме позитивен цел број a. За доволно големо p, имаме дека $f(t_p)=t_p$. Затоа, од вториот услов во задачата применет за $b=t_p$ ги добиваме следниве врски:

$$f(a)+t_p\big|a^2t_p+t_p^2f(a)$$

$$f(a)+t_p\big|t_pf(a)^2+t_p^2f(a)$$

$$f(a)+t_p\big|t_p\cdot|a^2-f(a)^2|$$

$$f(a)+t_p|f(a)\cdot|a^2-f(a)^2|.$$

Ако избереме прост број p таков што $p>2\cdot 2023^{2023}+1$ и $p>2\cdot f(a)\cdot|a^2-f(a)^2|+1$, добиваме дека $f(a)+t_p>f(a)\cdot|a^2-f(a)^2|$. Бидејќи $f(a)\cdot|a^2-f(a)^2|$ се дели со $f(a)+t_p$, претходното е возможно ако и само ако $|a^2-f(a)^2|=0$, што е еквивалентно со $f(a)=a$. Со оглед на произволноста на a, заклучуваме дека $f(a)=a$ за секое $a\in\mathbb{N}$. **(2п)** □