



понеделник, 19. јули 2021

Задача 1. Нека $n \geq 100$ е цел број. Иван ги запишал броевите $n, n+1, \dots, 2n$ секој на различна карта. Потоа ги измешал овие $n+1$ карти и ги поделил во две купчиња. Докажи дека барем во едно од овие две купчиња постојат две карти такви што збирот на нивните броеви е полн квадрат.

Задача 2. Докажи дека неравенството

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

важи за секои реални броеви $x_1, \dots, x_n$.

Задача 3. Нека D е внатрешна точка во остроаголен триаголник ABC за кој $AB > AC$, така што $\angle DAB = \angle CAD$. За точката E на отсечката AC важи $\angle ADE = \angle BCD$, за точката F на отсечката AB важи $\angle FDA = \angle DBC$ и за точката X на правата AC важи $CX = BX$. Нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници на триаголниците ADC и EXD , соодветно. Докажи дека правите BC , EF и O_1O_2 се сечат во една точка.



вторник, 20. јули 2021

Задача 4. Нека Γ е кружница со центар I и $ABCD$ е конвексен четириаголник така што секоја од отсечките AB , BC , CD и DA е тангента на Γ . Нека Ω е опишаната кружница околу триаголникот AIC . Продолжението на BA преку A ја сече Ω во точката X и продолжението на BC преку C ја сече Ω во точката Z . Продолженијата на AD и CD преку D ја сечат Ω во точките Y и T , соодветно. Докажи дека

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Задача 5. Две верверички, Бушавко и Скокалко, собрале 2021 ореви за зимата. Скокалко ги нумерирал оревите од 1 до 2021 и ископал 2021 дупчиња наредени во кружна форма околу неговото омилено дрво. Следното утро Скокалко забележал дека Бушавко ставил по еден орев во секое дупче, но не внимавал на нумерирањето. Незадоволен од тоа, Скокалко одлучил да ги пререде оревите со помош на низа од 2021 чекори така што во k -тиот чекор, Скокалко ги заменува позициите на двата ореви соседни до оревот нумериран со k . Докажи дека постои k така што во k -тиот чекор, Скокалко заменува некои ореви нумерирани со a и b за кои $a < k < b$.

Задача 6. Нека $m \geq 2$ е цел број, A е конечно множество од цели броеви (кои не мора да бидат позитивни) и $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ се подмножества од A . Да претпоставиме дека за секој $k = 1, 2, \dots, m$ збирот на елементите од B_k е m^k . Докажи дека A содржи барем $m/2$ елементи.



Monday, 19. July 2021

Problem 1. Let $n \geq 100$ be an integer. Ivan writes the numbers $n, n+1, \dots, 2n$ each on different cards. He then shuffles these $n+1$ cards, and divides them into two piles. Prove that at least one of the piles contains two cards such that the sum of their numbers is a perfect square.

Problem 2. Show that the inequality

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

holds for all real numbers $x_1, \dots, x_n$.

Problem 3. Let D be an interior point of the acute triangle ABC with $AB > AC$ so that $\angle DAB = \angle CAD$. The point E on the segment AC satisfies $\angle ADE = \angle BCD$, the point F on the segment AB satisfies $\angle FDA = \angle DBC$, and the point X on the line AC satisfies $CX = BX$. Let O_1 and O_2 be the circumcentres of the triangles ADC and EXD , respectively. Prove that the lines BC , EF , and O_1O_2 are concurrent.



Tuesday, 20. July 2021

Problem 4. Let Γ be a circle with centre I , and $ABCD$ a convex quadrilateral such that each of the segments AB , BC , CD and DA is tangent to Γ . Let Ω be the circumcircle of the triangle AIC . The extension of BA beyond A meets Ω at X , and the extension of BC beyond C meets Ω at Z . The extensions of AD and CD beyond D meet Ω at Y and T , respectively. Prove that

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problem 5. Two squirrels, Bushy and Jumpy, have collected 2021 walnuts for the winter. Jumpy numbers the walnuts from 1 through 2021, and digs 2021 little holes in a circular pattern in the ground around their favourite tree. The next morning Jumpy notices that Bushy had placed one walnut into each hole, but had paid no attention to the numbering. Unhappy, Jumpy decides to reorder the walnuts by performing a sequence of 2021 moves. In the k -th move, Jumpy swaps the positions of the two walnuts adjacent to walnut k .

Prove that there exists a value of k such that, on the k -th move, Jumpy swaps some walnuts a and b such that $a < k < b$.

Problem 6. Let $m \geq 2$ be an integer, A be a finite set of (not necessarily positive) integers, and $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ be subsets of A . Assume that for each $k = 1, 2, \dots, m$ the sum of the elements of B_k is m^k . Prove that A contains at least $m/2$ elements.