РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, ОДРЖАН ВО 1962 ГОД.

Први клас

1. Да се докаже:

$$\frac{\frac{x-a}{1+ax}-\frac{x-b}{1+bx}}{1+\frac{(x-a)(x-b)}{(1+ax)(1+bx)}}=\frac{b-a}{1+ab}.$$

2. Во триаголникот ABC, чии агли се α, β, γ, е повлечена правата AM, нормална на симетралата на аголот γ, која ја сече страната BC во M.

Да се докаже:

а) Дека триаголникот AMC е рамнокрак и дека аглите при неговата основа се рамни на $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

б) Дека аголот при A на триаголникот ABM е или $\frac{\alpha-\beta}{2}$ или $\frac{\beta-\alpha}{2}$, според тоа дали е $\alpha>\beta$ или $\alpha<\beta$.

Што може да се каже за триаголниците AMC и AMB, ако е $\alpha=\beta$?

3. Да се конструира триаголникот ABC, ако се дадени:

а) Страните AC и BC и висината која минува низ темето C.

б) Страните AC и BC и висината која минува низ темето B.

Извршената постапка треба да се искаже со зборови.

Втори клас

1. Да се докаже дека е:

$$\left[\frac{1-\sqrt{a}}{\frac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}-\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt[4]{a^{-1}}+\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a^{-1}}}-\sqrt{a}}\right]^5=1.$$

2. Два круга, чии центри C_1 и C_2 се наоѓаат секој на по еден крак на прав агол и се оддалечени од неговото теме O за $\overline{OC_1}=8$ cm и $\overline{OC_2}=11$ cm, се движат кон темето со брзините $v_1=2$cm/sek и $v_2=4$ cm/sek. По колку секунди тие кругови ќе се допрат? Радиусите на круговите се $r_1=4$cm, $r_2=1$cm.

3. Два круга, чии центри се наоѓаат во точките O_1 и O_2, а радиусите им се r_1 и r_2, се сечат во точките S_1 и S_2.

Да се докаже:

а)Отсечките на тангентите, повлечени од некоја точка Т на заедничката сечица S_1S_2 на круговите имаат еднаква должина.

б)Дека сечицата S_1S_2 го полови оној дел од заедничката тангента на круговите,кој се наоѓа меѓу допирните точки P_1 и P_2 на тангентата.

Трети клас

1. Какво треба да биде p во неравенката

$$x^2+px+1 > 0$$

за да биде оваа неравенка задоволена за сите реални вредности на x? Ако p не го задоволува претходниот услов, за кои вредности на x ќе биде задоволена дадената неравенка?

2. Едно дете,кое стои на рамно земјиште пред една кула,чија висина е 16m, го гледа подножјето на кулата под агол на депресија од 15^0,а врвот на кулата под агол на елевација од 75^0. Да се најде хоризонталното растојание од детето до кулата без употреба на таблици.

3. Да се реши системот

$$x^{\log x}.y^{\log y} = 100000,\ 1-\log\frac{y}{x} = 0.$$

Четврти клас

1. Страните на еден триаголник се три последователни броја, а најмалиот агол е половина од најголемиот агол на триаголникот.Да се најдат страните на триаголникот.

2. Во еден рамнокрак триаголник,со основа a=4cm и висина што одговара на основата h=2 cm ,е впишан правоаголник така што неговата основа лежи на основата на триаголникот.Да се изрази плоштината на правоаголникот како функција од неговата основа и да се нацрта графикот на таа функција. Која е максималната вредност на таа плоштина?

3. Да се докаже дека збирот на нормалите,спуштени од било која точка на внатрешноста на еден рамностран триаголник на си-

те три негови страни е сталес и еднаков на висината од триаголникот.

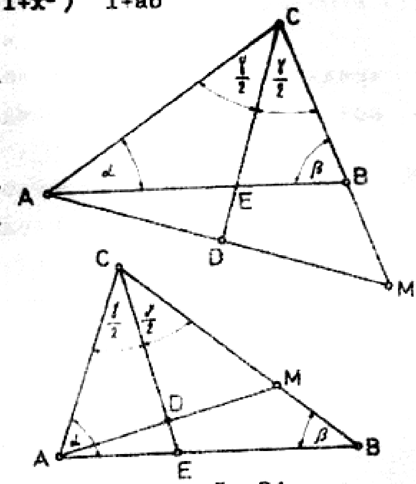
РЕШЕНИЈА

Први клас

1.

$$\frac{\frac{x-a}{1+ax}-\frac{x-b}{1+bx}}{1+\frac{(x-a)(x-b)}{(1+ax)(1+bx)}}=\frac{(x-a)(1+bx)-(x-b)(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)+(x-a)(x-b)}=$$

$$=\frac{bx^2-ax^2-a+b}{1+abx^2+x^2+ab}=\frac{(b-a)(1+x^2)}{(1+ab)(1+x^2)}=\frac{b-a}{1+ab}.$$



Сл.24 а

2.а) $\Delta ADC \cong \Delta MCD$ (сл.24), затоа што е:

$CD=CD$, $\sphericalangle ACD=\sphericalangle MCD$, $\sphericalangle ADC=\sphericalangle MDC$.

Од складноста на тие триаголници следува дека и $AC=MC$, односно и $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CMD$.

Поради тоа е:

$$\sphericalangle CAD=\sphericalangle CMD=\frac{180-\gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

б) Ако е $\alpha>\beta$, тогаш е:

$$\sphericalangle MAB=\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ако е $\alpha<\beta$, тогаш е:

$$\sphericalangle MAB=\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Ако е $\alpha=\beta$, тогаш триаголникот AMC се совпаѓа со ΔABC, а ΔAMB преоѓа во отсечката AB.

3.а) Се повлекува полуправа со почеток во точката A и права (p), паралелна со неа на растојание h_c. Потоа се опишува кругот $(A,\overline{AC})$. Пресекот на тој круг со правата (p) е темето C на бараниот триаголник ABC. Третото теме B на триаголникот е пресек на кругот $(C,\overline{CB})$ со зракот, чиј почеток е во A.

Ако е $AC>h_c$ и $BC>h_c$, задачата има две решенија. Ако е $AC=h_c$, $BC>h_c$ или ако е $AC>h_c$, $BC=h_c$, задачата има едно решение. Во спротивен случај задачата нема решенија.

б)Се повлекува една права и на неа се нанесува страната AC , а на растојание од неа,еднакво на дадената висина h_b се повлекува една со неа паралелна права (p). Потоа се опишува кругот $(C,\overline{CB})$. Пресекот на тој круг со правата (p) е третото теме B на триаголникот ABC.

Задачата за $BC>h_b$ има две решенија, за $BC=h_b$ има едно решение и за $BC<h_b$ нема решение.

Втори клас

1.

$$\left[\frac{1-\sqrt{a}}{\frac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}-a}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt[4]{a^{-1}}+\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a^{-1}}}-\sqrt{a}}\right]^5=\left[\frac{1-\sqrt{a}}{\frac{1-\sqrt[4]{a^3}-\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt[4]{a^{-1}}+\sqrt[4]{a^2}-\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{1+\sqrt[4]{a^{-1}}}}\right]^5=$$

$$=\left[\frac{(1-\sqrt{a})(1-\sqrt[4]{a})}{1-\sqrt{a}}\cdot\frac{1+\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}\right]^5=\left[(1-\sqrt[4]{a})\cdot\frac{1+\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}\right]^5=\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^5=1.$$

2. Кога круговите ќе се допрат,централното растојание им е $r_1+r_2=1+4=5$. Таа отсечка е хипотенуза на еден правоаголен триаголник чии темиња се центрите на круговите и темето на правиот агол.

Од Питагорината теорема следува:

$$(\overline{OC}_1-v_1t)^2+(\overline{OC}_2-4t)^2=25,$$

$$(8-2t)^2+(11-4t)^2=25,$$

$$t^2-6t+8=0,$$

од каде што е $t_1=4$, $t_2=2$.

Круговите ќе се допрат по две секунди.

3.а)Допирните точки на тангентите,повлечени од точката T (сл.25) до круговите (O_1,r_1) и (O_2,r_2) нека се D_1 и D_2 .

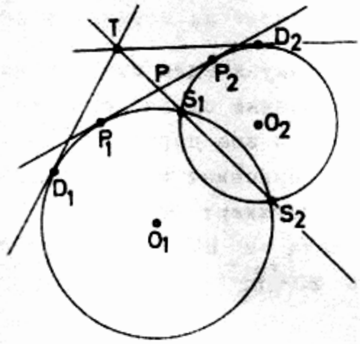
Бидејќи е

$$\overline{TS}_1\cdot\overline{TS}_2=\overline{TD}_1^2 \qquad \overline{TS}_1\cdot\overline{TS}_2=\overline{TD}_2^2,$$

следува:

$TD_1 = TD_2$.

б)Специјален случај од а) имаме кога двете тангенти се совпаѓаат во една заедничка тангента на тие кругови. Ако P е пресечната точка на таа тангента со сечицата S_1S_2 , тогаш е $\overline{PP}_1 = \overline{PP}_2$.



Сл.25

Трети клас

1. Неравенката $x^2+px+1>0$ е задоволена за сите реални вредности на x ако е дискриминантата на квадратната равенка $x^2+px+1=0$ негативна или еднаква со нула, што значи за $p-4>0$, т.е. за $-2\leqslant p\leqslant 2$.

Ако е $p^2-4>0$, т.е. $p<-2$ и $p>2$, тогаш дадената неравенка е задоволена за:

$$x<\frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2} \quad x>\frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2}.$$

2. Нека x е хоризонталното растојание од детето до кулата, а y висина на детето (сл.26). Од ΔADD_1 следува:

$$\frac{16-y}{x} = tg75^\circ, \qquad (1)$$

а од ΔADD_1 се добива

$$\frac{y}{x} = tg15^\circ. \qquad (2)$$

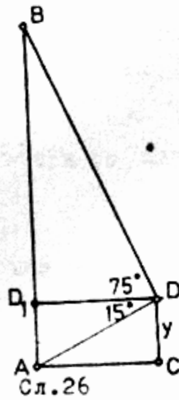
Од равенките (1) и (2) следува:

$$x(tg15^\circ+tg75^\circ) = 16.$$

$$\frac{\sin(15^\circ+75^\circ)}{\cos15^\circ.\cos75^\circ}x = 16, \quad \frac{2}{\sin30^\circ}\,x = 16.$$

Значи

$4x=16,\ x=4$.



Сл.26

3. Ако ја логаритмуваме првата равенка на дадениот систем, тој ќе се трансформира во еквивалентен на него систем

$$(\log x)^2+(\log y)^2=5, \quad 1-\log y+\log x=0.$$

Ако ставиме:

$$\log x=u,\ \log y=v,$$

добиваме

$$u^2+v^2=5,\ 1-v+u=0,$$

од каде што се доаѓа до решенијата:

$$u_1=1,\ v_1=2 \text{ и } u_1=2,\ v_2=-1.$$

Ако се вратиме на променливите x и y добиваме:

$$\log x=1,\ x_1=10 \text{ и } \log y=2,\ y_1=100;$$

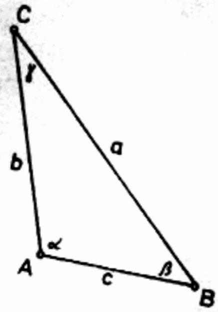
$$\log x=2,\ x_2=100 \text{ и од } \log y=-1,\ y_2=\frac{1}{10}.$$

Четврти клас

Во триаголникот ABC нека е $a>b>c$ и нека е, според тоа, $\alpha=2\gamma$.

По синусната теорема имаме:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\beta} \text{ или } a=2c\cos\gamma. \quad (1)$$



Сл.27

По косинусната теорема имаме:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \quad (2)$$

Од равенките (1) и (2) следува:

$$c^2=a^2+b^2-\frac{a^2b}{c},$$

т.е.

$$c^3=a^2c+b^2c-a^2b,$$

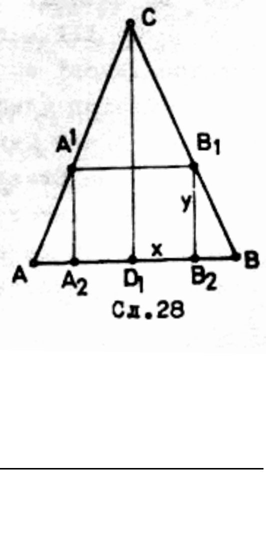
од каде што се добива:

$$a^2=c(b+c). \quad (3)$$

Ако ставиме: $a=x+1$, $b=x$, $c=x-1$, тогаш од докажаната врска (3) следува: $x_1=0$, $x_2=5$.

Според тоа страните на триаголникот се: $a=6$, $b=5$ и $c=4$.

2. Основата на правоаголникот $A_2B_2B_1A_1$ да ја обележиме со x, а неговата висина нека е y (сл.28). Површината на правоаголникот е $P=xy$.



Сл.28

Од сличноста $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ следува:

$$a:h=x:(h-y),$$

од каде што е

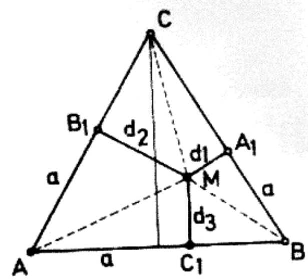
$$y=\frac{h(a-x)}{a} \text{ или } y=\frac{4-x}{2}.$$

Поради тоа плоштината на правоаголникот е:

$$P=\frac{x(4-x)}{2}=-\frac{1}{2}x^2+2x.$$

Бидејќи оваа плоштина претставува еден квадратен трином од x, нејзиниот график ќе претставува една парабола, чија оска е паралелна со P-оската, која е конкавна на долу, а чие теме се наоѓа во точката $T(2,2)$. Поради тоа и максималната вредност на површината ќе биде $P_{max}=2$.

3. Нека M е точка од внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC.(сл.29). Ако точката M ја сврземе со неговите темиња се добиваат триаголниците AMB, BMC и AMC. Нормалите, спуштени од точката M до страните на триаголникот ABC, се висини на тие триаголници. Збирот од плоштините на трите триаголници е еднаков со плоштината на ΔABC:



Сл.29

$$\frac{ad_1}{2}+\frac{ad_2}{2}+\frac{ad_3}{2}=\frac{ah}{2},$$

од каде што следува:

$$d_1+d_2+d_3=h.$$

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески