

**БМО 2005**

1. Впишаната кружница во триаголникот  $ABC$  ги допира страните  $AB$  и  $AC$  соодветно во точките  $D$  и  $E$ . Нека симетралите на аглите во темињата  $C$  и  $B$  ја сечат правата  $DE$  соодветно во точките  $X$  и  $Y$  и нека  $Z$  е средината на страната  $BC$ . Докажи, дека триаголникот  $XYZ$  е рамностран ако и само ако  $\angle A = 60^\circ$ .

**Решение.** Нека  $I$  е центарот на впишаната кружница. Од

$$\begin{aligned} \angle BIX &= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \angle ADX \end{aligned}$$

следува дека точките  $B, I, X, D$  лежат на иста кружница. Според тоа,

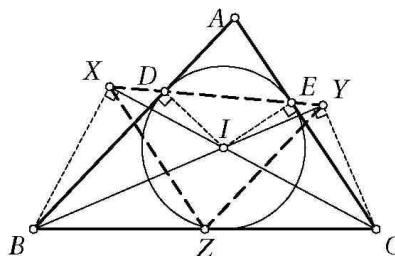
$$\angle BXI = \angle BDI = 90^\circ,$$

па затоа триаголникот  $BCX$  е правоаголен, што значи

$$\overline{ZX} = \overline{ZB} \text{ и } \angle ZXC = \angle ZCX = \angle XCA,$$

т.е.  $ZX \parallel AC$ . Аналогно  $\overline{ZY} = \overline{ZB}$  и  $ZY \parallel AB$ .

Конечно,  $\overline{ZX} = \overline{ZY}$  и  $\angle XZY = \angle A$ , од што следува тврдењето.



2. Определи ги сите прости броеви  $p$  за кои бројот  $p^2 - p + 1$  е точен куб.

**Решение.** *Прв начин.* Равенката  $p^2 - p + 1 = b^3$  можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1) = (b-1)(b^2 + b + 1).$$

Од  $b < p$  следува дека  $p \mid b^2 + b + 1$ , т.е.  $b^2 + b + 1 = kp$  и  $p-1 = k(b-1)$ , за некој цел број  $k > 1$ . Уште повеќе  $k \geq 3$  бидејќи  $b^2 + b + 1$  е непарен број. Сега  $p = kb - k + 1$  и

$$b^2 + b + 1 - kp = b^2 - (k^2 - 1)b + (k^2 - k + 1) = 0 \tag{1}$$

што е квадратна равенка по  $b$ . Нејзината дискриминаната

$$D = (k^2 - 1)^2 - 4(k^2 - k + 1) = k^4 - 6k^2 + 4k - 3$$

мора да биде точен квадрат. Сега од  $(k^2 - 3)^2 \leq D < (k^2 - 2)^2$ , следува  $D = (k^2 - 3)^2$ , па затоа  $k = 3$ . Конечно, од (1) следува  $b = 7$  и  $p = 19$  и тоа е единствено решение.

*Втор начин.* Равенката  $p^2 - p + 1 = b^3$  можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1) = (b-1)(b^2 + b + 1).$$

Од  $b < p$  следува дека  $p \mid b^2 + b + 1$ , т.е.  $b^2 + b + 1 = kp$  и  $p - 1 = k(b - 1)$ , за некој цел број  $k > 1$ . Оттука следува  $b^2 + b + 1 = k(k(b - 1) + 1)$ . Лесно се проверува дека  $k > 2$  и тогаш

$$b + 1 < \frac{b^2 + b + 1}{b} < k^2 < \frac{b^2 + b - 1}{b - 1} \leq b + 3.$$

Значи,  $k^2 = b + 2$ . Сега, последователно добиваме

$$\begin{aligned} b^2 + b + 1 &= k^2(b - 1) + k, \\ b^2 + b + 1 &= (b + 2)(b - 1) + k, \\ k &= 3, \end{aligned}$$

па затоа,  $b = 3^2 - 2 = 7$  и  $p = 3 \cdot (7 - 1) + 1 = 19$ .

3. Ако  $a, b, c$  се позитивни реални броеви докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Бидејќи  $\frac{a^2}{b} = 2a - b + \frac{(a-b)^2}{b}$ ,  $\frac{b^2}{c} = 2b - c + \frac{(b-c)^2}{c}$ ,  $\frac{c^2}{a} = 2c - a + \frac{(c-a)^2}{a}$ ,

даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{|a-b|^2}{b} + \frac{|b-c|^2}{c} + \frac{|c-a|^2}{a} \geq \frac{4|a-b|^2}{a+b+c}$$

Последното неравенство непосредно следува од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц

$$(a + b + c) \left( \frac{|a-b|^2}{b} + \frac{|b-c|^2}{c} + \frac{|c-a|^2}{a} \right) \geq (|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 \geq (2|a-b|)^2$$

бидејќи  $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$ . Знак за равенство важи ако и само ако  $|a-b| = kb$ ,  $|b-c| = kc$ ,  $|c-a| = ka$ , за некој  $k$  и  $|a-b| = |a-c| + |c-b|$ . Ако  $k \neq 0$ , од овие релации следува  $b = c + a$ , па затоа  $a = kc = k^2b$  и  $|\frac{1}{k} - 1|a = |c - a| = ka$  и лесно се добива дека  $k = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Ако  $k = 0$ , тогаш  $a = b = c$ . Според тоа, знак за равенство важи ако и само ако  $a = b = c$  или  $a : b : c = \phi^2 : 1 : \phi$ .

4. Нека  $n \geq 2$  е природен број и нека  $S$  е подмножество на множеството  $\{1, 2, \dots, n\}$  кое не содржи два заемно прости броја, ниту два броја од кои едниот е делител на другиот. Колку елементи може најмногу да има множеството  $S$  ?

**Решение.** За секој  $x \in S$  постои единствен  $k_x \in \mathbb{N}_0$  таков што  $\frac{n}{2} < 2^{k_x} x \leq n$ . Да означиме  $f(x) = 2^{k_x} x$ . Пресликувањето  $f$  е инјекција. Навистина, ако за

$x, y \in S$  важи  $f(x) = f(y)$ , тогаш или  $x \mid y$  или  $y \mid x$ , па според условот на задачата  $x = y$ . Според тоа, множеството  $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$  има ист број елементи како и множеството  $S$ . Притоа  $f(S)$  не содржи два последователни броја (бидејќи тие се заемно прости), па затоа  $|f(S)| \leq \left\lfloor \frac{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$ .

Од друга страна, множеството  $S = \{2i \mid \frac{n}{4} < i \leq \frac{n}{2}\}$  има точно  $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$  елементи и ги задоволува условите на задачата. Според тоа, одговорот е  $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$ .