Osječki matematički list 17 (2017), 63-69

Sparivanja na grafovima i Teorem o braku

Antoaneta Klobučar[*], Brigita Tot[†]

Sažetak

U članku je prikazan problem sparivanja na grafovima, specijalno na bipartitnim grafovima. Dokazan je kriterij za postojanje savršenog sparivanja i primijenjen je na primjeru sparivanja grupe mladića i djevojaka.

Ključne riječi: *graf, sparivanje na grafovima, bipartitni graf, Hallov teorem*

Matching in Graphs and Marriage Theorem

Abstract

This article describes matching in graphs, in particular in bipartite graphs. A criterium for existence of perfect matching is proved and applied to an example of matching in a group of boys and girls.

Keywords: *graph, matching in graphs, bipartite graphs, Hall's theorem*

Uvod

Pojam *graf* ima u matematici različita značenja. U teoriji grafova graf je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je $V = V(G)$ neprazan skup vrhova, $E = E(G)$ skup bridova, a svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$ koji se zovu krajevi od e. Kažemo da su u i v *susjedni* i pišemo $e = \{u, v\}$ ili kraće $e = uv$. Graf je *jednostavan* ako u njemu ne postoji petlja (brid koji povezuje neki vrh sa samim sobom), niti višestruki bridovi (takvi da svi povezuju isti par vrhova). U ovom članku promatrat ćemo samo jednostavne grafove.

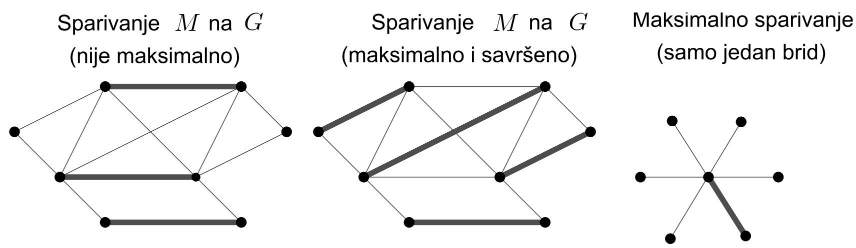
[*] Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: aneta@efos.hr

[†] Student na Odjelu za matematiku, Sveučilište u Osijeku

1 Sparivanje na grafovima

Sparivanje na grafu $G = (V, E)$ je skup bridova $M \subseteq E$ u kojemu nikoja dva brida nisu susjedna, tj. nemaju zajednički vrh. Kažemo da su vrhovi u, $v \in V$ međusobni *spareni* ako postoji brid $uv \in M$. Za vrh $u \in V$ kažemo da ga sparivanje M *zasićuje* ako on predstavlja kraj nekog brida iz M, tj. incidentan je s nekim bridom iz M. Očito u može pripadati samo jednom bridu $e \in M$ jer da ih je više, ti bi bridovi bili međusobno susjedni, što po definiciji sparivanja nije dozvoljeno.

Maksimalnim sparivanjem neki nazivaju sparivanje kojemu nije moguće dodati nijedan novi brid. Međutim, mi ćemo u daljnjem tekstu *maksimalnim sparivanjem* zvati takvo sparivanje M koje ima više (ili jednako mnogo) bridova od svakog drugog sparivanja M', tj. $|M| \geq |M'|$. Sparivanje zovemo *savršenim* ako je njime zasićen (uparen) svaki vrh iz G. To je moguće samo ako je broj $|V|$ paran i tada je $|M| = \frac{1}{2}V$. Graf može imati i više maksimalnih, odnosno više savršenih sparivanja.



Slika 1: primjeri sparivanja

Na lijevom dijelu slike je graf $G = (V, E)$ sa 8 vrhova i 13 bridova i na njemu sparivanje M sa 3 brida (koji su nacrtani podebljano). Jasno je da sparivanje M nije savršeno jer 3 brida zasićuju 6 vrhova, a ne 8 (na slici su nezasićeni krajnji lijevi i krajnji desni vrh). Sparivanju M ne možemo dodati nikakav novi brid jer od preostalih 10 bridova iz $E \backslash M$ svaki je susjedan nekom bridu iz M. Ipak, M nije maksimalno sparivanje jer u sredini slike imamo isti graf s novim sparivanjem koje ima čak 4 brida. Ovo novo sparivanje je i savršeno jer je zasitilo sve vrhove od G. Graf na desnom dijelu je tzv. *zvijezda*, posebno loš graf za sparivanje. Svi bridovi incidentni su jedino središnjem vrhu, pa svako sparivanje može imati samo jedan brid.

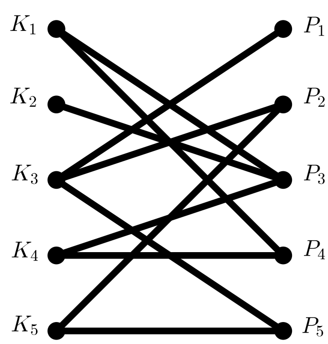
Put u grafu G je neprazan konačan niz $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \ldots e_k v_k$ koji se sastoji naizmjence od vrhova v_i i bridova e_i tako da su krajevi brida e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, a pritom su svi vrhovi v_i međusobno različiti. Na jednostavnim grafovima put se može kraće zapisati i samo navođenjem vrhova, dakle $v_0 v_1 v_2 v_3 \ldots v_k$. Ako imamo sparivanje M na G, onda svaki put kojemu bridovi naizmjence pripadaju skupovima M i $E \backslash M$ nazivamo *M-alternirajući* put. Bridove u takvom putu nazivamo *tamnima* ako su iz sparivanja M, a *svijetlima* ako su iz $E \backslash M$.

M-uvećani put je takav M-alternirajući put kojemu su krajevi M-nezasićeni. Dakle, on počinje i završava svijetlim bridovima. (A i ostali bridovi iz G koji iz ta dva vrha izlaze moraju biti svijetli ili ih uopće i nema.)

Teorem 1. Sparivanje M u grafu G je maksimalno ako i samo ako G ne sadrži M-uvećani put.
Dokaz je dao C. Berge [4].

2 Bipartitni grafovi

Od posebnog su interesa sparivanja u tzv. bipartitnim grafovima. Graf $G = (V, E)$ je *bipartitan* ako se V može podijeliti na dva disjunktna neprazna podskupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X i jedan u Y. Opisno rečeno, ne postoje bridovi unutar X, niti unutar Y, nego samo unakrsni bridovi između X i Y.



Slika 2: bipartitni graf

Slika 2 prikazuje bipartitan graf G sa 5 vrhova u jednoj skupini (K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5) i 5 vrhova u drugoj (P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5). Vrhovi K_i nisu međusobno povezani bridovima, kao ni vrhovi P_j međusobno. Ovaj graf bio bi dobar model za problem zapošljavanja radnika u tvornici. Recimo da tvornica ima 5 kandidata (vrhovi K_i) i 5 poslova koje treba obavljati (vrhovi P_i). Svaki je kandidat sposoban obavljati samo neke poslove, i to one koji su prikazani bridovima. Treba, ako je moguće, svakom kandidatu dodijeliti točno jedan posao (kojeg će obavljati samo on). Ova se dodjela mora provoditi vrlo pažljivo jer ako npr. kandidatu K_1 dodijelimo posao P_3, onda smo onemogućili zapošljavanje kandidata K_2 kojemu je P_3 bio jedini mogući posao. Umjesto ovoga, K_1 je imao i mogućnost rada na P_4.

Zapravo se u G traži sparivanje M koje bi zasitilo sve vrhove K_i. Naime, svaki brid iz M povezat će jednog kandidata s jednim poslom. A kako bridovi u M ne smiju biti susjedni, nijedan kandidat neće dobiti dva posla, niti će neka dva kandidata dobiti isti posao. Sljedeći teorem daje nužan i dovoljan uvjet za postojanje takvog sparivanja.

Za $S \subseteq V$ označimo sa $N(S)$ skup vrhova grafa $G = (V, E)$ koji su susjedni s barem jednim vrhom iz S.
Teorem 2 (P. Hall, 1935.) Neka je G bipartitan graf s biparticijom $X \sqcup Y$. Tada G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki vrh u X ako i samo ako je

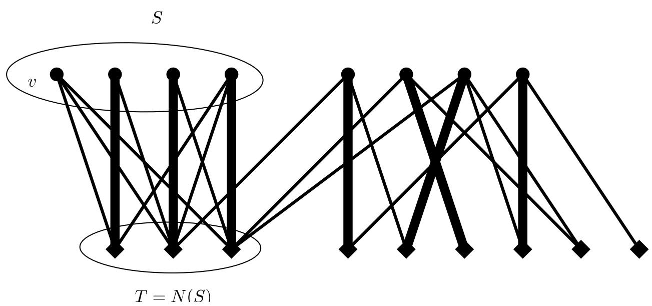
$$|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq X$$

Dokaz. $\Rightarrow$: Neka je M sparivanje koje zasićuje svaki vrh u X. Uzmimo proizvoljni $S \subseteq X$. Kako su vrhovi iz S spareni svaki s po jednim različitim vrhom iz $N(S)$, očito je $|N(S)| \geq |S|$.

$\Leftarrow$: Neka je G bipartitan graf u kojem vrijedi $|N(S)| \geq |S|$ za svaki podskup $S \subseteq X$, ali pretpostavimo da u G ipak nema sparivanja koje bi zasitilo sve vrhove iz X. Želimo dobiti kontradikciju. Neka je M' maksimalno sparivanje u G. Prema pretpostavci M' ne zasićuje sve vrhove u X, pa neka je v jedan M'-nezasićen vrh u X.

Definirajmo R kao skup koji se sastoji od vrha v i svih vrhova koji su povezani s v nekim M'-alternirajućim putom. Proučimo jedan takav put! Budući da nas ne zanimaju grafovi s izoliranim vrhovima, v je povezan s bar jednim vrhom $u \in Y$, i to svijetlim bridom jer je v neuparen. Vrh u je pak tamnim bridom uparen s nekim vrhom $v_1 \in X$, $v_1 \neq v$ (jer bismo ga inače mogli upariti sa v pa sparivanje M' ne bi bilo maksimalno). Ovaj postupak nastavljamo dok god je moguće, a pritom se nikad ne vraćamo u već upotrijebljene vrhove. Krajnja "stanica" ovog puta ne može biti u Y jer bi to bio svijetli brid, pa bismo dobili M'-uvećani put. Po teoremu 1 takav put u maksimalnom sparivanju ne smije postojati.

Tako je i sa svim ostalim M'-alternirajućim putovima iz v. Slijedi da je v jedini M'-nezasićeni vrh u svim tim putovima, pa stoga i u R. Stavimo $S = R \cap X$, $T = R \cap Y$ kao na slici 3.



Slika 3: uz dokaz Hallova teorema

Vrhovi iz $S \backslash \{v\}$ su preko M' spojeni samo s vrhovima u T pa je $|T| = |S| - 1$. Očito je $T \subseteq N(S)$. No postoji li bar neki vrh $z \in N(S) \backslash T$? Ne postoji. Naime, ako je z neuparen, onda je on krajnji vrh nekog M'-uvećanog puta. Ako je pak z M'-uparen, onda je on vrh nekog običnog (ne uvećanog) M'-alternirajućeg puta pa je $z \in T$. Stoga vrijedi $N(S) = T$. Iz prethodne dvije jednakosti slijedi $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$, a to je suprotno pretpostavci da je $|N(S)| \geq |S|$ za svaki $S \subseteq X$. ■

Zaključujemo da je na slici 2 sparivanje kandidata s poslovima nemoguće. Naime za skup $S = \{K_1, K_2, K_4\}$ imamo $N(S) = \{P_3, P_4\}$ i vidimo da je $|N(S)| < |S|$.

Korolar 1. Neka u bipartitnom grafu G vrijedi $|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq X$ i neka je $|X| = |Y|$. Tada u G postoji savršeno sparivanje.

Dokaz. Prema teoremu 2 postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X. Svaki od tih vrhova ima svog para iz Y, a kako je $|Y| = |X|$, onda nijedan vrh iz Y nije ostao nezasićen. ■

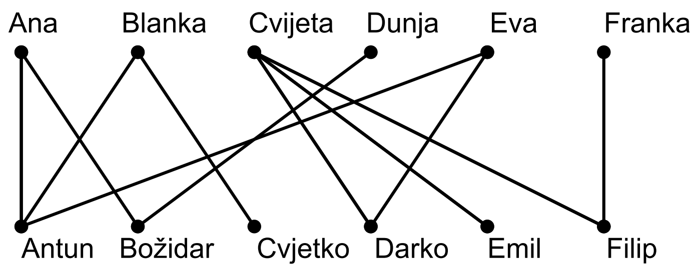
Vrijedi i obrat: ako postoji savršeno sparivanje, onda za proizvoljni $S \subseteq X$ vrijedi $|N(S)| \geq |S|$ (jer je svaki vrh iz S sparen s jedinstvenim vrhom iz $N(S)$) . A kako su njime zasićeni svi vrhovi iz X i Y, slijedi da je $|X| = |Y|$.

3 Teorem o braku i primjer

Teorem 3 (Teorem o braku) U selu postoji jednak broj mladića i djevojaka. Svaka djevojka poznaje točno k mladića, a svaki mladić točno k djevojaka. Tada se svi mladići i djevojke mogu savršeno spariti, tj. poženiti i poudati tako da svaki mladić dobije neku od djevojaka koje on poznaje, a svaka djevojka pak dobije nekog od mladića koje ona poznaje.

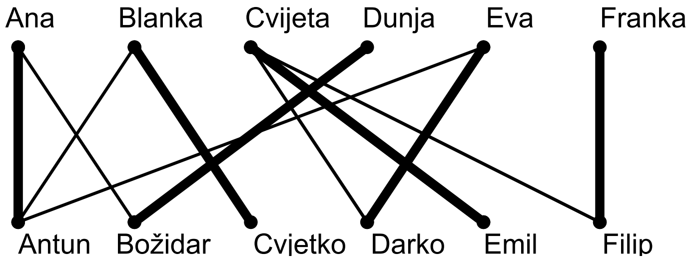
Dokaz. Označimo s X skup djevojaka, a s Y skup mladića. Gledamo proizvoljni podskup $S \subseteq X$. Na pripadnom bipartitnom grafu G bridovima su prikazana poznanstva djevojaka s mladićima. Neka je E_1 skup svih bridova koji izlaze iz vrhova od S (i vode u vrhove od $N(S)$). Očito je $|E_1| = k|S|$. S druge strane, osim vrhova iz S možda i neki drugi vrhovi iz X imaju bridove prema $N(S)$. Dakle, za skup E_2 svih bridova incidentnih s vrhovima iz $N(S)$ vrijedi $|E_2| \geq |E_1|$, odnosno $k|N(S)| \geq k|S|$ pa je $|N(S)| \geq |S|$. Po teoremu 2 postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove u X. Budući da vrijedi $|X| = |Y|$, ono je savršeno. ■

Primjer savršenog sparivanja mladića i djevojaka imamo na sljedećem grafu. Bridovi pokazuju postojeća poznanstva:



Slika 4: graf poznanstava mladića i djevojaka

A na sljedećoj slici prikazano je jedno savršeno sparivanje na tom grafu. Ono je označeno podebljanim bridovima.



Slika 5: primjer savršenog sparivanja

Za kraj spomenimo da je sparivanje na velikim grafovima teško ili čak nemoguće provoditi ručno ili metodom pokušaja i pogrešaka. Tada stvar treba prepustiti računalu. Ovisno o vrsti grafa i vrsti sparivanja koje tražimo postoji više računalnih algoritama. Npr. za savršeno sparivanje na bipartitnom grafu vrlo je popularna tzv. mađarska metoda ([1], [2], [6]).

Sparivanja u grafovima čine opsežan, ali i veoma koristan dio teorije grafova. Nadamo se da je ovaj članak pružio čitatelju dobar osnovni uvid u ovo područje.

Literatura

[1] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[2] D. Veljan, *Kombinatorika i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001., 235–339

[3] J. Gross, J. Yellen, *Graph Theory And Its Applications*, CRC Press, London, 1999., 236–268

[4] C. Berge, *Two theorems in graph theory*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 43 (9), Washington, 1957., 842–844

[5] P. Hall, *On Representatives of Subsets*, J. London Math. Soc., London 10 (1), 1935., 26–30

[6] H. W. Kuhn, *The Hungarian Method for the assignment problem*, Naval Research Logistics Quarterly, 2, 1955., 83–97

[7] Wolfram Research, `http://www.wolfram.com/`