

Šefket Arslanagić  
 Sarajevo, Republika Bosna i Hercegovina

## Занимливости за функцијата цел дел

Во ова работа ќе се занимаваме со функцијата цел дел од бројот  $x$ , И ќе докажеме две интересни равенства поврзани со ова функција. Најпрво ќе ја дефинираме функцијата цел дел и уште две други функции поврзани со ова функција.

**Дефиниција 1.** За реалниот број  $x$  со  $\lfloor x \rfloor$  ќе го означиме целиот дел од бројот  $x$ , т.е. најголемиот цел број кој не е поголем од  $x$ .

**Пример 1.** Имаме

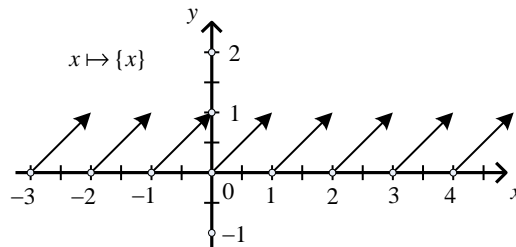
$$\lfloor 5 \rfloor = 5, \quad \lfloor -2,6 \rfloor = -2, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor e \rfloor = 2, \quad \lfloor -\sqrt{3} \rfloor = -2.$$

**Дефиниција 2.** За реалниот број  $x$  со  $\lceil x \rceil$  го означуваме

**Пример 2.** Имаме

$$\lceil 5 \rceil = 5, \quad \lceil -2,6 \rceil = -2, \quad \lceil \pi \rceil = 3, \quad \lceil e \rceil = 2, \quad \lceil -\sqrt{3} \rceil = -2.$$

**Дефиниција 3.** За реалниот број  $x$  со  $\{x\}$  го означуваме децималниот дел од бројот  $x$ , т.е. имаме  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ .



**Пример 3.** Имаме

$$\{5\} = 5 - \lfloor 5 \rfloor = 5 - 5 = 0,$$

$$\{-\sqrt{3}\} = -\sqrt{3} - \lfloor -\sqrt{3} \rfloor = -\sqrt{3} - (-2) = 2 - \sqrt{3},$$

$$\{-1,253\} = -1,253 - \lfloor -1,253 \rfloor = -1,253 - (-2) = 2 - 1,253 = 0,747.$$

Лесно се гледа дека  $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$  ако  $x$  е цел број, односно  $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ , ако  $x$  не е цел број. Исто така очигледно е дека  $0 \leq \{x\} < 1$ .

На цртежите се дадени графициите на функциите  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ,  $x \mapsto \lceil x \rceil$  и  $x \mapsto \{x\}$ .

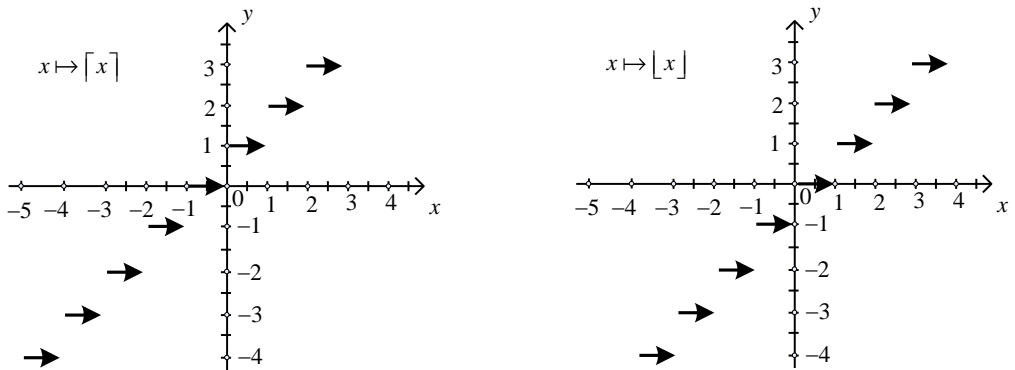
Во наредниот дел ќе докажеме дека за функцијата цел дел од  $x$  е точно следното равенство:

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor \quad (1)$$

Се смета дека ова равенство го докажал Францускиот математичар Хермит (Charle Hermite, 1822-1901).

**Доказ.** Ќе разликуваме два случаи.

**Случај 1.**  $0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$ .



Во овој случај имаме

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

и

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor = \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\{x\} \rfloor = 2\lfloor x \rfloor,$$

па според тоа

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor,$$

односно

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

**Случај 2.**  $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$ .

Во тој случај  $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \alpha + \frac{1}{2} \right\rfloor$ , каде што  $\alpha = \{x\} - \frac{1}{2}$  и  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , од каде добиваме

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + 1 + \alpha \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

и

$$\lfloor 2x \rfloor = \left\lfloor 2 \left( \lfloor x \rfloor + \alpha + \frac{1}{2} \right) \right\rfloor = \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 1 + 2\alpha \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1.$$

Од последните две равенства добиваме

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor,$$

односно

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor,$$

што требаше и да се докаже.

Сега со равенството (1) ќе ја решиме следната задача: Ако  $x \in \mathbb{R}$ , докажи дека важи равенството

$$\lfloor x \rfloor^3 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor^3 + 3\lfloor x \rfloor \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor^3 \quad (2)$$

**Решение.** Ќе го искористиме следниот алгебарски идентитет:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \quad (3)$$

Ќе воведеме ознаки  $a = \lfloor x \rfloor$ ,  $b = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$  и  $c = -\lfloor 2x \rfloor$ . Тогаш од равенството (1) добиваме

$$a + b + c = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 2x \rfloor = 0.$$

Сега од (3) имаме

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$

односно

$$\lfloor x \rfloor^3 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor^3 - \lfloor 2x \rfloor^3 + 3\lfloor x \rfloor \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \lfloor 2x \rfloor = 0.$$

Значи,

$$\lfloor x \rfloor^3 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor^3 + 3\lfloor x \rfloor \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor^3,$$

што требаше и да се докаже.

## Литература

[1] **Bencze, M., Arslanagić, Š.** A Mathematical problem book, Graficar promet d.o.o. Sarajevo, 2008.

[2] **Stanić, M., Ikodimović, N.,** : Teorija Brojeva-Zbirka zadataka, Zavod za udzbenike I nastavna sredstva, Beograd, 2004.