Један олимпијски проблем

Сава Гроздев, Бугарска академија наука, Софија

Тешко је рећи колико је потребно знати да би се могло приступити решавању олимпијских проблема. Чувени одговор на ово питање гласи: "Све или ништа." У сваком случају, познавање математичких чињеница повезаних са проблемом може бити од велике користи при решавању проблема. Добар пример за претходну тврдњу је и следећи пример са Националног круга Бугарске математичке олимпијаде за 1999. годину.

Главни проблем. *На страницама AB, BC, CA троугла ABC редом су дате тачке C_1, A_1 и B_1 тако да важи*

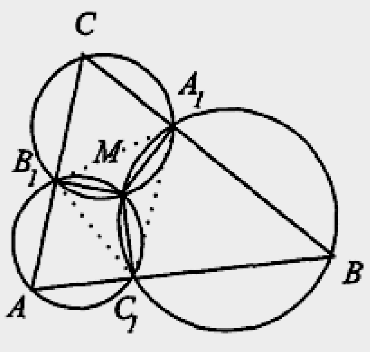
$$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1, \quad \angle CBA = \angle C_1B_1A_1, \quad \angle ACB = \angle A_1C_1B_1. \quad (*)$$

Доказати да се ортоцентри троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ налазе на једнаком растојању од центра описане кружнице троугла $A_1B_1C_1$. .

Неколико чињеница је прикривено у овом проблему, тако да је он веома тежак на први поглед. Стога предлажемо следећи систем проблемских компоненти које доводе до решења проблема поједностављујући га. У даљем тексту ћемо конфигурацију која се састоји од горе дефинисаних тачака A_1, B_1 и C_1 звати **конфигурација 1**, а конфигурацију 1 са за коју важи $(*)$ – конфигурација 2.

Проблем 1. *Дат је троугао ABC са конфигурацијом 1. Доказати да кружнице описане око троуглова AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 имају заједничку тачку.*

Решење. Нека је M друга заједничка тачка кружница описаних око троуглова AB_1C_1 и BC_1A_1. Тада је $\angle MB_1C = \angle AC_1M = \angle MA_1B$, тј. $\angle MB_1C = \angle MA_1B$, што имплицира да се тачке M, A_1, C и B_1 налазе на истој кружници. Како се описана кружница четвороугла MA_1CB_1 поклапа са описаном кружницом троугла CA_1B_1, тврђење је доказано.



Сл. 1

Дефиниција. *Тачка M из претходног проблема је* **Микелова** *тачка троугла $A_1B_1C_1$ у односу на троугао ABC; $A_1B_1C_1$ је Микелов троугао тачке M, а описане кружнице троуглова AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 су Микелове кружнице.*

Проблем 1 је поставио и доказао А. Микел 1838. године, али се претпоставља да је проблем био познат и раније. У сваком случају, данас је познат као Микелова теорема.

Јасно, праве MA_1, MB_1 и MC_1 образују подударне углове са одговарајућим страницама троугла ABC.

Проблем 2. *Дат је троугао ABC са конфигурацијом 1. Ако је M Микелова тачка троугла $A_1B_1C_1$, доказати да је*

$$\angle AMB = \angle ACB + \angle A_1C_1B_1,$$

$$\angle BMC = \angle BAC + \angle B_1A_1C_1,$$

$$\angle CMA = \angle CBA + \angle C_1B_1A_1.$$

Решење. Нека је P тачка праве CM таква да је M између C и P. Из тетивног четвороугла AC_1MB_1 добијамо

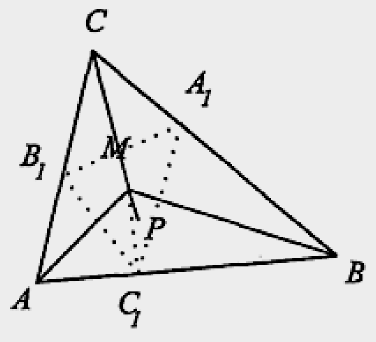
$$\angle MAB_1 = \angle MC_1B_1.$$

Аналогно, из BA_1MC_1 добијамо

$$\angle MBA_1 = \angle MC_1A_1.$$

Одавде следи

$$\angle A_1C_1B_1 = \angle MAB_1 + \angle MBA_1.$$



Сл. 2

Даље је

$$\begin{aligned}\angle AMB &= \angle AMP + \angle BMP = \\ &= (\angle MAB_1 + \angle ACM) + (\angle MBA_1 + \angle BCM) = \\ &= (\angle MAB_1 + \angle MBA_1) + (\angle ACM + \angle BCM) = \\ &= \angle A_1C_1B_1 + \angle ACB.\end{aligned}$$

На исти начин се доказују преостале две једнакости.

Приметимо да за ортоцентар H троугла ABC и троугао $A_1B_1C_1$ важи да H има исту особину као M, тј. важи

$$\angle AHB = \angle ACB + \angle A_1C_1B_1,$$

$$\angle BHC = \angle BAC + \angle B_1A_1C_1,$$

$$\angle CHA = \angle CBA + \angle C_1B_1A_1.$$

Ако из произвољне тачке M повучемо три праве које заклапају подударне углове са страницама троугла ABC и које се могу сматрати за ригидни систем који ротира око M, њихови пресеци са одговарајућим страницама троугла ABC одређују све могуће Микелове троуглове тачке M. Такође, сви Микелови троуглови дате тачке M су слични на основу Проблема 2. Сваки пар Микелових троуглова тачке M се може добити један из другог ротацијом са центром у M и хомотетијом са центром у M. Композиција ове две трансформације у равни назива се *ротациона хомотетија* или *хомологија*, па је Микелова тачка M позната као *самохомологна*.

Дискусију о проблемима 1 и 2 завршавамо коментаром да је конфигурација 1 специјалан случај општије ситуације повезане са тзв. Наполеоновим троугловима. У наставку текста ћемо се бавити конфигурацијом 2, као специјалним случајем конфигурације 1.

Проблем 3. *Дат је троугао ABC са конфигурацијом 2. Доказати да је Микелова тачка M за троугао $A_1B_1C_1$ центар описане кружнице троугла ABC.*

Решење. Из Проблема 2 следи да је

$$\angle AMB = 2\angle ACB,$$

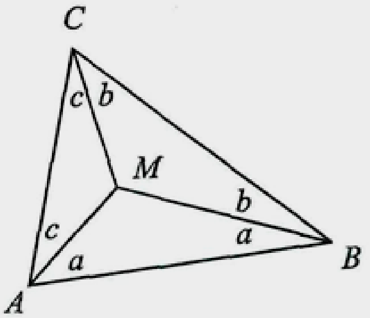
$$\angle BMC = 2\angle BAC,$$

$$\angle CMA = 2\angle CBA.$$

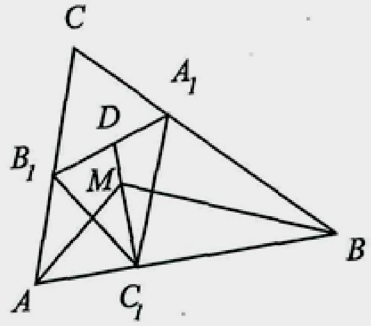
Тада Микелова тачка за троугао $A_1B_1C_1$ лежи на луковима са којих се странице AB, BC и CA виде под угловима $2\angle ACB$, $2\angle BAC$ и $2\angle CBA$, редом. Центар O описане кружнице троугла ABC лежи на истим луковима, па како се они секу у једној тачки, следи да је $O \equiv M$.

Проблем 4. *Дат је троугао ABC са конфигурацијом 2. Доказати да се Микелова тачка за троугао $A_1B_1C_1$ поклапа са ортоцентром H_1 троугла $A_1B_1C_1$.*

Решење. Из Проблема 3 следи да је M центар описане кружнице троугла ABC. Тада је $AM = BM = CM$ па су троуглови ABM, BCM и CAM једнакокраки. Означимо са a, b и c углове на основицама ових троуглова (слика 3). Како је $2a + 2b + 2c = 180°$, то је $a + b + c = 90°$.



Сл. 3



Сл. 4

Означимо са D пресечну тачку правих C_1M и A_1B_1 (слика 4). Имамо

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = a + b.$$

С друге стране, из тетивног четвороугла AC_1MB_1 је

$$\angle MC_1B_1 = \angle MAB_1 = c.$$

Тада је у троуглу B_1C_1D

$$\angle C_1B_1D + \angle B_1C_1D = a + b + c = 90°$$

и $c_1D \perp A_1B_1$.

Аналогно, M лежи на друге две висине троугла $A_1B_1C_1$, па следи да је $M \equiv H_1$.

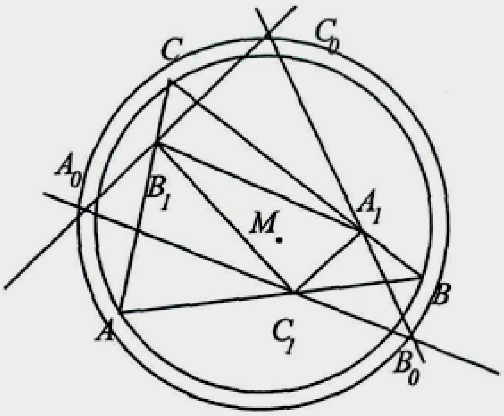
Даље ћемо разматрати дату ситуацију из другог угла. Као што је претходно речено, ако су троугао ABC и тачка M фиксирани, тада се може наћи бесконачно много Микелових троуглова тачке M у односу на троугао ABC. Обрнуто, ако су троугао $A_1B_1C_1$ и тачка M фиксирани, можемо мењати троугао ABC. У овом случају су фиксиране и Микелове кружнице, па на основу Проблема 1 следи да се тачке A, B и C морају налазити на Микеловим кружницама. Такође, на основу проблема 3, описане кружнице свих троуглова ABC, који имају $A_1B_1C_1$ за Микелов троугао, су концентричне са центром у M. Тако долазимо на идеју да уместо троугла ABC посматрамо неки једноставнији. Такав троугао је *недодати* троугао , тј. троугао чије су средине страница A_1, B_1 и C_1, редом.

Проблем 5. *Нека су A_1, B_1 и C_1 средине страница BC, CA и AB троугла ABC, редом. Доказати да је троугао $A_1B_1C_1$ хомотетичан троуглу ABC. Центар хомотетије је тежиште G_1 троугла $A_1B_1C_1$, а коефицијент хомотетије је -2.*

Наведени проблем се налази у већини средњошколских уџбеника, тако да његов доказ препуштамо читаоцима. Приметимо само да је у овом случају $A_1B_1C_1$ придодати (средњи) троугао за ABC, док је ABC недодати троугао за $A_1B_1C_1$.

Проблем 6. *Дат је троугао ABC са конфигурацијом 2. Права кроз A_1, паралелна са B_1C_1 сече праву кроз B_1, паралелну са A_1C_1, у тачки C_0 (слика 5), а праву кроз C_1, паралелну са A_1B_1, у тачки B_0. Трећа тачка пресека ове три праве је A_0. Доказати да постоји хомологија која трансформише троугао ABC у троугао $A_0B_0C_0$.*

Решење. Троуглови ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_0B_0C_0$ су међусобно слични. Ако је M Микелова тачка за троугао $A_1B_1C_1$, тада из Проблема 3 следи да је M центар описане кружнице троуглова ABC и $A_0B_0C_0$. Тачке пресека правих A_0M, B_0M и C_0M са описаном кружницом троугла ABC одређују троугао подударан са троуглом ABC.



Сл. 5

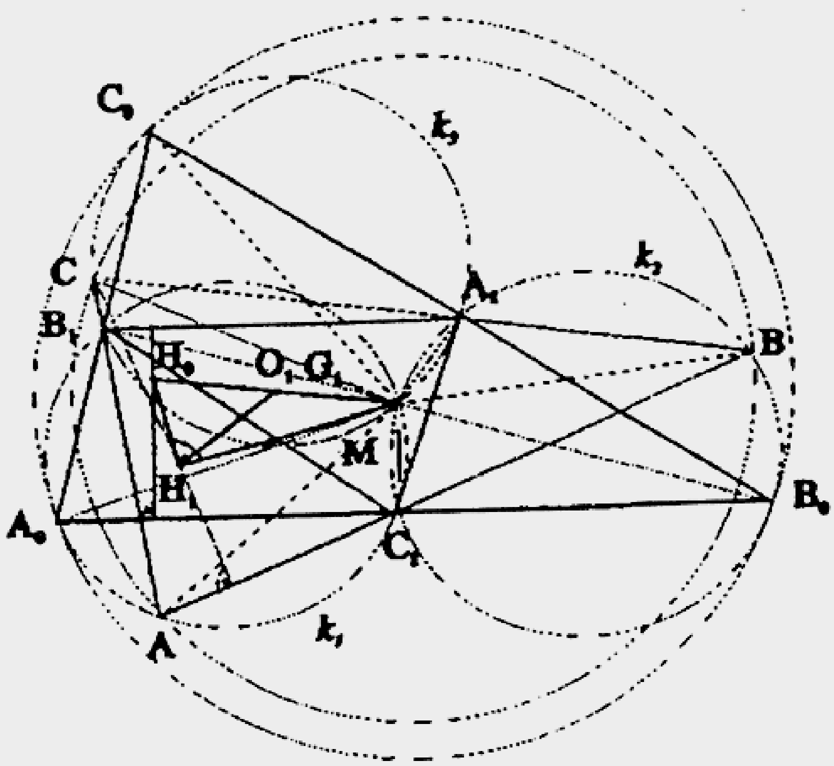
Ротација са центром у M трансформише овај троугао у троугао ABC. Дакле, тражена хомологија је хомологија са центром у M.

Сада смо спремни да решимо олимпијски проблем постављен на почетку овог текста.

Решење главног проблема. Нека је M Микелова тачка за троугао $A_1B_1C_1$. На основу Проблема 4, то је ортоцентар троугла $A_1B_1C_1$, а на основу Проблема 3, центар описане кружнице троугла ABC. Означимо описане кружнице троуглова AB_1C_1, BA_1C_1 и CB_1A_1 редом са k_1, k_2 и k_3. То су Микелове кружнице и M је њихова заједничка тачка, на основу Проблема 1. Нека су O_1 и G_1 центар описане кружнице и тежиште троугла $A_1B_1C_1$, редом. Посматрамо хомотетију са центром у G_1 и коефицијентом -2. На основу Проблема 5, ова хомотетија пресликава троугао $A_1B_1C_1$ на троугао $A_0B_0C_0$ дефинисан у Проблему 6.

Нека је H_0 ортоцентар троугла $A_0B_0C_0$. Тада је $\overrightarrow{G_1H_0} = -2\overrightarrow{G_1M}$. С друге стране, $\overrightarrow{G_1M} = -2\overrightarrow{G_1O_1}$, будући да се тачке O_1, G_1 и M налазе на Ојлеровој правој за троугао $A_1B_1C_1$ и G_1, дели O_1M у односу $1:2$. Добијамо $O_1M = O_1H_0$. На основу Проблема 1, A_0 и A_1 леже на k_1, B_0 и B_1 на k_2, а C_0 и C_1 на k_3.

Такође, $MA_0 = MB_0 = MC_0$ су пречници кружница k_1, k_2, k_3, редом. Стварно, C_1M је висина троугла $A_1B_1C_1$ и $C_1M \perp A_1B_1$. Међутим, $A_1B_1 \perp A_0C_1$, па је $A_0C_1 \perp C_1M$, тј. троугао A_0MC_1 је правоугли. Аналогно, троуглови B_0MA_1 и C_0MB_1 су правоугли. Нао основу Проблема 6, постоји хомологија са центром у M која пресликава троугао ABC на троугао $A_0B_0C_0$.



Сл. 6

Даље, $\angle MHH_0 = \angle MAA_0$, где је H ортоцентар троугла ABC. Како је $\angle MAA_0 = 90°$, то је $\angle MHH_0 = 90°$. Добијамо да је HO_1 тежишна линија на хипотенузу MH_0 троугла MH_0H. Следи да је $HO_1 = MO_1$, што је и требало доказати.

Литература

1. Forder H. G. , Geometry. London, Hutchinson, 1960.
2. Coxeter G., Greitzer S., Geometry Revisited (на руском), Москва, Наука, 1978, 76–81.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2001/02 година