Поглед из простора

др Ратко Тошић, **Нови Сад**

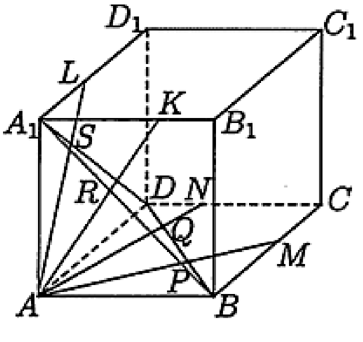
Вештина решавања геометријских задатака по нечему личи на трикове илузиониста; некад, и када знамо решење, тешко је схватити, како је било могуће досетити се.

И. Д. Новиков

При решавању планиметријских задатака често користимо помоћне фигуре. Наиме, фигуру на коју се односи задатак допуњавамо елементима који на први поглед немају неку суштинску везу са задатком. Исто тако, при решавању планиметријских задатака понекад важну улогу може да има схватање да је раван са којом радимо део простора и да је могуће користити помоћне елементе који се не налазе у равни. Иако решавање геометријских задатака у простору по правилу задаје више проблема него решавање геометријских задатака у равни, постоје и изузеци од тога правила. Понекад се планиметријски задатак лакше решава ако га сагледамо из околног простора. У овом чланку демонстрираћемо на неколико примера тај поступак излажења из равни при решавању планиметријских задатака. Поглед „одозго" омогућава нам да потпуније и у новом светлу сагледамо постављени задатак, јер „ко на брдо, ак' и мало стоји, више види но онај под брдом."

Задатак 1. Нека су M и N тачке на страницама BC и CD квадрата $ABCD$, такве да је $|CM|+|CN|=|AB|$. Праве AM и AN деле дијагоналу BD на три дужи. Доказати да се од те три дужи може саставити троугао и да је један угао тога троугла једнак $60°$.

Решење. Посматрајмо коцку $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ивицама A_1B_1 и A_1D_1 уочимо тачке K и L редом, такве да је $|A_1K|=|CN|$ и $|A_1L|=|CM|$ (слика 1).



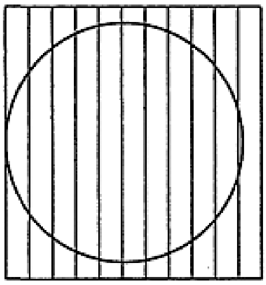
Слика 1.

Нека је P пресек правих AM и BD, Q пресек правих AN и BD, R пресек правих AK и A_1B, S пресек правих AL и A_1D. Лако се види да су троуглови ABP и AA_1R подударни (УСУ), одакле следи да је $|A_1R|=|BP|$ и $|AR|=|AP|$. Исто тако, из подударности троуглова ADQ и AA_1S следи да је $|A_1S|=|DQ|$ и $|AS|=|AQ|$. Троуглови AMN и AKL су подударни јер су странице једног подударне одговарајућим страницама другог. Из њихове подударности следи подударност углова $\sphericalangle MAN$ и $\sphericalangle KAL$, односно углова $\sphericalangle PAQ$ и $\sphericalangle RAS$. Сада из подударност троуглова PAQ и RAS (две странице и захваћен угао) следи да је $|RS|=|PQ|$. Дакле, странице троугла RA_1S

подударне су дужима на које је дијагонала BD подељена правама AM и AN. Како троугао RA_1S има један угао од 60° (то је угао $\sphericalangle RA_1S$, који је истовремено угао једнакостраничног троугла BA_1D), тврђење је доказано.

Задатак 2. (Покривање септичке јаме) Колико је најмање дасака ширине 1 потребно да би се покрила кружна јама пречника d?

Решење. Треба уствари да утврдимо колико је најмање трака ширине 1 потребно да би се покрио круг пречника d. Јасно је да је довољно m трака, где је m најмањи цео број који није мањи од d. Наиме, m трака може се поставити тако да су им граничне праве паралелне, никоје две немају заједничких унутрашњих тачака и сваке две суседне имају заједничку граничну праву (слика 2).



Слика 2.

Показаћемо да покривање са мање од m трака није могуће. У доказу ћемо користити чињеницу да је површина сферног појаса, тј. дела сфере између две паралелне равни које секу сферу једнака πdh, где је h растојање између тих равни, а d пречник сфере. Исто тако, површина калоте једнака је πdh, где је h висина калоте.

Нека је круг пречника d покривен са k трака ширине 1. Посматрајмо сферу за коју је дата кружница (граница датог круга) екватор, тј. велика кружница сфере. Ако кроз граничне праве трака поставимо равни нормалне на раван датог круга, онда ће две граничне праве сваке траке одсецати на сфери сферни појас или сферну калоту површине највише πd. Та површина може бити мања од πd у случају кад једна од две граничне праве нема заједничких тачака са датим кругом (у том случају се ради о калоти). Ти сферни појасеви и калоте покривају целу сферу и зато збир њихових површина није мањи од површине сфере, тј. $k\pi d \geqslant \pi d^2$, одакле је $k \geqslant d$.

Задатак 3. Дате су у једној равни α три кружнице различитих полупречника. За сваке две посматра се тачка пресека њихових заједничких спољашњих тангенти. Доказати да су те три тачке колинеарне.

Решење. Нека су дате кружнице $k_1 = k(O_1, r_1)$, $k_2 = k(O_2, r_2)$ и $k_3 = k(O_3, r_3)$. Упоредо са сваком кружницом посматраћемо и праву купу чија је основа круг одређен том кружницом, а чија је висина једнака полупречнику основе. При томе се врхови све три купе налазе са исте стране равни α. Означимо са V_1, V_2, V_3 редом врхове тих купа.

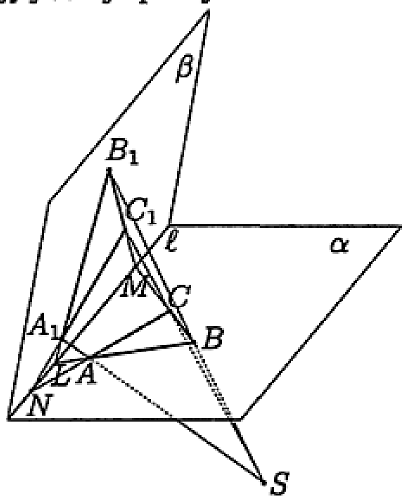
Пресек заједничких спољашњих тангенти две кружнице је истовремено и центар хомотетије за те две кружнице. Нека је S_{12} центар те хомотетије за кружнице k_1 и k_2, тј. пресек њихових спољашњих тангенти. Та тачка је истовремено и центар хомотетије за купе чије су основе те кружнице (због избора одговарајућих висина купа). То значи да и права V_1V_2 садржи тачку S_{12}. На исти начин доказујемо и да права V_1V_3 садржи тачку S_{13} (центар хомотетије кружница k_1 и k_3), а права V_2V_3 садржи тачку S_{23} (центар хомотетије кружница k_2 и k_3). Праве V_1V_2, V_1V_3 и V_2V_3 припадају једној равни β (равни одређеној тачкама V_1, V_2 и V_3), па тој равни припадају и сва три центра хомотетије. С друге стране, сва три центра хомотетије припадају и равни α, па закључујемо да леже на истој правој, заједничкој правој равни α и β.

Напомена. У задатку 3 претпоставља се да сваке две кружнице имају заједничку тангенту, тј. да ниједна није у унутрашњости неке друге. Постоји мноштво књига у којима се овај задатак појављује управо тако формулисан. Међутим, решење које смо овде дали важи и за општији случај. У решењу смо користили хомотетију, а сваке две кружнице различитих полупречника, које леже у једној равни, хомотетичне су, без обзира на њихов међусобни положај. (За две дате кружнице постоје две хомотетије којима се те кружнице пресликавају једна у другу, једна са позитивним и једна са негативним коефицијентом хомотетије. Ова са негативним коефицијентом постоји чак и у случају кад кружнице имају једнаке полупречнике.) Зато доказ који смо навели може без измене да се примени и на следећи општији случај.

Задатак 4. Дате су у једној равни α три кружнице различитих полупречника. За сваке две посматра се хомотетија са позитивним коефицијентом хомотетије, која једну од те две кружнице пресликава у другу. Доказати да сва три центра хомотетије леже на једној правој.

Као следећи пример, доказаћемо познату Дезаргову теорему. Претходно уводимо неке појмове. За троуглове ABC и $A_1B_1C_1$ кажемо да су перспективни из тачке S ако се праве AA_1, BB_1 и CC_1, које спајају одговарајућа темена тих троуглова, секу у тачки S. За исте троуглове кажемо да су перспективни из праве ℓ ако тачке L – пресек правих AB и A_1B_1, M – пресек правих BC и B_1C_1 и N – пресек правих AC и A_1C_1 припадају правој ℓ.

Напомена. За тачке S, L, M и N се претпоставља да могу бити и бесконачно далеке тачке, а права ℓ може бити бесконачно далека права. Ако је тачка пресека две праве бесконачно далека тачка, то значи да су те две праве паралелне. Све бесконачно далеке тачке равни припадају једној правој – бесконачно далекој правој те равни.



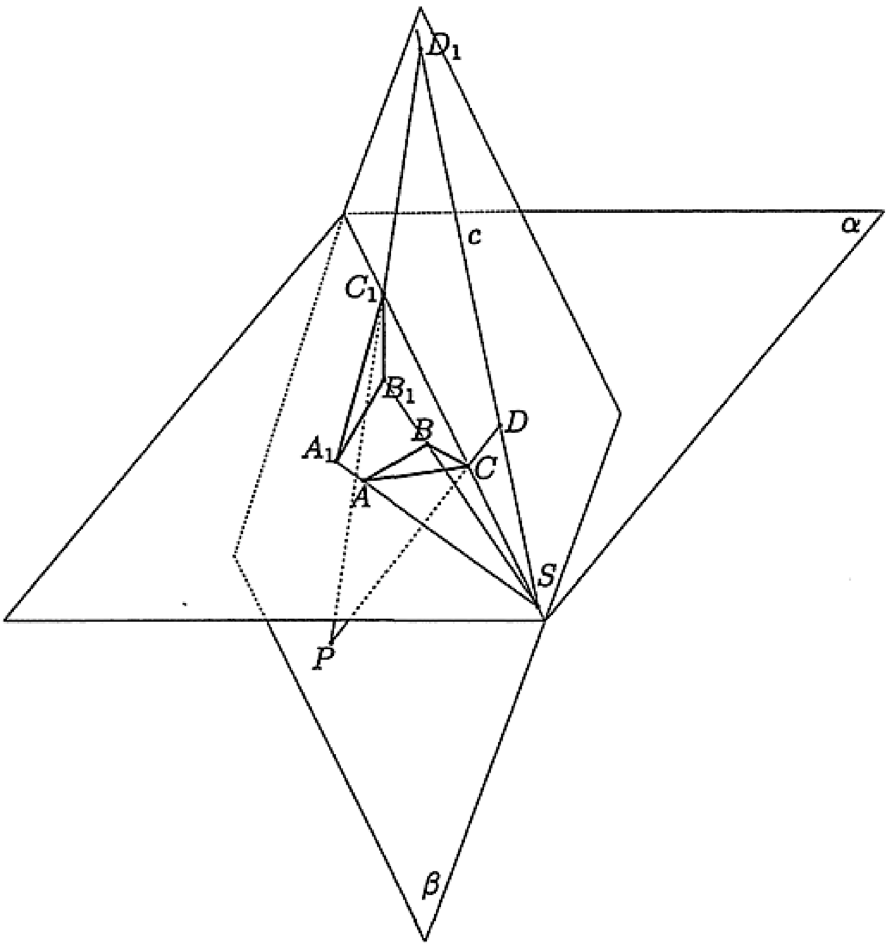
Слика 3.

Задатак 5. (Дезаргова теорема) *Доказати тврђење: два троугла исте равни перспективни су из неке тачке ако и само ако су перспективни и из неке праве.*

Решење. Прво ћемо доказати исто тврђење за случај кад троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ не леже у истој равни. Нека они леже у различитим равнима α и β, редом (слика 3).

Претпоставићемо да равни α и β нису паралелне и да је њихов пресек права ℓ. (У противном, равни α и β имају заједничку бесконачно далеку праву из које су посматрани троуглови перспективни.) Нека се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у тачки S (која може бити и заједничка бесконачно далека тачка тих правих, ако су праве паралелне). Нека је тачка L пресек правих AB и A_1B_1. Јасно је да тачка L мора да припада правој ℓ. (Ако су праве AB и A_1B_1 паралелне, тачка L је бесконачно далека тачка праве ℓ.) На исти начин се доказује да се праве BC и B_1C_1 као и праве AC и A_1C_1 секу у тачкама M и N редом праве ℓ.

Обрнуто, нека су L, M и N тачке пресека одговарајућих правих AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 и нека све три припадају истој правој ℓ. Посматрајмо тачке пресека S_1 – правих AA_1 и BB_1, S_2 – правих BB_1 и CC_1, S_3 – правих AA_1 и CC_1. Очигледно, ако се две од њих поклапају, онда се све три поклапају. Претпоставимо да су S_1, S_2 и S_3 три различите тачке. Тада троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ леже у истој равни, одређеној тачкама S_1, S_2 и S_3, што је у контрадикцији са условима задатка. Дакле, све три тачке пресека се поклапају, тј. троуглови су перспективни из неке тачке S.



Слика 4.

Пређимо сада на решавање нашег проблема у равни. Нека троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ леже у истој равни α и нека су перспективни из тачке S. Кроз колинеарне тачке S, C, C_1 поставимо раван β различиту од α и кроз тачку S поставимо праву c у равни β која није и у равни α (слика 4).

Из тачке P равни β, која не припада ни правој c ни равни α пројектујемо тачке C и C_1 на праву c. Нека су те пројекције D и D_1, редом. Троуглови ABD и $A_1B_1D_1$ не леже у истој равни па за њих важи Дезаргова теорема, тј. они су перспективни из неке праве ℓ'. Пројектовањем целе конфигурације из тачке P на раван α, добијамо да су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ перспективни из праве ℓ, која је пројекција праве ℓ'.

Слично се, пројектовањем, доказује и обрнуто тврђење за троуглове који леже у истој равни. Овај део доказа оставља се за вежбу.

Од времена Дезарга било је много безуспешних покушаја да се његова теорема у равни докаже без излета у тродимензионални простор. Тек је немачком математичару Хилберту (1862 – 1943) пошло за руком да покаже да се такав доказ не може добити без коришћења подударности.

Задаци за самосталан рад

1. Четири пешака крећу се константним брзинама по четири праволинијска пута. При томе никоја три пута се не секу у истој тачки и никоја два нису паралелна. Познато је да се први пешак сусрео са другим, трећим и четвртим, а други са трећим и четвртим. Докажи да се и трећи пешак сусрео са четвртим.

2. Правилан шестоугао исечен је на паралелограме једнаких површина. Доказати да је број тих паралелограма дељив са 3.

Литература

[1] M. Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W. H. Freeman and Company, New York, 1988.

[2] L. A. Graham, *Ingenious Mathematical Problems and Methods*, Dover, 1959.

[3] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, Наука, Москва, 1989.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2013/14 година