Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

ПРИМЕНА НА МЕТОДОТ НА КООРДИНАТИ ВО ПЛАНИМЕТРИЈАТА

Во оваа работа ќе се осврнеме на примената на апаратот на аналитичката геометрија при решавањето на планиметриски задачи. За таа цел, без доказ ќе наведеме неколку резултати со кои учениците се запознаваат во трета година од гимназиското образование.

Т1. Нека $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Велиме дека точката T ја дели отсечката T_1T_2 во однос λ ако $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$. Ако точките се $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$, тогаш координатите на точката $T(x,y)$ се: $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ и $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. ■

Т2. Координатите на средината $T(x,y)$ на отсечката T_1T_2: $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ се: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. ■

Т3. Равенката на правата која минува низ точките $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$ гласи:

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1) .$$

Коефициентот на правецот на оваа права е $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. ■

Т4. Равенката на правата која минува низ точката $T(x_0, y_0)$ и има коефициент на правец k е

$$y - y_0 = k(x - x_0) . ■$$

Т5. а) Ако $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$ се произволни точки, тогаш

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

б) Растојанието меѓу точките $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$ е

$$d(T_1,T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . ■$$

Т6. Растојанието од точката $T(x_0, y_0)$ до правата p чија равенка е $Ax + By + C = 0$ е

$$d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} . ■$$

Т7. Две прави се паралелни ако и само ако имаат еднакви коефициенти на правци.

Две прави се нормални ако и само ако производот на нивните коефициенти на правци е еднаков на -1. ■

Т8. Равенките на симетралите на аглите кои ги формираат правите $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ се дадени со

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. ■$$

Т9. Равенката на кружницата k со центар $O(a,b)$ и радиус r гласи

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. ■$$

Користејќи ги Т1-Т9 лесно се докажуваат следниве тврдења.

Т10. Тежишните линии на $\triangle ABC$: $A(a',a''), B(b,b''), C(c',c'')$ се сечат во точката $T(\frac{a'+b'+c'}{3},\frac{a''+b''+c''}{3})$, која ја нарекуваме тежиште на $\triangle ABC$. Растојанието на тежиштето T до секое теме на триаголникот е еднакво на $\frac{2}{3}$ од должината на соодветната тежишна линија. ■

Т11. Правите на кои лежат висините на $\triangle ABC$ се сечат во една точка која ја нарекуваме ортоцентар на $\triangle ABC$. Ако темињата на триаголникот се $A(a,0), B(b,0), C(0,c)$, тогаш $H(0,-\frac{ab}{c})$ е ортоцентарот на $\triangle ABC$. ■

Т12. Симетралите на страните на $\triangle ABC$ се сечат во една точка, која е центар на опишаната кружница околу триаголникот. Ако темињата на триаголникот се $A(a,0), B(b,0), C(0,c)$, тогаш $O(\frac{a+b}{2},\frac{ab+c^2}{2c})$ е центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$, а $R=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2+c^4}{4c^2}}$ е нејзиниот радиус. ■

Т13. Симетралите на внатрешните агли на $\triangle ABC$ се сечат во една точка, која е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$. ■

На читателот му препорачуваме за вежба да ги докаже тврдењата Т10-Т13. Во продолжение ќе решиме неколку задачи со кои ќе ја илустрираме примената на методот на координати во планиметријата.

1. Центарот на опишаната кружница O, тежиштето T и ортоцентарот H на триаголникот се колинеарни точки, т.е. лежат на една права која ја нарекуваме *Ојлерова права*. Притоа важи $\overline{TH}=2\overline{TO}$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\triangle ABC$ во координатен систем е поставен така што $A(a,0), B(b,0)$ и $C(0,c)$. Тогаш, според Т10, Т11 и Т12 имаме $T(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3})$, $H(0,-\frac{ab}{c})$ и $O(\frac{a+b}{2},\frac{ab+c^2}{2c})$.

Прв начин. Според Т5 а) имаме

$$\overrightarrow{HT}=(\frac{a+b}{3},\frac{c^2+3ab}{3c}) \text{ и } \overrightarrow{TO}=(\frac{a+b}{6},\frac{c^2+3ab}{6c}),$$

што значи дека $\overrightarrow{HT}=2\overrightarrow{TO}$ од каде следува дека точките O,T и H се колинеарни и дека $\overline{TH}=2\overline{TO}$.

Втор начин. Правата HT има коефициент на правец

$$k=\frac{\frac{c}{3}+\frac{ab}{c}}{\frac{a+b}{3}-0}=\frac{\frac{c^2+3ab}{3c}}{\frac{a+b}{3}}=\frac{c^2 3ab}{c(a+b)},$$

а правата TO има коефициент на правец

$$k'=\frac{\frac{ab+c^2}{2c}-\frac{c}{3}}{\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{3}}=\frac{\frac{3c^2+3ab-2c^2}{6c}}{\frac{3(a+b)-2(a+b)}{6}}=\frac{c^2 3ab}{c(a+b)}.$$

Според тоа, $k=k'$ што значи дека овие прави се паралелни и како T е нивна заедничка точка заклучуваме дека тие се совпаѓаат, т.е. точките T,H,O се колинеарни. Понатаму,

$$\overline{HT}=\sqrt{(\frac{a+b}{3})^2+(\frac{c^2+3ab}{3c})^2}=\sqrt{4\cdot[(\frac{a+b}{6})^2+(\frac{c^2+3ab}{6c})^2]}$$
$$=2\cdot\sqrt{(\frac{a+b}{6})^2+(\frac{c^2+3ab}{6c})^2}=2\overline{TO},$$

што и требаше да се докаже. ■

2. Во рамнината се дадени $\triangle ABC$ и права p, која не го сече триаголникот. Докажи дека збирот на растојанијата на темињата A,B,C до правата p е еднаков на збирот на растојанијата на средините A',B',C' на страните BC,CA,AB, соодветно, до правата p.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\triangle ABC$ се наоѓа во правоаголен координатен систем, при што важи $A(0,0), B(1,0)$ и $C(c,c')$. Тогаш средините на страните се $A'(\frac{c+1}{2},\frac{c'}{2})$, $B'(\frac{c}{2},\frac{c'}{2})$ и $C'(\frac{1}{2},0)$. Нека равенката на правата p е $y=kx+l$. Тогаш растојанијата од темињата на $\triangle ABC$ до правата p се:

$$d(A,p)=\frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}},\ d(B,p)=\frac{|k+l|}{\sqrt{k^2+1}},\ d(C,p)=\frac{|kc-c'+l|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Растојанијата од средините на страните на $\triangle ABC$ до правата p се:

$$d(A',p)=\frac{|\frac{kc+k-c'}{2}+l|}{\sqrt{k^2+1}},\ d(B',p)=\frac{|\frac{kc-c'}{2}+l|}{\sqrt{k^2+1}},\ d(C',p)=\frac{|\frac{k}{2}+l|}{\sqrt{k^2+1}}$$

Бидејќи правата не го сече триаголникот, сите точки A,B,C,A',B',C' се наоѓаат во иста полурамнина определена со правата p, па затоа сите апсолутни вредности се или еднакви на дадените изрази или се со спротивен знак. Според тоа,

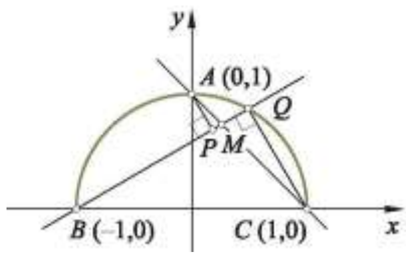
$$d(A,p)+d(B,p)+d(C,p)=\frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{|k+l|}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{|kc-c'+l|}{\sqrt{k^2+1}}$$
$$=\frac{|l+k+l+kc-c'+l|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|3l+k+kc-c'|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$d(A',p)+d(B',p)+d(C',p)=\frac{|\frac{kc+k-c'}{2}+l|}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{|\frac{kc-c'}{2}+l|}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{|\frac{k}{2}+l|}{\sqrt{k^2+1}}$$
$$=\frac{|\frac{kc+k-c'}{2}+l+\frac{kc-c'}{2}+l+\frac{k}{2}+l|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|3l+kc+k-c'|}{\sqrt{k^2+1}},$$

со што задачата е решена. ■

3. Нека B и C се крајни точки на полукружница, а A е нејзината средина. Нека M е точка на отсечката AC, а P и Q се подножјата на нормалите од A и C на правата BM. Докажи дека $\overline{BP}=\overline{PQ}+\overline{QC}$.

Решение. Да ја поставиме дадената полукружница како на цртежот десно, т.е. нека нејзиниот центар е во кординатниот почеток и нека таа е во горната полурамнина. Исто така можеме да претпоставиме дека полукружницата е единечна. Бидејќи сите агли над дијаметарот на кружницата се прави, точката Q припаѓа на полукружницата.



Равенката на правата AC гласи $y=-x+1$, па затоа $M(a,-a+1)$. Сега равенката на правата BM е: $y=\frac{1-a}{a+a}x+\frac{1-a}{a+a}$. Понатаму, бидејќи $k_{CQ}=k_{AP}=\frac{a-1}{a+1}$, добиваме дека равенката на правата AP гласи:

$y=\frac{a+1}{a-1}x+1$, а равенката на правата CQ гласи: $y=\frac{a+1}{a-1}x-\frac{a+1}{a-1}$. Бидејќи $BM\cap AP=\{P\}$, од последните две равенки добиваме $P(\frac{a(1-a)}{1+a^2},\frac{1-a}{1+a^2})$, а како $BM\cap CQ=\{Q\}$, добиваме $Q(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2})$. Сега,

$$\overline{BP}=\sqrt{(\frac{a(1-a)}{1+a^2}+1)^2+(\frac{1-a}{1+a^2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{(\frac{2a}{1+a^2}-\frac{a(1-a)}{1+a^2})^2+(\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{1-a}{1+a^2})^2}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1+a^2}},$$

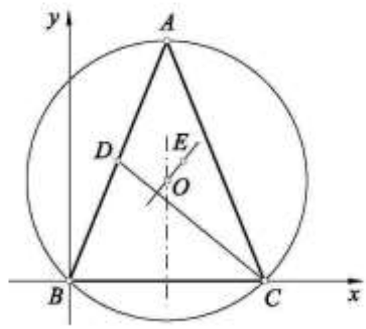
$$\overline{QC}=\sqrt{(\frac{2a}{1+a^2}-1)^2+(\frac{1-a^2}{1+a^2})^2}=\frac{\sqrt{2}(1-a)}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Оттука следува $\overline{BP}=\overline{PQ}+\overline{QC}$, што и требаше да се докаже. ■

4. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC, CD е негова тежишна линија, а E тежиште на триаголникот ACD. Докажи дека $OE\perp CD$ ако и само ако триаголникот ABC е рамнокрак, при што важи $\overline{AB}=\overline{AC}$.

Решение. Нека во правоаголен координатен систем имаме $B(0,0)$, $C(x_C,0)$ и $A(x_A,y_A)$. Тогаш

$$D(\frac{x_A}{2},\frac{y_A}{2}) \text{ и } E(\frac{x_C}{3}+\frac{x_A}{2},\frac{y_A}{2}).$$



Точката O е во пресекот на симетралите на страните BC и AB. Равенката на симетралата s_{BC} е $x=\frac{x_C}{2}$, а равенката на симетралата на AB е $y-\frac{y_A}{2}=-\frac{x_A}{y_A}(x-\frac{x_A}{2})$. Оттука лесно се добива дека кординатите на точката O се:

$$x_O=\frac{x_C}{2} \text{ и } y_O=\frac{y_A}{2}-\frac{x_A}{y_A}(\frac{x_C-x_A}{2}).$$

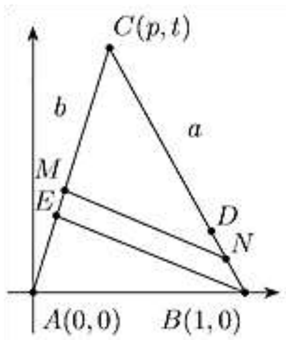
Понатаму, $k_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{y_A}{x_A-2x_C}$ и $k_{OE}=\frac{y_O-y_E}{x_O-x_E}=\frac{3x_A(x_A-x_C)}{y_A(x_C-3x_A)}$. Сега, $OE\perp CD$ ако и само ако

$$k_{CD}k_{OE}=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y_A}{x_A-2x_C}\cdot\frac{3x_A(x_A-x_C)}{y_A(x_C-3x_A)}=-1 \quad\Leftrightarrow\quad x_A=\frac{x_C}{2},$$

т.е. ако и само ако точката A припаѓа на симетралата на страната BC, односно ако и само ако триаголникот ABC е рамнокрак, при што важи $\overline{AB}=\overline{AC}$. ■

5. На страната BC на $\triangle ABC$, $\overline{BC}\geq\overline{AB}$, е дадена точка D таква што $\overline{DC}=\overline{AB}$. Нека M и N се соодветно средини на отсечките AC и BD. Докажи дека правата MN е паралелна на симетралата BE, ($E\in AC$) на $\measuredangle ABC$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\triangle ABC$ се наоѓа во правоаголен координатен систем, при што важи $A(0,0), B(1,0)$ и $C(p,t)$ (види цртеж десно).



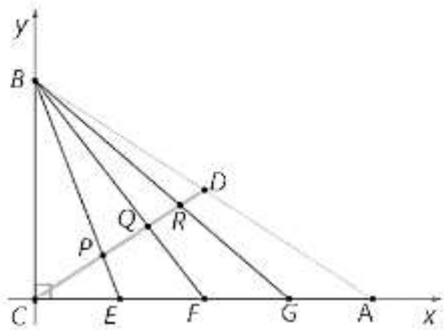
Координатите на точката M се $M(\frac{p}{2},\frac{t}{2})$. Понатаму, BE е симетрала на $\measuredangle ABC$, па затоа важи $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}=\frac{c}{a}=\frac{1}{a}$, од каде следува дека координатите на точката E се $x_E=\frac{p}{a+1}, y_E=\frac{t}{a+1}$, т.е. $E(\frac{p}{a+1},\frac{t}{a+1})$.

Коефициентот на правецот на правата BE е $k=\frac{\frac{t}{a+1}-0}{\frac{p}{a+1}-1}=\frac{t}{p-a-1}$. Понатаму, $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BC}-\overline{DC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}-1=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}-1=\frac{a}{1}-1=a-1$, па затоа координатите на точката D се $D(\frac{1+(a-1)p}{a},\frac{(a-1)t}{a})$. Точката N е средина на отсечката BD, па затоа $N(\frac{a+1+(a-1)p}{2a},\frac{(a-1)t}{2a})$. Според тоа, коефициентот на правецот на пртавата MN е $k'=\frac{\frac{(a-1)t}{2a}-\frac{t}{2}}{\frac{a+1+(a-1)p}{2a}-\frac{p}{2}}=\frac{t}{p-a-1}$. Конечно, од $k=k'$ следува дека правите MN и BE се паралелни, што и требаше да се докаже. ■

6. Даден е правоаголен триаголник ABC. Точката D е средина на хипотенузата AB, F е средина на страната AC, E е средина на CF и G е средина на FA. Отсечката CD ги сече BE, BF, BG редоследно во точките P,Q,R. Определи го односот $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$.

Решение. Го поставуваме правоаголниот триаголник ABC во координатен систем така што $C(0,0), A(a,0), B(0,b)$, види цртеж. Тогаш координатите на точките D,E,F,G се: $D(\frac{a}{2},\frac{b}{2}), E(\frac{a}{4},0), F(\frac{a}{2},0), G(\frac{3a}{4},0)$.

Равенките на правите CD, BE, BF и BG редоследно се:



$CD:\quad y=\frac{b}{a}x,$

$BE:\quad y=-\frac{4b}{a}x+b,$

$BF:\quad y=-\frac{2b}{a}x+b,$

$BG:\quad y=-\frac{4b}{3a}x+b.$

Понатаму, координатите на точките P,Q,R ги наоѓаме решавајќи ги соодветно системите равенки

$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x, \\ y=-\frac{4b}{a}x+b, \end{cases}\qquad \begin{cases} y=\frac{b}{a}x, \\ y=-\frac{2b}{a}x+b, \end{cases}\qquad \begin{cases} y=\frac{b}{a}x, \\ y=-\frac{4b}{3a}x+b, \end{cases}$$

од каде добиваме $P(\frac{a}{5},\frac{b}{5})$, $Q(\frac{a}{3},\frac{b}{3})$, $R(\frac{3a}{7},\frac{3b}{7})$. Според тоа,

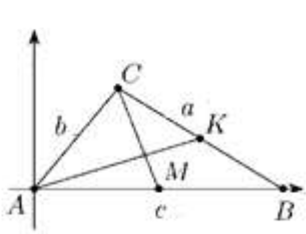
$$\overline{PQ}=\sqrt{(\frac{a}{3}-\frac{a}{5})^2+(\frac{b}{3}-\frac{b}{5})^2}=\frac{2}{15}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\overline{QR}=\sqrt{(\frac{3a}{7}-\frac{a}{3})^2+(\frac{3b}{7}-\frac{b}{3})^2}=\frac{2}{21}\sqrt{a^2+b^2},$$

па затоа $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}=\frac{7}{5}$. ■

7. Дацен е триаголник ABC, $\overline{AB}=4, \overline{BC}=3, \overline{AC}=\sqrt{5}$. Докажи дека тежишните линии AK $(K\in BC)$ и CM $(M\in AB)$ се заемно норални.

Решение. Дадениот триаголник го поставуваме во правоаголен координатен систем така што $A(0,0), B(0,4)$ и темето $C(c',c")$ е во првиот квадрант (цртеж десно). Од формулата за растојание меѓу две точки следува



$$\sqrt{5}=\sqrt{c'^2+c"^2}\ \text{ и }\ 3=\sqrt{(c'-4)^2+c"^2},$$

од каде го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} c'^2 + c''^2 = 5, \\ (c'-4)^2 + c''^2 = 9 \end{cases}$$

чии решенија се $c' = \frac{3}{2}, c'' = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$. Бидејќи зедовме точката C да е во првиот квадрант, добиваме $C(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2})$. Бидејќи M е средина на AB добиваме $M(2,0)$, а бидејќи K е средина на BC добиваме $K(\frac{11}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4})$. Коефициентгот на правецот на правата CM е $k = \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}-0}{\frac{3}{2}-2} = -\sqrt{11}$, а коефициентот на правецот на правата AK е $k' = \frac{\frac{\sqrt{11}}{4}-0}{\frac{11}{4}-0} = \frac{1}{\sqrt{11}}$. Конечно, бидејќи $k \cdot k' = -1$ заклучуваме дека тежишните линии AK и CM се заемно нормални. ■

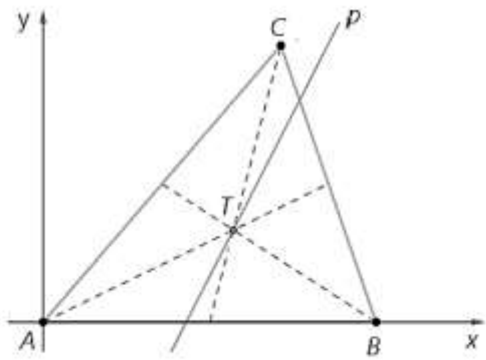
8. Низ тежиштето T на триаголникот ABC е повлечена права p која не содржи ниту едно теме на триаголникот. Докажи дека збирот на растојанијата на двете темиња кои се наоѓаат од иста страна на правата е еднаков на растојанието на третото теме до правата.

Решение. Триаголникот да го поставиме во правоаголен координатен систем така што $A(0,0), B(1,0)$ и $C(c',c'')$. За тежиштето T имаме $T(\frac{c'+1}{3}, \frac{c''}{3})$. Произволна права која минува низ T има равенка

$$y - \frac{c''}{3} = k(x - \frac{1+c'}{3}),$$

т.е.

$$y = kx + \frac{c''-k-kc'}{3}.$$



Сега, од Т6 следува дека растојанијата од темињата на триаголникот до правата се:

$$d(A,p) = \frac{|c''-k-kc'|}{\sqrt{9k^2+9}},$$

$$d(B,p) = \frac{|3k+c''-k-kc'|}{\sqrt{9k^2+9}} = \frac{|2k+c''-kc'|}{\sqrt{9k^2+9}},$$

$$d(C,p) = \frac{|3kc'-3c''+c''-k-kc'|}{\sqrt{9k^2+9}} = \frac{|2kc'-2c''-k|}{\sqrt{9k^2+9}}.$$

Точките A и C се во иста полурамнина определена со правата p, па затоа апсолутните вредности или се еднакви или се спротивни на дадените изрази под знакот за апсолутна вредност за растојанијата за точките A и C. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека

$$d(A,p)=\frac{c''-k-kc'}{\sqrt{9k^2+9}},\qquad d(C,p)=\frac{2kc'-2c''-k}{\sqrt{9k^2+9}}.$$

Точката B е во спротивната поурамнина определена со правата p од полурамнината во која се наоѓаат точките A и C, па затоа изразот кој се наоѓа под знакот на апсолутната вредност е со спротивен знак од изразите кај точките A и C, односно

$$d(B,p)=\frac{-2k-c''+kc'}{\sqrt{9k^2+9}}.$$

Според тоа,

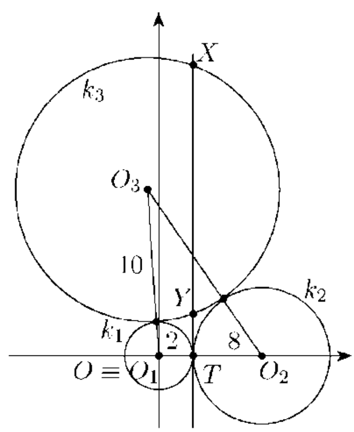
$$d(A,p)+d(C,p)=\frac{c''-k-kc'}{\sqrt{9k^2+9}}+\frac{2kc'-2c''-k}{\sqrt{9k^2+9}}=\frac{-2k-c''+kc'}{\sqrt{9k^2+9}}=d(B,p),$$

што и требаше да се докаже.

Случаите кога од иста страна на правата p се точките A и B, односно точките B и C, се разгледуваат аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

9. Кружниците $k_1(O_1,2), k_2(O_2,8)$ и $k_3(O_3,10)$ надворешно се допираат две по две. Определи ја должината на тетивата, која заедничката внатрешна тангента на кружниците k_1 и k_2 ја отсекува од кружницата k_3.

Решение. Кружниците k_1 и k_2 да ги поставиме во правоаголен координатен систем Oxy така што $O_1(0,0)$ и $O_2(10,0)$. Тогаш допирната точка меѓу овие кружници е $T(2,0)$ и заедничката нивна внатрешна тангента има равенка $x=2$. Нека $O_3(a,b)$. Тогаш



$$12=\overline{O_1O_3}=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$18=\overline{O_2O_3}=\sqrt{(a-10)^2+b^2},$$

од каде наоѓаме $a=-4, b=\pm 8\sqrt{2}$. Без ограничивање на општоста можеме да земеме дека $O_3(-4,8\sqrt{2})$, т.е.

дека равенката на кружницата k_3 е

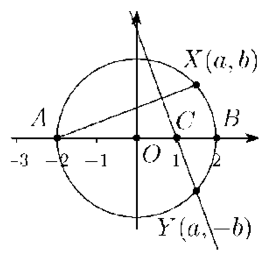
$$(x+4)^2+(y-8\sqrt{2})^2=100.$$

Со замена во последната равенка $x=2$, добиваме $y=8\sqrt{2}\pm 8$. Значи, пресечните точки на тангентата и кружницата k_3 се $X(2,8\sqrt{2}+8)$ и $X(2,8\sqrt{2}-8)$. Јасно,

$$\overline{YX}=\sqrt{(2-2)^2+(8\sqrt{2}+8-(8\sqrt{2}-8))^2}=16. \blacksquare$$

10. Дадена е кружница k со центар O и дијаметар $\overline{AB}=4$. Точката C е средина на радиусот OB. Определи ги точките X и Y од кружницата k кои се симетрични во однос на AB и се такви што $YC\perp XA$.

Решение. Кружницата ја поставуваме во координатен систем Oxy така што $O(0,0)$, $A(-2,0)$ и $B(2,0)$. Тогаш $C(1,0)$, $X(a,b)$ и $Y(a,-b)$, цртеж десно. Правата YC има коефицинет на правец $k=\frac{b}{1-a}$, а правата XA има коефициент на правец $k'=\frac{b}{a+2}$. Од условот на задачата следува $kk'=-1$, односно $\frac{b^2}{(a+2)(1-a)}=-1$. Понатаму,



точките X и Y припаѓаат на кружницата, па затоа $a^2+b^2=4$. Го решаваме системот составен од последните две равенки и добиваме $a=\frac{3}{2}, b=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Конечно, бараните точки се $X(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{7}}{2})$ и $Y(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2})$. $\blacksquare$

11. Во рамнината се дадени две различни точки A и B. Докажи дека множеството точки M такви што

$$|\overline{MA}^2-\overline{MB}^2|=kP_{\triangle MAB}, \qquad (1)$$

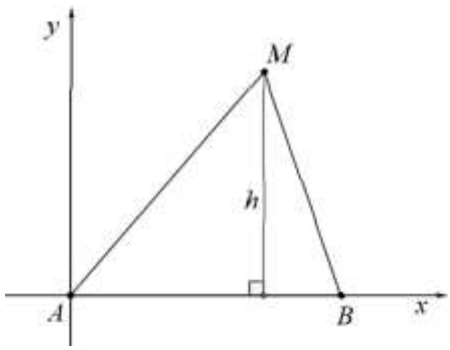
каде $k>0$ е дадена константа се состои од две прави.

Решение. Отсечката AB да ја посравиме во правоаголен координатен систем Oxy така што $A(0,0)$ и $B(a,0)$. Нека точката $M(x,y)$ го задоволува условот. Сега, бидејќи ординатата на точката M е еднаква на должината на висината на $\triangle MAB$ повлечена кон страната AB, добиваме $P_{\triangle MAB}=\frac{a\cdot|y|}{2}$ и како $\overline{MA}^2=x^2+y^2, \overline{MB}^2=(x-a)^2+y^2$ со замена во (1) наоѓаме

$$|x^2+y^2-(x-a)^2-y^2|=\frac{ka|y|}{2},$$

$$a|2a-x|=\frac{ka|y|}{2},$$

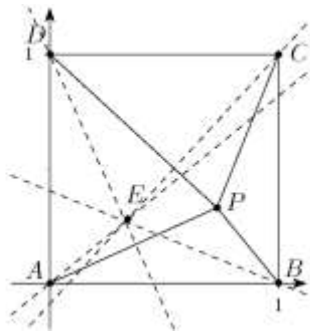
$$|2a-x|=\frac{k|y|}{2}.$$



Од последното равенство следува $\frac{ky}{2}=\pm(2a-x)$, што значи дека бараното множество точки се правите $y=\pm(\frac{4a}{k}-\frac{2}{k}x)$. ■

12. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ е земена произволна точка P. Повлечени се нормали од темето A кон правата BP, од темето B кон правата CP, од темето C кон правата DP и од темето D кон правата AP. Докажи дека четирите нормали се сечат во една точка.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека квадратот е сместен во кординатен систем така што $A(0,0)$, $B(1,0), C(1,1), D(0,1)$. Нека координатите на точката P се $P(a,b)$. Правата BP има коефициент на правец $k=\frac{b}{a-1}$, па затоа правите кои се нормални на неа имаат коефициент на правец $k'=-\frac{1}{k}=\frac{1-a}{b}$. Значи, правата која минува низ A и е нормална на правата BP има равенка $y=\frac{1-a}{b}x$.



Аналогно се определуваат правите кои минуваат низ точките B,C,D и се нормални на правите CP,DP,AP. Нивните равенки се:

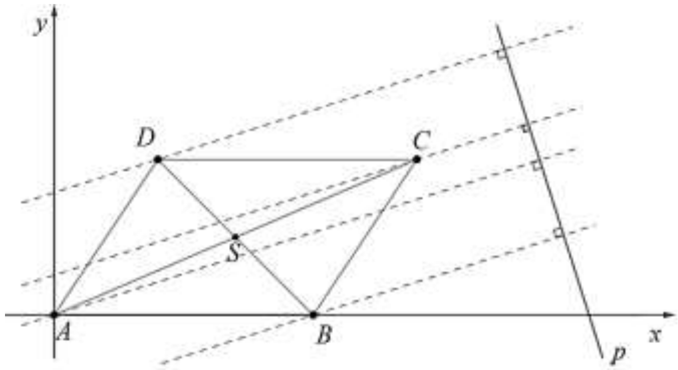
$$y=\frac{a-1}{1-b}x+\frac{1-a}{1-b}, \quad y=\frac{a}{1-b}x+\frac{1-b-a}{1-b}, \quad y=-\frac{a}{b}x+1.$$

Сега, лесно се проверува дека точката $F(b,1-a)$ припаѓа на четирите прави, шшто и требаше да се докаже. ■

13. Во рамнната се дадени паралелограм $ABCD$ и права p кои немаат

заеднички точки. Докажи дека збирот на растојанијата на точките A и C до правата p е еднаков на збирот на растојанијата на точките B и D до правата p.

Решение. Паралелограмот $ABCD$ да го поставиме така што темето A ќе биде во координатниот почеток, т.е. $A(0,0)$, а страната AB на позитивниот дел од $x-$оската, т.е. $B(b,0)$. Понатаму, ако $D(d',d'')$, тогаш $C(d'+b,d'')$, види цртеж.



Нека $Ax+By+C=0$ е равенката на правата p. Тогаш

$$d(A,p)=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad d(B,p)=\frac{|Ab+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$
$$d(C,p)=\frac{|A(d'+b)+Bd''+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, d(D,p)=\frac{|Ad'+Bd''+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

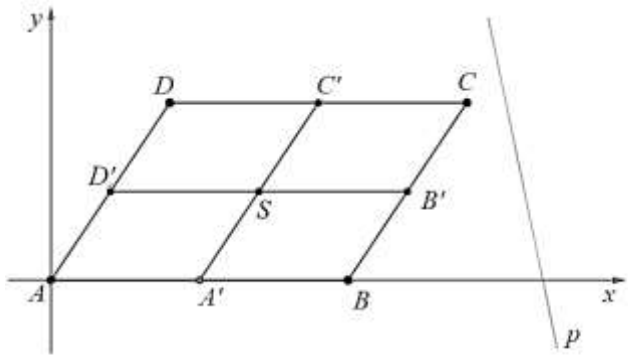
Сите точки A,B,C,D се наоѓаат во иста полурамнина определена со правата p, па затоа сите апсолутни вредности се еднакви на изразите под знаците на апсолутната вредност или се со спротивен знак. Последното значи дека

$$d(A,p)+d(C,p)=d(B,p)+d(D,p)=\frac{|Ad'+Ab+Bd''+2C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

што и требаше да се докаже. ■

14. Во рамнната се дадени паралелограм $ABCD$ и права p кои немаат заеднички точки. Докажи дека збирот на растојанијата од темињата на паралелограмот $ABCD$ до правата p е четири пати поголем од растојанието од пресечната точка на отсечките кои ги поврзуваат средините на спротивните страни на паралелограмот до правата p.

Решение. Како во претходната задача паралелограмот $ABCD$ да го поставиме така што $A(0,0)$, $B(b,0)$, $D(d',d'')$ и $C(d'+b,d'')$, види цртеж. Пресечната точка S на отсечките кои ги поврзуваат средините на спротивните страни, всушност е пресекот на дијагоналите, што значи средината на дијагоналата AC. Значи, $S(\frac{d'+b}{2},\frac{d"}{2})$.



Нека $Ax+By+C=0$ е равенката на правата p. Тогаш

$$d(A,p)=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad d(B,p)=\frac{|Ab+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$d(C,p)=\frac{|A(d'+b)+Bd"+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, d(D,p)=\frac{|Ad'+Bd"+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$d(S,p)=\frac{|A\frac{d'+b}{2}+B\frac{d"}{2}+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Сите точки A,B,C,D,S се наоѓаат во иста полурамнина определена со правата p, па затоа сите апсолутни вредности се еднакви на изразите под знаците на апсолутната вредност или се со спротивен знак. Последното значи дека

$$d(A,p)+d(B,p)+d(C,p)+d(D,p)=\frac{|2Ad'+2Ab+2Bd"+4C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$=4\frac{|A\frac{d'+b}{2}+B\frac{d"}{2}+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=d(S,p),$$

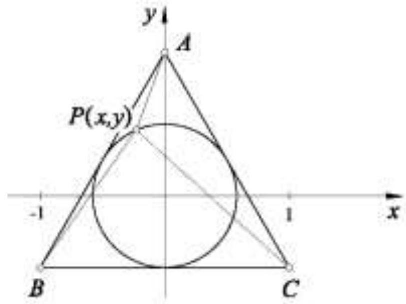
што и требаше да се докаже. ■

15. Нека P е точка на кружницата впишана во рамностран триаголник ABC, со должина на страна 2. Докажи дека

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=5.$$

Решение. Да поставиме правоаголен координатен систем со координатен почеток во центарот на впишаната кружница на триаголникот и една страна паралелна на $x-$оската. Тогаш

$A(0,\frac{2}{\sqrt{3}}), B(-1,\frac{-1}{\sqrt{3}}), C(1,\frac{1}{\sqrt{3}})$.



Радиусот на впишаната кружница е $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$. За координатите на точката $P(x,y)$ важи

$$x^2+y^2=r^2=\frac{1}{3}.$$

Според тоа,

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=x^2+(y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2+(-1-x)^2+(-\frac{1}{\sqrt{3}}-y)^2+$$
$$+(1-x)^2+(-\frac{1}{\sqrt{3}}-y)^2$$
$$=3(x^2+y^2)+4=5,$$

што и требаше д а се докаже. ■

16. Дадени се две кружници со еднаков радиус r кои се допираат и реален број $\lambda>2$. Определи го геометриското место на точки T, за кои збирот на должините на тангентите повлечени кон двете кружници е еднаков на λr.

Решение. Дадените кружници k_1 и k_2 да ги сместиме во правоаголен координатен систем така што ќе се допираат во координатниот почеток, а нивните центри ќе припаѓаат на $x-$оската. Тогаш $S_1(r,0)$ и $S_2(-r,0)$. Нека $T(x,y)$ е точка надвор од кружниците. Според Питагоровата теорема должината на тангентата на кружницата k_1 е

$$t_1=\sqrt{(x-r)^2+y^2-r^2}=\sqrt{x^2-2rx+y^2},$$

а должината на тангентата на кружницата k_2 е

$$t_2=\sqrt{(x+r)^2+y^2-r^2}=\sqrt{x^2+2rx+y^2}.$$

Според условот на задачата треба да важи $t_1+t_2=\lambda r$, од каде добиваме

$$\sqrt{x^2-2rx+y^2}+\sqrt{x^2+2rx+y^2}=\lambda r,$$
$$4(\lambda^2-4)x^2+4\lambda^2y^2=\lambda^4r^2,$$
$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^4r^2}{4(\lambda^2-4)}}+\frac{y^2}{\frac{\lambda^2r^2}{4}}=1.$$

Според тоа, бараното геометриско место на точки T е елипса со полуоски

$$a=\frac{r}{2}\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2-4}}, b=\frac{r}{2}\lambda .$$

Притоа за да елипсата биде реална мора да е $a>0, b>0$. Последното важи за $\lambda>2$. ■