XII олимпијада

1. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е внатрешна точка на страната AB, r_1, r_2, r се радиуси на кружниците впишани во триаголниците AMC, BMC и ABC, соодветно, а ρ_1, ρ_2, ρ се радиуси на кружниците кои:

а) лежат во аголот BCA, и

б) се припишани во триаголниците AMC, MBC и ABC.

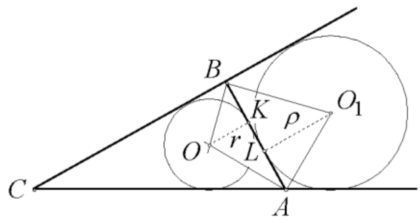
Докажи дека

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

Решение. I *начин. Лема.* Нека $\measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$. Тогаш

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Доказ. Нека O е центарот на впишаната кружница и K е точката во која таа ја допира страната AB. Точката O_1 е центар на припишаната кружница, а L е точка во која таа ја допира страната AB. Тогаш



$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \text{ и } \overline{AB} = \overline{AL} + \overline{LB} = \rho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Сега тврдењето на лемата следува од претходните равенства. ■

Нека $\phi = \measuredangle AMC$. Од лемата следува

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \text{ и } \frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\phi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}.$$

Ако ги помножиме овие равенства добиваме

$$\frac{r_1}{\rho_1}\frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\rho},$$

што и требаше да се докаже.

II *начин.* Воведуваме ознаки: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AM} = p$, $\overline{BM} = q$, $\overline{CM} = m$. Од формулите за плоштина на триаголник

$$P = \frac{a+b+c}{2} r \quad \text{и} \quad P = \frac{a+b-c}{2}\rho$$

добиваме

$$\frac{r}{\rho} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{b+m-p}{b+m+p} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a+m-q}{a+m+q}.$$

Според тоа, равенството кое треба да се докаже е еквивалентно на равенството

$$\frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}=\frac{b+m-p}{b+m+p}\cdot\frac{a+m-q}{a+m+q}$$

кое може да се запише во обликот

$$pa^2+qb^2=p^2q+pq^2+pm^2+qm^2.$$

Ако замениме $p+q=c$, добиваме $pa^2+qb^2=c(pq+m^2)$, а тоа е теоремата на Стјуарт за триаголник.

2. Нека a,b,n се природни броеви поголеми од 1. Броевите a и b се основи на два бројни системи. Нека броевите A_n и B_n имаат еднаков запис $x_nx_{n-1}...x_1x_0$ во бројните системи со основи a и b, соодветно, при што $x_n\neq 0$ и $x_{n-1}\neq 0$. Да ги означиме со A_{n-1} и B_{n-1} броевите кои се добиваат кога прва-та цифра x_n се отстрани. Докажи дека $a>b$ ако и само ако важи $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{A_{n-1}}{x_na^n+A_{n-1}}<\frac{B_{n-1}}{x_nb^n+B_{n-1}}\\
&\Leftrightarrow \quad x_na^nB_{n-1}>x_na^nA_{n-1}\\
&\Leftrightarrow \quad a^n\sum_{v=0}^{n-1}x_vb^v>b^n\sum_{v=0}^{n-1}x_va^v\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{v=0}^{n-1}x_v(a^nb^v-b^na^v)>0\\
&\Leftrightarrow \quad (a-b)\sum_{v=0}^{n-1}x_va^vb^v\,\frac{a^{n-v}-b^{n-v}}{a-b}>0\\
&\Leftrightarrow \quad a-b>0\\
&\Leftrightarrow \quad a>b.
\end{aligned}$$

Последната еквиваленција е точна бидејќи

$$x_va^vb^v\,\frac{a^{n-v}-b^{n-v}}{a-b}=x_va^vb^v(a^{n-v-1}+a^{n-v-2}b+...+b^{n-v-2}a+b^{n-v-1})\geq 0,$$

за $v=0,1,2,...,n-2$ и

$$x_va^vb^v\,\frac{a^{n-v}-b^{n-v}}{a-b}=x_{n-1}a^{n-1}b^{n-1}>0,$$

за $v=n-1$.

3. Низата реални броеви $a_0,a_1,...,a_n,...$ го задоволува условот

$$1=a_0\leq a_1\leq a_2\leq ....\leq a_n\leq ..., \tag{1}$$

а низата $b_1,b_2,...,b_n,...$ е определена со

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{a_{k-1}}{a_k})\frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Докажи дека:

а) $0 \le b_n < 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$,

б) за дадено c, такво што $0 \le c < 2$, постои низа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ која го задоволува условот (1) и при тоа $b_n > c$ за бесконечно многу вредности на индексот n.

Решение. а) Ако $0 < x \le y$, тогаш

$$(1-\frac{x}{y})\frac{1}{\sqrt{y}} \le 2(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}) . \qquad (*)$$

Навистина,

$$\frac{y-x}{y\sqrt{y}} \le 2\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y-x}{y} \le 2\frac{y-x}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{x})}$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-x)(2y-\sqrt{x}\sqrt{y}-x) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-x)[(y-x)+\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})] \ge 0 .$$

и како последното неравенство важи при $0 < x \le y$, добиваме дека неравенството (*) важи при $0 < x \le y$. Сега, заради (*), од неравенството (1) следува:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{a_{k-1}}{a_k})\frac{1}{\sqrt{a_k}} \le \sum_{k=1}^{n} 2(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}) = 2(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}) < 2 .$$

б) Нека $a_n = q^n$, $q > 1$. Во овој случај е исполнет условот (1). Наоѓаме:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{q^{k-1}}{q^k})\frac{1}{\sqrt{q^k}} = (1-\frac{1}{q})\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{q}})^k = (1-\frac{1}{q})\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{q}}} = \frac{\sqrt{q}+1}{q}(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}) .$$

Сега од $\lim\limits_{q\to 1}\frac{\sqrt{q}+1}{q} = 2$, следува дека $\frac{\sqrt{q}+1}{q} > c$ и како $\lim\limits_{q\to 1} b_n = \frac{\sqrt{q}+1}{q}$, заклучуваме дека скоро сите членови на низата $\{b_n\}$ се поголеми од c.

4. Определи ги сите природни броеви n, за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се раздели на две множества такви што производот на сите елементи од едното множество е еднаков на производот на сите елементи од другото множество.

Решение. *Лема.* Меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој е заемно прост со останатите.

Доказ. Меѓу шест последователни природни броеви постојат три последователни непарни броеви. Еден од нив е делив со три, а најмногу еден од нив е делив со 5. Според тоа, меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој не е делив со два, три и пет. Тој број е заемно прост со останатите броеви, бидејќи најголем заеднички делител на два броја, за кои разликата меѓу нив не е поголема од пет може да биде само еден од броевите 1, 2, 3, 4 или 5. ■

Множеството $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ го делиме на две подмножества така што производот на броевите од едното подмножество е еднаков на производот на броевите од другото подмножество. Меѓу елементите од почетното множество постои еден кој е заемно прост со останатите. Тој е множител во еден од производите, и го дели другиот производ. Ова е можно само ако тој број е 1. Во множеството $\{1,2,3,4,5\}$ само еден број е делив со 5. Затоа еден од производите е делив со 5, а другиот не е, што не е можно, бидејќи тие треба да се еднакви.

Значи, во множеството природни броеви не постои број n кој што го има бараното својство.

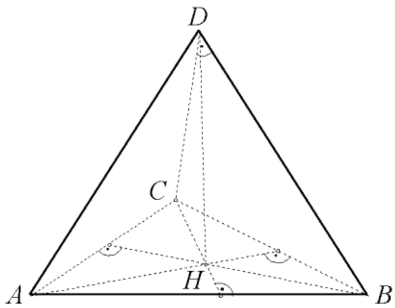
5. Во тетраедарот $ABCD$ важи $BD \perp CD$, а подножјето на висината повлечена од темето D се совпаѓа со ортоцентарот на триаголникот ABC. Докажи дека

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2 \leq 6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)\,.$$

За кои тетраедри важи знак за равенство?

Решение. Најпрво ќе докажеме дека спротивните рабови на тетраедарот $ABCD$ се заемно нормални. Нека H е ортоцентар на триаголникот ABC. Проекцијата на правата CD во рамнината ABC е правата CH. Затоа $AB \perp CH$ и $AB \perp DH$, па според тоа $AB \perp CHD$, т.е. $AB \perp CD$. На сличен начин се покажува дека $BC \perp AD$ и $AC \perp BD$.

Ќе докажеме дека рамнинските агли кај темето D се прави. Аголот CDB е прав по претпоставка. Ако $CD \perp BD$ и $CD \perp AB$, тогаш $CD \perp ABD$. Според тоа, аголот ADC е прав агол. На сличен начин се докажува дека аголот BDA е прав.



Според Питагоровата теорема исполнети се равенствата:

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2,\ \ \overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2,\ \ \overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2\,.$$

Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2 \leq 3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)$$

кое пак е еквивалентно со

$$0 \leq (\overline{AB}-\overline{BC})^2+(\overline{BC}-\overline{AC})^2+(\overline{AC}-\overline{AB})^2\,.$$

Последното неравенство е точно и знак за равенство важи ако и само ако

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} .$$

Јасно, ако

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} ,$$

тогаш

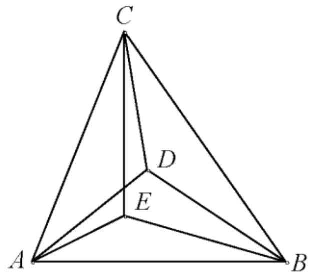
$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} .$$

6. Во рамнина се дадени 100 точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Да ги разгледаме сите триаголници со темиња во дадените точки. Докажи дека најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.

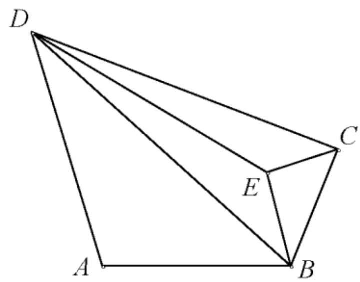
Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, такви што било кои три се неколинеарни. Тогаш постојат три триаголници со темиња во тие точки кои не се остроаголни.

Доказ. Ги разгледуваме трите можни случаи.

a) Конвексната обвивка на точките е триаголникот ABC. Меѓу аглите BDA, CDB и ADC барем два не се остри. Слично се гледа дека меѓу триаголниците BEA, CEB и AEC барем два не се остроаголни. Значи, во овој случај постојат барем четири триаголници кои не се остроаголни.



b) Конвексната обвивка на дадените точки е четириаголник $ABCD$. Јасно, барем еден триаголник со темиња во точките A, B, C, D не е остроаголен. Нека точката E е во триаголникот BCD (таа не може да припаѓа на дијагонала на четириаголникот $ABCD$, бидејќи било кои три точки се неколинеарни). Тогаш барем два од триаголниците BED, BCE и CDE не се остроаголни. Значи и во овој случај постојат барем три триаголници кои не се остроаголни.



c) Нека конвексната обвивка на дадените точки е конвексен петаголник. Ако четири агли од овој петаголник се остри, тогаш збирот на аглите би бил помал од $4 \cdot 90^\circ + 180^\circ = 540^\circ$, што не е можно. Претпоставувме дека острите агли се наоѓаат во темињата A, B и C. Барем еден од аглите на конвексниот четириаголник $ACDE$ не е остар. Затоа постојат барем три темиња кај кои аглите не се остри. ■

Од 100 точки може да се изберат $3\cdot\binom{100}{5}$ триаголници кои не се остроаголни. Еден ист триаголник се појавува во $\binom{97}{2}$ петорки темиња. Затоа бројот на триаголниците кои не се остроаголни е поголем или еднаков на $\frac{3\cdot\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Но, бројот на сите триаголници е $\binom{100}{3}$, па затоа бројот на остроаголните триаголници е помал или еднаков на $\binom{100}{3}-\frac{3\cdot\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Конечно, односот на бројот на остроаголни триаголници и вкупниот број на триаголници не може да биде поголем од $1-\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}\binom{100}{3}}=0,7$, што значи најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.