Četiri rješenja jednog zadatka za trokut

Dragoljub Milošević[1]

U knjizi [1], str. 54, nalazi se zadatak (bez rješenja):

Ako je u trokutu ABC kut $\gamma = 3\alpha$, dokazati jednakost

$$(c^2 - a^2)(c - a) = ab^2. \qquad (*)$$

Prikazat ćemo četiri rješenja tog zadatka.

Rješenje 1. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC odredimo točku D tako da je

$$\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle CAB = 2\alpha \quad \text{(slika 2)},$$

pri čemu je $\sphericalangle CDB = 3\alpha$ (vanjski kut za trokut ACD). Uvedimo sljedeće oznake: $|AD| = x$ i $|CD| = y$. Tada je $|BD| = c - x$. Trokuti ABC i CBD imaju jednake kutove, pa su slični. Iz te sličnosti slijedi

$$|BC| : |BD| = |AB| : |BC| = |AC| : |CD|,$$

$$a : (c - x) = c : a = b : y,$$

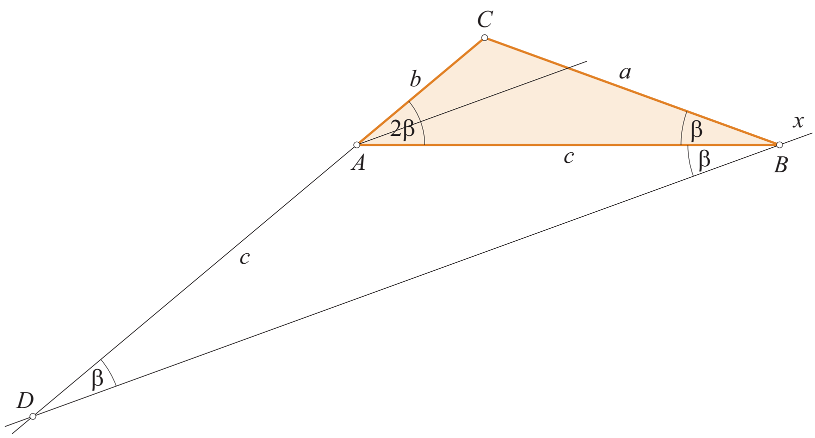
odakle dobivamo

$$x = \frac{c^2 - a^2}{c}, \qquad y = \frac{ab}{c}. \qquad (1)$$

Budući da je $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle CAD$ u trokutu ACD, koristit ćemo sljedeću lemu.

Lema. *Ako je u trokutu ABC kut $\alpha = 2\beta$, tada je $a^2 = b(b + c)$.*

Dokaz. Neka polupravac BX, paralelan sa simetralom kuta α, siječe pravac AC u točki D (vidi sliku 1). Tražena jednakost slijedi direktno iz sličnosti trokuta ABC i BDC.



Slika 1.

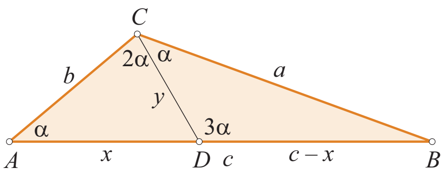
Primjenom ove leme na trokut ACD imamo $x^2 = y(y + b)$, a odavde, radi (1), dobivamo

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{c}\right)^2 = \frac{ab}{c}\left(\frac{ab}{c} + b\right)$$

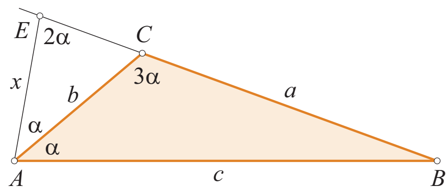
[1] Profesor je u mirovini u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

$$(c^2 - a^2)^2 = ab(ab + bc)$$
$$(c^2 - a^2)(c - a)(c + a) = ab^2(a + c) \quad \text{tj.} \quad (*).$$

Rješenje 2.



Slika 2.



Slika 3.

Na pravcu BC odredimo točku E tako da $\sphericalangle EAC = \sphericalangle CAB = \alpha$ (slika 3). Kako je $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CEA + \sphericalangle EAC$ (vanjski kut trokuta ACE), ili $3\alpha = \sphericalangle CEA + \alpha$, tj. $\sphericalangle CEA = 2\alpha$, trokut ABE je jednakokračni ($\sphericalangle EAB = \alpha + \alpha = \sphericalangle CEA = \sphericalangle BEA$). Radi toga je $|CE| = c - a$. Neka je $|AE| = x$. Radi poučka o sinusima primijenjenog na trokut ABE, imamo

$$\frac{|AE|}{\sin(180^\circ - 4\alpha)} = \frac{|AB|}{\sin 2\alpha} \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{\sin 4\alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha}.$$

Kako je $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$, iz prethodne jednakosti imamo

$$2\cos 2\alpha = \frac{x}{c}. \tag{2}$$

Kosinusov poučak primijenjen na trokut ACE daje

$$|AC|^2 = |AE|^2 + |CE|^2 - 2|AE| \cdot |CE| \cdot \cos(\sphericalangle CEA),$$
$$b^2 = x^2 + (c - a)^2 - 2x(c - a)\cos 2\alpha.$$

Iz posljednje jednakosti, zbog (2), je

$$b^2 = x^2 + (c - a)^2 - x(c - a) \cdot \frac{x}{c},$$

a odavde

$$x^2 = \frac{c}{a}(b^2 - (c - a)^2). \tag{3}$$

Iz leme primijenjene na trokut ACE redom dobivamo

$$\begin{aligned} b^2 &= (c - a)(c - a + x), \\ b^2 - (c - a)^2 &= x(c - a), \\ x^2 &= \left(\frac{b^2 - (c - a)^2}{c - a}\right)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Jednakosti (3) i (4) su redom ekvivalentne:

$$\frac{c}{a}(b^2 - (c - a)^2) = \left(\frac{b^2 - (c - a)^2}{c - a}\right)^2$$
$$\frac{c}{a}(c - a)^2 = b^2 - (c - a)^2 \quad (\text{zbog } c - a \neq b)$$
$$c(c - a)^2 = ab^2 - a(c - a)^2$$

$$(c-a)^2(c+a) = ab^2$$
$$(c^2-a^2)(c-a) = ab^2 \quad \text{tj. } (*).$$

Rješenje 3. Na stranici $\overline{AB}$ odredimo točku F tako da $\sphericalangle FCA = \sphericalangle CAB = \alpha$ (slika 4). Tada je u trokutu BCF: $\sphericalangle BCF = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$ i $\sphericalangle CFB = 2\alpha$ (vanjski kut trokuta AFC). To znači da je trokut BCF jednakokračni, pa je $|BF| = |BC| = a$. Zbog toga je $|AF| = c - a$. Trokut AFC je, također, jednakokračni, te je $|BF| = |BC| = a$ i $|CF| = |AF| = c - a$. Iz trokuta AFC je

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{|AF|} = \frac{b}{2(c-a)}. \tag{5}$$

Iz kosinusovog poučka primijenjenog na trokut ABC, imamo

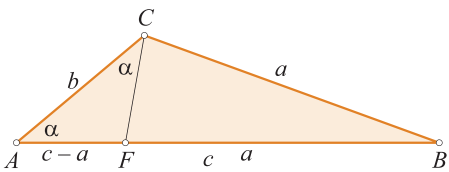
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{6}$$

Iz jednakosti (5) i (6) je

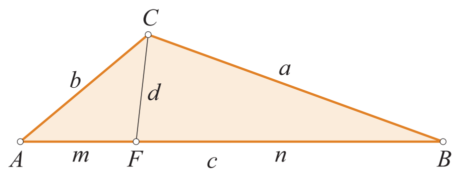
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{b}{2(c-a)},$$

a odavde se dobiva željena jednakost $(*)$.

Rješenje 4. Koristit ćemo **Stewartov teorem**: *Ako je F točka na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC (slika 5), $|CF| = d$, $|AF| = m$ i $|BF| = n$, tada vrijedi jednakost $c \cdot (mn + d^2) = a^2m + b^2n$.*



Slika 4.



Slika 5.

Primjenom Stewartovog teorema na trokut ABC (slika 4), imamo:

$$|AB| \cdot (|AF| \cdot |FB| + |CF|^2) = |BC|^2 \cdot |AF| + |AC|^2 \cdot |BF|,$$
$$c((c-a)a + (c-a)^2) = a^2(c-a) + b^2a.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$ac(c-a) + c(c-a)^2 - a^2(c-a) = ab^2,$$
$$(c-a)(ac + c(c-a) - a^2) = ab^2 \quad \text{tj. } (*).$$

Literatura

[1] J. Carstensen, A. Muminagić, P. Mladinić, *Pravokutni trokut*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2011.