XII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Легура од бакар и олово со маса 12 kg содржи 45% бакар. Колку олово треба да ѝ се додаде на легурата за да содржи 40% бакар?

2. Најди ги сите природни броеви n, такви што изразот 10^n-1 да биде делив со 81.

3. Во рамностраниот триаголник ABC центарот на опишаната кружница е O, а точките M и E на страните AB и AC се избрани така што $\overline{AM}+\overline{AE}=\overline{AB}$. Докажи дека $\overline{OM}=\overline{OE}$ и $\measuredangle MOE=120°$.

4. Висините CM и AP на триаголникот ABC се сечат во точка H. Одреди го аголот ACB на триаголникот ABC, ако $\overline{AB}=\overline{CH}$.

XII (87.VII.1)

Прв начин. Задачата ќе ја решиме со равенка. Ако со x го означиме бројот на килограмите олово што треба да ги додадеме на легурата, добиваме:

$$12\cdot\frac{45}{100}=(12+x)\cdot\frac{40}{100}$$
$$12\cdot 45=12\cdot 40+40x$$
$$540-480=40x$$
$$60=40x,\qquad x=\frac{3}{2}.$$

Значи треба да додадеме 1,5 *kg* олово.

Втор начин. Задачата можеме да ја решиме и со просто правило тројно. Од шемата:

$\uparrow$ **12 *kg***	$\downarrow$ **45 %**
12+*x* *kg*	**40 %**

ја составуваме пропорцијата $(12+x):12=45:40$, од каде што добиваме

$$40(12+x)=45\cdot 12,\qquad x=1{,}5.$$

XII (87.VII.2)

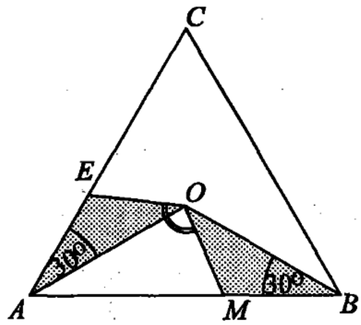
Бројот $A=10^n-1=100\ldots0-1=99\ldots9$ се запишува со n деветки, па секогаш е делив со 9. При ова делење се добива како количник бројот 11...1 запишан со n единици. За бројот A да биде делив со 81, треба количникот 11...1 да биде делив со 9, а тоа е можно само ако збирот на цифрите $1+1+\ldots+1=n$ е делив со 9.

Следствено n е содржател на 9, т.е.

$$n=9k,\ k\in\mathbb{N}\quad \text{или}\quad n\in\{9,18,27,\ldots\}.$$

XII (87.VII.3)

Нека O е центарот на опишаната кружница околу рамностраниот ΔABC и нека точките M и N се такви што $\overline{AM}+\overline{AE}=\overline{AB}$ (црт. 1). Треба да докажеме дека $\overline{OM}=\overline{OE}$ и $\measuredangle MOE=120°$.



Црт. 1

Имаме:

$\overline{AM}+\overline{AE}=\overline{AB}$, по услов

$\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$, очигледно равенство.

Оттука следува дека $\overline{AE}=\overline{MB}$.

Понатаму воочуваме дека $\Delta AOE\cong\Delta BOM$, според признакот САС, бидејќи:

1) $\overline{AO}=\overline{BO}=R$,

2) $\overline{AE}=\overline{BM}$, докажавме

3) $\measuredangle OAE=\measuredangle OBM=30°$.

Од складноста на овие триаголници следува:

$$\overline{OE}=\overline{OM} \quad \text{и} \quad \measuredangle AOE=\measuredangle BOM.$$

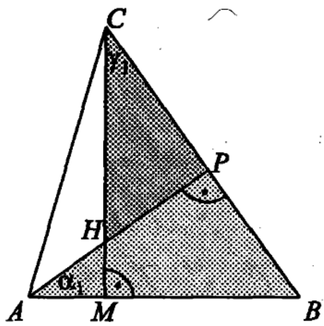
Бидејќи $\measuredangle AOB=120°$, тогаш добиваме:

$$\begin{aligned}\measuredangle EOM&=\measuredangle EOB-\measuredangle BOM\\&=\measuredangle EOB-\measuredangle AOE\\&=\measuredangle AOB=120°.\end{aligned}$$

XII (87.VII.4)

Нека висините AP и CM на триаголникот ABC се сечат во точката H (црт. 2). Очигледно $\alpha_1=\gamma_1$, како агли со заемно нормални краци. Натаму, по услов $\overline{AB}=\overline{CH}$, па следува дека правоаголните триаголници ABP и CHP се складни (имаат еднакви хипотенузи и по еден остар агол).

Оттука следува дека $\overline{AP}=\overline{CP}$, т.е. триаголникот ACP е рамнокрак правоаголен, бидејќи $AP\perp CP$. Значи, $\measuredangle ACB=45°$.



Црт. 2

Забелешка. За еднаквоста на аглите α_1 и γ_1 можеме да заклучиме и од условите:

$$\alpha_1+\beta=90°, \quad \text{од } \Delta ABP$$

$$\gamma_1+\beta=90°, \quad \text{од } \Delta BCM.$$

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Двајца велосипедисти тргнуваат истовремено од местата A и B, еден спроти друг и се среќаваат по извесно време. Првиот велосипедист патот од A до B го поминал за 4 часа и 48 минути повеќе од времето поминато до среќавањето, а вториот патот од B до A го поминал за 3 часа и 20 минути повеќе од времето поминато до среќавањето. За колку време секој од велосипедистите може да го мине растојанието меѓу двете места ?

2. Ако збирот на два цели броја е делив со 10, тогаш квадратите на тие броеви завршуваат на иста цифра. Докажи!

3. Докажи дека кај секој паралелограм збирот од квадратите на дијагоналите е еднаков на двојниот збир од квадратите на неговите страни.

4. Во правоаголниот триаголник ABC, со хипотенуза AB, симетралата на аголот кај темето A ја дели страната BC на два дела со должини 5 cm и 13 cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на тој триаголник.

XII (87.VIII.1)

Ако со x го означиме времето до средбата, тогаш првиот велосипедист ќе го помине патот за $\left(x+4\frac{4}{5}\right)$ часа, а вториот за $\left(x+3\frac{1}{3}\right)$ часа. Бидејќи до средбата, по x часа, велосипедистите заедно го минале целиот пат, ќе следува дека за 1 час тие ќе поминат само $\frac{1}{x}$ дел од патот. Од друга страна, секој од нив за еден час го поминува следниот дел од патот:

првиот: $\frac{1}{x+\frac{24}{5}}=\frac{5}{5x+24}$,

вториот: $\frac{1}{x+\frac{10}{3}}=\frac{3}{3x+10}$.

Според тоа ја добиваме следната равенка:

$$\frac{5}{5x+24}+\frac{3}{3x+10}=\frac{1}{x}$$

Ако равенката ја помножиме со $x(5x+24)(3x+10)\neq 0$, добиваме:

$$5x(3x+10)+3x(5x+24)=(5x+24)(3x+10)$$

$$15x^2+50x+15x^2+72x=15x^2+50x+72x+240$$

$$15x^2=240,\quad x^2=16,\quad x=\pm 4.$$

Бидејќи x е позитивен број, следува дека $x=4$. Според тоа, патот помеѓу местото A и B првиот велосипедист ќе го помине за 8 часа и 48 минути, а вториот - за 7 часа и 20 минути.

XII (87.VIII.2)

Прв начин. Ако збирот на два цели броја е делив со 10, тогаш настануваат следните можности:

1) Двата броја завршуваат на 0 или на 5, но тогаш и нивните квадрати завршуваат на 0 или на 5, т.е. завршуваат на иста цифра.

2) Едниот број завршува на 1, другиот на 9, а нивните квадрати завршуваат на 1.

3) Едниот број завршува на 2, другиот на 8, а нивните квадрати на 4.

4) Едниот број завршува на 3, другиот на 7, а нивните квадрати на 9.

5) Едниот број завршува на 4, другиот на 6, а нивните квадрати на 6.

Значи, во секој случај кога збирот на два броја е делив со 10, квадратите на тие броеви завршуваат на иста цифра.

Втор начин. Нека a и b се два цели броја чиј збир $a+b$ е делив со 10, т.е. $a+b=10m$. Тогаш и производот $(a+b)(a-b)$ е делив со 10. Бидејќи $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, следува дека и разликата a^2-b^2 е делива со 10, т.е. завршува на 0. Оттука следува дека a^2 и b^2 завршуваат на иста цифра.

Трет начин. Нека $a=10m+r$ и $b=10n+p$ се два цели броја, кои при делење со 10 даваат остатоци r и p, соодветно. За збирот $a+b$ да биде делив со 10, треба да важи:

(*) $$r+p=10, \quad \text{т.е.} \quad p=10-r.$$

За квадратите на броевите a и b добиваме:

$$a^2=(10m+r)^2=100m^2+20mr+r^2$$
$$b^2=(10n+p)^2=100n^2+20np+p^2$$

Имајќи го предвид равенството (*), добиваме:

$$p^2=(10-r)^2=100-20r+r^2$$
$$b^2=100n^2+20n(10-r)+100-20r+r^2$$

Следствено, од равенствата:

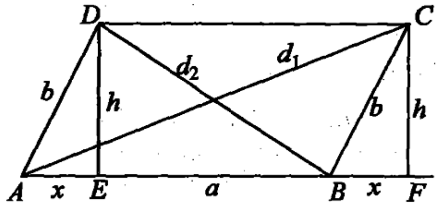
$$a^2=10(10m^2+2mr)+r^2$$
$$b^2=10(10n^2+20n-2nr+10-2r)+r^2$$

заклучуваме дека броевите a^2 и b^2 завршуваат на иста цифра со која завршува и r^2.

XII (87.VIII.3)

Нека $ABCD$ е произволен паралелограм и нека $\overline{AC} = d_1$, $\overline{BD} = d_2$. Треба да докажеме дека:

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$$



Црт. 3

За таа цел ги повлекуваме висините од C и D и добиваме два складни правоаголни триаголници AED и BFC (црт. 3).

Од правоаголниот ΔAED имаме

(1) $$h^2 = b^2 - x^2.$$

Од правоаголните триаголници AFC и BED, имајќи го предвид равенството (1), добиваме:

$$d_1^2 = (a+x)^2 + h^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 = a^2 + b^2 + 2ax$$

$$d_2^2 = (a-x)^2 + h^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

Ако ги собереме последните две равенства, добиваме:

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ax + a^2 + b^2 - 2ax$$

т.е.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

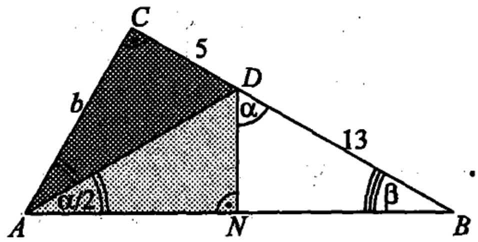
XII (87.VIII.4)

Прв начин. Нека AD е симетрала на остриот агол α во правоаголниот ΔABC и нека $\overline{BD}=13\,cm$, $\overline{CD}=5\,cm$ (црт. 4).

За да ги пресметаме периметарот L и плоштината P на правоаголниот ΔABC, треба да ги најдеме уште страните $c=\overline{AB}$ и $b=\overline{AC}$.

За таа цел повлекуваме $DN \perp AB$; тогаш

$\Delta ACD \cong \Delta AND$ (Зошто?)



Црт. 4

Од складноста на овие триаголници следува $\overline{DN}=\overline{DC}=5$, па од правоаголниот триаголник NBD наоѓаме:

$$\overline{NB}^2=13^2-5^2=144, \quad \overline{NB}=12.$$

Понатаму, од сличноста на триаголниците ABC и DBN добиваме:

$$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{DN}:\overline{BN}$$

$$\overline{AC}:18=5:12$$

$$\overline{AC}=\frac{5\cdot 18}{12}=7{,}5$$

Значи, $b=7{,}5$. Од $\overline{AN}=\overline{AC}=7{,}5$, имаме:

$$c=\overline{AB}=\overline{AN}+\overline{NB}=7{,}5+12=19{,}5.$$

Конечно:

$$L=a+b+c=18+7{,}5+19{,}5=45,$$

$$P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 7{,}5=67{,}5.$$

Значи, периметарот на ΔABC е $45\,cm$, а плоштината $67{,}5\,cm^2$.

Забелешка. За одредување на страните b и c на ΔABC можеме да го користиме својството на симетралата на аголот α, па имаме:

$$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{CD}:\overline{BD}$$

$$b:c=5:13, \text{ т.е. } c=\frac{13}{5}b.$$

Од Питагоровата теорема за ΔABC добиваме:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{13}{5}b\right)^2 = 18^2 + b^2$$

$$\left(\frac{169}{25} - 1\right)b^2 = 18^2$$

$$\frac{144}{25}b^2 = 18^2, \quad \text{т.е.} \quad \frac{12}{5}b = 18,$$

од каде што $b = \frac{15}{2}$; а потоа и $c = \frac{39}{2}$.