

Др Драгослав Љубић (Београд)

БРЗИНА

(Мачке, мишеви, славине, радници, сат и сл.)

У овом чланку бавићемо се једном, већини читалаца добро зна-
ном, формулом:

$$s = v \cdot t, \quad (1)$$

где је s „пут“, v „брзина“ и t „време“.

Знаци навода нису естетике ради. Испоставиће се да се многи
проблеми, који на први поглед не личе један на други, могу подвести
под формулу (1).

Пут s ће у првом задатку бити број уловљених мишева, у другом
— део базена напуњен водом, у трећем — количина обављеног посла,
у четвртом — број степени који је прешла казаљка . . . Заједничко име
за s у свим овим случајевима нека нам буде *обављени рад*.

„Брзина“ v ће у првом случају бити број уловљених мишева на
дан, у другом — део базена који се напуни или испразни на сат, у
трећем — количина обављеног посла на сат (на дан, или у било којој
јединици времена која је примерена одговарајућем задатку), у четвр-
том — број степени које казаљка прелази и минути . . . Заједничко
име за v у свим овим ситуацијама нека нам буде *брзина обављања
рада*. У неким задацима ће бити више брзина у „игри“. Као у физици,
оне ће се сабирати или одузимати у зависности од природе проблема.

Детаљно ћемо објаснити решења неколико задатака. Неки од за-
датака се могу једноставније решити него што ћемо ми предложити,
али вам препоручујемо да се одрекнете једноставнијег решавања у ко-
рист овладавања „рецептом“ који вам нудимо. Почнимо са задатком:

Задатак 1: Мачка и по улови миша и по за дан и по. За колико дана
ће 100 мачака уловити 100 мишева?

Решење: Израчунајмо најпре *основну брзину* v_1 која је једнака *броју
мишева које једна мачка улови за један дан*. Пошто нам је дат податак
у коме ни број мачака ни број дана није 1, брзину v_1 ћемо израчунати
у два корака. *Једна мачка* за исто време (дан и по) обави 1.5 пута

мањи рад, улови $\frac{1.5}{1.5} = 1$ – ог миша. Дакле, за $t = 1.5$ дана обављени рад је $s = 1$ миш, па брзину једне мачке рачунамо из формуле (1)

$$v_1 = \frac{s}{t} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} \quad (\text{у мишевима на дан}).$$

Брзина v_1 сто мачака је сто пута већа од брзине v_1 , па је $v_2 = 100 \cdot \frac{1}{1.5}$.
Време t за које оне обаве рад $s = 100$ износи:

$$t = \frac{s}{v_2} = \frac{100}{100 \cdot \frac{1}{1.5}} = 1.5 \text{ дан.}$$

Задатак 2: Базен се једном славинам може напунити за 6 сати, а другом за 5 сати. Пун базен се може испразнити одводном цеви за 3 сата. Ако се истовремено отворе обе славине и одводна цев,

(а) који део базена ће се напунити за 2 сата?

(б) за које ће се време напунити базен?

Решење: Израчунајмо најпре основне брзине v_1, v_2, v_3 које су једнак делу базена који напуне (испразне) славине (одводна цев) за један сат. Брзина рада прве славине је:

$$v_1 = \frac{s}{t} = \frac{1 \text{ базен}}{6 \text{ сати}} = \frac{1}{6} \quad (\text{у базенима на сат}).$$

Брзина рада друге славине је:

$$v_2 = \frac{s}{t} = \frac{1 \text{ базен}}{5 \text{ сати}} = \frac{1}{5} \quad (\text{у базенима на сат}).$$

Брзина рада одводне цеви је:

$$v_3 = \frac{s}{t} = \frac{1 \text{ базен}}{4 \text{ сата}} = \frac{1}{4} \quad (\text{у базенима на сат}).$$

Брзина рада, када су укључене обе славине и одводна цев, је стога:

$$v = \frac{1}{6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{30} \quad (\text{у базенима на сат}).$$

- (а) За $t = 2$ сата, напуни се $s = v \cdot t = \frac{1}{30} \cdot 2 = \frac{1}{15}$ — тина базна.
- (б) Цео базен $s = 1$ напуни се за време $t = \frac{s}{v} = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30$ сати.

Задатак 3: Један радник би завршио неки посао за један дан. Ако му друг помогне 3 сата, посао ће завршити за 9 сати. За које би време његов друг сам завршио посао?

Решење: Овај задатак, као што се понекад (ненамерно) може десити, није прецизно задат. Наиме, није сасвим јасно да ли је у тих 9 сати урачунато и 3 сата док му је друг помагао или не. У таквој ситуацији треба тражити од особе која вам је задала задатак прецизну формулацију.

Претпоставимо да смо то урадили и добили одговор да је у 9 сати урачунато 3 сата заједничког рада (свако по три) и 6 сати самосталног рада првог радника.

Нека су v_1 и v_2 брзине рада првог и другог радника рачунате у деловима посла на сат. Тада је

$$v_1 = \frac{1}{24}.$$

За време док су заједно радили (брзином $v = v_1 + v_2$) обавили су посао:

$$s_1 = v \cdot t = \left(\frac{1}{24} + v_2 \right) \cdot 3, \quad (2)$$

а за преосталих 6 сати први је радник урадио:

$$s_2 = \frac{1}{24} \cdot 6 = \frac{1}{4}. \quad (3)$$

Како је укупан обављени посао $s_1 + s_2 = 1$, то из (2) и (3) добијамо $v_2 = \frac{5}{24}$. Време ($t = ?$) за које би други радник завршио цео посао ($s = 1$) је стога:

$$t = \frac{s}{v_2} = \frac{1}{\frac{5}{24}} = \frac{24}{5} = 4^h 48^{min}.$$

Задатак 4: Ако је сада тачно 9^h , за које време ће се први пут поклопити мала и велика казаљка?

Решење: Брзине, v_1 — кретања мале казаљке, и v_2 — кретања велике казаљке, рачунаћемо у *степенима у минути*. (Ово радимо из једноставног разлога што би рачунање брзине у „минутним подеоцима“ у минути — рецимо $v_1 = 5$ „минутних подеока“ за 60 минута — могло да доведе до збрке.) Самим тим пут ћемо рачунати у степенима.

Велика казаљка пређе пун круг ($s = 360^\circ$) за $t = 60$ минута, па је њена брзина:

$$v_2 = \frac{s}{t} = \frac{360^\circ}{60 \text{ min}} = 6 \quad (\text{степен у минути}).$$

Мала казаљка пређе пун круг ($s = 360^\circ$) за $t = 12^h = 720$ минута, па је њена брзина:

$$v_1 = \frac{s}{t} = \frac{360^\circ}{720 \text{ min}} = \frac{1}{2} \quad (\text{степен у минути}).$$

У почетном тренутку растојање између казаљки је $\frac{3}{4}$ пуног круга, дакле 270° . Како се казаљке крећу у истом смеру, њихово растојање се мења брзином $v_2 - v_1$, па је време t до њиховог првог поклапања једнако:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{270}{6 - \frac{1}{2}} = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11} \quad \text{минути.}$$

Уклонићемо најзад мистику са формуле (1). Ради се, наравно, о *пропорционалности величина*. Број уловљених мишева m , количина воде у базену v , урађени део посла p , пређен број „минутних подеока“ l , су величине директно пропорционалне времену t . Величине $\frac{m}{t}$, $\frac{v}{t}$, $\frac{p}{t}$, $\frac{l}{t}$ су стога константе, што смо искористили и дали им име *брзина*.

А сада задатак за самостални рад:

1. Мачка и по улови три и по миша за два и по дана. Колико мишева ће 100 мачака уловити за 45 дана?