понеделник, 11. јули 2022

Задача 1. Банката во Осло кова два типови од монети: алуминиумски (обележуваме A) и бронзени (обележуваме B). Маријана има n алуминиумски монети и n бронзени монети, подредени во ред во некој произволен почетен редослед. *Синџир* е произволна подниза од последователни монети од ист тип. За даден позитивен цел број $k \leqslant 2n$, Маријана ја повторува следната постапка: таа го наоѓа најдолгиот синџир кој ја содржи k-тата монета гледано од лево, и ги поместува сите парички од овој синџир на левата страна од редот. На пример за $n = 4$ и $k = 4$, постапката почнувајќи од подредувањето $AABBBABA$ ќе биде

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Најди ги сите парови (n, k) каде $1 \leqslant k \leqslant 2n$ такви што за секое почетно подредување, во некој момент во постапката, првите n монети од лево ќе бидат сите од ист тип.

Задача 2. Нека $\mathbb{R}^+$ го означува множеството на позитивни реални броеви. Најди ги сите функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за секој $x \in \mathbb{R}^+$, постои точно еден $y \in \mathbb{R}^+$ за кој важи

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задача 3. Нека k е позитивен цел број и S е конечно множество од непарни прости броеви. Докажи дека постои најмногу еден начин (до ротација и осна симетрија) да се постават елементите од S околу кружница така што производот од било кои два соседи на кружницата е од облик $x^2 + x + k$ за некој позитивен цел број x.

Language: Macedonian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

вторник, 12. јули 2022

Задача 4. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $BC = DE$. Претпоставуваме дека постои точка T во внатрешноста на $ABCDE$ за која $TB = TD$, $TC = TE$ и $\angle ABT = \angle TEA$. Нека правата AB ги сече правите CD и CT во точки P и Q, соодветно. Претпоставуваме дека точките P, B, A, Q се поставени на правата во овој редослед. Нека правата AE ги сече правите CD и DT во точки R и S, соодветно. Претпоставуваме дека точките R, E, A, S се поставени на правата во овој редослед. Докажи дека точките P, S, Q, R лежат на кружница.

Задача 5. Најди ги сите тројки (a, b, p) од позитивни цели броеви, каде p е прост број и важи

$$a^p = b! + p.$$

Задача 6. Нека n е позитивен цел број. *Нордиски квадрат* е $n \times n$ табла на која се напишани сите цели броеви од 1 до n^2 така што на секое поле е напишан точно еден број. Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна. Секое поле кое е соседно само со полиња на кои се напишани поголеми броеви го нарекуваме *котлина*. *Нагорница* е низа од едно или повеќе полиња таква што:

(i) првото поле во низата е котлина,

(ii) секое следно поле во низата е соседно со претходното поле, и

(iii) броевите кои се напишани во полињата од низата се во растечки редослед.

Најди го, како функција од n, најмалиот можен вкупен број на нагорници во Нордиски квадрат.

Language: Macedonian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

Monday, 11. July 2022

Problem 1. The Bank of Oslo issues two types of coin: aluminium (denoted A) and bronze (denoted B). Marianne has n aluminium coins and n bronze coins, arranged in a row in some arbitrary initial order. A *chain* is any subsequence of consecutive coins of the same type. Given a fixed positive integer $k \leqslant 2n$, Marianne repeatedly performs the following operation: she identifies the longest chain containing the kth coin from the left, and moves all coins in that chain to the left end of the row. For example, if $n = 4$ and $k = 4$, the process starting from the ordering $AABBBABA$ would be

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Find all pairs (n, k) with $1 \leqslant k \leqslant 2n$ such that for every initial ordering, at some moment during the process, the leftmost n coins will all be of the same type.

Problem 2. Let $\mathbb{R}^+$ denote the set of positive real numbers. Find all functions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that for each $x \in \mathbb{R}^+$, there is exactly one $y \in \mathbb{R}^+$ satisfying

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Problem 3. Let k be a positive integer and let S be a finite set of odd prime numbers. Prove that there is at most one way (up to rotation and reflection) to place the elements of S around a circle such that the product of any two neighbours is of the form $x^2 + x + k$ for some positive integer x.

Language: English

Time: 4 hours and 30 minutes.
Each problem is worth 7 points.

Tuesday, 12. July 2022

Problem 4. Let $ABCDE$ be a convex pentagon such that $BC = DE$. Assume that there is a point T inside $ABCDE$ with $TB = TD$, $TC = TE$ and $\angle ABT = \angle TEA$. Let line AB intersect lines CD and CT at points P and Q, respectively. Assume that the points P, B, A, Q occur on their line in that order. Let line AE intersect lines CD and DT at points R and S, respectively. Assume that the points R, E, A, S occur on their line in that order. Prove that the points P, S, Q, R lie on a circle.

Problem 5. Find all triples (a, b, p) of positive integers with p prime and

$$a^p = b! + p.$$

Problem 6. Let n be a positive integer. A *Nordic square* is an $n \times n$ board containing all the integers from 1 to n^2 so that each cell contains exactly one number. Two different cells are considered adjacent if they share a common side. Every cell that is adjacent only to cells containing larger numbers is called a *valley*. An *uphill path* is a sequence of one or more cells such that:

(i) the first cell in the sequence is a valley,

(ii) each subsequent cell in the sequence is adjacent to the previous cell, and

(iii) the numbers written in the cells in the sequence are in increasing order.

Find, as a function of n, the smallest possible total number of uphill paths in a Nordic square.

Language: English

Time: 4 hours and 30 minutes.
Each problem is worth 7 points.