МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 50

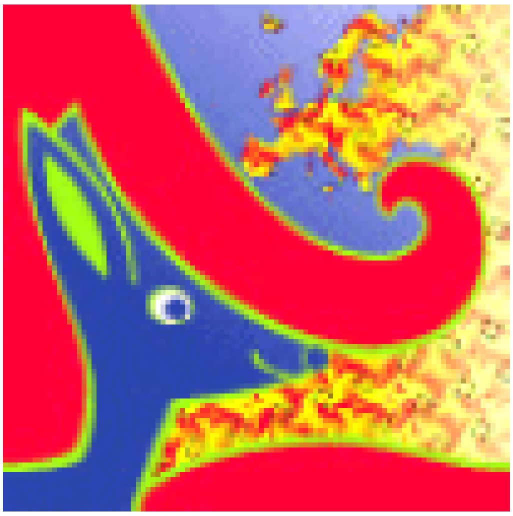
Ристо Малчески

ЗБИРКА РЕШЕНИ ТЕСТОВИ ОД НАТПРЕВАРОТ КЕНГУР ЗА ОСМО И ДЕВЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ (КАТЕГОРИЈА Kadett 2008-2025)

Скопје, 2026

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА



ПРЕДГОВОР

Пред вас е збирка решени тестови од престижниот меѓународен натпревар *Кенгур без граници* од категоријата Kadett, која ги опфаќа учениците од осмо и деветто одделение од деветгодишното основно образование. Збирката ги содржи сите тестови од оваа категорија од 2008 до 2025 година.

Кенгур без граници е меѓународен натпревар по математика. Организиран е од истоименото светско здружение. Во Македонија го организира Природно-математичкото здружение Армаганка. Главната цел на натпреварот „Кенгур без граници“ е популаризација на математиката. Целта на натпреварот е и зголемување на интересот за математиката и природните науки, како и нивото на логичко и комбинаторичко размислување, разбирање на текстови и примена на стекнатото математичко знаење.Учениците од целиот свет, размислуваат за истите проблеми и решаваат исти задачи во исто време. Во целиот свет се одржува во третиот четврток во март, во 11 часот наутро.

Во збиркава се дадени комплетни решенија на задачите, при што решението на секоја задача следи одма по формулацијата на истата. Сепак на читателот му препорачувам прво да се обиде самостојна да ја реши задачата која ја обработува, а потоа да го консултира понуденото решение. Освен тоа, за некои задачи се понудени по два или повеќе начини за нивно решавање. Ова е особено важно за развојот на математичкото мислење, па затоа на читателот му препорачувам секаде каде што може задачата да ја реши и на друг начин од тој што е понуден.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман придонесе значително да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис. Се надевам дека оваа збирка тестови ќе најде свое место во подготовката на учениците за учество на натпреварот Кенгур без граници, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторот

10. март, 2026 г.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2008

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Колку ленти има на цртежот десно?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. B). На дадениот цртеж има 6 краеви и тоа се 3 ленти. Исто така има и едно затворена лента, што значи има четири ленти.

2. Во едно одделение има 9 момчиња и 13 девојчиња. Половина од децата од тоа одделение се на екскурзија. Кој е најмалиот можен број девојчиња кои не се на екскурзија?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. C). Во одделението има $9+13=22$ ученици. На екскурзија биле $22:2=11$ ученици. Значи, најмалиот можен број девојчиња кои не се на екскурзија е $13-11=2$.

3. Шест зајаци јадат шест моркови за шест минути. Колку зајаци ќе изедат 100 моркови за 100 минути?

A) 100 B) 60 C) 6 D) 10 E) 600

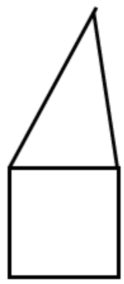
Решение. C). Бидејќи 6 зајаци за 6 минути јадат 6 моркови, заклучуваме дека 6 зајаци за 1 минута јадат 1 морков. Значи, 6 зајаци за 100 минути ќе изедат 100 моркови.

4. Броевите 2, 3, 4 и уште еден број се запишани во квадратна шема, по еден број во секое квадратче. Збирот на броевите во првиот ред е 9, а збирот на броевите во вториот ред 6. Кој е непознатиот број?

A) 5　　B) 6　　C) 7　　D) 8　　E) 4

Решение. B). Збирот на сите четири броја е еднаков на збирот на збировите на броевите запишани во првиот и на броевите запишани во вториот ред, однос на $9+6=15$. Според тоа, ако a е четвр-тиот број, тогаш $a+2+3+4=15$, т.е. $a=6$.

5. Траголникот и квадратот прикажани на цртежот десно имаат еднакви периметри. Должината на страната на квадратот е $4\,cm$. Колку е периметарот на целата фигура?



A) $12\,cm$　　B) $24\,cm$　　C) $298\,cm$　　D) $32\,cm$

E) зависи од димензиите на триаголникот

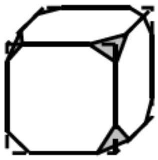
Решение. B). Периметрите на квадратот и триаголникот се еднакви на $4\cdot 4=16\,cm$. Значи, периметарот на петаголникот е еднаков на $16+16-2\cdot 4=24\,cm$.

6. Цвеќарката Маргарита има 24 бели, 42 црвени и 36 жолти ружи. Колку најмногу идентични букети може да направи ако треба да ги искористи сите цвеќиња?

A) 4　　B) 6　　C) 8　　D) 10　　E) 12

Решение. B). Бидејќи секој вид ружи треба да го подели на еднаков број букети, бројот на букетите ќе биде заеднички делител на броевите 24, 42 и 36. Затоа најголемиот можен број букети ќе биде еднаков на $NZD(24,42,36)=6$.

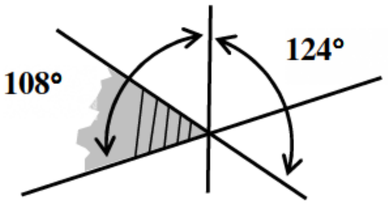
7. Сите ќошиња на коцката се отсечени како што е прикажано на цртежот десно. Колку рабови има добиеното тело?



A) 26 B) 30 C) 36 D) 40 E) друг одговор

Решение. C). Со сечењето на секој ќош бројот на рабовите се зголемува за 3. Коцката има 12 рабови и 8 ќоша, па затоа телото ќе има $12+8\cdot 3=36$ рабови.

8. Три прави се сечат како на цртежот десно. Два од аглите кои ги формираат правите се дадени. Колку е мерката на сивиот агол?



A) 52° B) 53° C) 54°

D) 55° E) 56°

Решение. A). Суплементниот агол на аголот од 124° е еднаков на $180^\circ-124^\circ=56^\circ$. Значи, мерката на сивиот агол е $108^\circ-56^\circ=52^\circ$

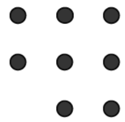
9. Даниел има 9 монети од по 2 денари, а Ана има 8 монети од по 5 денари. Колку најмалку монети треба да разменат за двајцата имаат еднакви суми пари?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 12

E) таква размена не е можна

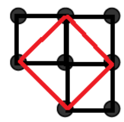
Решение. B). Двајцата заедно имаат $9\cdot 2+8\cdot 5=58$ денари. По размената треба да имаат по $58:2=29$ денари. Ако Ана му даде на Даниел две монети, тогаш таа ќе има најмалку $6\cdot 5=30$ денари. Значи, Ана треба да даде најмалку 3 монети. Кога таа на Даниел ќе му даде 3 монети, ќе и останат $5\cdot 5=25$ денари, а Даниел ќе има $9\cdot 2+3\cdot 5=33$ денари. Сега доволно е Даниел на Ана да и даде две свои монети, по што двајцата ќе имаат по $25+2\cdot 2=29=33-2\cdot 2$ денари. Значи, најмалку треба да разменат $3+2=5$ монети.

10. Колку квадрати може да се нацртаат со темиња во дадените точки?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). Сите квадрати чии темиња се дадените точки се прикажани на цртежот десно. Значи имаме 4 квадрати.



11. Два автобуси сообраќаат по кружна патека, при што се движат со една иста брзина. Интервалот на поминување на една станица е еднаков на 25 минути. Колку автобуси се потребни дополнително да сообраќаат за да интервалот меѓу два последователни автобуси се намали за 60%, без да се менува брзината на движење?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Кога интервалот ќе се намали за 60%, меѓу две поминувања на автобус ќе има $0,4\cdot 25=10\,\text{min}$. Времето на поминување на еден автобус на патеката е $2\cdot 25=50\,\text{min}$. Значи, сега ќе бидат потребни $50:10=5$ автобуси, односно дополнителни 3 автобуси.

12. Математичарот Август де Морган тврдел дека има x години во годината x^2. Познато е дека умрел во 1899 година. Која година е роден?

A) 1806 B) 1848 C) 1849 D) 1899

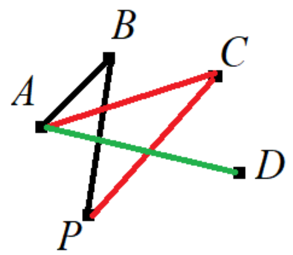
E) друг одговор

Решение. **А).** Бидејќи де Морган имал x години во годината x^2, тој е роден во годината $x^2 - x = x(x-1)$. Но, де Морган умрел во 1899 година па важи $x^2 < 1899$, од каде добиваме $x < \sqrt{1899} < 44$. За $x = 43$ добиваме $x^2 = 1849$, што значи дека де Морган е роден во 1806 година и тој живеел $1899 - 1806 = 93$ години. За $x = 42$ добиваме $x^2 = 1764$, што би значело дека де Морган е роден во 1722 година и тој живеел $1899 - 1722 = 177$ години, што не е можно. Значи, де Морган е роден во 1806 година.

13. Тргнувајќи од пристаништето со брод, треба да ги посетиме острови A, B, C, D. Познато е дека до B или до C можеме да стигнеме само од пристаништето или од островот A, а D е поврзан само со A. Ако пристаништето и островите се означени со точки на план, а патувањето од точка до точка со отсечка, кој е најмалиот број отсечки потребни за да се посетат сите острови?

А) 6 B) 5 C) 8 D) 4 E) 7

Решение. **А).** Планот на островите и пристаништето е претставен на цртежот десно. До островот D можеме да стигнеме само од островот A, па затоа по зелената отсечка мора да поминеме двапати. Така ја имаме маршрутата



$$P \to C \to A \to D \to A \to B \to P,$$

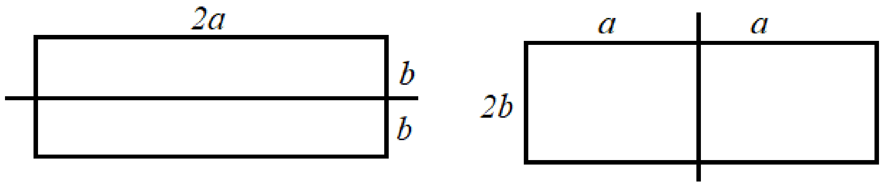
која се состои од 6 отсечки.

14. Дадени се два складни правоаголника. Со едно расекување по права паралелна на еден пар од страните Пабло добива два нови правоаголника, секој од кои има периметар $40\,cm$. Исто така Матео со се-

чење по права паралелна со другиот пар страни добива два правоаголника, секој од кои има периметар $50\,cm$. Колку е периметарот на еден од почетните правоаголници?

A) $40\,cm$ B) $50\,cm$ C) $60\,cm$ D) $80\,cm$ E) $100\,cm$

Решение. C). Нека должините на страните на почетните правоаголници се $2a$ и $2b$.

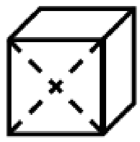


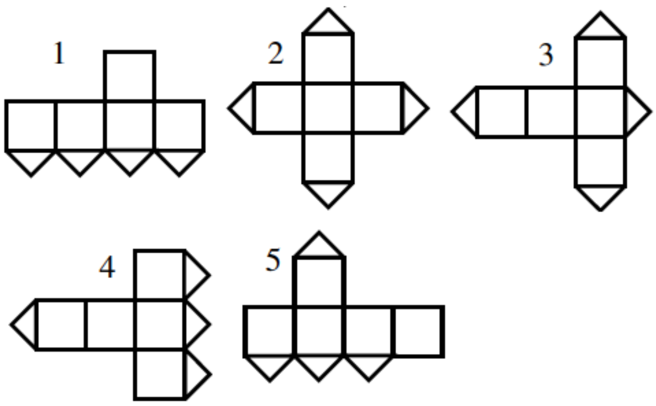
Тогаш при сечењата на Пабло и Матео добиваме

$$2(a+2b)=40,\ \ 2(2a+b)=50.$$

Решението на последниот систем равенки е $a=10\,cm, b=5\,cm$. Конечно, периметарот на секој од почетните правоаголници е еднаков на $2(2a+2b)=2\cdot(10+20)=60\,cm$.

15. Еден ѕид на коцката е расечен по неговите дијагонали. Кои од следниве мрежи на коцката не се можни?





A) 1 и 3 B) 1 и 5 C) 3 и 4 D) 3 и 5 E) 2 и 4

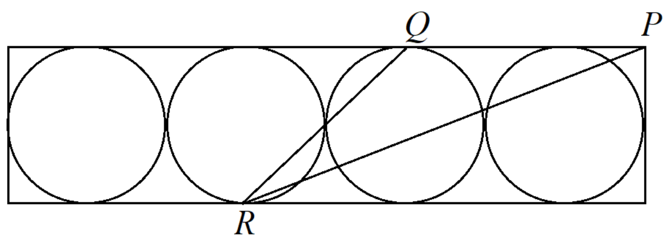
Решение. D). Кај мрежата 1 предниот ѕид на коцката е биде составен од триаголниците. Кај мрежата 2 горниот ѕид на коцката ќе биде оставен од триаголниците. Кај мрежата 4 десниот ѕид од коцката ќе биде оставен од триаголниците. Кај мрежата 3 горниот и долниот триаголник ќе се преклопат со првиот квадрат од лево. Кај мрежата 5 горниот триаголник ќе се преклопи со првиот квадрат од десно. Значи, 3 и 5 не се мрежи на коцката.

16. На една права во некој редослед се распоредени точките A, B, C, D. Познато е дека $\overline{AB}=13, \overline{BC}=11, \overline{CD}=14, \overline{DA}=12$. Определи го растојанието меѓу двете најоддалечени една од друга точки.

A) 14 B) 38 C) 50 D) 25 E) друг одговор

Решение. D). Да ги разгледаме точките A, B и D. Бидејќи $\overline{AB}>\overline{DA}$ не е можно точката B да е меѓу точките A и D. Нека претпоставиме дека D е меѓу A и B. Тогаш $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{DA}=1$. Но, тогаш ниту едно од растојанијата $\overline{BC}=11, \overline{CD}=14$ и $\overline{BD}=1$ не може да се запише како збир на другите две, што противречи на тоа дека точките B, C, D лежат на иста права. Останува точката A да е меѓу точките B и D. И тогаш $\overline{BD}=\overline{BA}+\overline{AD}=25$. Затоа важи $\overline{BD}=25=11+14=\overline{BC}+\overline{CD}$, од што следува дека C е меѓу B и D. Значи, бараното растојание е 25. Лесно се гледа дека распо-редот на точките е D, A, C, B, симетрично B, C, A, D.

17. Четири кружници со радиус $6\,cm$ се впишани во правоаголник како на цртежот десно. Ако P е теме на правоаголникот, а Q и R се тангентни точки, колку е плоштината на триаголникот PQR?



A) $27\,cm^2$ B) $45\,cm^2$ C) $54\,cm^2$ D) $108\,cm^2$ E) $180\,cm^2$

Решение. D). Должината на висината на триаголникот PQR повлечена од темето R е еднаква на дијаметарот на кружниците, т.е. на $12\,cm$, а должината неговата основа PQ е трипати поголема од радиусот на кружниците, т.е. е еднаква на $18\,cm$. Според тоа, плоштината на триаголникот PQR е

$$P = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108\,cm^2.$$

18. Во една кутија има седум карти и на секоја од нив е запишан по еден од броевите од 1 до 7. Младен без да гледа извлекол три карти, а потоа Весна извлекла две карти, така што во кутијата останале две карти. Тогаш Младен и рекол на Весна: „Сигурен сум дека збирот на твоите карти е парен број.“ Колку е збирот на картите кои што ги извлекол Младен?

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

Решение. B). Во кутијата има три парни и четири непарни броеви. Збирот на два броја е парен ако и само ако двата собирци се со иста парност. Значи, Младен може да е сигурен дека збирот на картите на Весна е парен броја ако и само ако тој ги извлекол трите парни карти: 2, 4 и 6. Според тоа, збирот на неговите броеви е $2+4+6=12$.

19. Во рамнокракиот триаголник ABC должината на симетралата CD $(D \in AB)$ на аголот C е еднаква на должината на основата BC. Определи го $\measuredangle CDA$.

A) 90° B) 100° C) 108° D) 120°

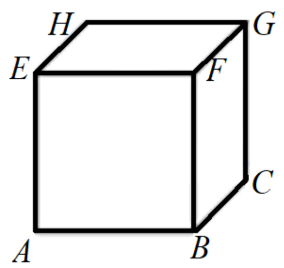
E) не е можно да се определи

Решение. C). Во триаголникот BCD аглите се $\frac{\beta}{2}, \beta, \beta$, па затоа $\frac{5\beta}{2} = 180^\circ$. Значи, $\beta = 72^\circ$. Сега, $\measuredangle CDA$ е надворешен агол за триаголникот BCD, па затоа $\measuredangle CDA = \frac{\beta}{2} + \beta = 108^\circ$.

20. Дрвена коцка со димензии $11 \times 11 \times 11$ е добиена со редење на 11^3 единечни коцки. Кој е најголемиот број мали коцки кои што се видливи од една место на гледање?

A) 328 B) 329 C) 330 D) 331 E) 332

Решение. D). Од една точка можеме да видиме најмногу три ѕида на коцката (цртеж десно). На ѕидот $ABFE$ гледаме $11 \cdot 11 = 121$ коцка. На ѕидот $EFGH$ гледаме $11 \cdot 11 = 121$ коцки од кои 11 коцки на работ FE се веќе броени. На ѕидот $BCGF$ гледаме $11 \cdot 11 = 121$ коцки од кои 11 коцки на работа BF и уште 10 коцки на работ FG се веќе броени.



Значи, најголемиот број коцки кои можеме да ги видиме од една точка на гледање е $3 \cdot 121 - 2 \cdot 11 - 10 = 331$.

21. Во равенството $\overline{KAN} - \overline{GAR} = \overline{OO}$ на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Која е најголемата можна вредност на бројот $\overline{KAN}$?

A) 987 B) 876 C) 865 D) 864 E) 785

Решение. D). Разлика на два трицифрени броја е двоцифрен број, ако броевите припаѓаат на последователни стотки. Според тоа, $K = G + 1$ и затоа даденото равенство го добива видот

$$100(G+1) + 10A + N - 100G - 10A - R = 11O,$$
$$100 + N - R = 11O,$$

$$11(9-O)=R-N-1.$$

Левата страна на последното равенство е делива со 11, па затоа мора да е и десната, а тоа е можно само ако $R-N-1=0$, т.е. $R=N+1$. Значи, $O=9$, па добиваме $\overline{KAN}-\overline{GAR}=99$. Сега најголемата вредност на K може да е 8, па затоа $G=7$, па најголемата вредност на A може да е 6, па најголемата можна вредност на R може да е 5 и затоа $N=4$. Значи, најголемата можна вредност на $\overline{KAN}$ е 864.

22. Во една група има повеќе од 45%, но помалку од 50% девојчиња. Кој е најмалиот можен број девојчиња во оваа група?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Нека групата има a деца и нека во групата има b девојчиња. Тогаш бројот на девојчињата е поголем од $0,45a$, а е помал од $0,5a$. Значи, $0,45a<b<0,5a$, па затоа $9a<20b<10a$. Сега, за $b=1,2,3,4$ ги добиваме неравенствата

$$9a<20<10a,\quad 9a<40<10a,\quad 9a<60<10a,\quad 9a<80<10a.$$

Лесно се гледа дека во сите четири случаи не постои природен број a за кој истовремено се исполнети и двете неравенства. Но, за $b=5$ и $a=11$ добиваме $9\cdot 11<20\cdot 5<10\cdot 11$, што значи дека најмалиот можен број девојчиња во групата е 5.

23. Едно дете секогаш кажува вистина во четврток и петок, а секогаш лаже во вторник. Другите денови од седмицата случајно кажува вистина или лага. Во седум последователни денови го прашале за неговото име. Прите шест дена ги дал следниве одговори: Јован, Боби, Јован, Боби, Перо, Боби. Кој одговор го дал седмиот ден?

A) Јован B) Боби C) Перо D) Диме E) друг одговор

Решение. А). Бидејќи во низата немаме два исти последователни одговори, заклучуваме дека наведените одговори се или од петок до среда, или од сабота до четврток.

Нека наведените одговори се од сабота до четврток. Значи, детето се вика Боби. Но тоа значи дека во вторник тој кажал Боби, т.е. дал точен одговор, што е противречност.

Нека наведените одговори се од петок до среда. Значи, детето се вика Јован. Сега, тој во вторник кажал Перо. Што значи дека излагал, па затоа во четврток кажал точен одговор, т.е. кажал дека се вика Јован.

24. Ана и Павел тргнале во планина кон планинарскиот дом. Во селото, во подножјето на планината, имало знак на кој пишувало дека до планинарскиот дом има 2 часа и 55 минути пешачење. Селото го напуштиле во 12 часот. Во 13 часот стигнале до една чешма каде имало знак дека до панинарскиот дом има само 1 час и 15 минути. Тука одмарале 15 минути и со иста брзина со која оделе претходно продолжиле кон планинарскиот дом. Во колку часот стигнале на целта?

A) 14:30 B) 14:00 C) 14:55 D) 15:10 E) 15:20

Решение. B). Ана и Павел пешачеле $13\,h - 12\,h = 1\,h = 60\min$, а требало да пешачат $2\,h\,55\min - 1\,h\,15\min = 1\,h\,40\min = 100\min$. Сега, за да го поминат остатокот од патот наместо $1\,h\,15\min = 75\min$ тие ќе пешачат $a\min$ и притоа ќе важи $100:60 = 75:a$, од каде добиваме $a = 45\min$. Конечно бидејќи по $13\,h$ тие одмарале $15\min$, во планинарскиот дом ќе стигнат во $13\,h + 15\min + 45\min = 14\,h$.

25. За три прости броја ќе велиме дека се *специјални* ако нивниот производ е петпати поголем од нивниот збир. Колку специјални тројки прости броеви постојат?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

Решение. B). Нека p,q,r се специјални прости броеви. Тогаш

$$pqr = 5(p+q+r),$$

па затоа еден од броевите p,q,r е еднаков на 5. Нека $p=5$. Тогаш $qr = 5+q+r$, од каде добиваме $(q-1)(r-1)=6$. Во множеството прости броеви решение на последната равенка е $q=2, r=7$ или $q=7, r=2$.

Значи, единствени три специјални прости броеви е 2, 5 и 7.

26. Дадени се две множества од петцифрени броеви: множество A во кое производот на цифрите на секој број е 25 и множество B во кое производот на цифрите на секој број е 15. Кое множество има повеќе елементи и за колку?

A) множеството A има $\frac{5}{3}$ пати повеќе елементи од B

B) множеството A има два пати повеќе елементи од B

C) множеството B има $\frac{5}{3}$ пати повеќе елементи од A

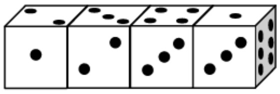
D) множеството B има два пати повеќе елементи од A

E) двете множества имаат еднаков број елементи

Решение. D). Цифрите на елементите на множеството A се 1, 1, 1, 5 и 5. Броевите ги добиваме така што од пет места избираме две на кои ја запишуваме цифрата 5, а на другите места ја запишуваме цифрата 1. Така добиваме $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ броја.

Цифрите на елементите на множеството B се 1, 1, 1, 3 и 5. Броевите ги добиваме така што од пет места избираме две на кои ги запишуваме цифрите 3 и 5, или цифрите 5 и 3. Така добиваме $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$ броја.

27. Четири идентични коцки за играње се наредени како на цртежот десно. Коцките не се стандардни, т.е. збирот на бројот точките на спротивните ѕидови не е еднаков на 7. Колку е збирот на точките кои се наоѓаат на шесте страни кои се допираат?



A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Решение. B). Коцките ќе ги броиме од лево кон десно. Според втората, третата и четвртата коцка на соседните ѕидови на ѕидот со 3 точки има 2, 4, 1 и 6 точки. Значи, наспроти ѕидот со 3 точки е ѕидот со 5 точки. Сега, на ѕидот со 1 точка соседни се ѕидовите со 2, 3, 5 и 6 точки, па затоа на спротивниот ѕид има 4 точки. Значи, наспроти ѕидот со 6 точки спротивен е ѕидот до 2 точки.

Според тоа, спротивни се 1 и 4, 2 и 6, 3 и 5.

Ѕидовите кои не се гледаат содржат на првата коцка 3 и 5, на втората 1 и 4, на третата 2 и 6 и на четвртата коцка 2 точки. Понатаму, ако првата коцка ја превртиме кон напред, а потоа кон десно ѕидот на кој има 2 точки ќе биде како на втората коцка, т.е. на горниот ѕид ќе има 3 точки. Тоа значи дека во почетната положба на левиот ѕид ќе има 3 точки. Значи, оваа коцка ја допира втората коцка со ѕид кој има 5 точки. Конечно, бараниот збир е: $5+1+4+6+2+2=20$.

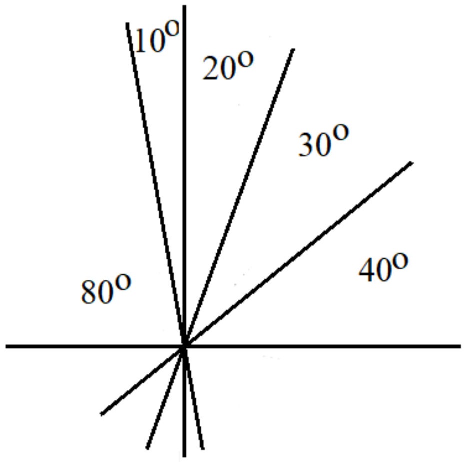
28. Неколку прави се нацртани така што сите агли

$$10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$$

се агли меѓу тие прави. Определи го најмалиот можен број вакви прави.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. B). Ако се нацртани n прави, тогаш имаме $\frac{n(n-1)}{2}$ парови прави.



Бидејќи сите агли се помали или еднакви на правиот агол, не е можно две прави да определуваат два од дадените агли.

Од претходно кажаното следува дека треба да важи $\frac{n(n-1)}{2} \geq 9$, од каде добиваме $n(n-1) \geq 18$. Последното неравенство е исполнето за $n \geq 5$. Конфигурација на 5 прави кои го задоволуваат условот на задачата е дадена на цртежот десно.

Забелешка. Конфигурацијата може да се направи и така што правата која зафаќа агол од 10° со вертикалната права може да зафаќа агол од 10° со хоризонталната права, т.е. да се ротира за агол од 90° околу пресечната точка во нсока на движењето на стрелките на часовникот (направи цртеж).

29. Најголемиот заеднички делител на природните броеви m и n е 12, а најмалиот заеднички содржател е квадрат на природен број. Колку од петте броеви $\frac{n}{3}, \frac{m}{3}, \frac{n}{4}, \frac{m}{4}, mn$ се квадрати на пририден број.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) не може да се определи

Решение. B). Имаме $\text{NZD}(m,n)=12$, па затоа

$$m=12k,\ n=12p,\ \text{NZD}(k,p)=1 \text{ и } \text{NZS}(m,n)=12kp.$$

Според тоа, $12kp=a^2$, од каде добиваме $2^2 \cdot 3kp=a^2$. Последното значи дека $3kp=b^2$, па како $\text{NZD}(k,p)=1$ заклучуваме дека $3k=c^2$ и $p=d^2$, или пак $k=c^2$ и $3p=d^2$, при што и во двата случаја важи

$\mathrm{NZD}(c,d)=1$. Заради симетрија доволно е да го разгледаме само едниот случај.

Ако $3k=c^2$ и $p=d^2$, тогаш $c=3q$, па затоа $k=3q^2$ и $p=d^2$, што значи

$$\frac{n}{3}=4p=4d^2=(2d)^2,$$
$$\frac{m}{3}=4k=4\cdot 3q^2=3\cdot(2q)^2,$$
$$\frac{n}{4}=3p=3d^2,$$
$$\frac{m}{4}=3k=3\cdot 3q^2=(3q)^2,$$
$$mn=12^2kp=12^2\cdot 3q^2\cdot d^2=3\cdot(12qd)^2,$$

што значи дека само два од петте броја се точни квадрати

30. Нека M е производот на периметарот на триаголник и збирот на висините на триаголникот, кој има плоштина еднаква на 1. Кое од следниве тврдења не е точно?

A) M може да е поголем од 1000,

B) секогаш M е поголем од 6,

C) M може да е еднаков на 18

D) ако триаголникот е рамностран, тогаш M е поголем од 16

E) M може да е помал од 12

Решение. E). Нека должините на страните на триаголникот се a,b,c, а должините на соодветните висини се x,y,z. Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a+b+c)(x+y+z)\geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=9\cdot 2\cdot\sqrt[3]{\frac{ax}{2}\cdot\frac{by}{2}\cdot\frac{cz}{2}}=18\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot 1}=18,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$ и $x=y=z$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран. Според тоа, точни се тврдењата B), C), D), но не е точно тврдењето E). Понатаму, за триаголник со плоштина 1 и страни

$$a = 2\sqrt{\frac{64-\sqrt{64^2-2^2}}{2}}, b = 64, c = 64,$$

висините се

$$x = \sqrt{\frac{64+\sqrt{64^2-2^2}}{2}}, y = \frac{1}{32}, z = \frac{1}{32},$$

и важи

$$(a+b+c)(x+y+z) > 1000.$$

Kadett (осмо и деветто одделение) 2009

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30зљ носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Кај кој од дадените изрази вредноста е парен број?

A) 2009 B) $2+0+0+9$ C) $200-9$

D) $200\cdot 9$ E) $200+9$

Решение. D). Имаме:

$$2009=2009,\quad 2-0-0-9=11,\quad 200-9=191,$$
$$200\cdot 9=1800,\quad 200+9=209$$

и парен е само бројот 1800.

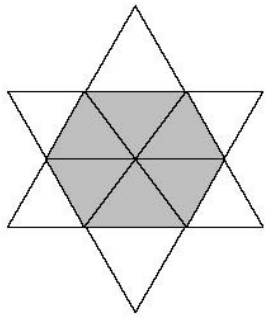
2. На една забава имало 4 момчиња и 4 девојчиња. Момчињата играле само со девојчиња, а девојчињата играле само со момчиња. На прашањето со колку партнерки играле момчињата одговорила 3,1, 2, 2, а три девојчиња одговориле дека бројот на партнерите со кои играле е 2, 2, 2. Со колку партнери играло четвртото девојче?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. C). Бидејќи збирот на бројот на партнерките со кои играле момчињата мора да е еднаков на збирот на партнерките со кои играле девојчињата, добиваме дека четвртото девојче играло со

$$3+1+2+2-(2+2+2)=2 \text{ партнери.}$$

3. Ѕвездата на цртежот десно е формирана од 12 рамнострани триаголници. Нејзиниот периметар е еднаков на $36\,cm$. Колку е периметароит на сивиот шестаголник?



A) $6\,cm$ B) $12\,cm$ C) $18\,cm$

D) $24\,cm$ E) $30\,cm$

Решение. C). Над секоја страна на сивиот шестаголник има две страни од ѕвездата со иста должина. Според тоа, периметарот на ѕвездата е двапати поголем од периметарот на сивиот шестаголник. Значи, периметарот на сивиот шестаголник е $36:2=18\,cm$.

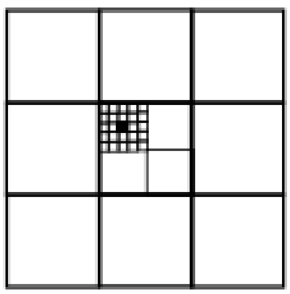
4. На станарите на Втората улица Дејан им дели весници. Весник ќе добијат сите станари чии куќи имаат непарен број, почнувајќи од куќата со број 15, па се до куќата со број 53. Во колку куќи Дејан ќе однесе весници?

A) 19 B) 20 C) 27 D) 38 E) 53

Решение. B). *Прв начин.* Од 15 до 53 има $53-15=38$ броеви. Половината од нив се парни, половината се непарни. Но, бројот 15 е непарен, што значи дека Дејан весници е однесе во $38:2+1=19+1=20$ куќи.

Втор начин. Весници ќе добијат куќите чии броеви се: 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51 и 53, што значи точно 20 куќи.

5. Плоштината на најголемиот квадрат на цртежот десно е еднаква на 1. Колку е плоштината на нај-малиот црн квадрат?



A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{1}{300}$ C) $\frac{1}{600}$ D) $\frac{1}{900}$ E) $\frac{1}{100}$

Решение. **D).** При првата поделба имаме 9 квадрати, потоа секој од нив е поделен на 4 квадрати и на крајот секој од добиените квадрати е поделен на 25 квадрати. Значи, во најголемиот квадрат има $9 \cdot 4 \cdot 25 = 900$ мали квадрати, па плоштината на црниот квадрат е еднаква на $\frac{1}{900}$.

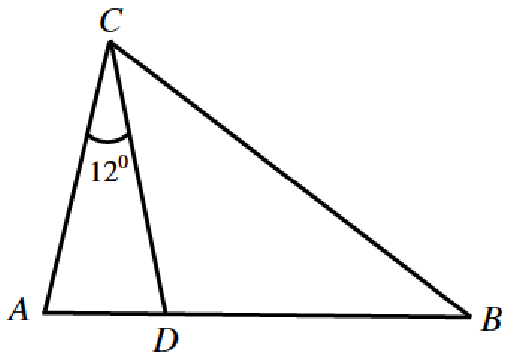
6. Производот на четири различни природни броеви е еднаков на 100. Колку е нивниот збир?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

Решение. **D).** Имаме, $100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 10 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10$. Значи четирите броја се 1, 2, 5 и 10, па нивниот збир е $1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

7. На страната AB на триаголникот ABC е земена точка D таква што $\measuredangle ACD = 12^\circ$. Определи ја мерката на $\measuredangle ACB$ ако $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$.

A) 24° B) 36° C) 45° D) 54° E) 60°



Решение. **D).** Триаголникот ACD е рамнокрак со основа AD, па затоа $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 84^\circ$. Сега $\measuredangle BDC = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$. Триаголникот BCD е рамнокрак со основа BC, од каде следува $\measuredangle CBD = \measuredangle BCD = 42^\circ$. Конечно, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = 54^\circ$.

8. Во една соба има кучиња и мачиња. Бројот на шепите на мачињата е двапати поголем од бројот на носевите на кучињата. Бројот на мачињата е:

A) двапати поголем од бројот на кучињата

B) еднаков на бројот на кучињата

C) половина од бројот на кучињата

D) четвртина од бројот на кучињата

E) една шестина од бројот на кучињата

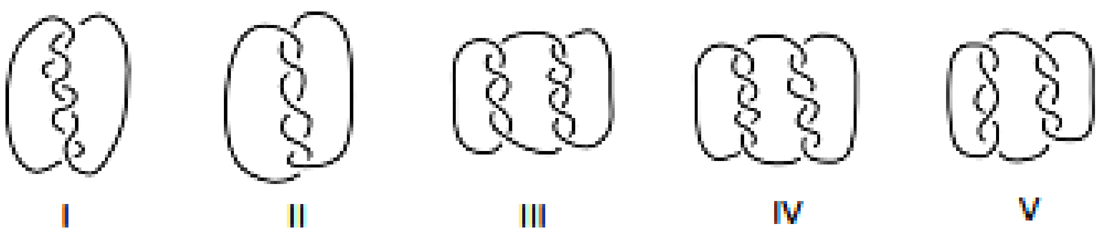
Решение. C). Нека x е бројот на мачињата. Тие имаат $4x$ шепи и овој број е двапати поголем од бројот на носевите на кучињата. Значи, кучињата имаат $4x:2=2x$ носеви. Според тоа, во собата има $2x$ кучиња. Сега, од $2x:x=2$ заклучуваме дека има двапати повеќе кучиња од мачиња, т.е. бројот на мачињата е половина од бројот на кучињата.

9. Во еден лифт може да влезат 12 возрасни луѓе или 20 деца. Колку деца може да влезат во лифтот, ако во него веќе има 9 возрасни луѓе?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 4 E) 6

Решение. C). Ако во лифтот веќе има 9 возрасни луѓе, тога значи дека има место уште за 3 возрасни луѓе, што е $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ од капацитетот на лифтот. Значи, во лифтот може да се сместат уште $\frac{1}{4}\cdot 20=5$ деца.

10. Во која од наведените плетенки е употребен повеќе од еден конец?



A) I, III, IV, V B) III, IV, V C) I, III, V

D) во сите патеки E) во ниту една патека

Решение. C). За плетенката I се употребени 2 концi, за плетенката II е употребен 1 конец, за плетенката III се употребени 2 конци, за плетенката IV е употребен 1 конец и за плетенката V се употребени 3 конци.

11. Кај колку природни броеви n декадните записи на квадратот и кубот имаат еднаков број цифри?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 6 E) бесконечно многу

Решение. B). Имаме

$$1^2 = 1, \quad 1^3 = 1,$$
$$2^2 = 4, \quad 2^3 = 8,$$
$$4^2 = 16, \quad 4^3 = 64,$$

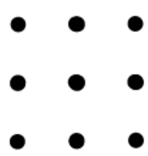
и тоа се три броја со саканото својство, при што лесно се проверува дека нема други такви едноцифрени броеви.

Нека $n = \overline{a_1 a_2 ... a_k}$, $k \geq 2$. Тогаш

$$n^3 = \overline{a_1 a_2 ... a_k}^3 = \overline{a_1 a_2 ... a_k}^2 \cdot \overline{a_1 a_2 ... a_k} \geq 10 \cdot \overline{a_1 a_2 ... a_k}^2 = 10n^2$$

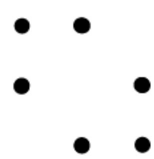
што значи дека декадниот запис на n^3 има повеќе цифри од декадниот запис на n^2.

12. На цртежот десно е дадена квадратна шема од девет точки. Кој е најмалиот број на точки кои што треба да се избришат за да во секој ред, колона и дијагонала нема три колинеарни точки?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Ако избришеме две точки, тогаш тие може да припаѓаат на најмногу два реда, па затоа во третиот ред ќе имаме три колинерани точки. Значи треба да избришеме три или повеќе точки. На цртежот десно е покажано дека минималниот број точки е 3.



13. Горјан ги измерил сите агли на два триаголника. Едниот триаголник бил остроаголен, а другиот тапоаголен. Горјан се сеќава на мерките на четирите агли, кои биле: $120^\circ, 80^\circ, 55^\circ, 10^\circ$.

Колкава е големината на третиот агол на остроаголниот триаголник?

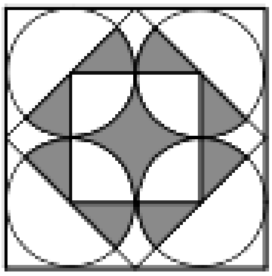
A) 5° B) 10° C) 45° D) 55°

E) не може да се определи

Решение. C). Меѓу дадените агли не постојат три чиј збир е 180°, што значи дека два припаѓаат на остроаголниот, а два на тапоаголниот триаголник. За да триаголникот е остроаголен потребно е да не го содржи аголот од 120° и збирот на двата агли да е поголем од 90°. Јасно, тоа се аглите 80° и 55°, па третиот агол е еднаков на

$$180^\circ - (80^\circ + 55^\circ) = 45^\circ.$$

14. Колкав дел од површината на големиот квадрат е обоен во сива боја?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi+2}{16}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

Решение. A). Аглите на сивите делови од кружниците во средниот квадрат се еднакви на 45°, па затоа секои два дела покриваат четвртина од кругот во кој се наоѓаат. Според тоа, плоштината на сивиот дел е еднаква на плоштината на најмалиот квадрат. Неговите темиња се совпаѓаат со средините на страните на средниот квадрат, па затоа должината на неговата страна е еднаква на половина од должината на страната на големиот квадрат (средна линија во три-аголник). Значи, ако должината на страната на големиот квадрат е a, тогаш должината на страната на малиот квадрат е $\frac{a}{2}$. Конечно, плоштината на обоениот дел е $\frac{a^2}{4}$, т.е. $\frac{1}{4}$ е плоштината на големиот квадрат е обоена во сиво.

15. На еден остров живеат само вистинољупци и лажговци. Лажговците секогаш лажат, а вистинољупците секогаш ја говорат вистината. Во еден ред имало 25 жители од островот. Секој од нив, освен првиот, рекол дека човекот кој е пред него во редот е лажливец. Првиот во редот дека сите кои се зад него во редот се лажливци. Колку луѓе во редот биле лажливци?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24

E) не е можно да се определи

Решение. C). Лажливците ќе ги означуваме со Л, а вистинољупците цо В. Ако последниот во редот е лажливец, тогаш тој што е одма пред него е вистинољубец. Понатаму, тој што е одма пред него е лажливец итн. Така добиваме дека низата е

ЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛ.

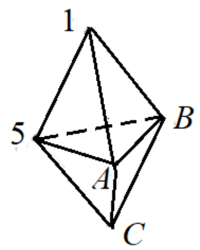
Бидејќи првиот во редот рекол дека сите зад него се лажливци, очигледно тој излагал, т.е. горната состојба е можна. Значи, во редот има 13 лажливци.

Ако последниот во редот е вистинољубец, тогаш како погоре заклучуваме дека редот е

ВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВ.

Но, првиот рекол дека сите зад него се лажливци, што не е точно, Значи, овој случај не е можен.

16. Телото прикажано на цртежот десно е формирано од шест триаголници. Во секое негово теме е запишан по еден број. За секој ѕид на телото е пресметан збирот на



запишаните броеви кои се во неговите темиња. Се покажало дека сите добиени збирови се еднакви. Кол-ку е збирот на сите запишани броеви?

A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24

Решение. C). Нека во темињата A, B, C се запишани броевите x, y, z, соодветно. Тогаш

$$\begin{cases} 1+x+y=1+5+y, \\ 1+x+y=1+5+x, \\ 1+x+y=x+y+z, \end{cases}$$

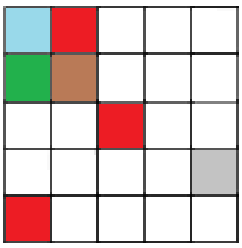
од каде добиваме $x=5, y=5, z=1$. Според тоа, збирот на сите запишани броеви е $1+5+5+5+1=17$.

17. Во равенството $\frac{E \cdot I \cdot G \cdot H \cdot T}{F \cdot O \cdot U \cdot R} = T \cdot W \cdot O$ на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Колку различни вредности има производот $T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. A). Во дадениот израз имаме десет различни букви, што значи дека имаме десет различни цифри. Цифрите O и T се јавуваат на две страни на равенството. Јасно, $O \neq 0$. Ако претпоставиме дека $T \neq 0$, тогаш некоја од преостанатите осум цифри е 0, па имаме $E \cdot I \cdot G \cdot H = F \cdot O \cdot U \cdot R \cdot W \cdot O$. Но, тоа значи дека едната страна на равенството е еднаква на 0, а другата е различна од 0, што не е можно. Значи, $T = 0$, па затоа $T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E = 0$, т.е. дадениот израз прима само една вредност.

18. Квадрат 5×5 е поделен на единечни квадратчиња. Сакаме да ги обоиме единечните квадратчиња со помош на црвена, сина, зелена и кафеава боја, така

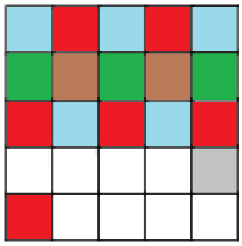


што секои две соседни квадратчиња се обоени во различна боја. Соседни се квадратчињата кои имаат заедничко теме. Некои квадратчиња се веќе обоени. Со која боја ќе биде обоено сивото квадратче?

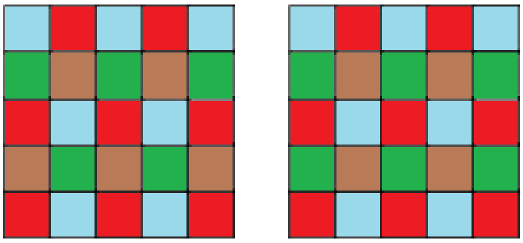
A) црвена B) зелена C) кафеава D) зелена или кафеава

E) не е можно да се определи

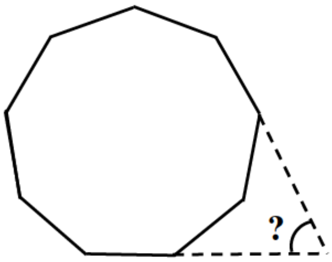
Решение. D) Второто квадратче во третиот ред мора да е сино, па затоа првото квадратче во третиот ред мора да е црвено. Сега, второто квадратче во третата колона мора да е зелено, што значи дека првото мора да е сино. Така боењето на првите три реда е еднозначно (цртеж десно).



Понатаму, првото квадратче во третиот ред мора да е зелено или кафеано. Сега боењето е еднозначно, што значи дека сивото квадратче е кафеано или зелено (види ги цртежите десно).



19. Даден е правилен деветаголник. Определи ја мерката на аголот означен со прашалниот знак.



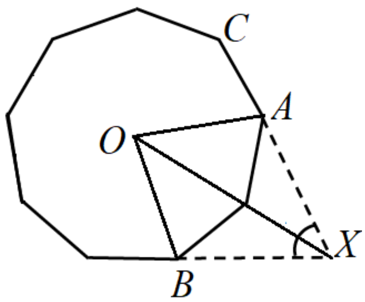
A) 40° B) 45° C) 50°

D) 55° E) 60°

Решение. E). Централниот агол на правилниот деветаголник е еднаков на $\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$.

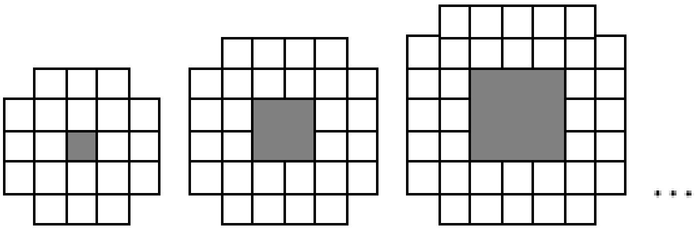
Според тоа, $\measuredangle OAC=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$, па затоа

$\measuredangle OAX=180^\circ-70^\circ=110^\circ$. Конечно,



$$\measuredangle AXB = 360^\circ - 2\cdot(40^\circ + 110^\circ) = 60^\circ .$$

20. На долните цртежи се дадени првите три фигури на една низа кои се направени од единечни квадратчиња според определено правило. Колку квадратчиња содржи десеттата фигура во низата, не сметајќи ги квадратчињата во централниот квадратен отвор?



A) 76 B) 80 C) 84 D) 92 E) 100

Решение. D). Првата фигура е квадрат со страна 5, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 1. Втората фигура е квадрат со страна 6, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 2. Третата фигура е квадрат со страна 7, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 3. Значи, десеттата фигура е квадрат со страна 14, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 10. Значи, оваа фигура има $14^2 - 4 - 10^2 = 92$ квадратчиња.

21. Определи го бројот на десетцифрените броеви запишани само со цифрите 1, 2 и 3, кај кои разликата на две соседни цифри е еднаква на 1.

A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

Решение. C). По цифрите 1 и 3 може да се запише само цифрата 2, а по цифрата 2 може да се запишат цифрите 1 и 3. Секоја од цифрите 1, 2 и 3 може да биде почетна. Во долната табела се дадени можните редоследи на цифрите за секоја различна почетна цифра.

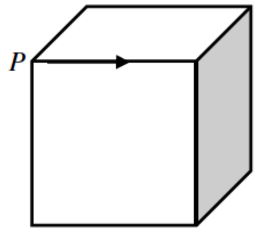
1	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2
2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3
3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2

Значи, вкупно имаме

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=64$$

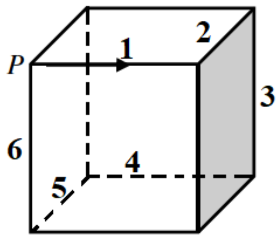
десетцифрени броеви со саканото својство.

22. Тргнувајќи од точката P мравка се движи по работ на коцката во насока на стрелката. На крајот на работ таа врти и тргнува по десниот раб, додека стигне до неговиот крај. Потоа врти и тргнува по левиот раб, дои до неговиот крај, врти по десниот раб итн. се додека не се врати во точката P. Ако должината на работ на коцката е 1, определи ја должината на патот на мравката.

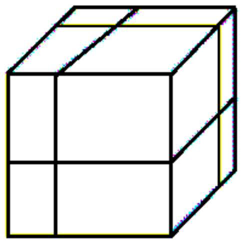


A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

Решение. C). Патот кој мравката го поминува при опишаниот начин на движење е прикажан на цртежот десно. Значи таа ќе помине 6 отсечки со должина 1, т.е. должината на патот ќе биде еднаква на 6.



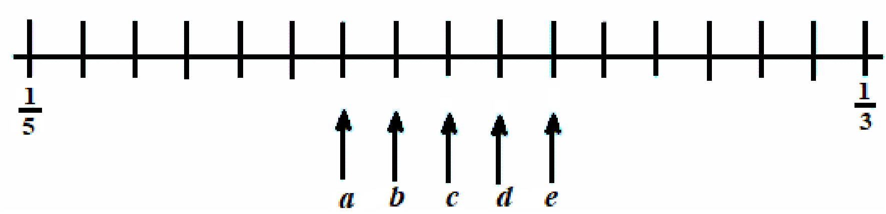
23. Коцка ја сечеме со три рамнини паралелни на ѕидовите на коцката и добиваме осум мали квадари (види цртеж). Каков е односот на збирот на плоштините на овие осум квадари и плоштината на коцката?



A) 1:1 B) 4:3 C) 3:2 D) 2:1 E) 4:1

Решение. D). Нека должината на работ на коцката е a. Со секое сечење на коцката плоштината на добиените тела се зголемува за $2a^2$. Значи, збирот на плоштините на осумте квадари ќе биде $6a^2+3\cdot 2a^2=12a^2$. Конечно, бараниот однос е $\frac{12a^2}{6a^2}=2=2:1$.

24. На бројната права се означени дропките $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$. На кое место е дропката $\frac{1}{4}$?



A) a B) b C) c D) d E) e

Решение. A). Имаме, $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$. Должината на една мала отсечка е $\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{120}$. Сега, $\frac{1}{5}+\frac{x}{120}=\frac{1}{4}$, од каде добиваме $\frac{x}{120}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, т.е. $\frac{x}{120}=\frac{1}{20}$, па затоа $x=6$. Значи, дропката $\frac{1}{4}$ е на местото a.

25. Најмалиот делител на бројот A кој е поголем од 1 е 45 пати помал од најголемиот делител на A кој е помал од A. Колку такви природни броеви постојат?

A) 0 B) 1 C) 2 D) повеќе од 2

E) не може да се определи

Решение. C). Бидејќи a е 45 пати помал од најголемиот делител на A следува дека најголемиот делител на A е $45a$. Тоа значи дека $3|A$. Но, a е најмалиот делител на A поголем од 1, па затоа $a\le 3$. Природни броеви кои не се поголеми од 3 и се поголеми од 1 се 2 и 3.

Бидејќи a е најмалиот и $45a$ е најголемиот делител на A , добиваме $A=45a^2$. Сега, за $a=2$, добиваме $A=180$, а за $a=3$, добиваме $A=405$. Значи, постојат два броја со саканото својство.

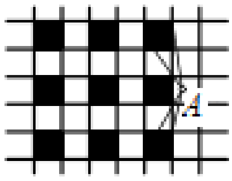
26. Даден квадрат е расечен на 2009 квадрати, чии должини на страни се природни броеви. Определи ја најмалата можна должина на дадениот квадрат.

A) 44 B) 45 C) 46

D) не постои таков квадрат E) друг одговор

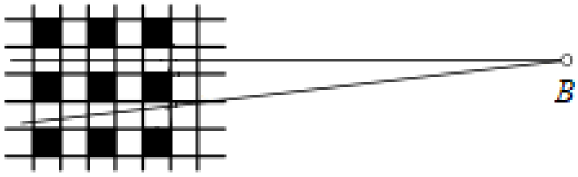
Решение. B). Бидејќи $44\cdot 44=1936$, квадрат со страна 44 не може да се расече на 2009 квадрати чии должини на страни се природни броеви. Од квадрат со должина на страна 45 ќе исечеме правоаголник со должини на страни 3 и 6. Преостанатиот дел од квадратот може да се расече на $2025-18=2007$ единечни квадрати. Сега правоаголникот со страни 3 и 6 го расекуваме на два квадрати со должина на страна 3. Значи, најмалата должина на страната на квадратот е 45.

27. На цртежот десно од точката A се гледаат само три од прикажаните црни квадрати. Кој е најголемиот број црни квадрати кои може да се видат од некоја точка која припаѓа на рамнината на квадратот?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. E). На цртежот десно е прикажана точката B од која може да се видат сите 9 квадрати дадени во условот на задачата.



28. Квадрат со должина на страна $6\,cm$ и триаголник делумно се преклопуваат. Квадратот покрива 60% од плоштината на триаголникот, а

триаголникот покрива $\frac{2}{3}$ од плоштината на квадратот. Определи ја плоштината на триаголникот.

A) $22\frac{4}{5}\,cm^2$ B) $24\,cm^2$ C) $36\,cm^2$ D) $40\,cm^2$ E) $60\,cm^2$

Решение. D). Плоштината на квадратот е $36\,cm^2$. Ако со x ја означиме плоштината на триаголникот, добиваме $\frac{60}{100}x = \frac{2}{3}\cdot 36$, од каде наоѓаме $x = 40\,cm^2$.

29. Андреј во низа запишал еден по друг неколку природни броеви кои не се поголеми од 10. Горјан забележал дека за секои два соседни броја во низата едниот е делител на другиот. Колку најмногу броеви можел да запише Андреј?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

Решение. E). Бројот 1 е делител на секој природен број, па тој може да е меѓу било кои два броја. Понатаму, бројот 2 е делител на парните броеви, па тоа може да е меѓу два броја. Сега, бројот 3 е делител на 9 и 6, па 3 мора да е меѓу 6 и 9.

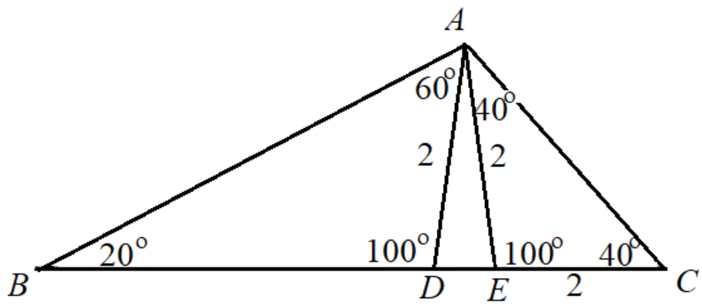
Да почнеме од бројот 9. Низата со најмногу членови има девет броја и една таква низа е:

9 3 6 2 8 4 1 10 5.

30. Во триаголникот ABC аголот при темето B е еднаков на 20°, а аголот при темето C е еднаков на 40°. Должината на симетралата на аголот во темето A е 2. Пресметај ја разликата $\overline{BC} - \overline{AB}$.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 4

E) не е можно да се определи.



Решение. **C).** Нека точката $D \in BC$ е таква што AD е симетрала на аголот $\measuredangle BAC$ (види цртеж). Тогаш

$$\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = 60^\circ \text{ и } \measuredangle BDA = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ .$$

Според тоа, $\measuredangle ADC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Нека E е точка на BC таква што $\overline{BE} = \overline{AB}$. Тогаш триаголникот ABE е рамнокрак и важи $\measuredangle AEB = \measuredangle BAE = 80^\circ$. Според тоа, триаголникот DEA е рамнокрак, при што $\measuredangle DAE = 20^\circ$ и $\overline{DA} = \overline{AE} = 2$. Според тоа, $\measuredangle EAC = 40^\circ$, што значи дека триаголникот EAC е рамнокрак. Значи, $\overline{EC} = \overline{AE} = 2$. Конечно, $\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{EC} = 2$.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2010

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

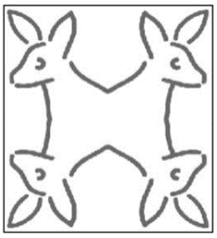
1. Колку е $12+23+34+45+56+67+78+89$?

A) 389 B) 396 C) 404 D) 405 E) друг број

Решение. C). Имаме

$$\begin{aligned} A &= 12+23+34+45+56+67+78+89 \\ &= (12+89)+(23+78)+(34+67)+(45+56) \\ &= 4\cdot 101 = 404. \end{aligned}$$

2. Колку оски на симетрија има фигурата на цртежот десно?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) бесконечно многу

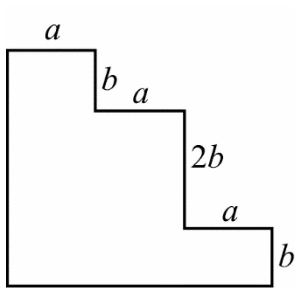
Решение. C). Квадратот има 4 оски на симетрија, од кои 2 се оски на симетрија на целата фигура.

3. Осум кукли се ставени во осум исти кутии во облик на коцка. Кутии се запакувани во кутија која исто така има форма на коцка. Малите кутии целосно ја исполнуваат големата кутија. Колку кутии со играчки се сместени на дното на големата кутија?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **D).** Бидејќи големата кутија е во форма на коцка и е целосно исполнета со еднакви коцки, бројот на кутиите во нејзината ширина, должина и висина ќе биде еднаков. Понатаму, од $2\cdot 2\cdot 2=8$ заклучуваме дека на секој раб има по 2 коцки. Значи, на дното има $2\cdot 2=4$ мали кутии.

4. Определи го периметарот на фигурата прикажана на цртежот десно. (Сите агли на дадената фигура се прави.)

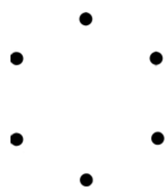


A) $3a+4b$ B) $3a+8b$ C) $6a+4b$

D) $6a+6b$ E) $6a+8b$

Решение. **E).** Ширината на фугурата е еднаква на $a+a+a=3a$, а нејзината висина е еднаква на $b+2b+b=4b$. Значи, периметарот на фигурата е еднаков на $2(3a+4b)=6a+8b$.

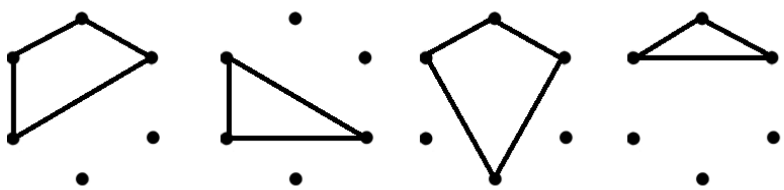
5. Филип нацртал 6 темиња на правилен шестаголник. Некои од нив ги поврзал со отсечки. Која фигура не можел сигурно да ја добие?



A) трапез B) правоаголен триаголник

C) квадрат D) делтоид E) тапоаголен триаголнк

Решение. **C).** За да добие четириаголник со прави агли Филип мора да поврзи четири темиња кои лежат на спротивни страни на шестаголникот. Но, тогаш добива правоаголник со должини на страни a и $a\sqrt{3}$. Другите фигури може да се добијат како што е прикажано на долните цртежи и тоа рдоследно A), B), D) и E).



6. Пабло запишал седум последователни природни броја. Збирот на најмалите три е 33. Колку е збирот на најголемите три броја?

A) 39 B) 37 C) 42 D) 48 E) 45

Решение. E). *Прв начин.* Нека запишаните броеви се

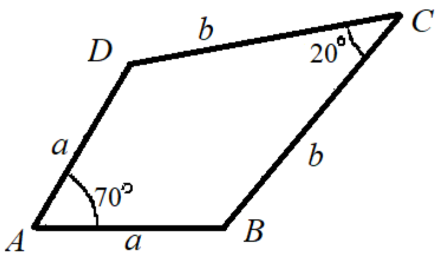
$$a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3.$$

Имаме $a-1+a-2+a-3=33$, па затоа

$$\begin{aligned} a+1+a+2+a+3 &= a-1+2+a-2+4+a-3+6 \\ &= a-1+a-2+a-3+12 \\ &= 33+12=45. \end{aligned}$$

Втор начин. Бидејќи збирот на најмалите три е 33, а средниот број е еднаков на полузбирот на другите два броја, заклучуваме дека средниот број е 11, па најмалите три броја се 10,11 и 12. Значи, седумте броја се: 10, 11, 12, 13, 14, 15 и 16, па збирот на најголемите три е $14+15+16=45$.

7. На цртежот десно е даден четириаголникот $ABCD$. Определи ја мерката на $\measuredangle ABC$?



A) 110° B) 120° C) 125°

D) 135° E) 140°

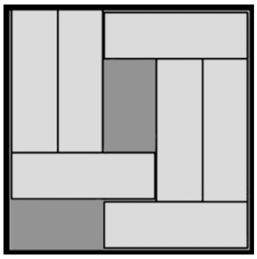
Решение. D). Од $\overline{AB}=\overline{AD}$ следува дека ABD е рамнокрак. Слично, триаголникот BCD е рамнокрак. Според тоа,

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ABD+\measuredangle DBC=\measuredangle ADB+\measuredangle CDB=\measuredangle ADC.$$

Значи, $\measuredangle ABC=(360^\circ-20^\circ-70^\circ):2=135^\circ$.

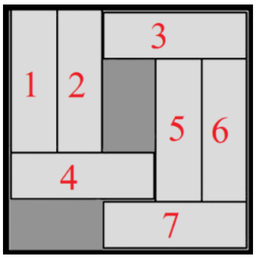
8. Квадратна рамка со димензии 5×5 е поставена на рамна површина. Во нејзината внатрешност се поставени седум плочки со димензии 1×3. Дозволено е правоаголните плочки да се поместуваат со лизга-

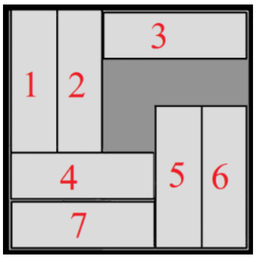
ње. Кој е најмалиот број дозволени поместувања за да се направи место уште за една плочка 1×3?



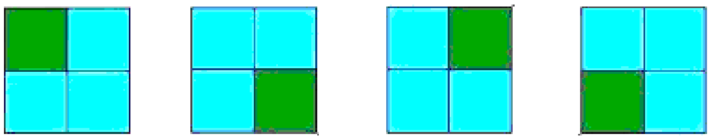
A) 2 B) 3 C) 4 D) 4 E) не е можно.

Решение. B). Да ги означиме правоаголните 1×3 како на долниот лев цртеж. Тогаш е јасно дека во првиот потез мораме да ја поместиме плочката 7 до левиот крај на квадратот. Сега доволно е уште плочките 5 и 6 да ги поместиме до долниот дел на квадратот. Значи, потребни се 3 потези.





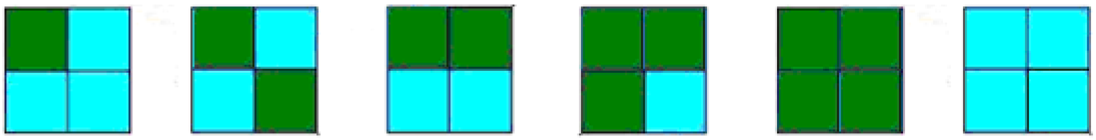
9. Квадрат е поделен на четири мали еднакви квадрати. Секој од малите квадрати е обоен во сина или зелена боја. За две боења ќе сметаме дека се еднакви ако едното може да се добие од другото со вртење на квадратите. На долните цртежи е даден пример на четири исти боења.



На колку различни начини може да се обои квадратот?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. B). Со З да означиме зелена боја, а со С сина боја. Ако полињата ги боиме почнувајќи од горното лево поле и одејќи во насока на вртењето на стрелките на часовникот, тогаш сите други исти боења се добиваат со вртење на квадратот. Значи, при вакво боење различни се боењата: ЗЗЗЗ, ЗЗЗС, ЗЗСС, ЗСЗС, ЗССС, СССС, т.е. имаме шест различни боења.



10. Збирот на првите сто непарни природни броеви е одземен од збирот на првите сто парни природни броеви. Кој број е добиен?

A) 0 B) 50 C) 100 D) 200 E) 10100

Решение. C). Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (2+4+6+...+200)-(1+3+5+...+199) \\ &= (2-1)+(4-2)+(6-5)+...+(200-199) \\ &= \underbrace{1+1+1+...+1}_{100 \text{ собирци}} = 100. \end{aligned}$$

11. Баба Митра испекла колач за своите внуци, кои треба да дојдат на гости. Но, заборавила дали ќе дојдат 3, 5 или сите 6 внуци. Кој е најмалиот број меѓусебно еднакви парчиња на кои треба да го раздели колачот за да може, кога внуците ќе дојдат, секој внук да добие еднаков дел од колачот?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 30

Решение. E). Бројот на парчињата на кои ќе биде поделен колачот мора да е делив со секој од броевите 3, 5 и 6. Бидејќи се бара најмалиот број парчиња, тоа е најмалиот заеднички содржател на броевите 3, 5 и 6, односно $\text{NZS}(3,5,6)=30$.

12. Кој од следниве броеви е најмалиот број кој не може да се запише како збир на три различни едноцифрени броеви?

A) 10 B) 15 C) 23 D) 25 E) 28

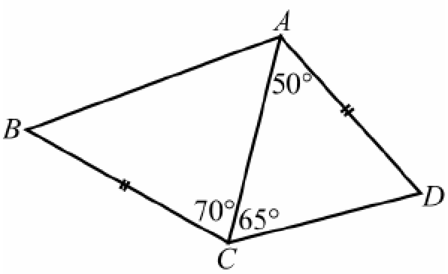
Решение. D). Имаме, $10=1+4+5$, $15=4+5+6$, $23=6+8+9$. Од друга страна $24=9+8+7<9+8+8=9+9+7=25<9+9+9=27$, па значи 25 и 28 не може да се запишат како збир на три различни едноцифрени броеви. Конечно, бараниот број е 25.

13. На Костадинка и требаат 18 минути за да направи долго ланче со поврзување на 3 кратки ланчиња. Колку време ѝ треба на Костадинка за да направи ланче со поврзување на 6 долги ланчиња?

A) 27 min B) 30 min C) 36 min D) 45 min E) 60 min

Решение. D). Кога прави ланче со поврзување на два дела Костадинка прави две поврзувања. Значи, за едно поврзување и се потребни $18:2=9$ min. За да направи ланче со поврзување на 6 делови, таа треба да направи 5 поврзувања, за што е се потребни $5\cdot 9=45$ min.

14. Во четириаголникот $ABCD$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\measuredangle DAC=50^\circ$, $\measuredangle DCA=65^\circ$, $\measuredangle ACB=70^\circ$, цртеж десно. Определи ја мерката на $\measuredangle ABC$.



A) 50° B) 55° C) 60° D) 65°

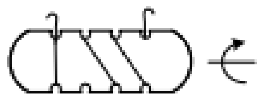
E) не може да се определи

Решение. B). Од триаголникот ACD следува

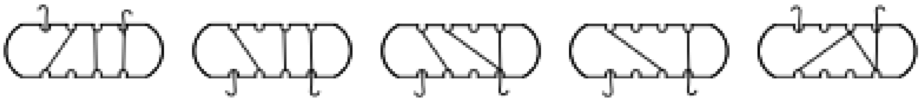
$$\measuredangle CDA=180^\circ-(50^\circ+65^\circ)=65^\circ.$$

Според тоа, триаголникот ACD е рамнокрак и важи $\overline{AD}=\overline{AC}$. Оттука следува $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}$, па затоа триаголникот ABC е рамнокрак со врв во темето C. Конечно, $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=\frac{180^\circ-70^\circ}{2}=55^\circ$.

15. Андреа навиткала јаже околу дрвена плочка како на цртежот десно. Таа ја звртела дрвената плочка

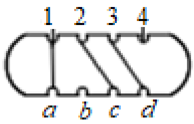


како што е покажано со стрелката на цртежот. Што видела Андреа по завртувањето?



A)　　B)　　C)　　D)　　E)

Решение. **B).** Нека длабнатините во плочата каде што поминува јажето ги означиме со $1,2,3,4$ и a,b,c,d, цртеж десно. Тогаш од задната страна на плочата јажето се гледаат поврзувањата $(a,2),(c,3)$ и $(d,4)$. Бидејќи плочата се превртува преку горната страна длабнатините се во горниот ред и наведените поврзувања се прикажани на цртежот B.



16. Во една кутија има 50 топчиња: бели, сини и црвени. Бројот на белите топчиња е 11 пати поголем од бројот на сините топчиња. Црвени топчиња има повеќе од сини, но помалку од бели. За колку белите топчиња се повеќе од црвените?

A) 2　　B) 11　　C) 19　　D) 22　　E) 30

Решение. **C).** Нека x е бројот на белите, y на сините и z на црвените топчиња. Тогаш

$$x+y+z=50,$$
$$x=11y,$$
$$y<z<x.$$

Со замена од втората во првата равенка добиваме $11y+y+z=50$, т.е. $z=50-12y$. Според тоа, $y\in\{1,2,3,4\}$.

Ако $y=1$, тогаш $z=38, x=11$ и не важи $y<z<x$.

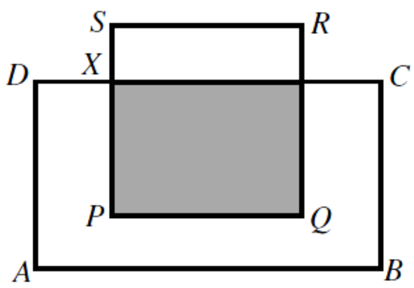
Ако $y=2$, тогаш $z=26, x=22$ и не важи $y<z<x$.

Ако $y=3$, тогаш $z=14, x=33$ и важи $y<z<x$.

Ако $y=4$, тогаш $z=2, x=44$ и не важи $y<z<x$.

Значи, $y=3$, $z=14$, $x=33$ и притоа $x-z=19$.

17. На цртежот десно се дадени правоаголник $ABCD$ со димензии $10\,cm$ и $6\,cm$ и квадрат $PQRS$ со страна $6\,cm$. Плоштината на сивиот дел е половина од плоштината на правоаголникот $ABCD$. Определи ја должината на отсечката SX, каде X е пресекот на SP и CD.



A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 4

Решение. A). Нека $\overline{SX}=x$. Тогаш $6(6-x)=30$, од каде добиваме $6-x=5$. Значи, $x=1$, т.е. $\overline{SX}=1\,cm$.

18. Колку прави ја делат рамнината на пет делови?

A) 3 B) 4 C)5 D) 6 E) не е можна таква поделба

Решение. B). Две прави кои се сечат ја делат рамнината на 4 дела. Ако сме избрале две такви прави, тогаш со избор на било која права бројот на делбените делови ќе биде 6 и 7. Притоа ако третата права минува низ пресечната точка на двете прави или е паралелна на едната од нив се добиваат 6 делови (направи цртеж), а во спротивно се добиваат 7 делови (направи цртеж). Според тоа, не смее да има прави кои се сечат.

Една права ја дели рамнината на 2 дела. Со додавање на права која е паралелна на веќе нацртаните прави се добива уште по еден дел. Значи, треба да додадеме уште три прави, па затоа 4 паралелни прави ја делат рамнината на 5 делови.

19. Ако $a-1=b+2=c-3=d+4=e-5$, кој од броевите a,b,c,d,e е нај-голем?

A) a B) b C) c D) d E) e

Решение. E). Имаме

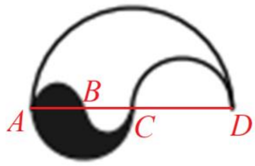
$$e=a+4>a, e=b+7>b, e=c+2>c, e=d+9>d,$$

од каде следува дека најголем е бројот e.

20. На цртежот десно е прикажано логото на една компанија. Тоа е направено од полукружници со радиуси $2\,cm, 4\,cm, 8\,cm$. Колкав дел од логото е затемнет?

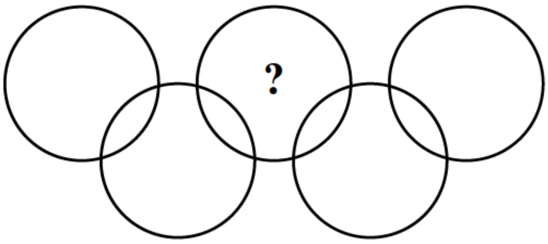
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

Решение. B). Ако го повлечеме дијаметарот AD, тогаш $\overline{AC}=\overline{CD}$ и $\overline{AB}=\overline{BC}$. Затоа плоштината на целиот амблем е еднаква на плоштината на полукругот над дијаметарот AD, а плоштината на затемнетиот дел е еднаква на плоштината на полукругот над дијаметарот CD. Имаме,



$$P_{AD}=\frac{8^2\pi}{2}=32\pi,\ P_{CD}=\frac{4^2\pi}{2}=8\pi\text{, т.е. }\frac{P_{CD}}{P_{AD}}=\frac{8\pi}{32\pi}=\frac{1}{4}.$$

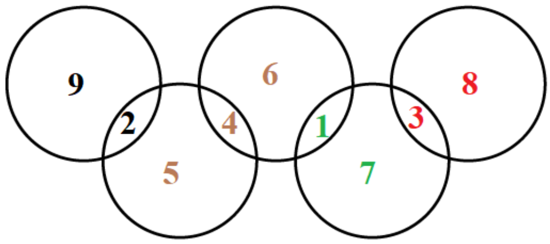
21. Во секој дел од фигурата прика-жана на цртежот десно е запишан точно по еден од броевите од 1 до 9. Притоа збирот на броевите запишани во секој круг е еднаков на 11. Кој број е запишан во делот во кој се наоѓа прашалниот знак?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. B). Бидејќи било кои други два броја собрани со бројот 9 даваат збир поголем од 11, бројот 9 мора да е запишан во круг кој е поделен на два дела и тоа во делот кој не е заеднички. Сега, во другиот дел мора да е запишан бројот $11-9=2$. Понатаму, бројот 8 може да е во кругот во кој е бројот 2 или во другиот краен круг кој е поделен на два дела. Ако 8 е во кругот во кој е бројот 2, тогаш третиот број е $11-(8+2)=1$ и остануваат броевите 3, 4, 5, 6 и 7. Сега ако се земе предвид дека од броевите кои преостануваат само $3+7=4+6=10$, добиваме дека во кругот во кој е бројот 1 може да се броевите 3 и 7, односно броевите 4 и 6. Ако се тоа броевите 3 и 7, тогаш ниту еден од овие два броја собран со било кои два од броевите 4, 5 и 6 не дава збир 11, па овој случај не е можен. Ако се тоа броевите 4 и 6, тогаш ниту еден од овие два броја собран со било кои два од броевите 3, 5 и 7 не дава збир 11. Последното значи дека бројот 8 не може да е во кругот во кој е бројот 2.

Понатаму, бидејќи од преостанатите броеви само $8+3=11$, заклучуваме дека броевите 8 и 3 се во другиот краен круг, при што бројот 3 е во заедничкиот дел со другиот круг. Сега е веќе јасно дека од преостанатите броеви 1, 4, 5, 6 и 7, во кругот со бројот 3 мора да се броевите 1 и 7, при што бројот 1 е во заедничкиот дел со другиот круг. Остануваат уште броевите 4, 5 и 6, па затоа со бројот 1 мора да се броевите 4 и 6, а со бројот 2 мора да се броевите 4 и 5 (цртеж десно). Конечно, на местото на прашалниот знак е бројот 6.



22. На сточниот пазар размената на некои стоки се врши според ценовникот даден на табелата десно. Колку кокошки треба да

ЦЕНОВНИК		
1 мисирка	⇔	1 петел
1 гуска + 2 кокошки	⇔	3 петли
4 кокошки	⇔	1 петел

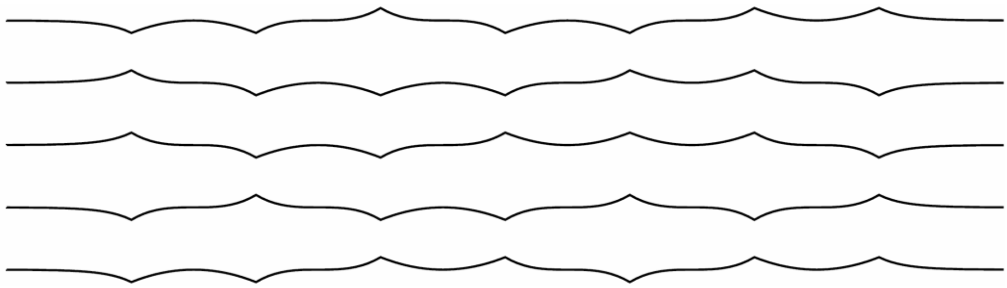
понесе на пазарот фармерот Трпко, за дома да се врати со една гуска, една мисирка и еден петел?

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

Решение. A). Еден петел чини 4 кокошки, па како 1 мисирка чини колку 1 петел, добиваме дека 1 мисирка чини 4 кокошки. Понатаму, 3 петли чинат 12 кокошки, што значи дека 1 гуска чини $12-2=10$ кокошки. Конечно, 1 гуска, 1 мисирка и 1 петел чинат $4+4+10=18$ кокошки.

23. Лист хартија три пати го преклопуваме на половина и потоа го одвиткуваме, така што кога гледаме од страна гледаме 7 места на свиткувања.

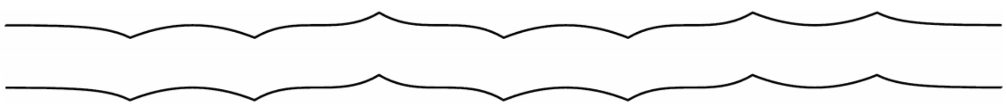
A *B* *C* *D* *E*



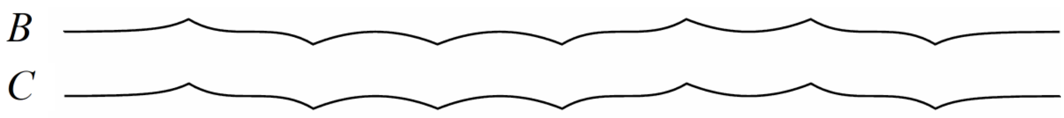
Кој од прикажаните цртежи не може да се направи на тој начин?

Решение. D). Ако ликот *E* прво го пресликаме симетрично во однос на хоризонталната, а потоа во однос на вертикалната права го добиваме ликот *A* (види цртеж). Тоа значи дека двата лика се добиваат со ист начин на превиткување.

A *E*



Ако ликот *C* прво го пресликаме симетрично во однос на хоризонталната, а потоа во однос на вертикалната права го добиваме ликот *B* (види цртеж). Тоа значи дека двата лика се добиваат со ист начин на превиткување.



Едниот начин е три пати превиткуваме во лево, а другиот начин е два пати превиткуваме во лево и еднаш во десно. Притоа во однос на четвртото прекршување останатите шест прекршувања мора да се „централно симетреични“. Ова не е случај со линијата D, па затоа истата не може да се добие на опишаниот начин.

24. Во едно одделение 18 ученици правеле контролна по математика и сите добиле четворки и петки. Збирот на оценките е делив со 17. Колку ученици добиле четворки?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Решение. B). Нека a ученици добиле оценка 4. Тогаш

$$4a+5\cdot(18-a)=17k\text{, т.е. } a=90-17k.$$

Сега, од $0\le a\le 18$ следува $0\le 90-17k\le 18$, од каде добиваме $\frac{72}{17}\le k\le\frac{90}{17}$. Од последните неравенства следува $k=5$, па затоа $a=90-17\cdot 5=5$.

25. Природните броеви од 1 до 10 се запишани на таблата. Пабло ја игра следнава игра: во еден потег брише два броја и на нивно место го запишува нивниот збир намален за еден. Играта завршува кога на таблата ќе биде запишан само еден број. Кој е тој број?

A) 16 B) 31 C) 46 D) 51 E) друг одговор

Решение. C). Збирот на сите броеви запишани на таблата е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55.$$

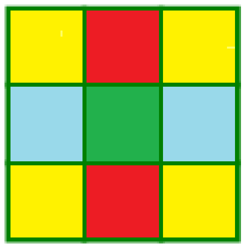
Во секој чекор при замена на броевите a и b, со бројот $a+b-1$ збирот се намалува за 1. Од почеток до крајот на играта Пабло прави 9 чекори, па затоа на крајот ќе остане бројот $55-9=46$.

26. Матео има голема колекција од единечни коцки, при што секоја коцка е обоена во една боја. Тој сака да направи голема коцка, составена од 27 единечни коцки. Притоа коцките кои имаат заедничко теме треба да се обоени во различни бои. Кој е најмалиот потребен број бои за да Матео ја направи големата коцка?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 27

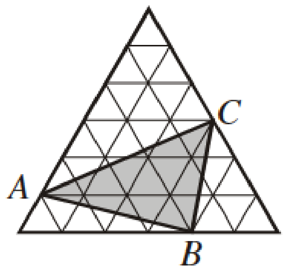
Решение. B). Единечна коцка која се наоѓа во теме на големата коцка има заедничко теме со седум единечни коцки. Според тоа, за саканото боење на големата коцка на Матео му се потребни најмалку осум бои. Ќе дадеме боење со кое ќе докажеме дека осум бои се и доволни.

За коцката која е во долното аголно поле на долниот ред има три коцки со кои таа има соседно теме. Затоа овие четири коцки ќе ги обоиме во четири различни бои: жолта, црвена, зелена и сина. Понатаму, боењето во четирите бои е лесно (види цртеж десно).



Сега, на потполно ист начин средниот ред на коцката го боиме со преостанатите четири бои, на пример, кафеава, сива, лилјакова и розева. На крајот, за горниот ред го повторуваме боењето од првиот ред.

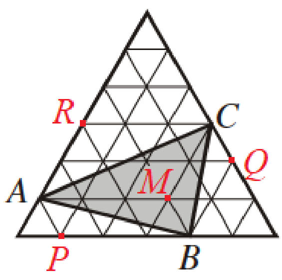
27. Рамностран триаголник е поделен на 36 рамнострани триаголници со плоштина $1\,cm^2$. Колку е плоштината на триаголникот ABC прикажан на цртежот десно?



A) $11\,cm^2$ B) $12\,cm^2$ C) $15\,cm^2$

D) $9\,cm^2$ E) $10\,cm^2$

Решение. **А).** Нека M, P, Q, R се точки како на цртежот десно. Тогаш



$$P_{ABC} = P_{ABM} + P_{BCM} + P_{CAM}$$
$$= \tfrac{1}{2} P_{APBM} + \tfrac{1}{2} P_{BQCM} + \tfrac{1}{2} P_{CRAM}$$
$$= \tfrac{6}{2} + \tfrac{4}{2} + \tfrac{12}{2} = 11\,cm^2.$$

28. Броевите од 1 до 10 се запишани еден по друг во нивниот природен редослед. Меѓу секои два броја е ставен еден од знаците за собирање $(+)$ или множење $(\cdot)$. Нека A е најголемиот број кој може да се добие на тој начин. Кое од дадениве тврдења е точно?

А) A е делив со 3.

B) A е десетцифрен број.

C) Последните три цифри на A се нули.

D) A не завршува на нула.

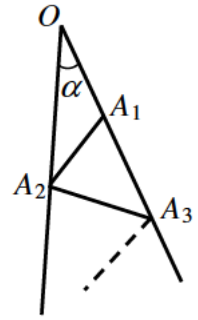
E) Сите претходни одговори не се точни.

Решение. **D).** Кога множиме со 1 се добива истиот број, па затоа меѓу 1 и 2 треба да е знакот +. Од останатите броеви најголем можен резултат ќе добиеме ако истите ги помножиме. Значи,

$$A = 1 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 3628801.$$

Јасно, A е седумцифрен број кој не е делив со 3, и завршува на 1. Тоа значи дека A не завршува на нула, т.е. точно е тврдењето D).

29. Во фигурата на цртежот десно важи $\measuredangle\alpha = 7^\circ$ и



$$\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots.$$

Колку најмногу отсечки A_iA_{i+1} може да се нацртаат на овој начин?

А) 10 B) 11 C) 12 D) 13

E) произволно многу

Решение. **C).** Триаголниците

$$OA_1A_2,\ A_1A_2A_3,\ A_2A_3A_4,\ A_3A_4A_5,$$
$$A_4A_5A_6,\ A_5A_6A_7,\ A_6A_7A_8,\ A_7A_8A_9,$$
$$A_8A_9A_{10},\ A_9A_{10}A_{11},\ A_{10}A_{11}A_{12},\ A_{11}A_{12}A_{13}$$

се рамнокраки со основи

$$OA_2,\ A_1A_3,\ A_2A_4,\ A_3A_5,\ A_4A_6,\ A_5A_7,\ A_6A_8,$$
$$A_7A_9,\ A_8A_{10},\ A_9A_{11},\ A_{10}A_{12},\ A_{11}A_{13},$$

и агли при основите

$$7^\circ, 14^\circ, 21^\circ, 28^\circ, 35^\circ, 42^\circ, 49^\circ, 56^\circ, 63^\circ, 70^\circ, 77^\circ, 84^\circ.$$

Ако може да се нацрта уште една отсечка, тогаш ќе добиеме рамнокрак триаголник $A_{12}A_{13}A_{14}$ и тој ќе има агли при основата 91°, што не е можно.

30. Колку има трицифрени броеви, кај кои цифрата на десетките е аритметичка средина на другите две цифри?

A) 12 B) 16 C) 25 D) 34 E) 45

Решение. **E).** Од условот на задачата следува дека броевите се од видот $\overline{abc}, a \neq 0$ и $a+c=2b$. Можни се следниве случаи:

- $b=1$ и тогаш ги добиваме броевите 210, 111,
- $b=2$ и тогаш ги добиваме броевите 420, 321, 222, 123,
- $b=3$ и тогаш ги добиваме броевите 630, 531, 432, 333, 234, 135,
- $b=4$ и тогаш ги добиваме броевите 840, 741, 642, 543, 444, 345, 246, 147,
- $b=5$ и тогаш ги добиваме броевите 951, 852, 753, 654, 555, 456, 357, 258, 159,
- $b=6$ и тогаш ги добиваме броевите 963, 864, 765, 666, 567, 468, 369,
- $b=7$ и тогаш ги добиваме броевите 975, 876, 777, 678, 579,

- $b=8$ и тогаш ги добиваме броевите 987, 888, 789,
- $b=9$ и тогаш го добиваме бројот 999.

Од досега изнесеното следува дека имаме

$$2+4+6+8+1+3+5+7+9=45$$

броеви со саканите својства.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2011

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Кој од следниве изрази има најголема вредност?

A) 2011^1 B 1^{2011} C) $1\cdot 2011$ D) $1+2011$ E) $1:2011$

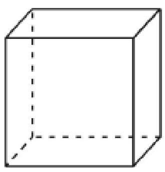
Решение. D). Од

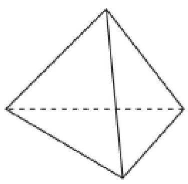
$2011^1=2011$, $1^{2011}=1$, $1\cdot 2011=2011$,

$1+2011=2012$, $1:2011=\frac{1}{2011}$,

следува дека најголема вредност е $1+2011=2012$.

2. Илина си игра со коцки и тетраедри. Таа има 5 коцки и 3 тетраедри. Колку ѕидови заедно имаат коцките и тетраедрите на Илина?





A) 42 B) 48 C) 50 D) 52 E) 56

Решение. A). Една коцка има 6 ѕидови, а еден тетраедар има 4 ѕидови. Пет коцки и три тетраедри заедно имаат

$$5\cdot 6+3\cdot 4=30+12=42 \text{ ѕидови.}$$

3. Една зебра (пешачки премин) е составена од бели и црни ленти кои се поставени наизменично, и секоја е широка 50 *cm*. На улицата, зебрата

започнува и завршува со бела лента. Зебрата има 8 бели ленти. Колку е широка улицата?

A) 7 m B) 7,5 m C) 8 m D) 8,5 m E) 9 m

Решение. B). Ако зебрата почнува и завршува со бела трака и има 8 бели ленти, таа вкупно има 15 ленти. Според тоа ширината на улицата е $15 \cdot 0,5 = 7,5\, m$.

4. Калкулаторот на Мартин е расипан, и наместо да множи тој дели, а одзема наместо да собира. Тој сакал да пресмета $(12 \times 3) + (4 \times 2)$. Кој резултат го дава калкулаторот?

A) 2 B) 6 C) 12 D) 28 E) 38

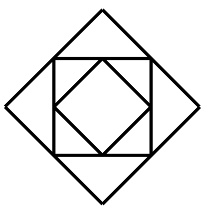
Решение. A). Калкулаторот наместо да пресмета $(12 \times 3) + (4 \times 2)$ тој ќе пресмета $(12 : 3) - (4 : 2) = 4 - 2 = 2$.

5. Дигиталниот часовник на Мартин само што почна да покажува 20:11. По колку минути часовникот повторно за прв пат ќе покажува време запишано со цифрите 0, 1, 1, 2 во некој редослед?

A) 40 B) 49 C) 50 D) 55 E) 60

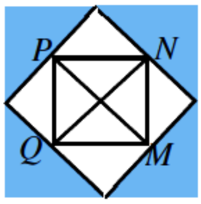
Решение. C). Следниот пат часовникот на Мартин ќе покажува време запишано со цифрите 0,1, 1 и 2 во 21:01. За тоа време ќе поминат $21\, h\, 1 \min - 20\, h\, 11 \min = 50 \min$.

6. На цртежот се дадени три квадрати. Темињата на средниот квадрат се средините на страните на големиот квадрат. Темињата на малиот квадрат се средините на страните на средниот квадрат. Плоштината на малиот квадрат е $6\, cm^2$. Колку е разликата меѓу плоштината на големиот квадрат и плоштината на средниот квадрат, во cm^2?



A) $6\ cm^2$ B) $9\ cm^2$ C) $12\ cm^2$ D) $15\ cm^2$ E) $18\ cm^2$

Решение. **C).** *Прв начин.* Малиот квадрат да го означиме $MNPQ$. Страните и дијагоналите на $MNPQ$ го делат средниот квадрат на 8 рамнострани правоаголни триаголници, кои се складни. Оттука следува дека плоштината на средниот квадрат е два пати поголема од плоштината на малиот квадрат. Слично, плоштината на големиот квадрат е два пати поголема од плоштината на средниот квадрат. Значи, разликата меѓу плоштините на големиот и средниот квадрат е еднаква на плоштината на средниот квадрат, па затоа таа е два пати поголема од плоштината на малиот квадрат, т.е. е еднаква на $2\cdot 6\ cm^2 = 12\ cm^2$.



Втор начин. Должината на страната на малиот квадрат е $a=\sqrt{6}\ cm$, а неговата дијагонала има должина $d=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{12}\ cm$. Значи, должината на страната на средниот квадрат е $b=d=\sqrt{12}\ cm$, а неговата плоштина $P=b^2=12\ cm^2$. Должината на дијагоналата на средниот квадрат е $D=\sqrt{(\sqrt{12})^2+(\sqrt{12})^2}=\sqrt{24}\ cm$, па според тоа, должината на страната на големиот квадрат е $D=\sqrt{24}\ cm$.

Сега, разликата меѓу плоштините на големиот и средниот квадрат е

$$S=(\sqrt{24})^2-(\sqrt{12})^2=24-12=12\ cm^2.$$

7. Во улицата на Илина има 17 куќи. Таа живее во последната куќа на страната каде што сите куќи имаат парни броеви. Бројот на нејзината куќа е 12. Нејзината братучетка живее во последната куќа на страната каде што сите куќи имаат непарни броеви.

Кој е бројот на нејзината куќа?

A) 5 B) 7 C) 13 D) 17 E) 21

Решение. E). На парната страна на улицата има $12:2=6$ куќи, што значи дека на непарната има $17-6=11$ куќи. Броевите на куќите на непарната страна се 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21. Значи, куќниот број на куќата на братучетката на Илина е 21.

8. Мачорот Феликс уловил 12 риби за 3 дена. Секој следен ден тој ловел повеќе риби од претходниот. Третиот ден тој уловил помалку риби отколку што уловил првиот и вториот ден заедно. Колку риби уловил мачорот Феликс третиот ден?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. A). Ако x, y и z се броевите на рибите кои мачорот Феликс ги уловил првиот, вториот и третиот ден соодветно, тогаш $x<y<z$, $x+y+z=12$ и $z<x+y$. Значи, $2z<12$, од каде добиваме $z<6$. Сега од $x<y<z$ следува $x\leq 3, y\leq 4, z\leq 5$. Значи,

$$12=x+y+z\leq 3+4+5=12,$$

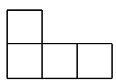
од каде следува $x=3, y=4, z=5$.

9. Илина ги запишала сите трицифрени броеви кои имаат збир на цифри 8. Потоа ги собрала најмалиот и најголемиот запишан број. Кој збир таа го добила?

A) 707 B) 907 C) 916 D) 1000 E) 1001

Решение. B). Најмалиот од запишаните броеви е 107 а најголемиот е 800. Нивниот збир е $800+107=907$.

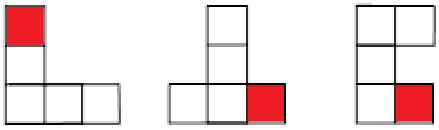
10. L-фигурата на цртежот е составена од 4 мали идентични квадратчиња. Треба да се додаде уште едно мало квадрат-



че, за да новодобиената фигура е основосиметрична. На колку начини може да се додаде квадратчето?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. Тоа може да се направи на три различни начини како што е прикажано на цртежот десно.



11. Колку е вредноста на изразот

$$\frac{2011\cdot 2{,}011}{201{,}1\cdot 20{,}11}?$$

A) 0,01 B) 0,1 C) 1 D) 10 E) 100

Решение. C). Со непосредно пресметување добиваме

$$\frac{2011\cdot 2{,}011}{201{,}1\cdot 20{,}11}=\frac{10\cdot 201{,}1\cdot 2{,}011}{201{,}1\cdot 20{,}11}=\frac{10\cdot 2{,}011}{20{,}11}=\frac{20{,}11}{20{,}11}=1.$$

12. Илина има девет парчиња злато кои имаат маси 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g и 9 g. Од нив таа направила четири прстени, употребувајќи по две парчиња злато за еден прстен. Масите на овие четири прстени се 17 g, 13 g, 7 g и 5 g. Кое парче злато не е употребено за изработка на прстен?

A) 1 g B) 2 g C) 3 g D) 4 g E) 5 g

Решение. C). Масата на сите парчиња злато е

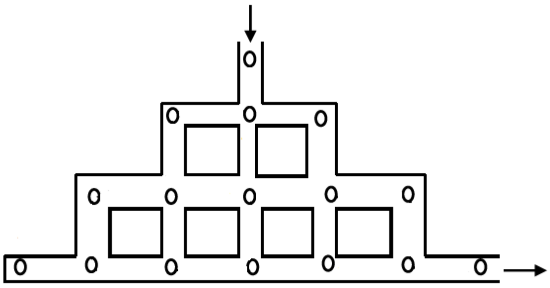
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45\ g,$$

а масата на прстените е $17+13+7+5=42\ g$. Значи, Илина не го употребила парчето со маса $45-42=3\ g$. Навистина:

$$17=9+8, 13=7+6, 7=5+2, 5=4+1.$$

13. Хрчакот Фридолин оди во Земјата на чудата. Пред да влезе во оваа легендарна земја, тој мора да помине низ систем на тунели прикажан

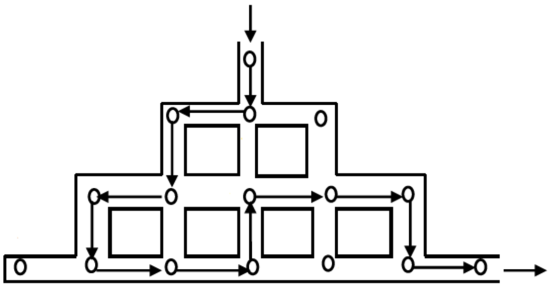
на цртежот. Не му е дозволено да се врати на раскрсница која веќе ја поминал. На секоја раскрсница нашол семка од тиква.



Колку најмногу семки од тиква хрчакот Фридолин може да собере?

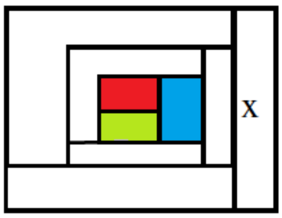
A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Решение. **B).** Хрчакот најмногу семки ќе собере ако прво отиде до најдалечната лева раскрсница, а потоа одејќи десно, горе и долу помине најголем број раскрсници кои пред тоа не ги поминал. Патека по која треба да се движи е прикажана на цртежот десно.



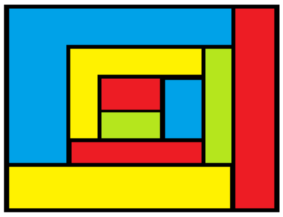
Како што можеме да видиме хрчакот Фридолин ќе собере 13 семки од тиква.

14. Секој дел во правоаголникот треба да се обои со една од четирите бои: црвена, зелена, сина и жолта. Секои два соседни дела треба да се обоени со различна боја. Три дела се веќе обоени (цртеж десно). Со која боја е обоен делот X ? (Соседни се деловите кои имаат заедничка страна или заеднички дел на две страни.)



A) црвена B) сина C) зелена D) жолта

E) не може да се определи



Решение. **А).** Бараното боење е еднозначно и истото е прикажано на цртежот десно. Според тоа, делот кој е означен со X е обоен со црвена боја.

15. Горјан ја пресметал аритметичката средина на броевите: 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 и 16. Потоа избришал два од дадените броеви и забележал дека аритметичката средни на преостанатите броеви не се променила. Кои броеви ги избришал Горјан?

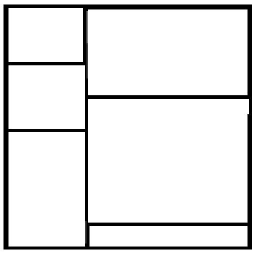
A) 12 и 17 B) 5 и 17 C) 9 и 16 D) 10 и 12 E) 10 и 14

Решение. **Е).** Аритметичката средина на дадените броеви е:

$$\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8}=\frac{96}{8}=12.$$

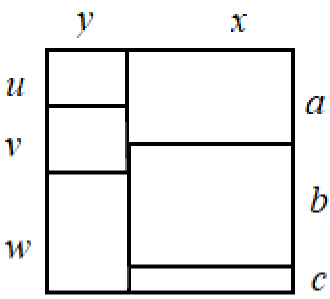
Збирот на дадените броеви е $8\cdot 12=96$, а ако аритметичката средина не се менува по отстранување на два броја, тој збир ќе биде еднаков на $6\cdot 12=72$. Значи, треба да се отстранат два броја чиј збир е $96-72=24$. Единствени талви два броја се 10 и 14.

16. Лист хартија во облик на квадрат е исечен на шест правоаголни парчиња. Збирот на периметрите на шесте правоаголници е $120\,cm$. Колку е плоштината на листот хартија?



A) $48\,cm^2$ B) $64\,cm^2$ C) $110,25\,cm^2$

D) $144\,cm^2$ E) $256\,cm^2$



Решение. **D).** Страните на правоаголниците ќе ги означиме како на цртежот. Тогаш од условот на задачата имаме

$$6x+6y+2(a+b+c+u+v+w)=120.$$

Ако m е должината на страната на квадратот, тогаш $x+y=m$, $a+b+c=m$ и $u+v+w=m$, од каде добиваме $6m+2(m+m)=120$. Од последната равенка $m=12$, па плоштината на листот хартија е

$$P=m^2=12^2\ cm^2=144\ cm^2.$$

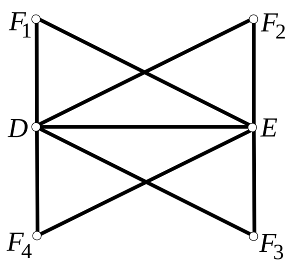
17. На три натпревари тимот на Вардар постигнал 3 гола, а примил 1 гол. Во овие три натпревари Вардар еднаш победил, еднаш загубил и еднаш играл нерешено. Со кој резултат Вардар победил?

A) 2:0 B) 3:0 C) 1:0 D) 4:1 E) 0:1

Решение. B). Бидејќи примил само еден гол, резултатот со кој Вардар загубил е 0:1. Понатаму, резултатот од нерешениот натпревар мора да е 0:0, па победата е со резултат 3:0.

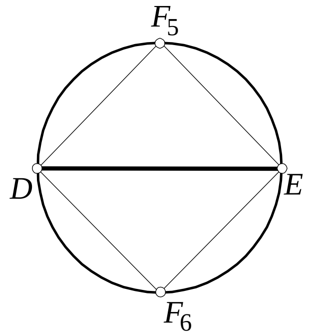
18. На лист хартија, Илина нацртала отсечка DE со должина $2\,cm$. Колку различни точки F може таа да нацрта на листот, така што триаголникот DEF е правоаголен и има плоштина $1\,cm^2$?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10



Решение. C). За бараниот триаголник DEF, отсечката DE може да е катета или хипотенуза. Ако DE е катета, тогаш должината на другата катета мора да е $1\,cm$. Постојат четири правоаголни триаголници DEF за кои што DE е катета, и имаат плоштина $1\,cm^2$. Тоа се DEF_1, DEF_2, DEF_3 и DEF_4 прикажани на горниот цртеж.

Ако DE е хипотенуза на бараниот триаголник, тогаш темето точката F припаѓа на кружницата со дијаметар DE, а висината спуштена од темето F има должина $1cm$. Тоа значи дека триаголникот DEF е рамнокрак (цртеж десно). Так-ви триаголници има два, и тоа DEF_5 и DEF_6.

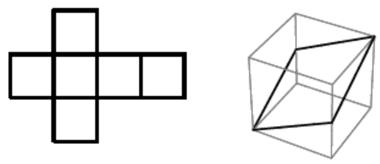


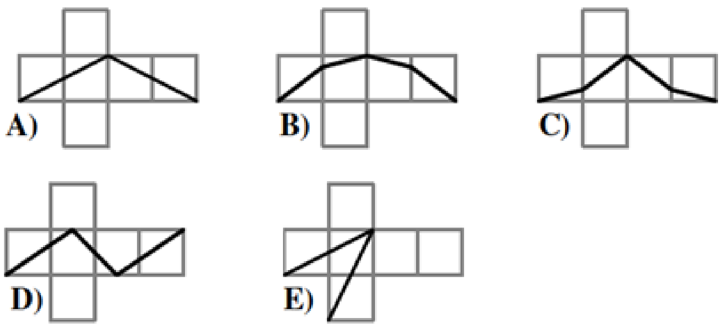
19. Позитивниот број a е помал од 1, а бројот b е поголем 1. Кој од следниве броеви има најголема вредност ?

A) $a \cdot b$ B) $a+b$ C) $a:b$ D) b E) не зависи од a и b

Решение. B). Бидејќи $0<a<1<b$, имаме $b^2>1$ од каде добиваме $a:b<ab$. Од $b>0$ и $a<1$, добиваме $ab<b$. Понатаму, од $0<a$ следува $b<a+b$. Според тоа, $a:b<ab<b<a+b$.

20. На цртежите десно се прикажани мрежа на коцка и коцката која е составена и на која е нацртана искршена линија со која површината на коцката е поделена на два еднакви дела.

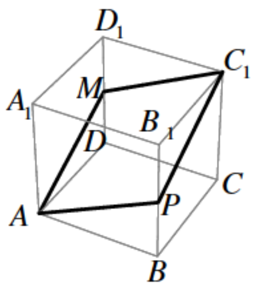


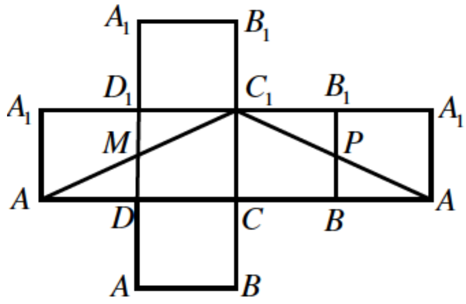


На кој цртеж е прикажана мрежата на коцката по цртањето на делбената линија?

Решение. A). Ако коцката и делбената линија ги означиме како на цртежот долу лево, тогаш по расекувањето на коцката по рабовите

AA_1, AD, AB, BC, A_1D_1, A_1B_1, B_1C_1 мрежата на коцката е како на долниот цртеж десно, а тоа е мрежата А).



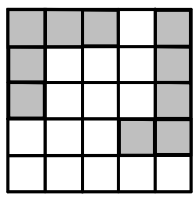


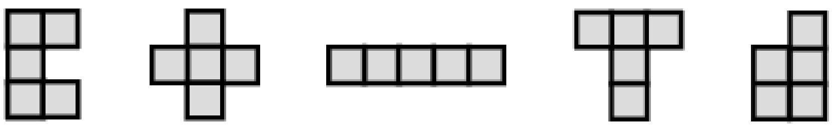
21. Петцифрениот број $\overline{24X8Y}$ е делив со 4, 5 и 9. Колку е збирот на цифрите X и Y?

А) 13 В) 10 С) 9 D) 5 Е) 4

Решение. **Е).** За да бројот $\overline{24X8Y}$ е делив со 5, неговата последна цифра треба да е 0 или 5. За да тој е делив со 4, последната цифра Y мора да е една од цифрите 4, 8 и 0. Значи, $Y \in \{0,5\} \cap \{0,4,8\} = \{0\}$, т.е. $Y = 0$. Според тоа бројот е $\overline{24X80}$. За да бројот е делив со 9, треба збирот на неговите цифри да е делив со 9. Оттука следува дека $9 \mid 2+4+X+8+0=14+X$. Единствена таква цифра е $X=4$, и бараниот збир е $X+Y=0+4=4$.

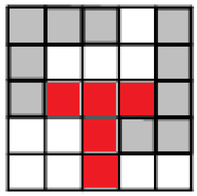
22. Илина поставила две фигури составени од по пет мали квадрати на квадратна плоча како на цртежот десно. Која од следниве пет фигури може да ја смести на празниот дел од таблата, така што не би имало место за ниту една од преостанатите четири фигури?



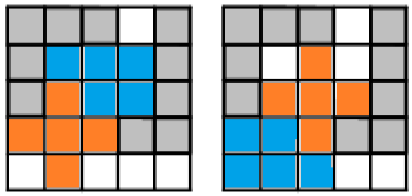


А) В) С) D) Е)

Решение. D). Ако ја ставиме фигурата под D) како на цртежот десно, тогаш ниту една од другите фигура не може да се постави.

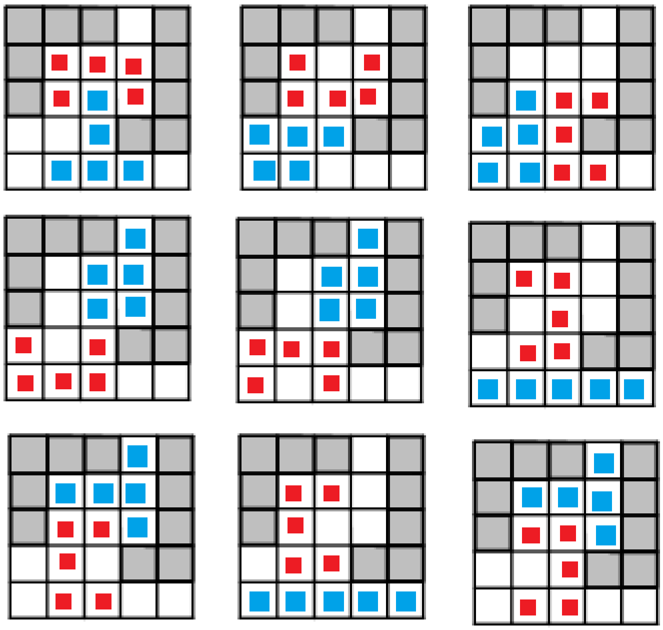


Понатаму, крстот B) во празниот дел може да се постави на два начина, при што секогаш може да се постави една од другите четири фигури. Ова е покажано на цртежите десно.



Фигурата A) на празниот дел може да се постави дури на девет начини и за секое поставување може да се постави уште една од другите фигури (види ги цртежите десно).

Фигурата C) на празниот дел може да се постави на единствен начин и како што е покажано на цртежите десно секогаш може да се постави уште една фигура.



Фигурата E) на празните места може да се постави на повеќе начини и може да се види дека за секое нејзино поставување на полињата кои остануваат празни може да се постави барем една од преостанатите четири фигури. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. .

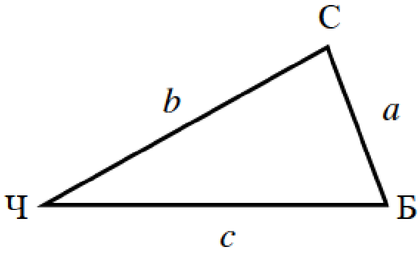
23. Секое од трите врапчиња Сики, Чаки и Баки, направиле сопствено гнездо. Сики вели: „Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Чаки, отколку од гнездото на Баки“. Чаки вели: „Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Баки, отколку од

гнездото на Сики". Баки вели: „Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Чаки, отколку од гнездото на Сики". Ако се знае дека две од врапчињата ја говорат вистината, кое од нив лаже?

A) Сики B) Чаки C) Баки D) ниту еднож

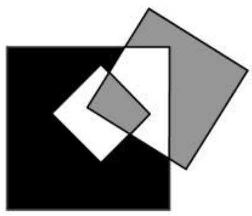
E) не може да се определи

Решение. **B).** Можеме да сметаме дека во општ случај гнездата на трите птици се темиња на триаголник. Овој триаголник да го означиме со *ЧБС* (Ч гнездото на Чаки, Б гнездото на Баки и С гнездото на Сики). Можно е триаголникот да е дегенериран, т.е. сите три гнезда да припаѓаат на една права. Должините на страните на триаголникот да ги означиме со a,b,c (види цртеж). Од условот на задачата следува $b>2a, c>2b, c>2a$. Можни се следниве случаи:



1) Сики и Чаки говорат вистина, а Баки лаже. Тогаш $a<0,5b$, па од неравенството на триаголник следува $2b<c\le a+b<1,5b$, што не е можно.
2) Чаки и Баки говорат вистина, а Баки лаже. Тогаш $b<0,5c$ и $a<0,5c$. Повторно од неравенството на триаголник следува $c\le a+b<0,5c+0,5c=c$, што не е можно.
3) Сики и Баки говорат вистина, а Чаки лаже. Тогаш $a<0,5b$, па од неравенството на триаголник следува $c\le a+b<1,5b$, што не противречи на спротивното тврдење на Чаки, т.е. на $c\le 2b$. Значи, овој случај е можен.

24. Во внатрешноста на квадрат со страна 7 *cm*, е нацртан квадрат со страна 3 *cm*. Потоа е нацртан квадрат со страна 5 *cm* кој ги сече првите два квад-



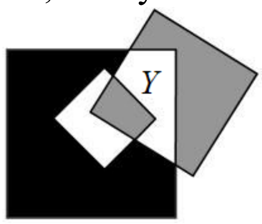
рати како на цртежот десно. Колку изнесува разликата меѓу плоштината на црниот дел и вкупната плоштина на сивите делови?

A) $0\ cm^2$ B) $10\ cm^2$ C) $11\ cm^2$ D) $15\ cm^2$

E) не е можно да се определи

Решение. D). Едната од белите плоштини ќе ја означиме со Y.

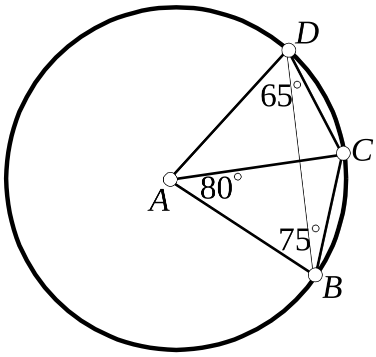
Плоштината на црната површина е $7^2-3^2-Y=40-Y$, а вкупната плоштина на сивите делови заедно е $5^2-Y=25-Y$.



Нивната разлика е

$$40-Y-(25-Y)=40-25=15\,cm^2.$$

25. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}=\overline{AC}, \measuredangle BAD=80^\circ$, $\measuredangle ABC=75^\circ$ и $\measuredangle ADC=65^\circ$. Пресметај го $\measuredangle BDC$?



A) 10° B) 15° C) 20°

D) 30° E) 45°

Решение. B). Според условот на задачата триаголникот ABC е рамнокрак со основа BC. Значи, $\measuredangle BCA=75^\circ$ и $\measuredangle BAC=30^\circ$. Бидејќи $\measuredangle BAD=80^\circ$ и $\measuredangle BAC=30^\circ$, имаме

$$\measuredangle DAC=\measuredangle BAD-\measuredangle BAC=80^\circ-30^\circ=50^\circ.$$

За триаголникот ACD имаме $\measuredangle CAD=50^\circ$, $\measuredangle ADC=65^\circ$, па затоа

$$\measuredangle ACD=180^\circ-\measuredangle DAC-\measuredangle ADC=180^\circ-65^\circ-50^\circ=65^\circ.$$

Триаголникот DAC е рамнокрак со основа DC. Значи, $\overline{AC}=\overline{AD}$. Следствено, точките B,C,D лежат на кружница со центар во A и радиус $r=\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$. Сега, $\measuredangle BDC=\frac{1}{2}\measuredangle BAC=\frac{1}{2}\cdot 30^\circ=15^\circ$, (периферискi и централен агол над ист кружен лак).

26. Мартин учествувал на натпревар по стрелаштво. Секогаш кога ќе ја погодел целта тој освојувал 5, 8 или 10 бодови. Тој еднаков број пати освоил 8 и 10 бодови. Вкупно освоил 99 бодови, а 25% од стрелањата ја промашил метата. Колку пати Мартин стрелал во метата?

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

Решение. **D).** Нека Мартин x пати освоил по 8 и 10 бодови. Тој вкупно освоил 99 бода, па ако y пати освоил по 5 бодови добиваме $5y+18x=99$. Броевите 18 и 99 се деливи со 9, а се заемно прости со 5, па затоа $y=9t$, од каде добиваме $5t+2x=11$. Во множеството природни броеви решение на последната равенка е $t=1, x=3$. Значи, Мартин 3 пати освојувал по 8 и 10 бодови и 9 пати освоил по 5 бодови. Според тоа, за освоените бодови тој стрелал $3\cdot 2+9=15$ пати. Бројот 15 е 75% од вкупниот број на стрелањата, што значи дека Мартин стрелал $15:0,75=20$ пати.

27. Пред седум години, бројот на години на Лепа бил делив 8, а за осум години бројот на години на Лепа ќе биде делив со 7. Пред осум години, бројот на години на Драги бил делив со 7, а за седум години бројот на години на Драги ќе биде делив со 8. Ниту Драги, ниту Лепа немаат повеќе од сто години. Која од следниве реченици може да е вистинита?

A) Драги е две години постар од Лепа

B) Драги е една година постар од Лепа

C) Драги и Лепа се на иста возраст

D) Драги е една година помлад од Лепа

E) Драги е две години помлад од Лепа

Решение. **A).** Нека Лепа има a години. Тогаш $a-7=8x$ и $a+8=7y$, односно $8x+7=7y-8$, т.е. $8x+15=7y$. Бидејќи x и y се природни броеви и $8x+7<100$ добиваме $x=6, y=9$, т.е. $a=55$. Слично, нека b е бројот на годините на Драги. Тогаш $b-8=7z$ и $b+7=8u$, од каде добиваме $7x+8=8u-7$, т.е. $7z+15=8u$. Бидејќи u и z се природни броеви и $7z+8<100$ добиваме $z=7, u=8$. Сега, бројот на години на Драги е $b=49+8=57$. Значи, Драги е две години постар од Лепа.

28. Во изразот $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}$ на различни букви соодветствуваат различни ненулти цифри, а на исти букви исти цифри. Која е најмалата целобројна позитивна вредност на овој израз?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Решение. B). Имаме $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}=\frac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}$. Бидејќи

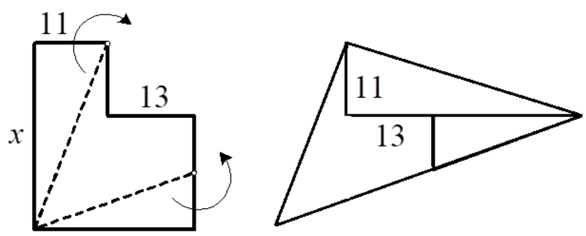
$$M\cdot E\le 9\cdot 8=72, K\cdot A\cdot N\cdot R\cdot O\cdot O\ge 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1=120,$$

добиваме $\frac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}\ge 2$. Од друга страна за

$$M=8, E=9, K=2, A=4, N=3, R=6, O=1$$

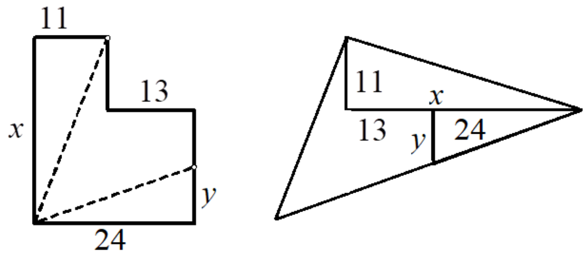
и на пример $G=7$, добиваме $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}=2$.

29. На левиот цртеж е претставена фигура составена од два правоаголници. Должините на две нејзини страни се 11 и 13 (види цртеж). Фигурата е исечена на три дела и деловите се составени во триаголник. Колку е должината на страната x?

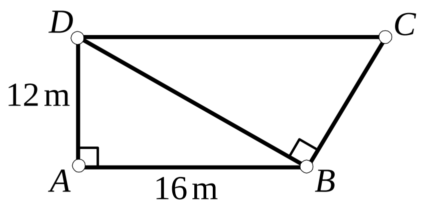


A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

Решение. **B).** Триаголникот е направен од два правоаголни триаголници со катети x и 11 за едниот и y и 24 за другиот, и еден петаголник кој не е конвексен (цртеж десно). Сега е очигледно дека $x = 13 + 24 = 37$.



30. Еден трапез е направен од два слични триаголници како што е прикажано на цртежот. Колку е плоштината на трапезот?



A) 120 cm B) 192 cm C) 240 cm D) 246 cm E) 296 cm

Решение. Хипотенузата на правоаголниот триаголник со катети $12\,cm$ и $16\,cm$ е дијагонала на трапезот, катета на другиот правоаголен триаголник и нејзината должина е еднаква на

$$l = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20\,cm.$$

Од сличноста на правоаголните триаголници, имаме $12:16 = \overline{BC}:\overline{BD}$ што значи $\overline{BD} = \frac{20 \cdot 12}{16} = 15\,cm$. Сега плоштината на трапезот е

$$P = \frac{12 \cdot 16}{2} + \frac{20 \cdot 15}{2} = 12 \cdot 8 + 10 \cdot 15 = 96 + 150 = 246\,cm^2.$$

Kadett (осмо и деветто одделение) 2012

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Четири чоколади чинат 6 евра повеќе од едно чоколадо. Колку чини едно чоколадо?

A) 1 € B) 2 € C) 3 € D) 4 € E) 5 €

Решение. B). *Прв начин.* Од условот на задачата, ако цената на едно чоколадо е x, тогаш имаме

$$4x-6=x$$
$$3x=6$$
$$x=2.$$

Значи, цената на едно чоколадо е 2 €.

Втор начин. Четири чоколади чинат колку едно чоколадо и 6 евра. Значи, три чоколади чинат 6 евра, па затоа едно чоколадо чини $6:3=2$ евра.

2. Вредноста на изразот $11{,}11-1{,}111$ е:

A) 9,009 B) 9,0909 C) 9,99 D) 9,999 E) 10

Решение. D). Имаме:

$$11{,}11-1{,}111=11{,}110-1{,}111=9{,}999.$$

3. Еден часовник е поставен на маса, на тој начин што стрелката која покажува минути е во правец североисток. По колку минути оваа стрелка за прв пат ќе биде во правец северозапад?

A) 45 B) 40 C) 30 D) 20 E) 15

Решение. A). Ако минутната стрелка покажува североисток, тогаш таа е на средината помеѓу броевите 12 и 3, што значи дека во тој момент таа покажува $x h\ 7\min\ 30\sec$. Кога потоа за прв пат стрелката ќе покажува северозапад, таа е на средината меѓу броевите 9 и 12, што значи дека во во тој момент таа покажува $x h\, 52\min\, 30\sec$. Тоа значи дека ќе поминат $x h\ 52\min\ 30\sec - x h\ 7\min\ 30\sec = 45\min$

4. Матео има ножици и пет букви направени од картон. Тој може да ја пресече секоја од буквите со права линија само еднаш. Од која буква, пресекувајќи ја, Матео може да добие најмногу делови?

A) B) C) D) E)

Решение. E). Со едно сечење по права линија буквата O може да се раздели на два дела. Со едно сечење буквата F може да се раздели на најмногу четири дела. Со едно сечење буквата S може да се раздели на најмногу четири дела. Со едно сечење буквата H може да се раздели на најмногу четири дела. Со едно сечење буквата M може да се раздели на најмногу пет дела (направи цртежи).

5. Еден змеј има 5 глави. Секогаш кога ќе се пресече една негова глава му пораснуваат пет нови глави. Ако нему шест пати последователно му е пресечена по една глава (една по една), колку глави има змејот?

A) 25 B) 28 C) 29 D) 30 E) 35

Решение C). По сечењето на една глава на змејот му пораснуваат пет нови глави. Тој губи една, а добива пет глави, што значи по секое сечење на една глава бројот на неговите глави се зголемува за 4. Значи, по шест сечења на по една глава змејот ќе има $5+6\cdot4=29$ глави.

6. Во кој од следните бројни изрази може да се замени бројот 8 со друг позитивен број (различен од 8), а да се добие ист резултат?

A) $(8+8):8+8$ B) $8\cdot(8+8):8$ C) $8+8-8+8$

D) $(8+8-8)\cdot8$ E) $(8+8-8):8$

Решение. E). Имаме:

$(8+8):8+8=2+8$, $8\cdot(8+8):8=2\cdot8$, $8+8-8+8=2\cdot8$,

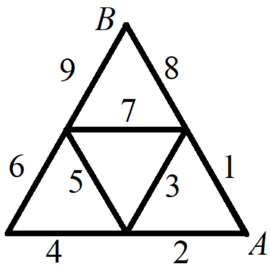
$(8+8-8)\cdot8=8\cdot8$, $(8+8-8):8=8:8=1$.

Значи, само вредноста на последниот израз не зависи од бројот 8, што значи дека само во овој случај кога бројот 8 ќе го замениме со произволен број се добива ист резултат.

7. Во паркот секоја од деветте патеки кои ги поврзуваат кружните одмаралишта има должина $100\ m$. Ана сака да направи прошетка, така што да тргне од точката A и да стигне во точката B (види цртеж). Притоа, таа по една патека може да помине само еднаш. Која е должината на најдолгиот пат кој Ана може да го избере?

A) $900\,m$ B) $800\,m$ C) $700\,m$ D) $600\,m$ E) $400\ m$

Решение. C). Патиштата да ги нумерираме како на цртежот десно. Бидејќи точките A и B се поврзани само со по два патишта, а тие се почетна и крајна точка, јасно е дека може да се помине само

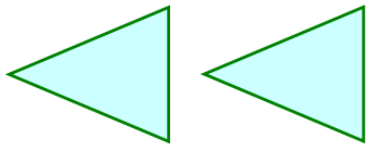


по еден пат со кои се поврзани овие две точки. Значи, Ана не може да помине повеќе од седум патишта, т.е. повеќе од $700m$.

Следните маршрути покажуваат дека Ана може да помине $700m$:

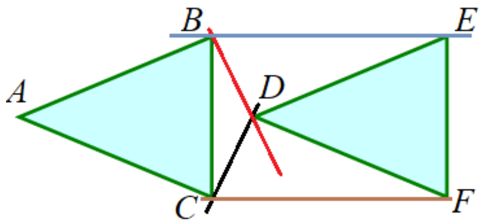
2, 3, 7, 5, 4, 6, 9 или 2, 3, 7, 6, 4, 5, 9 или 2, 5, 6, 4, 3, 7, 9 или 2, 5, 7, 3, 4, 6, 9 или 2, 4, 6, 5, 3, 7, 9 или 2, 4, 6, 7, 3, 5, 9.

8. Дадени се два триаголници (како на цртежот). На колку начини може да се изберат две темиња, по едно од секој триаголник, така што правата што минува низ нив не сече ниту еден од триаголниците?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) повеќе од 4

Решение. **D).** Триаголниците ќе ги означиме како на цртежот. Сега е јасно дека такви парови темиња се C и D, B и D, C и F, B и E, т.е. имаме четири можни избори.

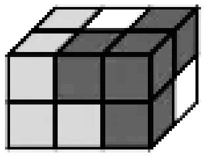


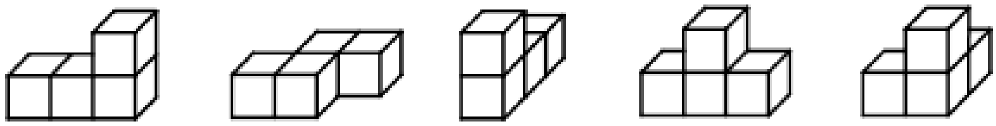
9. Дамјан, еден лист хартија го превиткува како што е прикажано на цртежот и прави два пресеци со ножици. Потоа тој го одвиткува листот. Која од следните фигури не може да ја добие Дамјан?

A) B) C) D) E)

Решение. **D).** Фигурата А може да се добие ако се отсечат двата леви ќоша на завитканиот лист. Фигурата В се добива ако на средината на левата страна се отсече рамнокрак правоаголен триаголник чија хипотенуза лежи на страната. Фигурата C се добива ако се отсечат двата десни ќоша на завитканиот лист. Фигурата E се добива со отсекување на горниот десен и долниот лев ќош на завитканиот лист. За да се добие фигурата D потребно е на горната и на долната страна да се направат по две сечења, што значи вкупно 4 сечења, па оваа фигура не може да се добие со две сечења.

10. Еден квадар е направен од три дела. Секој од деловите е направен од четири коцки и е обоен во една иста боја (види цртеж). Кој од следните делови е од бела боја?





A) B) C) D) E)

Решение. **D).** Јасно, белиот дел се наоѓа на задната страна од квадарот, која има 6 коцки. Бидејќи горните лева и десна коцка не се бели, останува трите бели коцки да се во долниот ред на задната страна. Значи тоа е делот D.

11. Во ▲·▲=□·○, еднакви фигури означуваат еднакви цифри, а различни фигури различни цифри. Сите цифри се различни од еден. Колку различни цифри претставува триаголникот за кои равенството е точно?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **C).** Од

$2\cdot 2=4=4\cdot 1,$ $\quad 3\cdot 3=9=9\cdot 1$

$4\cdot 4=16=2\cdot 8=1\cdot 16$ $\quad 5\cdot 5=25=25\cdot 1$

$6\cdot 6=36=4\cdot 9=36\cdot 1$ $\quad 7\times 7=49=49\times 1$

$8\cdot 8=64=64\cdot 1=2\cdot 32=4\cdot 16$ $\quad 9\cdot 9=81=1\cdot 81=3\cdot 27$

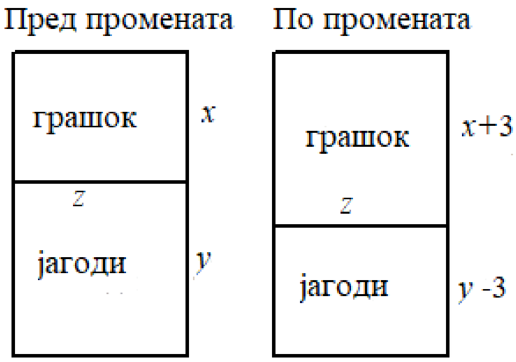
добиваме дека има две такви цифри 4 и 6.

12. Госпоѓата Марија во својата градина одгледувала грашок и јагоди. Оваа година правоаголната површина под грашок ја наголемила до квадратна, проширувајќи ја едната страна за 3 метри (види цртеж). Притоа, плоштината под јагоди се намалила за $15\ m^2$. Колкава е плоштината под грашок пред наголемувањето?

Пред промената По промената

A) $5\ m^2$ B) $9\ m^2$ C) $10\ m^2$ D) $15\ m^2$ E) $18\ m^2$

Решение. Нека x и y се должините на страните на правоаголните површини кои се наголемиле и намалиле за $3\ m$. Ако z е ширината на правоаголните површини, тогаш од условот на задачата имаме $z\cdot 3=15$ и $x+3=z$. Според тоа, $z=5$ и $x=z-3=5-3=2\ m$.



Значи, пред промената, госпоѓа Марија имала $10\ m^2$ под грашок.

13. Употребувајќи ја секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 само по еднаш, се формираат два четирицифрени броја, такви што нивниот збир е најмал. Колку е вредноста на тој збир?

A) 2468 B) 3333 C) 3825 D) 4734 E) 6912

Решение. C). За да збирот на формираните броеви е најмал потребно и доволно е во двата најмалите две цифри 1 и 2 во некој распоред да се цифрите на илјадитите, потоа следните две по големина цифри 3 и

4 во некој распоред да се цифрите на стотките во двата броја, па следните две по големина цифри 5 и 6 да се во некој распоред цифрите на десетките на двата броја и на крајот цифрите 7 и 8 во некој распоред да се цифрите на единиците на двата броја. Значи, најмалиот збир ќе биде:

$$1000\cdot(1+2)+100\cdot(3+4)+10\cdot(5+6)+(7+8)=3825.$$

14. Барбара сака да ја пополни правоаголната шема (дадена на цртежот) запишувајќи три броја, по еден во секое празно квадратче. Притоа, збирот на броевите во првите три квадратчиња да биде 100, во средните три збирот да биде 200, а во последните три збирот да биде 300. Кој број Барбара треба да го запише во средното квадратче?

10				130

A) 50 B) 60 C) 70 D) 75 E) 100

Решение. **B).** Броевите запишани во второто, третото и четвртото квадратче гледано од лево кон десно ќе ги означиме со x, y и z соодветно. Тогаш од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} 10+x+y=100, \\ x+y+z=200, \\ y+z+130=300. \end{cases}$$

Ако ги собереме првата и третата равенка имаме

$$140+x+y+z+y=400, \text{ т.е. } 340+y=400.$$

Значи, во средното квадратче Барбара треба да го запише бројот $y=400-340=60$.

15. Броевите 2, 5, 7 и 12 се запишани на една страна од четирите карти, по еден број на секоја карта, а на другата страна од картите е запишано: „бројот е делив со 7“, „бројот е прост“, „бројот е непарен“ и

„бројот е поголем од 100“, по една реченица на секоја карта. Познато е дека бројот запишан на секоја од картите не соодветствува со тоа што е запишано на другата нејзина страна. Кој број е запишан на картата на која стои „бројот е поголем од 100“?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 12

E) не е можно да се определи

Решение. C). Да забележиме дека:

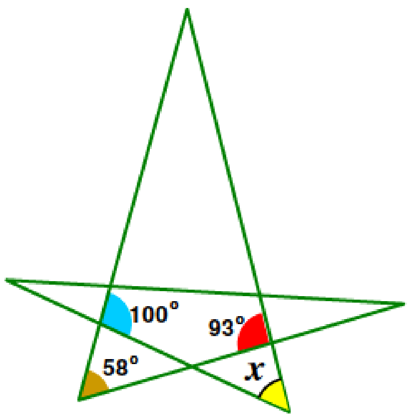
- исказот „бројот е делив со 7“, може да е запишан на картите со броевите 2, 5 или 12,
- исказот „бројот е прост“ може да е запишан само на картата со бројот 12,
- исказот „бројот е непарен“ може да е запишан на картите со броевите 2 или 12,
- исказот „бројот е поголем од 100“ може да е запишан на било која од картите.

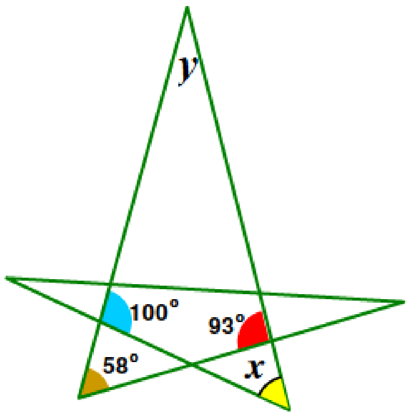
Сега, очигледно е дека на картата со број 12 е запишано „бројот е прост“, на картата 2 е запишано „бројот е непарен“, на картата со број 5 е запишано „бројот е делив со 7“ и на картата 7 е запишано „бројот е поголем од 100“.

16. Фигурата прикажана на цртежот е петокрака ѕвезда. Колку е вредноста на аголот означен со x ?

A) 35° B) 42° C) 51°

D) 65° E) 109°





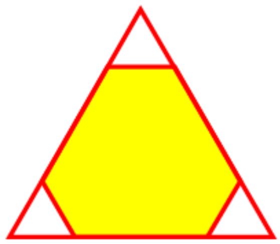
Решение. **C).** Ако горниот агол на петокраката ѕвезда го означиме со y (цртеж лево), тогаш

$$y = 180^\circ - (58^\circ + 93^\circ)$$
$$= 180^\circ - 151^\circ = 29^\circ.$$

Според тоа, за аголот x наоѓаме

$$x = 180^\circ - (100^\circ + 29^\circ)$$
$$= 80^\circ - 29^\circ = 51^\circ.$$

17. Од рамностран триаголник со страна 6 cm се отсечени три рамнострани триаголници, секој од кои содржи по едно теме од почетниот триаголник (види цртеж). Трите мали триаголници заедно имаат ист периметар како и жолтиот петаголник. Колку е должината на страната на малите триаголници?



A) 1 cm B) $1,2\text{ cm}$ C) $1,25\text{ cm}$ D) $1,5\text{ cm}$ E) 2 cm

Решение. **D).** Нека должината на страната на малите триаголници е x и должината на страните на петаголникот се x и y. Од условот на задачата имаме $3 \cdot 3x = 3x + 3y$, па затоа $6x = 3y$, т.е. $y = 2x$.

Бидејќи должината на страната на триаголникот е 6 cm добиваме $2x + 2x = 6$, односно $x = 1,5\text{ cm}$.

18. Глувците цел ден краделе кашкавал насечен на парчиња. Ги гледа мрзливиот мачор Дивко, кој го забележал следново: секое глувче украло различен број на парчиња, секое глувче украло помалку од 10 парчиња, и ниту едно глувче не украло двојно повеќе парчиња од друго глувче. Колку најмногу глувчиња можел да забележи Дивко?

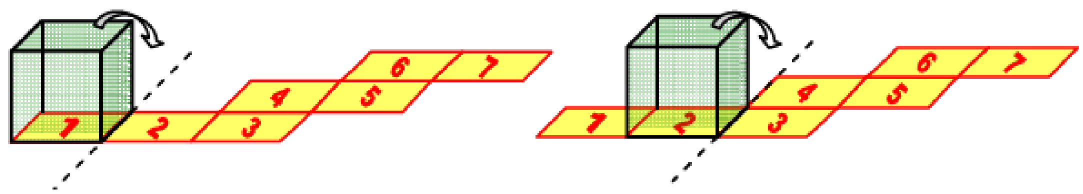
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. **C).** Не може да се истовремено украдени 1 и 2 парчиња кашкавал, 2 и 4 парчиња кашкавал, 4 и 8 парчиња кашкавал и 3 и 6 парчиња кашкавал. Значи, може да се украдени

$$2,3,5,7,8,9; \quad 2,5,6,7,8,9; \quad 1,3,4,5,7,9;$$
$$1,4,5,6,7,9; \quad 1,3,5,7,8,9; \quad 1,5,6,7,8,9.$$

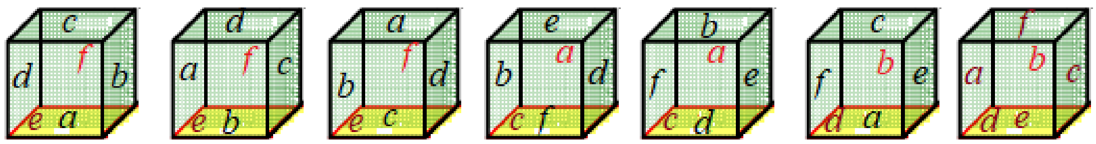
Според тоа, Дивко најмногу може да забележи 6 глувчиња.

19. Коцка тркаламе по рамнина, преку нејзините рабови. Нејзиниот долен ѕид ги зазема полињата 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 (види цртеж). Кои две полиња се заземени од ист ѕид на коцката?



A) 1 и 7 B) 1 и 6 C) 1 и 6 D) 2 и 7 E) 2 и 6

Решение. **B).** Во почетната положба предниот и задниот ѕид на коцката да ги означиме соодветно со e и f, а долниот, десниот, горниот и левиот ѕид соодветно со a,b,c и d.



При тркалањето коцката последователно ќе биде на ѕидовите a,b,c,f,d,a и e (предните ѕидови се означени со кафеав, задните со црвени, а другите со црни букви). Значи, ист ѕид ќе падне на полињата 1 и 6.

20. На аеродромот има хоризонтална подвижна лента долга $500\ m$, која се движи со брзина $4\ km/h$. Дарко и Маја во исто време згазнале на

лентата, при што Маја продолжила да оди со брзина $6\ km/h$, а Дарко само стоел на лентата. Колку метри била Маја пред Дарко кога таа ја напуштила лентата?

A) $100\ m$ B) $160\ m$ C) $200\ m$ D) $250\ m$ E) $300 m$

Решение. **E).** Дарко стои на подвижната лента, па растојанието од $500\ m$ го минува со брзина од $4\ km/h$. Маја продолжила да се движи со брзина од $(6+4)\ km/h = 10\ km/h$. Таа $500\ m$ ќе помине за

$$t = \frac{s}{v} = \frac{0,5}{10} = 0,05\ h,$$

и ќе ја напушти траката. За тоа време Марко ќе помине

$$s = vt = 4 \cdot 0,05 = 0,2\ km,$$

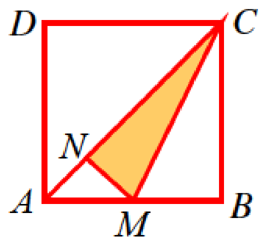
односно тој ќе помине $200\ m$. Значи, во моментот кога Маја ќе ја напушти подвижната лента, Дарко ќе заостане $300 m$.

21. Пабло има 5 коцки. Тој ги наредил по големина една над друга, од најголема до најмала и направила кула. Рабовите на две соседни коцки секогаш се разликуваат за $2\ cm$. Најголемата коцка има раб колку што е висината на кулата направена од двете најмали коцки. Колку е висината на кулата изградена од сите пет коцки?

A) $6\ cm$ B) $14\ cm$ C) $22\ cm$ D) $44\ cm$ E) $50\ cm$

Решение. **E).** Ако најмалата коцка има раб x cm, тогаш втората по големина коцка има раб $x+2\ cm$, третата по големина има раб $x+4\ cm$, четвртата по големина коцка има раб $x+6\ cm$ а најголемата коцка има раб $x+8\ cm$. Од условите на задачата имаме $x+(x+2) = x+8$ од каде добиваме $x = 6\ cm$. Според тоа, должините на рабовите на коцките се 6, 8, 10, 12 и 14 cm, па затоа висината на изградената кула е $6+8+10+12+14 = 50\ cm$.

22. Да се определи количникот од плоштините на триаголникот MNC и квадратот $ABCD$ ако M е средна точка на страната AB, а MN е нормална на AC?



A) $1:6$ B) $1:5$ C) $7:36$
D) $3:16$ E) $7:40$

Решение. **D).** Триаголникот MNA е рамнокрак правоаголен, а должините на неговите катети се четвртина од дијагоналата на квадратот. Според тоа, ако a е должината на страната на квадратот, тогаш $\overline{MN}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\overline{NC}=a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{4}=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Плоштината на триаголникот MNC е еднаква на $P_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4}=\frac{6a^2}{32}=\frac{3a^2}{16}$. Бидејќи плоштината на квадратот е $P_2=a^2$, имаме $\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{3a^2}{16}}{a^2}=\frac{3}{16}$, т.е. бараниот однос е $3:16$.

23. Танго се игра во парови, играат еден маж и една жена. На вечерниот танц имало не повеќе од 50 присутни. Во еден момент $\frac{3}{4}$ од мажите играле со $\frac{4}{5}$ од жените. Колку учесници на вечерниот танц танцувале во тој момент?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 32 E) 46

Решение. **B).** *Прв начин.* Нека x е бројот на мажите, а y е бројот на жените кои биле на вечерниот танц. Значи, $x+y\le 50$ и $\frac{3}{4}x=\frac{4}{5}y$, односно $x=\frac{16}{15}y$. Но, тогаш од условот $x+y\le 50$ добиваме $y+\frac{16}{15}y\le 50$. Значи, $15\,|\,y$, т.е. $y=15k$, за некој $k\in\mathbb{N}$ и затоа $15k+16k\le 50$. Од последното неравенство следува $k=1$, т.е. $y=15$, па затоа $x=16$.

Според тоа, танцувале $\frac{3}{4}\cdot 16=\frac{4}{5}\cdot 15=12$ мажи и исто толку жени, односно танцувале 24 учесници.

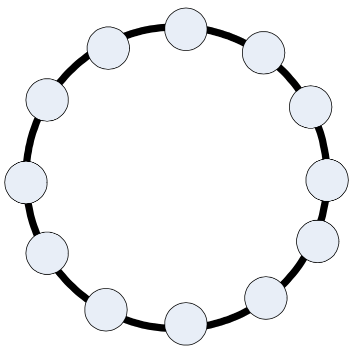
Втор начин. Бројот на мажите мора да е делив со 4, а бројот на жените мора да е делив со 5. Бараме ист број мажи и жени кои танцуваат, а вкупниот број на мажи и жени да е помал од 50.

Мажи	4	8	12	16	20	24	28	...
Танцуваат $\frac{3}{4}$	3	6	9	**12**	15	18	21	...

Жени	5	10	15	20	25	30	35	...
Танцуваат $\frac{4}{5}$	4	8	**12**	16	20	24	28	...

Значи, танцуваат 12 мажи и ист толкав број жени, т.е. 24 учесници.

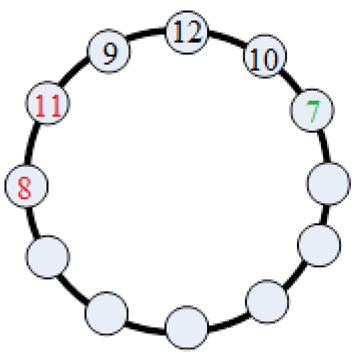
24. Броевите од 1 до 12 се запишани во кругчињата од цртежот, во секое кругче по еден број. Два соседни запишани бројчиња се разликуваат со 2 или 3. Кои од дадените парови броеви се соседи?

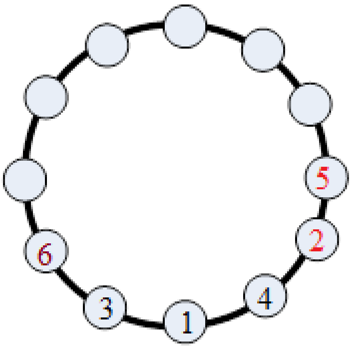


A) 5 и 8 B) 3 и 5 C) 7 и 9

D) 6 и 8 E) 4 и 6

Решение. D). Соседи на 12 може да само броевите 10 и 9. Понатаму, соседи на 11 може да се само 9 и 8. Сега, соседи на 10 може да се 12, 8 и 7. Но, бројот 8 е веќе запишан, па остаиува вториот сосед на 10 да е 7 (види цртеж десно). Според тоа, имаме единствен распоред на броевите 7, 8, 9, 10, 11 и 12.





Од друга страна соседи на 1 може да се само броевите 3 и 4. Понатаму, соседи на 2 може да се само 4 и 5. Сега соседи на 3 може да се 1, 5 и 6. Но, бројот 5 е веќе запишан, па останува вториот сосед на 3 да е 6 (види цртеж лево). Според тоа, имаме единствен распоред на броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Конечно од досегашните разгледувања следува дека соседи се уште броевите 6 и 8, како и броевите 5 и 7.

25. Еден трицифрен број го има својството: ако се избрише првата цифра се добива точен квадрат и ако се избрише последната цифра повторно се добива точен квадрат. Колку е збирот на сите такви трицифрени броеви?

A) 1014 B) 1177 C) 1465 D) 1993 E) 2016

Решение. D). Двоцифрени броеви кои се точни квадрати се 16, 25, 36, 49, 64, 81. Според тоа бараните трицифрени броеви се 164, 364, 816, 649. Нивниот збир е $164+364+816+649=1993$.

26. Во една книга се запишани 30 раскази. Должините на расказите се меѓусебно различни и имаат 1, 2, 3, 4, 5, …, 30 страници, во некој редослед. Секој расказ почнува од нова страница. Првиот расказ почнува од првата страница. Кој е најголемиот можен број на раскази кои почнуваат од непарна страница?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 23

Решение. E). Некој расказ ќе почне од непарна страница, ако пред него има парен број раскази со непарен број страници. За да бројот е максимален, секогаш треба да се пишуваат по две поглавја со непарни страни последователно. На тој начин ќе бидат напишани $8+15=23$

поглавја кои почнуваат на непарна страна. Еден таков пример е ако распоредот на запишани поглавја е следниот:

1, 3, **5,** 7, **9,** 11, **13,** 15, **17,** 19, **21,** 23, **25,** 27, **29,**

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.

27. Рамностран триаголник ротира околу неговиот центар: прво за 3°, па за 9° и така натаму (во n-тиот чекор ротира за $(3^n)^\circ$). Колку различни позиции ќе има триаголникот при ваквите ротации (вклучувајќи ја почетната позиција)?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 360

Решение. B). Триаголниците се добиваат со ротации за

$$3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k} = 3\cdot(1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k-1})$$
$$= 3\cdot\frac{(1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k-1})(3-1)}{3-1}$$
$$= 3\cdot\frac{3^{4k}-1}{2},$$
$$3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k+1} = 3\cdot\frac{3^{4k+1}-1}{2},$$
$$3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k+2} = 3\cdot\frac{3^{4k+2}-1}{2},$$
$$3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k+3} = 3\cdot\frac{3^{4k+3}-1}{2},$$

степени. Понатаму, за $i=0,1,2,3$ и за секој $k\in\mathbb{N}$ имаме

$$3\cdot\frac{3^{4(k+1)+i}-1}{2} - 3\cdot\frac{3^{4k+i}-1}{2} = 3^{4k+i}\cdot 120^\circ,$$

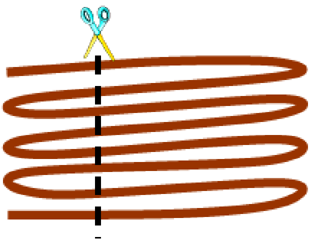
односно аглите со кои се добиваат $(4k+i)-$тиот и $4(k+1)+i-$тиот триаголник се разликуваат за цел број пати по 120°. Тоа значи дека овие два триаголника се совпаѓаат. Конечно, бидејќи првите четири триаголници се добиваат со ротации на почетниот триаголник за $3^\circ, 12^\circ, 39^\circ, 120^\circ$ заклучуваме тие се различни, односно дека при ваквите ротации триаголникот ќе има 4 различни позиции.

28. Едно јаже е превиткано на половина. Потоа пак на половина и на крај по трет пат на половина. Така превитканото јаже е пресечено напреку при што се добиени 9 делови. Две од добиените јажиња се со должини $4\ m$ и $9\ m$. Која од следните должини не може да е должината на јажето?

A) $52\ m$ B) $68\ m$ C) $72\ m$ D) $88\ m$

E) сите одговори се можни

Решение. **C).** Од условот на задачата пресеченото јаже ќе изгледаат како на цртежот. Според тоа по сечењето ќе има три вида на парчиња со должини $x, 2x, y$. Парчиња со должини y ќе има 4, со должини $2x$ ќе има 3, а со должини x ќе има 2. Вкупната должина на јажето е $2x+3\cdot 2x+4y$. Можни се следните случаи:



а) $x=4,\ y=9$. Тогаш

$$2x+3\cdot 2x+4y=2\cdot 4+3\cdot 8+4\cdot 9=8+24+36=68\ m$$

б) $x=9,\ y=4$. Тогаш

$$2x+3\cdot 2x+4y=2\cdot 9+3\cdot 18+4\cdot 4=18+54+16=88\ m$$

в) $2x=4,\ y=9$. Тогаш

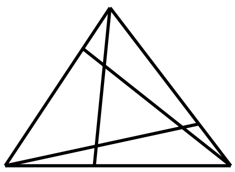
$$2x+3\cdot 2x+4y=4+3\cdot 4+4\cdot 9=4+12+36=52\ m,$$

г) $2x=9,\ y=4$. Тогаш

$$2x+3\cdot 2x+4y=9+3\cdot 9+4\cdot 4=9+27+16=52\ m.$$

Значи, јажето не може да биде долго $72\mathrm{m}$.

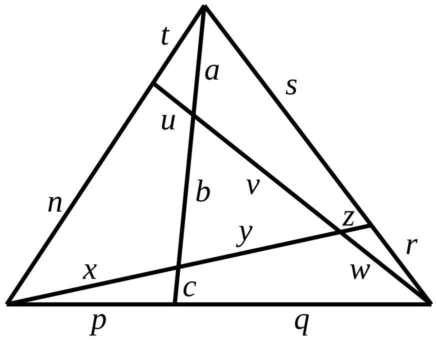
29. Еден триаголник со три отсечки е разделен на четири триаголници и три четириаголници. Збирот на периметрите на четириаголниците е $25\ \mathrm{cm}$. Збирот на периметрите на четирите делбени триаголници е $20\ \mathrm{cm}$.



Периметарот на почетниот триаголник е 19 cm . Колку е збирот на должините на трите делбени отсечки?

A) 11 cm B) 12 cm C) 13 cm

D) 15 cm E) 16 cm



Решение. Нека бараниот збир е L. Ако воведеме ознаки како на цртежот десно, од условот на задачата имаме:

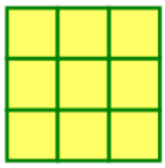
$$(a+v+z+s)+(y+c+q+w)+(x+b+u+n)=25$$
$$(p+c+x)+(w+r+z)+(a+t+u)+(y+v+b)=20$$
$$(p+q)+(r+s)+(t+n)=19\,.$$

Ако првите две равенки ги собереме, добиваме

$$2[(a+b+c)+(x+y+z)+(u+v+w)]+(s+q+n)+(p+r+t)=45$$

и ја искористиме третата равенка добиваме $2L+19=45$, т.е. $L=13$. Значи, бараниот збир е 13 cm .

30. Во полињата на 3×3 квадрат се запишани позитивни броеви така што производот на броевите во секој ред и секоја колона е еднаков на 1, а во секој 2×2 квадрат е еднаков на 2. Кој број е запишан во централниот квадрат?



A) 16 B) 8 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

Решение. A). Нека во полињата на квадратот се запишани броевите прикажани на цртежот десно. Тогаш

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$16=2\cdot2\cdot2\cdot2=(abde)\cdot(becf)\cdot(dgeh)\cdot(efhi)$$
$$=(abc)\cdot(def)\cdot(ghi)\cdot(beh)\cdot(def)\cdot e$$
$$=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot e=e$$

што значи дека во централното квадратче е запишан бројот 16.

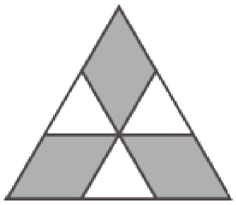
Kadett (осмо и деветто одделение) 2013

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

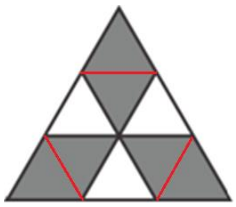
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. На цртежот е даден рамностран триаголник чија плоштина е 9. Со три прави паралелни со неговите страни секоја страна е поделена на три еднакви делови. Колку е плоштината на исенчениот дел од триаголникот?



A) 12 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. D). Ако секој од трите ромба го поделиме на два триаголника како на цртежот десно, гледаме дека големиот триаголник е составен од 9 складни рамнострани триаголници. Плоштината на еден од овие триаголници е 1. Значи плоштината на сивиот дел е 6.



2. Колку е вредноста на изразот $\frac{3333}{101}+\frac{6666}{303}$, ако $\frac{1111}{101}=11$.

A) 5 B) 9 C) 11 D) 55 E) 99

Решение. D). Имаме:

$$\frac{3333}{101}+\frac{6666}{303}=3\cdot\frac{1111}{101}+\frac{6}{3}\cdot\frac{1111}{101}=3\cdot 11+2\cdot 11=55.$$

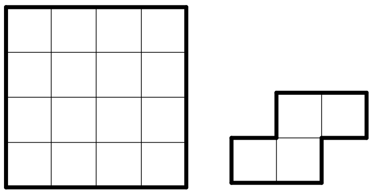
3. Масите на сол и чиста вода во морската вода во Протарас се во однос $7:193$. Колку килограми сол има во $1000\,kg$ морска вода?

A) 35 B) 186 C) 193 D) 200 E) 350

Решение. A). Бидејќи масите на солта и чистата вода се однесуваат како $7:193$, во $200\,kg$ морска вода има $7\,kg$ сол.

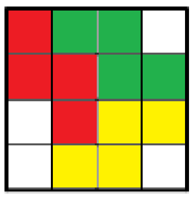
Сега, од $1000 = 5 \cdot 200$ заклучуваме дека во $1000\,kg$ има пет пати повеќе морска сол, односно има $35\,kg$ морска сол.

4. Ана има квадратно парче хартија прикажано на левиот цртеж. Сечејќи по линиите од парчето хартија таа сече копии од фигурата дадена на десниот цртеж (S-тетрамино). Кој е најмалиот број на квадратчиња што може да и преостанат на Ана, ако фигурите може да се вртат и превртуваат?



A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Решение. C). Ако Ана постави едно S-тетрамино на првата колона така што ќе ги покрие првите две полиња од првата колона, тогаш таа не може да постави друго S-тетрамино со кое ќе ги покрие другите две полиња од првата колона. Значи, Ана не може да ги покрие сите полиња на фигурата која има 16 полиња. Едно S-тетрамино покрива 4 полиња, па затоа Ана може да покрие најмногу 12 полиња, т.е. најмалку 4 полиња ќе останат непокриени. Еден пример за вакво покривање (сечење) е прикажан на цртежот десно.



5. Дијана и рекла на Јана да каже број чиј производ на цифри е 24. Колку е збирот на цифрите на најмалиот број што може да го каже Јана?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. E). Бидејќи $24=1\cdot 24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$ Јана може да каже еден од броевите 38, 83, 46 и 64. Значи, најмалиот број кој Јана може да го каже е 38 и збирот на неговите цифри е $3+8=11$.

6. Во една вреќа се наоѓаат топки со пет различни бои, со исти големина и маса. Две од нив се црвени, три се сини, десет се бели, четири се зелени и три се црни. Миле вади топки од вреќата, една по една, без да ги враќа и без да гледа во нив. Кој е најмалиот број на топки кои што тој треба да ги извади од вреќата за да меѓу нив има две топки со иста боја?

A) 2 B) 12 C) 10 D) 5 E) 6

Решение. E). Бидејќи имаме топки во 5 бои, ако Миле извади 5 топки, може да се случи сите да се со различни бои. Но, ако извади шест топки, тогаш од принципот на Дирихле следува дека две топки мора да се истобојни.

7. Јанко има пакетче со свеќи. Секоја од свеќите, откако ќе се запали, гори точно 40 min. Јанко на секои 10 min пали по една свеќа. Колку свеќи ќе горат по 55 min?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). За 55 min Јанко ќе запали 6 свеќи (во 1-та, 11-та, 21-та, 31-та, 41-та и 51-та минута). Од овие 6 свеќи 2 ќе се изгаснати (во 41-та и во 51-та минута). Значи, по 55 min ќе горат 4 свеќи.

8. Просечниот број на деца од пет семејства не може да биде:

A) 0,2 B) 1,2 C) 2,2 D) 2,4 E) 2,5

Решение. E). Бидејќи

$$5\cdot 0,2=1,\ 5\cdot 1,2=6,\ 5\cdot 2,2=11,\ 5\cdot 2,4=12$$

се природни броеви, а $5\cdot 2{,}5=12{,}5$ не е природен број заклучуваме дека просечниот број деца во пет семејства не може да биде 2,5.

9. Мартин и Јана стојат покрај кружна Фонтана дијаметрално спротивно еден на друг. Тие почнуваат да се движат едновремено во иста насока. Брзината на Мартин е $\frac{9}{8}$ од брзината на Јана. По колку круга Мартин ќе ја стигне Јана?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 2 E) 72

Решение. A). Разликата меѓу Мартин и Јана е половина круг. Мартин оди за $\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$ побрзо од Јана. Според тоа, Мартин ќе ја стигне јана по $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=4$ круга.

10. За природните броеви x, y и z се исполнети равенствата $x\cdot y=14$, $y\cdot z=10$ и $z\cdot x=35$. Колку е вредноста на $x+y+z$?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

Решение. C). Имаме

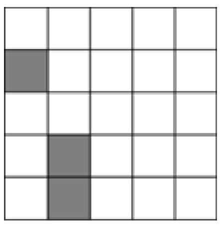
$$(x\cdot y)\cdot(y\cdot z)\cdot(z\cdot x)=14\cdot 10\cdot 35,\text{ т.е. } (x\cdot y\cdot z)^2=70^2,$$

од каде добиваме $x\cdot y\cdot z=70$. Сега

$$x=\frac{xyz}{yz}=7,\ y=\frac{xyz}{xz}=2 \text{ и } z=\frac{xyz}{xy}=5.$$

Значи, $x+y+z=14$.

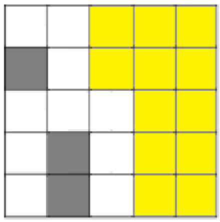
11. Андреј на квадратна 5×5 шема реди плочки (види цртеж). Андреј веќе има поставено две плочки, една квадратна и една правоаголна (како на цртежот). Тој сака да постави уште една 3×1 плочка, која треба да препокрие точно три единечни квадрати од квадратната шема. Две



плочки не смее да се допираат. На колку начини Андреј може да ја постави плочката?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

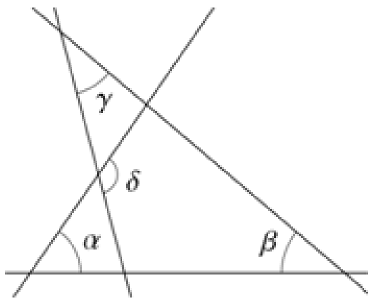
Решение. E). Андреј плочката 3×1 може да ја постави на полињата кои се обоени со жолта боја. Според тоа, тој во првиот ред може да ја постави на 1 начин, во вториот ред на 1 начин, во третата колона на 3 начини (најгоре, во средина и најдолу) и во четвртата колона на 3 начини (најгоре, во средина и најдолу). Значи, Андреј плочката 3×1 може да ја постави на $1+1+3+3=8$ начини.



12. На цртежот важи

$$\alpha=55^\circ,\ \beta=40^\circ \text{ и } \gamma=35^\circ.$$

Колку е вредноста на аголот δ?



A) 100° B) 105° C) 120°

D) 125° E) 130°

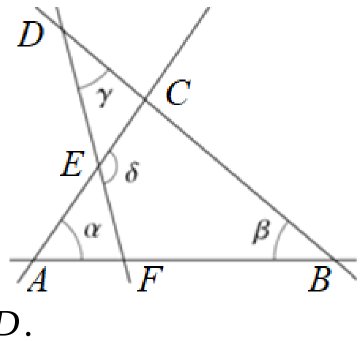
Решение. E). Да ги воведеме како на цртежот десно. Тогаш

$$\measuredangle ECD=\measuredangle ACD=180^\circ-85^\circ=95^\circ,$$

како надворешен агол во триаголникот ABC. Сега

$$\delta=\measuredangle FEC=180^\circ-50^\circ=130^\circ,$$

како надворешен агол во триаголникот ECD.



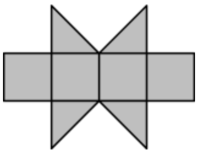
13. Периметарот на еден трапез е 5, а должините на неговите страни се природни броеви. Колку се големините на двата негови најмали агли?

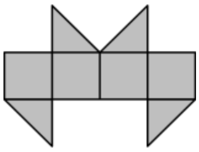
A) 30° и 30° B) 60° и 60° C) 45° и 45°

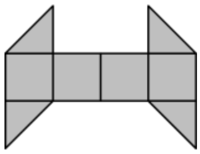
D) 30° и 60° E) 45° и 90°

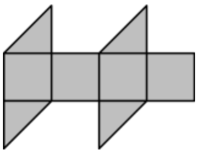
Решение. В). Нека $ABCD$ е дадениот трапез. Тогаш, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB}=2, \overline{BC}=1, \overline{CD}=1$ и $\overline{DA}=1$. Значи, $ABCD$ е рамнокрак трапез, па ако низ темето C повлечеме права паралелна со кракот AD таа ќе ја сече основата AB во точка E, при што триаголникот EBC ќе биде рамностран. Значи најмалите два агли на трапезот се по 60°.

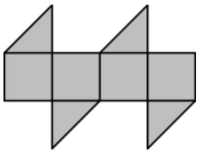
14. Која од дадените фигури не е мрежа на коцка?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. C). При превиткувањето по заедничките страни на квадратите кај фигурата C) долните два триаголници ќе се преклопат, што значи дека нема да формираат квадрат. Кај сите други фигури при превиткувањето горните триаголници формираат квадрат, а исто важи и за долните триаголници.

15. Пабло запишал неколку последователни природни броеви. Кој од следните проценти не може да биде процент на непарните броеви меѓу запишаните броеви?

A) 40 B) 45 C) 48 D) 50 E) 60

Решение. В). Меѓу броевите 2, 3, 4, 5, 6 имаме 2 непарни од 5 броја, па бројот на непарните броеви е 40% од вкупниот број броеви.

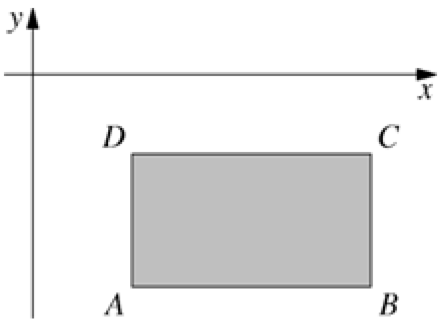
Меѓу броевите 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 имаме 12 непарни од 25 броја, па бројот на непраните броеви е 48% од вкупниот број броеви.

Меѓу броевите 2, 3 имаме 1 непарен од 2 броја, па бројот на непарните броеви е 50% од вкупниот број броеви.

Меѓу броевите 3, 4, 5, 6, 7 имаме 3 непарни од 5 броја, па бројот на непарните броеви е 60% од вкупниот број броеви.

Нека меѓу последователни природни броеви имаме 45% непарни и 55% парни броеви. Бидејќи $\text{NZD}(45,55)=5$, добиваме дека на секои $45:5=9$ непарни броеви треба да имаме $55:5=11$ парни броеви. Но, тоа се 20 последователни природни броеви меѓу кои има 10 парни и 10 непарни, што е противречност.

16. Страните на правоаголникот $ABCD$ се паралелни со координатните оски. Тој е под x-оската и десно од y-оската како што е прикажано на цртежот десно. Координатите на точките A, B, C и D се цели броеви. За секоја од нив е пресметан количникот $\frac{y}{x}$. Во која од четирите точки се добива најмала вредност?



A) A B) B C) C D) D

E) зависи од изборот на правоаголникот

Решение. A). Бидејќи $y<0$, количникот $\frac{y}{x}$ е најмал кога количникот $|\frac{y}{x}|$ е најголем. Количникот $|\frac{y}{x}|$ е најголем кога $|y|$ е најголем, а x е најмал. Најмал x и најголем $|y|$ има точката A.

17. Сите четирицифрени природни броеви кои имаат исти цифри со бројот 2013 се запишани на табла во растечки редослед. Која е најголемата разлика помеѓу два соседни броја запишани на таблата?

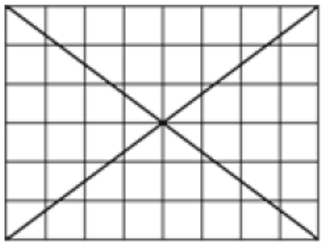
A) 702 B) 703 C) 693 D) 793 E) 198

Решение. A). Низата броеви кои се запишани е

1023,1032, 1203, 1230,1302, 1320, 2013, 2031, 2103,
2130, 2301, 2310, 3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210.

Јасно, најголемата разлика на два соседни броја е $3012-2310=702$.

18. Во правоаголна 6×8 шема (види цртеж), 24 од единечните квадрати не се пресечени со неговите дијагонали. Колку единечни квадрати нема да бидат пресечени од дијагоналите на 6×10 правоаголна шема?



A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

Решение. E). Една дијагонала сече 6 реда и 10 колони. Во секој ред и во секоја колона дијагоналата сече по 1 квадрат, при што квадратите кои се наоаѓат во темињата ги броиме и во редот и во колоната. Значи, една дијагонала сече $6+10-2=14$ квадрати. Двете дијагонали сечат 28 квадрати, па затоа нема да бидат пресечени $60-28=32$ квадрати.

19. Родендените на Ана, Бети, Кате, Данче и Ева, во некој редослед се на $20.02.2001$, $12.03.2000$, $20.03.2001$, $12.04.2000$ и $23.04.2001$. Ана и Ева се родени во ист месец. Исто така Бети и Кате се родени во ист месец. Ана и Кате се родени во ист ден но во различни месеци. Исто така, Данче и Ева се родени во ист ден но во различни месеци. Кое од овие девојчиња е најмладо?

A) Ана B) Бети C) Кате D) Данче E) Ева

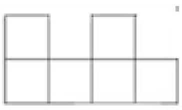
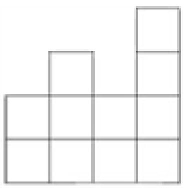
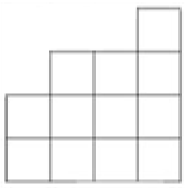
Решение. **В).** Исти месеци се во датите $12.03.2000$ и $20.03.2001$, односно во датите $12.04.2000$ и $23.04.2001$, па ова се соодветно родендените на Ана и Ева, односно на Бети и Кате, во некој распоред.
Понатаму, исти денови се во датите $12.03.2000$ и $12.04.2000$, како и во датите $20.02.2001$ и $20.03.2001$, па ова се родендените на Ана и Кате, односно на Данче и Ева, во некој распоред.
Во четирите парови се повторуваат девојчињата Ана, Ева и Кате и се повторуваат датите $12.03.2000$, $12.04.2000$ и $20.03.2001$. Од условот за месеците останува датата $23.04.2001$ и девојчето Бети, а од условот за деновите останува датата $20.02.2001$ и девојчето Данче. Според тоа, најмлада е Бети, која е родена на $23.04.2001$.
Забелешка. Ако се искористат добиените заклучоци лесно се добива дека Ана е родена на $12.03.2000$, Ева е родена на $20.03.2001$ и Кате е родена на $12.04.2000$.

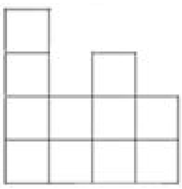
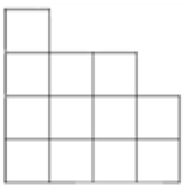
20. Андреј направил тело од единечни коцки поставувајќи ги една над друга над квадратчињата од квадратната шема со димензии 4×4. На дијаграмот е прикажан бројот на коцки поставени врз секој од единечните квадрати на квадратната шема. Кога Андреј ќе погледне од задната страна, што тој ќе види?

Задна страна

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

Предна страна

A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. C). Андреј во секоја колона ќе гледа кула чија висина е еднаква на најголемиот број коцки во колоната. Притоа бидејќи гледа од задната страна најголемите височини ќе бидат распоредени во обратен редослед. Значи, тој од лево кон десно ќе гледа кули високи 2, 3, 3 и 4 коцки.

21. Колку знаци од знакот за собирање (+) во неточното бројно равенство

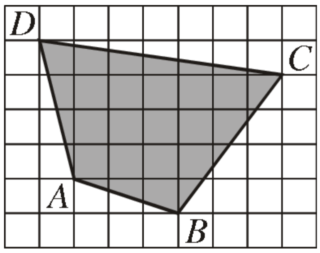
$$1+2+3+4+5=27$$

треба да се заменат со знакот за множење $(\cdot)$ за да се добие точно равенство?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) не е можно

Решение. B). Имаме $1+2\cdot 3+4\cdot 5=27$, што значи дека треба да се заменат два знаци за собирање со два знаци за множење.

22. На цртежот е прикажан исенчен четириаголник нацртан во квадратна мрежа. Секое квадратче од квадратната мрежа има страна $2\,cm$. Колку е плоштината на четириаголникот $ABCD$?



A) $96\,cm^2$ B) $84\,cm^2$ C) $76\,cm^2$ D) $88\,cm^2$ E) $104\,cm^2$

Решение. B). Четириаголникот $ABCD$ се наоѓа во правоаголник со должини на страни $5\cdot 2=10\,cm$ и $7\cdot 2=14\,cm$. Плоштината на овој правоаголник е $10\cdot 14=140\,cm^2$. Од оваа плоштина треба да ги одземеме плоштините на четири триаголници и еден квадрат и тие плоштини се:

$$P_1=\frac{6\cdot 2}{2}=6\,cm^2,\; P_2=\frac{6\cdot 8}{2}=24\,cm^2,\; P_3=\frac{14\cdot 2}{2}=14\,cm^2,$$

$$P_4=\frac{8\cdot 2}{2}=8\,cm^2 \text{ и } P_5=4\,cm^2.$$

Значи, плоштината на четириаголникот $ABCD$ е еднаква на

$$140-(6+24+14+8+4)=84\,cm^2.$$

23. Нека S е бројот на точни квадрати на природни броеви што се наоѓаат меѓу броевите 1 и 2013^6. Нека Q е бројот на точни кубови на природни броеви што се наоѓаат меѓу 1 и 2013^6. Тогаш

A) $S=Q$ B) $2S=3Q$ C) $3S=2Q$ D) $S=2013Q$ E) $S^3=Q^2$

Решение. D). Имаме $2013^6=(2013^3)^2$, па затоа $S=2013^3$. Од друга страна $2013^6=(2013^2)^3$, па затоа $Q=2013^2$. Според тоа,

$$S=2013^3=2013\cdot 2013^2=2013Q.$$

24. Пабло на табла запишал петцифрен број. Од него избришал една цифра и добил четирицифрен број. Збирот на петцифрениот и четирицифрениот број е 52713. Колку е збирот на цифрите на почетниот петцифрен број?

A) 26 B) 20 C) 23 D) 19 E) 17

Решение. C). Бидејќи збирот на петцифрениот и четирицифрениот број добиен со бришење на една цифра од петцифрениот број е непарен број, заклучуваме дека е избришана цифрата на единиците на петцифрениот број. Според тоа, ако петцифрениот број е $\overline{abcde}$, тогаш четирицифрениот број е $\overline{abcd}$. Затоа,

$$\overline{abcde}+\overline{abcd}=52713,$$
$$10\overline{abcd}+e+\overline{abcd}=52713,$$
$$11\overline{abcd}+e=11\cdot 4792+1,$$

од каде следува $\overline{abcd}=4792$ и $e=1$. Значи, петцифрениот број е 47921 и збирот на неговите цифри е $4+7+9+2+1=23$.

25. Во алеата покрај булеварот, Мартин садел јавори и липи. Тој посадил дваесет садници. Кој е максималниот број на јавори што тој ги засадил, ако меѓу два засадени јавори немало три дрва?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Решение. C). Нека засадените дрва ги нумерираме од почетокот кон крајот на алеата редоследно со броевите од 1 до 20. Бидејќи меѓу било кои два јавора не смее да има три дрва разликите меѓу броевите со кои се нумерирани јаворите мора да се различни од 4.

Нека се засадени k јавори и истите нека се означени со броевите $a_i, i=1,2,...,k$. Да ги разгледаме броевите $a_i, b_i = a_i + 4, i=1,2,...,k$. Тоа се $2k$ броеви кои припаѓаат на множеството $\{1,2,...,23,24\}$. Сега, ако $k=13$, тогаш од принципот на Дирихле следува дека меѓу броевите $a_i, b_i, i=1,2,...,13$ постојат два кои се еднакви меѓу себе. Но, броевите $a_i, i=1,2,...,13$ се различни меѓу себе, а исто важи и за броевите, па затоа постојат m и n такви што $a_m = b_n = a_n + 4$, односно $a_m - a_n = 4$, што е противречност. Од добиената противречност следува $k \le 12$. Пример на алеа со 12 јавори е: **J J J J Л Л Л Л J J J J Л Л Л Л J J J J.**

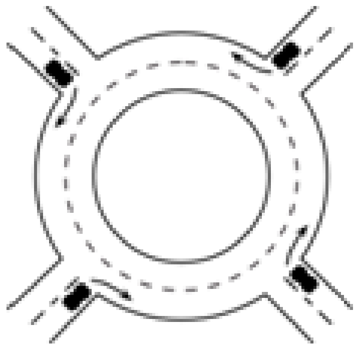
26. Матеј и Мартин учествувале на една маратонска трка. Откако трката завршила тие забележале дека Мартин завршил пред двојно повеќе маратонци од оние што завршиле пред Матеј, а Матеј завршил пред 1,5 пати повеќе маратонци од оние што завршиле пред Мартин. Мартин завршил на 21-вото место. Колку вкупно маратонци уче-ствувале во трката?

A) 31 B) 41 C) 51 D) 61 E) 81

Решение. B). По Мартин биле $2a$, а пред Матеј биле a маратонци. По Матеј биле $1{,}5b$, а пред Мартин биле b маратонци. Мартин бил 21-ви, па затоа $b=20$. Понатаму, $2a+b=a+1{,}5b$, од каде добиваме

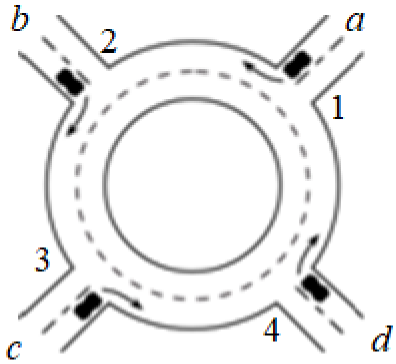
$a = 0,5b = 10$. Конечно, во трката учествувале вкупно $2a + b + 1 = 41$ маратонец.

27. Четири автомобил во исто време се вклучуваат во кружен тек од четири различни различни насоки, како што е прикажано на цртежот десно. Секој автомобил го напушта кружниот тек пред да направи цел круг и никои два автомобила не го напуштаат кружниот тек од ист излез. На колку различни начини автомобилите можат да го напуштат кружниот тек?



A) 9 B) 12 C) 15 D) 24 E) 81

Решение. **A).** Автомобилите да ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4, а правците кои влегуваат (излегуваат) од кружниот тек со a,b,c,d. Бидејќи секој автомобил прави помалку од цел круг во начините за излез на сите автомобили од кружниот тек не смее да се појават комбинациите $1a, 2b, 3c, 4d$. Понатаму, четирите автомобили излегуваат од четири различни излези, па затоа во секој начин на излез мора да се појават сите броеви 1, 2, 3, 4 и сите букви a,b,c,d. Така, сите начини за излез од кружниот тек се:



$$(1b,2c,3d,4a),\ (1b,2d,3a,4c),\ (1b,2a,3d,4c),$$
$$(1c,2a,3d,4b),\ (1c,2d,3a,4b),\ (1c,2d,3b,4a),$$
$$(1d,2a,3d,4b),\ (1d,2c,3a,4b),\ (1d,2c,3b,4a).$$

Значи, вкупно имаме 9 начини за излез на автомобилите од круж-ниот тек.

28. Филип на табла ги запишал броевите $1,-1,-1,1,-1,$. По петтиот запишан број тој продолжил да запишува броеви, при што секој нареден број е производ на претходните два запишани броја. Колку е збирот на првите 2013 запишани броеви?

A) -1006 B) -671 C) 0 D) 671 E) 1007

Решение. B). Да запишеме неколку членови на низата:

$$\underline{1,-1,-1},\underline{\underline{1,-1,-1}},\underline{1,-1,-1},\underline{\underline{1,-1,-1}},\underline{1,-1,-1},\dots \qquad (1)$$

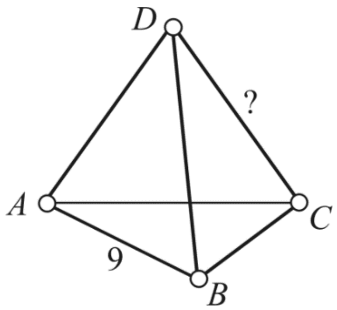
Забележуваме дека ако членовите на низата последователно ги групираме во тројки, тогаш збирот на броевите во секој тројка е -1. Сега, бидејќи $2013:3=671$, т.е. имаме 671 тројка чиј збир е -1, заклучуваме дека бараниот збир е -671.

Забелешка. Дека навистина се добива низата (1) може да се докаже со помош на математичка индукција. Навистина, нека низата е a_i, $i=1,2,3,\dots$. Тогаш $a_1=1, a_2=-1, a_3=-1$, т.е. првата тројка е од дадениот вид. Нека претпоставиме дека $k-$тата тројка е од дадениот вид, т.е. $a_{3k+1}=1, a_{3k+2}=-1, a_{3k+3}=-1$. Тогаш за $(k+1)-$та тројка имаме

$$a_{3(k+1)+1}=a_{3k+2}a_{3k+3}=(-1)\cdot(-1)=1,$$
$$a_{3(k+1)+2}=a_{3k+3}a_{3(k+1)+1}=(-1)\cdot 1=-1,$$
$$a_{3(k+1)+3}=a_{3(k+1)+1}a_{3(k+1)+2}=1\cdot(-1)=-1.$$

Сега, од принципот на математичка индукција следува дека сите тројки се од дадениот вид.

29. Во секое од четирите темиња и секој од шесте рабови на еден тетраедар е запишан еден од десетте броеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11. Секој број е запишан еднаш. За секои две темиња на



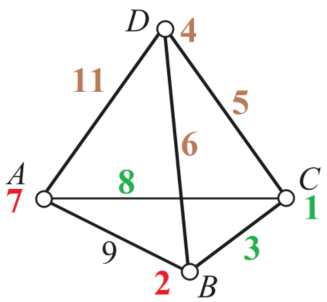
тетраедарот збирот на броевите запишани во нив е еднаков на бројот запишан во работ чии краеви се тие. На работ AB е запишан бројот 9 (види цртеж). Кој број е запишан на работ CD?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 11

Решение. **B).** Бројот 8 не може да е запишан во теме, бидејќи тогаш тој број собран со броевите запишани во другите три темиња би дал три збира поголеми од 8, а ние имаме само два такви броја (9 и 11).

Ако бројот 7 е запишан во некое од темињата C или D, тогаш ќе добиеме четири збира кои се поголеми од 7, а ние имаме само три такви броја (8, 9 и 11). Значи, бројот 7 може да е запишан во некое од темињата A или B.

Заради симетрија доволно е да го разгледаме само случајот кога бројот 7 е запишан во темето A. Тогаш во темето B е запишан бројот 2. Понатаму, во едно од темињата C или D мора да е запишан бројот 1. Заради симетрија доволно е да го разгледаме само случајот кога бројот 1 е запишан во темето C. Тогаш на работ BC е запишан бројот бројот 3. Тоа значи дека во темето D мора да е запишан бројот 4. Според тоа, на работ CD е запишан бројот 5. Целосната конфигурација е дадена на цртежот десно.



Понатаму, од $9=6+3$ добиваме дека во темињата A или B може да се запишани броевите 3 и 6. Но, тогаш во другите две темиња мора да се запишани броевите 1 и 2, па на работ кој ги поврзува мора да е бројот 3, што не е можно, бидејќи бројот 3 е веќе запишан.

Слично, од $9=5+4$ добиваме дека во темињата A и B може да се запишани броевите 4 и 5. Но, тогаш во другите две темиња мора да се броевите 1 и 2. Сега на работ кој кој ги поврзува 1 и 4 е бројот 5, што не е можно бидејќи бројот 5 е веќе запишан.

Значи, единствена можност е на работ CD да е запишан бројот 5.

30. На еден остров имало 2013 жители. Некои од нив се витези, а останатите се лажговци. Витезите секогаш ја зборуваат вистината, а лажговците секогаш лажат. Секој ден еден од жителите велел: По моето заминување од островот, бројот на витези на островот ќе биде ист со бројот лажговци, и потоа заминувал од островот. По 2013 искажувања сите жители на островот заминале. Колку од нив биле лажговци?

A) 0 B) 1006 C) 1007 D) 2013

E) не е можно да се определи

Решение. **B).** Бидејќи по 2013 кажувања сите жители на островот заминале, т.е. останале 0 жители, последниот жител кој заминал бил витез. Јасно, претпоследниот жител кој заминал не може да биде витез, бидејќи ако е витез, тогаш ќе останел само еден жител, а витезите не лажат. Понатаму, пред да останат 2 жители, лицето кое заминало мора да е витез, а пред да останат три жители лицето кое заминало мора да е лажго. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека од назад последователно заминувал: витез, лажго, витез, лажго, витез итн. што значи дека на островот имало 1007 витези и 1006 лажговци.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2014

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

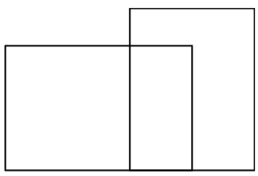
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Секоја година меѓународниот математички натпревар Кенгур без граници се одржува во третиот по ред четврток во месец март. Кој е последниот датум во кој може да се одржи натпреварот во некоја година?

   A) 14 март B) 15 март C) 20 март D) 21 март E) 22 март

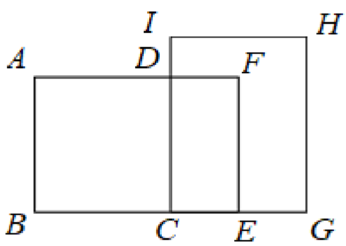
   Решение. D). Третиот четврток е на најкасниот датум во месецот ако првиот четврток е на најкасниот датум во месецот. Првиот четврток најкасно може да е на 7 март. Според тоа, вториот четврток најкасно е на 14 март и третиот четврток најкасно е на 21 март.

2. Колку четириаголници се прикажани на цртежот десно?

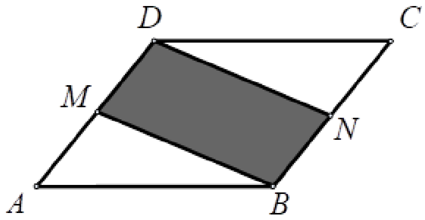


   A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

   Решение. D). При ознаки како на цртежот десно четириаголници на дадениот цртеж се: $ABCD, ABEF, DCEF, ICFH$. Според тоа, на дадениот цртеж има 4 четириаголници.

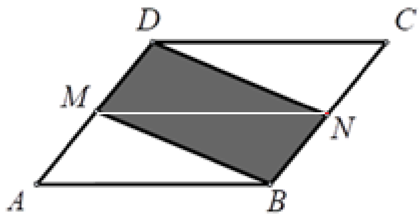


3. Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е 10. Точките M и N се средини на страните AD и BC, соодветно. Колку е плоштината на четириаголникот $MBND$?



A) 0,5 B) 5 C) 2,5 D) 7,5 E) 10

Решение. B). Отсечката MN поврзува средни на две спротивни страни на паралелограмот $ABCD$, па затоа таа е паралелна со другите две страни. Тоа значи дека четириаголниците $ABNM$ и $MNCD$ се складни паралелограми, чии дијагонали DN и MB ги делат на по два складни триаголници. Затоа $P_{MBND}=\frac{1}{2}P_{ABNM}+\frac{1}{2}P_{MNCD}=\frac{1}{2}P_{ABCD}=5$.



4. Колку е вредноста на бројниот израз: $2014\cdot 2014:2014-2014$?

A) 0 B) 1 C) 2013 D) 2014 E) 4028

Решение. A). Имаме

$$2014\cdot 2014:2014-2014=\frac{2014\cdot 2014}{2014}-2014=2014-2014=0.$$

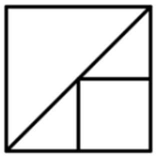
5. Производот на два броја е 36, а нивниот збор е 37. Колку е апсолутната вредност на нивната разлика?

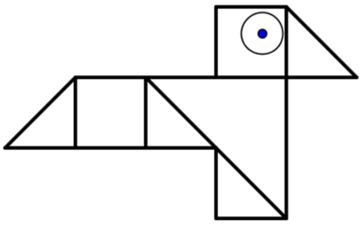
A) 1 B) 4 C) 10 D) 26 E) 35

Решение. E). За апсолутната ведност на разликата на двата броја добиваме

$$\begin{aligned}|x-y|&=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{x^2-2xy+y^2}=\sqrt{x^2+2xy+y^2-4xy}\\&=\sqrt{(x+y)^2-4xy}=\sqrt{37^2-4\cdot 36}=\sqrt{37^2-2^2\cdot 6^2}\\&=\sqrt{(37-12)(37+12)}=\sqrt{25\cdot 49}=\sqrt{5^2\cdot 7^2}=5\cdot 7=35.\end{aligned}$$

6. Темјана има неколку квадратни парчиња со плоштина 4. Таа сече неколку од нив на квадрати и правоаголни триаголници како што е прикажано на цртежот десно.





Темјана употребила неколку од нив и направила птица како на цртежот лево. Колку е плоштината на птицата?

A) 3 B) 4 C) $\frac{9}{2}$ D) 5 E) 6

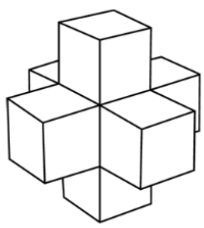
Решение. **E).** При правењето на птицата се употребени сите делови добиени од едно парче и мал квадрат и два мали триаголника од друго парче хартија. Значи, при правењето на птицата се употребени 1,5 парчиња хартија, па затоа плоштината на птицата е $4 \cdot 1{,}5 = 6$.

7. Една кофа е до половина полна со вода. Во неа се додадени уште $2\,l$ вода, по што кофата е $\frac{3}{4}$ полна со вода. Колку вода собира кофата?

A) $10\,l$ B) $8\,l$ C) $6\,l$ D) $4\,l$ E) $2\,l$

Решение. **B).** Додадените $2\,l$ се $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ од волуменот на кофата. Значи, волуменот на кофата е $4 \cdot 2 = 8\,l$.

8. Мето изградил фигура од седум единечни коцки како што е прикажано на цртежот десно. Уште колку коцки тој мора да употреби за да направи коцка со должина на раб 3.



A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Решение. **E).** *Прв начин.* Коцка со должина на раб 3 содржи $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ единечни коцки. Значи, Мето треба да употреби уште $27 - 7 = 20$ коцки.

Втор начин. За првиот ред се потребни 8 коцки, за вториот ред 4 коцки и за третиот ред 8 коцки. Значи, Мето треба да употреби уште $8+8+4=20$ коцки.

9. Кој од дадените производи има најголема вредност?

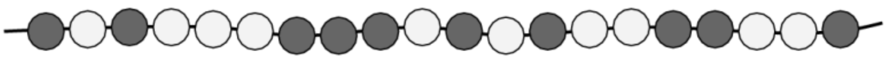
A) $44\cdot777$ B) $55\cdot666$ C) $77\cdot444$ D) $88\cdot333$ E) $99\cdot222$

Решение. B). Имаме

$$\begin{aligned}44\cdot777&=4\cdot11\cdot7\cdot111=28\cdot11\cdot111,\\55\cdot666&=5\cdot11\cdot6\cdot111=30\cdot11\cdot111,\\77\cdot444&=7\cdot11\cdot4\cdot111=28\cdot11\cdot111,\\88\cdot333&=8\cdot11\cdot3\cdot111=24\cdot11\cdot111,\\99\cdot222&=9\cdot11\cdot2\cdot111=18\cdot11\cdot111.\end{aligned}$$

Најголема вредност има производот кој има најголем множител различен од 11 и 111, а тоа е производот $55\cdot666$.

10. Еден ѓердан е направен од црни и бели бисери. Катерина сака да земе точно 5 црни бисери од него. Но таа може да зема бисери почнувајќи од краевите на герданот, со ред, па мора да зема и бели бисери. Кој е најмалиот број на бели бисери кои таа мора да ги земе?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Ако ги земе два црни бисери од краевите на ѓерданот Катерина нема да земе ниту еден бел бисер. Сега, ако го земе белиот бисер на левата страна, ќе може да земе 1 црн бисер, па досега има земено $2+1=3$ црни бисери. Треба да земе уште 2 црни бисери, па затоа најмал број бели бисери ќе земе ако таа прво ги земе двата бели бисери на десната страна, а потоа двата црни бисери на истата страна. Така Катерина ќе земе $1+2=3$ бели и $3+2=5$ црни бисери.

11. Даниел и Дијана во исто време почнале да земаат часови по пијано и тоа Даниел двапати седмично, а Дијана секоја втора седица. Даниел посетил 15 часови повеќе од Дијана. Колку седмици тие оделе на часови?

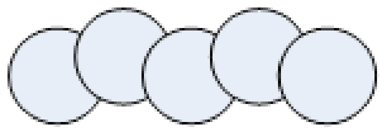
A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

Решение. E). Имаме:

- по I седмица Даниел посетил 2 часа, а Даниела 0 часови,
- по II седмица Даниел посетил 4 часови, а Даниела 1 час,
- по IV седмица Даниел посетил 8 часови, а Даниела 2 часа,
- по VI седмица Даниел посетил 12 часови, а Даниела 3 часови,
- по VIII седмица Даниел посетил 16 часови, а Даниела 4 часови,
- по X седмица Даниел посетил 20 часови, а Даниела 5 часови.

Значи, Даниел и Дијана на часови оделе X седмици.

12. На дадениот цртеж плоштината на секој круг е $1\,cm^2$. Плоштината на заедничкиот дел на било кои два круга е $\frac{1}{8}\,cm^2$. Колку е плоштината на фигурата?



A) $4\,cm^2$ B) $\frac{9}{2}\,cm^2$ C) $\frac{35}{8}\,cm^2$ D) $\frac{39}{8}\,cm^2$ E) $\frac{19}{4}\,cm^2$

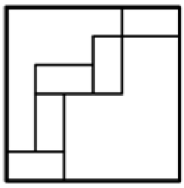
Решение. B). Вкупната плоштина на петте круга е $5\,cm^2$. Притоа имаме 4 поклопувања и со секое поклопување вкупната плоштина се намалува за $\frac{1}{8}\,cm^2$. Значи, плоштината на фигурата е $5-4\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{2}\,cm^2$.

13. Оваа година бабата, нејзината ќерка и нејзината внука заедно имаат 100 години. Нивните возрасти се степени на бројот 2. Колку години има внуката?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Решение. **C).** Степените на бројот 2 се: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... Притоа $64+32+4=100$. Значи, внуката има 4 години.

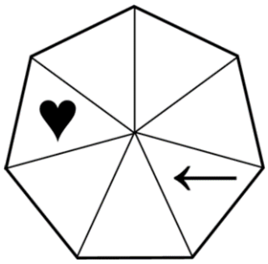
14. Пет еднакви правоаголници се ставени во внатрешноста на квадрат со страна $24\,\mathrm{cm}$, како што е прикажано на цртежот. Колку е плоштината на еден таков правоаголник?



A) $12\,cm^2$ B) $16\,cm^2$ C) $18\,cm^2$ D) $24\,cm^2$ E) $32\,cm^2$

Решение. **E).** Со x да ја означиме пократката, а со y подолгата страна на правоаголниците. Тогаш $2x+2y=24$ и $3y=24$, од каде наоѓаме $y=8, x=4$. Значи, плоштината на правоаголникот е еднаква на $4\cdot 8=32\,cm^2$.

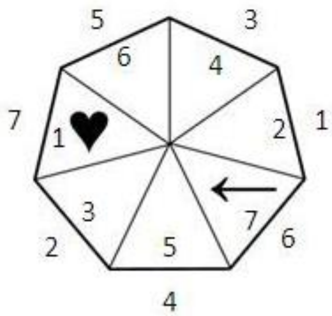
15. Правилен седумаголник е разделен на седум меѓусебно складни триаголници. Во еден од нив има стрелка а во друг има срце (види цртеж). Во исто време ги поместуваме и стрелката и срцето на следниот начин: срцето за три последователни триаголници во насока на движењето на стрелките на часовникот, а стрелката за четири последователни триаголници во насока обратна од движењето на стелките на часовникот. По колку такви поместувања тие првпат ќе се најдат во почетните положби?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

E) тоа никогаш нема да се случи

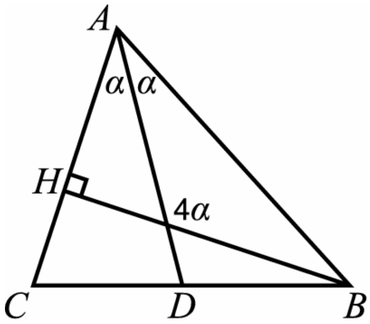
Решение. **A).** *Прв начин*. На цртежот десно броевите внатре во фигурата го означуваат движењето на стрелката, а оние надвор дви-



жењето на срцето. Значи, потребни се 7 чекори.

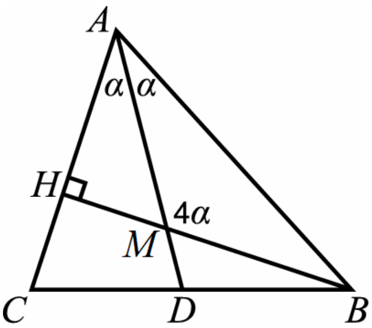
Втор начин. Бидејќи $\mathrm{NZD}(7,3) = \mathrm{NZD}(7,4) = 1$ и срцето и стрелката најрано по 7 чекори може да се најдат во почетната положба.

16. На цртежот BH е висина спуштена од темето B, а AD е симетрала на аголот во темето A на триаголникот ABC. Тапиот агол меѓу BH и AD е четири пати поголем од аголот $\measuredangle DAB$. Колку е мерката на аголот $\measuredangle CAB$?



A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

Решение. C). Пресекот на висината и симетралата да го означиме со M. Во триаголникот BMA аголот при темето B да го означиме со β_1. Тогаш $5\alpha + \beta_1 = 180^\circ$. Во триаголникот ABH важи $2\alpha + \beta_1 = 90^\circ$. Од последните две равенки добиваме $\alpha = 30^\circ$, па затоа $\measuredangle DAB = 2\alpha = 60^\circ$.



17. Шест момчиња живеат во ист стан во кој има две купатила. Секое од нив наутро користи едно од купатилата и тоа еднаш. Со користење на купатилата почнуваат точно во $07:00$ часот, и тие остануваат по 8, 10, 12, 17, 21 и 22 минути, соодветно. Кое е најкраткото време во кое тие може да завршат со користење на купатилата наутро?

A) $07:45$ B) $07:46$ C) $07:47$ D) $07:48$ E) $07:50$

Решение. B). Вкупното време на користење на купатилата е

$$8+10+12+17+21+22=90\text{ min}.$$

Бидејќи имаме две купатила, просечното време е $45\min$. Значи, за да го добиеме најкраткото време, потребно е времињата да поделиме на два збира со најмала разлика. Очигледно тие збирови се

$$22+12+10=44 \text{ и } 21+17+8=46.$$

18. Еден правоаголникот има страни $6\,cm$ и $11\,cm$. Во краевите на една од подолги страни на правоаголникот се повлечени симетрали на неговите агли. Тие ја делат другата подолгата страна на три дела. Колку се должините на тие делови?

A) $1\,cm, 9\,cm, 1\,cm$ B) $2\,cm, 7\,cm, 2\,cm$ C) $3\,cm, 5\,cm, 3\,cm$

D) $4\,cm, 3\,cm, 4\,cm$ E) $5\,cm, 1\,cm, 5\,cm$

Решение. E). Секоја симетрала на агол на подолгата страна формира рамностран правоаголен триаголник со катета $6\,cm$. Двете катети кои припаѓаат на спротивната страна се преклопуваат за $1\,cm$. Значи, другата страна е поделена на три дела со должини $5\,cm, 1\,cm, 5\,cm$.

19. Капетанот Спероу и неговите пирати откопале златници на островот на богатството. Тие ги поделиле златниците меѓу себе на еднакви делови. Ако имало четири пирати помалку, тогаш останатите пирати би добиле по 10 златници повеќе. Ако пак имало 50 златници помалку, секој пират би добил по 5 златници помалку. Колку златници капетанот Спероу и неговите пирати откопале на островот на богатството?

A) 80 B) 100 C) 120 D) 150 E) 250

Решение. D). Бројот на пиратите да го означиме со x, со y бројот на златниците кои ги добил секој пират, а со z вкупниот број златници. Од условот на задачата следува

$$\begin{cases} xy = z, \\ (x-4)(y+10) = z,. \\ x(y-5) = z \end{cases}$$

Решение на дадениот систем равенки $x = 10,\ y = 15,\ z = 150$.

20. Средната вредност на два позитивни броја е 30% помала од едниот од нив. Колку проценти средната вредност е поголема од другиот број?

A) 75% B) 70% C) 30% D) 25% E) 20%

Решение. A). Нека дадените броеви се x и y. Нека средната вредност на двата броја е 30% помала од бројот x. Тоа значи дека

$$\frac{x+y}{2} = 0,7x.$$

Сега имаме $y = 0,4x$, од каде добиваме

$$1,4y = 0,4x + 0,4y$$
$$1,75y = \frac{x+y}{2},$$

што значи дека средната вредност на двата броја е 75% поголема од вториот број.

21. Сара броевите од 1 до 9 ги запишала во единечните квадратчиња од 3×3 квадратна шема, во секое квадратче по еден број. На почетокот таа ги запишала броевите 1, 2, 3 и 4 како што е прикажано на цртежот. Два броја се соседни ако тие се запишани во квадратиња кои имаат заедничка страна. По запишувањето на сите броеви, таа забележала дека збирот на соседите на бројот 9 е 15. Колку е збирот на соседите на бројот 8?

1		3
2		4

A) 12 B) 18 C) 20 D) 26 E) 27

Решение. E). Бројот 9 не може да е во централното квадратче, бидејќи тогаш негови соседи ќе се броевите 5, 6 7 и 8, па збирот ќе биде 26. Понатаму, ако во централното квадратче е запишан бројот a, тогаш треба бројот a собран со два од броевите 1, 2, 3 и 4 да даде збир 15. Тоа е можно само ако $a = 8$ и другите два броја се 3 и 4. Значи, бројот 9 е меѓу броевите 3 и 4, а средниот број е бројот 8. Соседни на бројот 8 се 5, 6, 7 и 9, а нивниот збир е $5+6+7+9=27$.

22. Една вага не работи правилно. Ако мериме маса поголема или еднаква на 1000 g таа може да ја покаже било која вредност поголема од 1000 g. Ако мериме маса помала од 1000 g таа ја покажува точната вредност. Димитар има пет тегови кои имаат $A\,g, B\,g, C\,g, D\,g, E\,g$. Мерејќи ги по парови тој добил:

$$B+D=1200\ g,\ C+E=2100\ g,\ B+E=800\ g,$$

$$B+C=900\ g \text{ и } A+E=700\ g.$$

Кој тег има најголема маса?

A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. D). Од $B+E=800$ и $B+C=900$ седува $C=E+100$, па затоа $C>E$. Од $B+E=800$ и $A+E=700$ следува $B>A$.

Важи $B=800-E$ и $B+D>1000$, па затоа $800-E+D>1000$, т.е. $D>200+E$, односно $D>E$.

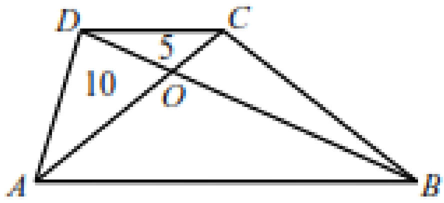
Понатаму, од $B=900-C$ и $B+D>1000$ следува $900-C+D>1000$, односно $D>C+100$, што значи $D>C$.

Со собирање на неравенствата $D>200+E$ и $D>C+100$, и ако се искористи дека $C+E>1000$, добиваме $2D>300+E+C>1300$, т.е. $D>650$.

Досега видовме дека $B>A$, $D>C>E$ и затоа доволно е уште да ги споредиме B и D. Ако $B\ge D$, тогаш $B>650$. Оттука добиваме $E=800-B<150$ и $C=900-B<250$, па затоа $C+E<400$, а треба $C+E\ge 1000$. Значи, $D>B$.

Конечно, $D>B>A$ и $D>C>E$, т.е. најголема маса има тегот D.

23. Даден е трапез $ABCD$ во кој пресечната точка на дијагоналите е означена со O. Определи ја плоштината на трапезот ако плоштините на триаголниците AOD и COD се 10 и 5 соодветно.



A) 60 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

Решение. **B).** Јасно, плоштините на триаголниците ACD и BCD се еднакви, па затоа плоштината на триаголникот BCO е еднаква на 10. Понатаму, од $P_{AOD}=10$ и $P_{COD}=5$, бидејќи триаголниците AOD и COD имаат заедничка висина повлечена од темето D следува $\overline{AO}:\overline{CO}=10:5=2$.

Но, триаголниците ABO и CDO имаат еднакви агли (Зошто?), па затоа тие се слични со коефициент на сличност 2. Од оваа сличност следува $P_{ABO}=2^2 P_{CDO}=20$. Конечно,

$$P_{ABCD}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CDO}+P_{DAO}=20+10+5+10=45.$$

24. Симона и Маја се натпреварувале во решавање на задачи. Тие добиле ист лист со задачи. За секоја задача девојчето кое прво ќе ја реши задачата добива по 4 поени, а другото девојче добивала по 1 поен. Секое девојче решило по 60 задачи, и заедно освоиле 312 поени. Колку исти задачи тие решиле?

A) 53 B) 54 C) 55 D) 56 E) 57

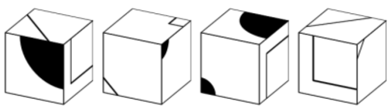
Решение. **D).** Со x да го означиме бројот на задачите кои ги решиле двете девојчиња. За овие задачи тие освоиле $5x$ поени. За преостанатите $60-x$ задачи секое девојче освоило по $4(60-x)$ поени. Според тоа, $5x+8(60-x)=312$, од каде добиваме $x=56$.

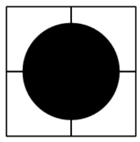
25. Дамјан со својот велосипед се враќал од Куманово дома во Скопје. Тој требало да пристигне дома точно во 15:00 часот. Притоа за $\frac{2}{3}$ од планираното време тој поминал $\frac{3}{4}$ од вкупниот пат. Потоа, ја намалил својата брзина на преостанатиот дел од патот и стигнал дома точно на време. Колку е односот на брзините со кои возел Дамјан на првиот и вториот дел од патот?

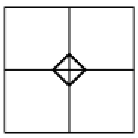
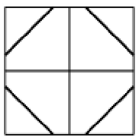
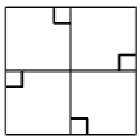
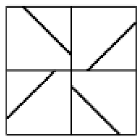
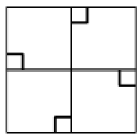
A) $5:4$ B) $4:3$ C) $3:2$ D) $2:1$ E) $3:1$

Решение. C). Нека s и t се должината на патот и планираното време за Дамјан да дојде дома. Имаме $v_1 = \frac{\frac{3}{4}s}{\frac{2}{3}t} = \frac{9s}{8t}$ и $v_2 = \frac{\frac{1}{4}s}{\frac{1}{3}t} = \frac{3s}{4t}$. Според тоа, $v_1 : v_2 = \frac{9s}{8t} : \frac{3s}{4t} = 3:2$.

26. Дадени се четири идентични коцки кои се прикажани на цртежот десно. Димитар од нив направил квадар, при што на едната негова страна се појавил црн круг (види цртеж). Како кај овој квадар изгледа спротивниот ѕид на ѕидот на кругот?





A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. A). Од првата и втората коцка заклучуваме дека шесте ѕидови на идентичните коцки се со различни фигури. Понатаму, погледот на првата коцка од десно е идентичен со погледот на четвртата коцка од напред. Тоа значи дека спротивниот ѕид на кој имаме голема четвртина на црн круг е ѕидот на кој имаме помал триаголник поставен на ист начин како и четвртината од кругот. Значи, кај квадарот спротивниот ѕид на ѕидот на кругот е квадратот прикажан на цртежот A.

27. Жителите на еден остров се само кралеви, кметови и слуги. Кралевите секогаш ја кажуваат вистината, кметовите секогаш лажат, а секој од слугите наизменично лаже и кажува вистина. Кога секој од нив го прашале: *Дали си крал*?, 17 одговориле **ДА**. Кога секој од нив го прашале *Дали си слуга*?, 12 од нив одговориле **ДА**. Кога секој од нив го прашале *Дали си кмет*?, 8 од нив одговориле **ДА**. Колку жители има островот, ако половина од слугите на првото прашање одговориле со **ДА**?

A) 37 B) 45 C) 35 D) 25 E) 20

Решение. **D).** Според условот на задачата бројот на слугите е парен број. Нека на островот има x кралеви, y кметови, $2z$ слуги. Тогаш

$$x+y+z=17,$$
$$y+z=12,$$
$$z=8.$$

Според тоа, $z=8$, $y=4$, $x=5$ и на островот живеат $x+y+2z=25$ жители.

28. Неколку различни природни броеви се запишани на таблата. Точно два од нив се деливи со 2 и точно 13 од нив се деливи со 13. Нека M е најголемиот од нив. Која е најмалата можна вредност на M ?

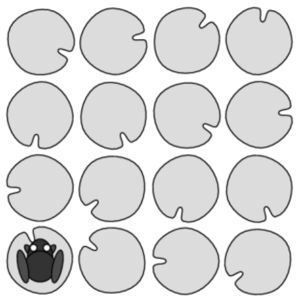
A) 169 B) 269 C) 273 D) 299 E) 325

Решение. **C).** Бидејќи од дадените броеви 13 се деливи со 13, а само 2 се деливи со 2, заклучуваме дека 11 од броевите покрај бројот 13 се деливи само со непарен број. Првите 11 непарни броеви се: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21, па доволно е да ги земеме уште двата најмали парни броеви: 2 и 4. Сега овие броеви ги множиме со 13 и ги добиваме броевите:

$$13, 26, 39, 52, 65, 91, 117, 143, 169, 195, 221, 247, 273.$$

Значи, бараниот број е 273.

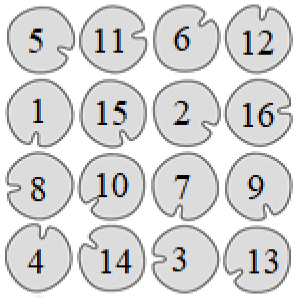
29. Во едно езеро имало 16 листови на локвен, поставени во облик на квадратна 4×4 шема, како што е прикажано на цртежот. Жаба седи на лист што се наоѓа во еден од аглите на квадратот. Таа може да скока од лист на лист хоризонтално и вертикално, така што секогаш прескокнува барем еден лист, но на ист лист не се враќа двапати. Кој е најголемиот број на листови кои жабата може да ги посети, при што може да се врати и на листот на кој се наоѓа на почетокот?



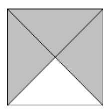
A) 16 B) 15 C) 14

D) 13 E) 12

Решение. **A).** Сите шеснаесет листови жабата може да ги посети ако оди по патеката прикажана на цртежот десно.

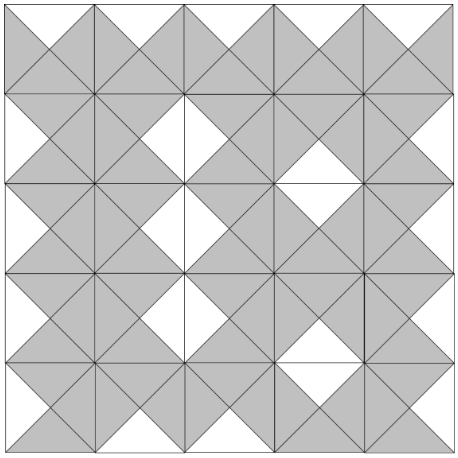


30. Квадратна 5×5 табла е поплочена со единечни идентични меѓу себе плочки со шара како што е дадено на цртежот десно. Било кои две плочки што имаат заедничка страна се допираат со иста боја, бела или сива. Една страна на единечна плочка е бела ако е страна на бел триаголник и сива ако е страна на сив триагол-ник. Обиколката на квадратната шема се состои од отсечки со должина 1. Кој е најмалиот можен број на единечни сиви отсечки на обиколката на 5×5 таблата, што може да се направи при нејзино поплочување?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. **B).** Бидејќи плочките имаат по една бела и три сиви страни, во секој агол на 5×5 таблата мора да има барем една сива отсечка. Тоа значи дека бројот на сивите отсечки е поголем или еднаков на 4. Ако ги поплочиме горната, левата и десната страна на таблата така што во аглите ќе има точно по една сива отсечка, тогаш останатиот дел од таблата се поплочува на единствен начин, при што бидејќи должината на страната на таблата е непарен број се јавува најмалку уште една сива отсечка. Значи, најмалиот можен број сиви отсечки е $4+1=5$. Вакво поплочување е прикажано на цртежот десно.



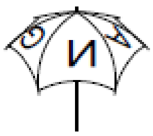
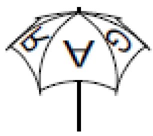
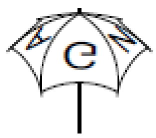
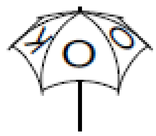
Kadett (осмо и деветто одделение) 2015

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. На мојот чадор има напишано KANGAROO, што е прикажано на цртежот десно. Еден од дадените цртежи го прикажува мојот чадор. Кој е тој цртеж?

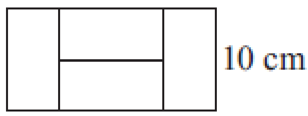
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **E).** Тоа не може да е:

- A) бидејќи буквата N е обратно запишана,
- B) бидејќи R не е меѓу двете O,
- C) бидејќи буквата R е обратно запишана,
- D) бидејќи буквата G е обратно запишана.

Единствено може да е E) бидејќи зборот е кружно запишан и по двете O следува K.

2. Четири складни правоаголници се поврзани и формираат правоаголник, како на цртежот. Должината на пократката страна на големиот правоаголник е 10cm. Колкава е должината на подолгата страна на големиот правоаголник?



A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm D) 40 cm E) 50 cm

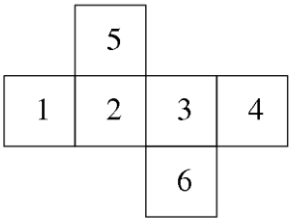
Решение. B). Збирот на должинте+ на две пократки страни на малиот правоаголник е еднаков на должината на подолгата негова страна. На подолгата страна на големиот правоаголник лежат две пократки и една подолга страна на малиот правоаголник, па затоа нејзината должина е еднаква на $2 \cdot 10 = 20\,cm$.

3. Кој од следниве броеви е најблиску до $2,015 \cdot 510,2$?

A) 0,1 B) 1 C) 10 D) 100 E) 1000

Решение. E). Имаме: $2,015 \cdot 510,2 = 1028,053$, што значи дека тоа е бројот 1000.

4. Дадена е мрежа на коцка со броеви запишани на нејзините ѕидови (цртеж десно). Стојан точно ги собира броевите од спротивните ѕидови на коцката. Кои три збирови ги добил Стојан?



A) $4,6,11$ B) $4,5,12$ C) $5,6,10$ D) $5,7,9$ E) $5,8,8$

Решение. A). Спротивните ѕидови се: 1 и 3, 2 и 4, 5 и 6. Значи, добиените збирови се 4, 6 и 11.

5. Кој од следниве броеви не е природен број?

A) $\frac{2011}{1}$ B) $\frac{2012}{2}$ C) $\frac{2013}{3}$ D) $\frac{2014}{4}$ E) $\frac{2015}{5}$

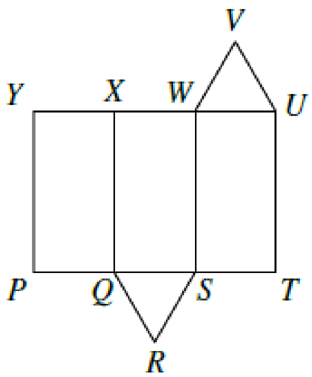
Решение. D). Јасно, $\frac{2011}{1}$ е природен број. Од признаците за деливост со 2, 3 и 5 следува дека броевите следува дека само бројот $\frac{2012}{2}$, $\frac{2013}{3}$ и $\frac{2015}{5}$ се природни броеви. Сега, од признакот за деливост со 4 следува дека бројот $\frac{2014}{4}$ не е природен број.

6. Патувањето од Скопје до Битола, преку Велес, трае 130 минути. Патувањето од Скопје до Велес трае 35 минути. Колку трае патувањето од Велес до Битола?

A) 95 минути B) 105 минути C) 115 минути
D) 165 минути E) 175 минути

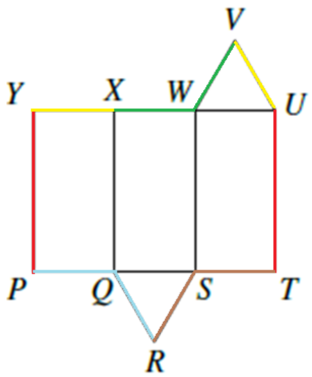
Решение. A). Патувањето од Велес до Битола трае $130-35=95\,\mathrm{min}$.

7. На цртежот десно е дадена мрежа на правилна тристрана призма. Која отсечка ќе се совпадне со отсечката UV кога од мрежата ќе се направи призмата?



A) WV B) XW C) XY
D) QR E) RS

Решение. C). На цртежот десно со различни бои се обоени отсечките кои се совпаѓаат при составување на призмата. Значи со работ UV ќе се совпадне работ XY (двете отсечки се обоени со жолта боја).



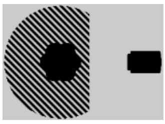
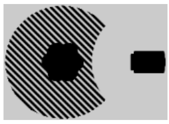
8. Даден триаголник има страни со должина 6, 10 и 11. Рамностран триаголник има еднаков периметар како дадениот триаголник. Колку е долга страната на рамностраниот триаголник?

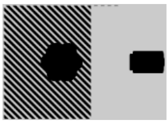
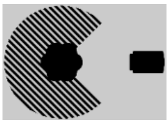
A) 18 B) 11 C) 10 D) 9 E) 6

Решение. D). Периметарот на рамностраниот триаголник е еднаков на $6+10+11=27$. Значи, должината на неговата страна е $27:3=9$.

9. Кога верверичката ќе се спушти на земја таа не се оддалечува повеќе од $5m$ од стеблото на дрвото. Таа исто така останува на најмалку $5m$

подалеку од куќичката на кучето. Која од следниве слики ја прикажува областа во која може да се движи верверичката?

A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. C). Верверичката се движи во кружен прстен со разлика на радиусите на кружниците од кои е формиран еднаква на $5m$, од кој е исечен делот кој го зафаќа кругот со радиус $5m$ и центар на средината на вратата на куќичката на кучето. Ваков штрафиран дел е прикажан на цртежот C).

10. Велосипедист се движи со брзина од $5m$ во секунда. Секое тркало од неговиот велосипед има периметар од $125cm$. Колку цели завртувања прави секое тркало за 5 секунди?

A) 4 B) 5 C) 10 D) 20 E) 25

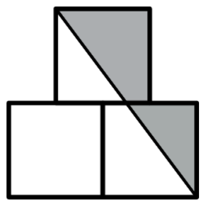
Решение. D). За 1 секунда велосипедистот поминува $5m$, па за 5 секунди велосипедистот ќе помина $5 \cdot 5 = 25\,m = 2500\,cm$. Тркалото има периметар $125cm$, па затоа тоа ќе се заврти $2500:125 = 20$ пати.

11. Во едно одделение никои две момчиња не се родени на ист ден во седмицата и никои две девојчиња не се родени во ист месец. Кога ново момче или ново девојче ќе дојде во класот, еден од овие два услови не е исполнет. Колку ученици има во класот?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 24 E) 25

Решение. B). Во седмицата има 7 дена, а во годината 12 месеци. Бидејќи со доаѓање на нов ученик еден од условите се нарушува, тоа значи дека ако дојде момче ќе имаме 8 момчиња, а ако дојде девојче ќе имаме 13 девојчиња. Значи, во одделението има 7 момчиња и 12 девојчиња, т.е. 19 ученици.

12. На цртежот десно, центарот на горниот квадрат е над заедничката страна на двата долни квадрати. Секој квадрат има страна со должина 1. Колку изнесува плоштината на засенчениот дел?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{7}{8}$ C) 1 D) $1\frac{1}{4}$ E) $1\frac{1}{2}$

Решение. C). Белиот и сивиот триаголник на цртежот се правоаголни триаголници кои имаат една катета со должина 1 и по еден еднаков остар агол, што значи дека тие се складни. Тоа значи дека плоштината на сивиот дел на дадената фигура е еднаква на 1.

13. Секоја од ѕвездичките во равенството $2*0*1*5*2*0*1*5*2*0*1*5=0$ треба да се замени со еден од знаците + или − за да се добие точно равенство. Кој е најмалиот број број ѕвездички кои мора да се заменети со +?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. B). Збирот на сите ненулти броеви е еднаков на $3\cdot(2+1+5)=24$. Значи со знак + треба да имаме броеви чиј збир е еднаков на $24:2=12$. Според тоа треба најмалку две ѕвездички да замениме со знак +. На пример, $2-0-1+5-2-0-1+5-2-0-1-5=0$.

14. За време на дожд паднати се 15 литри вода на квадратен метар. За колку е зголемено нивото на водата во базен на отворен простор?

A) 150 *cm* B) 0,15 *cm* C) 15 *cm* D) 1,5 *cm*

E) Зависи од големината на базенот

Решение. **D).** Еден литар има 1000 cm^3, што значи дека 15 литри имаат $15 \cdot 1000 = 15000\,cm^3$. Понатаму, $1\,m^2 = 10000\,cm^2$, па затоа нивото на водата во базенот се зголемило за $15000 : 10000 = 1,5\,cm$.

15. Грмушка има 10 стебленца. Секое стебленце има или 5 листа или 2 листа и 1 цвет. Кој од следниве броеви може да биде вкупниот број на листови на грмушката?

A) 45 B) 39 C) 37 D) 31

E) Ниту еден од дадените

Решение. **E).** Во долната табела се дадени сите можни броеви на цветовите и листовите на 10 гранки.

Цветови	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Листови	50	47	44	41	38	35	32	29	26	23	20

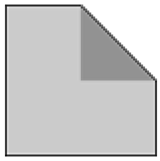
Значи, бројот на листовите не е ниту еден од дадените броеви.

16. Средната вредност на бодовите на учениците на тест по математика е 6. Точно 60% од учениците го положиле тестот. Средната вредност на бодовите на учениците кои го положиле тестот е 8. Која е средната вредност на бодовите на учениците кои не го положиле тестот?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **C).** Нека бројот на учениците е a. Тогаш учениците освоиле $6a$ поени. Понатаму, $0,6a$ ученици го положиле тестот и тие освоиле $0,6a \cdot 8 = 4,8a$ поени. Значи, тестот не го положиле $0,4a$ ученици и тие освоиле $6a - 4,8a = 1,2a$ поени. Конечно, учениците кои не го положиле тестот просечно освоиле $1,2a : (0,4a) = 3$ поени.

17. Едно ќоше од квадрат е свиткано кон центарот на квадратот и така е формиран петаголник, како на цртежот десно. Плоштината на петаголникот и плоштината на квадратот се последователни природни броеви. Колку е плоштината на квадратот?



A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Решение. C). Плоштината на преклопениот триаголник е еднаква на осмината од плоштината на квадратот. Плоштината на квадратот е a^2, а плоштината на петаголникот е $a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2$. За да двете плоштини се последователни природни броеви потребно е $8 | a^2$. Значи, плоштината на квадратот е $a^2 = 8k$ и плоштината на петагол-никот е $\frac{7}{8}a^2 = 7k$. Броевите $8k$ и $7k$ се последователни природни броеви ако $k = 1$. Значи, плоштината на квадратот е 8.

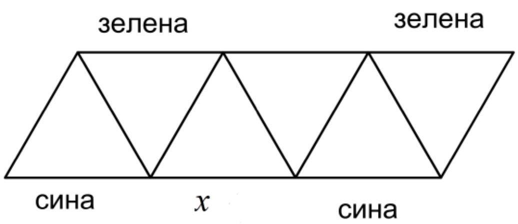
18. Маја ги собрала должините на три страни од еден правоаголник и добила $44cm$. Јана ги собрала должините на три страни од истиот правоаголник и добила $40cm$. Колку изнесува периметарот на правоаголникот?

A) $42cm$ B) $56cm$ C) $64cm$ D) $84cm$ E) $112cm$

Решение. B). Нека должините на страните на правоаголникот се a и b. Тогаш $2a + b = 44$ и $a + 2b = 40$. Значи, $3a + 3b = 84$, од каде добиваме $a + b = 28$.

Значи, периметарот на правоаголникот е $2(a+b) = 56\ cm$

19. На цртежот е означена бојата на некои страни на триаголниците. Бојан сака да ги обои останатите

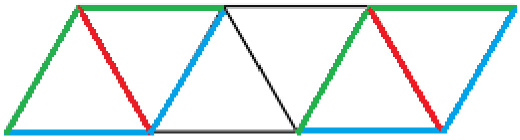


страни на триаголниците со сина, црвена и зелена боја, но така да секој триаголник мора да има различна боја на секоја страна. Со која боја ќе се обои страната озна-чена со x?

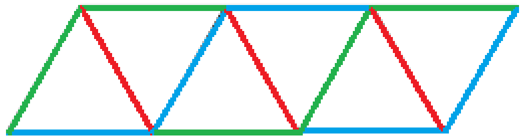
A) зелена B) црвена C) сина D) црвена или сина

E) не може да се определи

Решение. A). Заедничките страни на двата леви и двата десни триаголници мора да се црвени. Сега боењето на двата крајни леви и двата крајни десни триаголници е еднозначно и истото е прикажано на цртежот горе десно.



Понатаму е јасно дека заедничката страна на двата средни триаголници мора да е црвена, па затоа страната означена со x мора да е зелена. Целосното боење на фигурата е прикажано на цртежот десно.



20. Наставничката Ирина прашала пет од своите ученици колку од нив учеле претходниот ден. Петар рекол ниту еден, Билјана рекла само еден, Оливера рекла точно двајца, Евгенија рекла точно тројца и Горан рекол точно четворица. Ирина знае дека оние ученици кои што не учеле претходниот ден не ја кажуваат вистината, а оние кои што учеле ја кажуваат вистината. Колку од овие ученици учеле претходниот ден?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. B). Бидејќи петте деца дале пет различни изјави, само едно од децата дало точен исказ. Значи, само едно дете учело и тоа е Билјана.

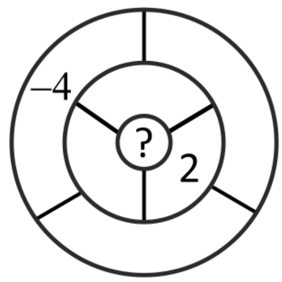
21. Пет природни броеви (кои не мора да се различни) се запишани на пет карти. Пабло го пресметува збирот на броевите на секој пар карти.

Меѓу десетте збирови имало само три различни 57, 70 и 83. Кој е најголемиот природен број запишан на некоја од картите?

A) 35 B) 42 C) 48 D) 53 E) 82

Решение. **C).** Нека запишаните броеви се $a \le b \le c \le d \le e$. Јасно, $a+b=57$ и како 57 е непарен број заклучуваме дека $a<b$. Понатаму, $d+e=83$ и како 83 е непарен број заклучуваме дека $d<e$. Според тоа, $a<b \le c \le d < e$, па за да се добијат само три збира мора да е $b=c=d$. Тоа значи дека $a+b=57, 2b=70, b+e=83$, од каде следува $a=22, b=35, e=48$.

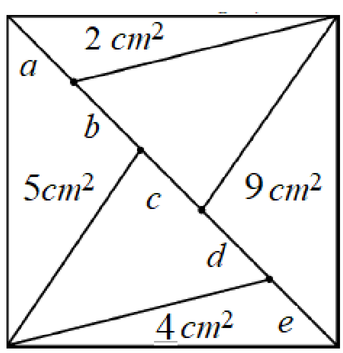
22. Ристанка треба да запише број во секој од седумте делови од шемата прикажана на цртежот десно. Два делови се соседни ако имаат заеднички дел од нивните граници. Бројот во секој дел е збир на броевите од сите негови соседни делови. Ристанка веќе запишала два броја, како што е означено на цртежот. Кој број мора да го напише во центарот на шемата?



A) 1 B) –2 C) 6 D) –4 E) 0

Решение. **C).** Со x да го означиме бројот запишан на местото на прашалникот. Бројот –4 е еднаков на збирот на четирите од петте броеви кои се соседни на бројот 2. Значи, $-4+x=2$, т.е. $x=6$.

23. Квадрат со плоштина $30\,cm^2$ со една негова дијагонала е поделен на два дела, а потоа на триаголници, како што е прикажано на цртежот. Плоштината на некои од триаголниците е дадена на цртежот. Кој дел од дијагоналата е најдолг?



A) a B) b C) c D) d E) e

Решение. D). Сите триаголници имаат еднакви висини h, а тоа е половина од дијагоналата на квадратот. Понатаму, плоштината на половина од квадратот е еднаква на $15\,cm^2$, па затоа точни се равенствата

$$ah=4, (a+b)h=10, (b+c)h=8, (c+d)h=12, (e+d)h=18, eh=8,$$

од каде добиваме

$$ah=4, bh=6, ch=2, dh=10, eh=8.$$

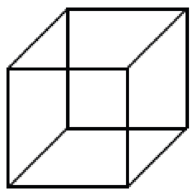
Значи, $ch<ah<bh<eh<dh$ и како $h>0$ добиваме $c<a<b<e<d$.

24. Во група од неколку кенгури, два кенгури со најмала маса заедно имаат 25% од вкупната маса на групата. Трите кенгури со најголема маса заедно имаат 60% од вкупната маса на групата. Колку кенгури има во групата?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 15 E) 20

Решение. A). Од $25+60<100$ заклучуваме дека групата има повеќе од 5 кенгури. Нека групата има 7 кенгури и нека процентуалните учества на кенгурите во вкупната аса на групата запишани во растечки редослед се a,b,c,d,e,f,g. Тогаш $a+b=25, e+f+g=60$, па затоа $c+d=15$, што не е можно бидејќи $25=a+b\le c+d=15$. Значи, во групата има помалку од 7 кенгури, па како нивниот број е поголем од 5, заклучуваме дека во групата има 6 кенгури. На пример, ако масата на целата крупа е A, тогаш еден распоред на масите кои го задоволуваат условот на задачата е:

$$0{,}12A, 0{,}13A, 0{,}15A; 0{,}19A; 0{,}20A; 0{,}21A.$$



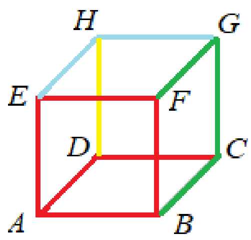
25. Кирил има седум парчиња жица со должини $1cm$, $2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm$ и $7cm$. Тој, без преклопување,

користи неколку од парчињата жица за да направи коцка со должина на раб $1cm$. Кој е најмалиот број на парчиња жица кои може да ги искористи?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. D). Од секое теме на коцката излегуваат по 3 раба, т.е. непарен број рабови. Тоа значи дека во секое теме мора да почнува или да завршува некое од искористените парчиња жица. Коцката има 8 темиња, па затоа мора да се употребат четири парчиња жица.

Да ја означиме коцката како на цртежот десно. Тогаш четирите парчиња жица се со должина $6cm, 3\,cm, 2\,cm, 1\,cm$ и нивното поставување е



$A \to B \to F \to E \to A \to D \to C,\quad H \to D$

$B \to C \to G \to F,\quad G \to H \to E,$

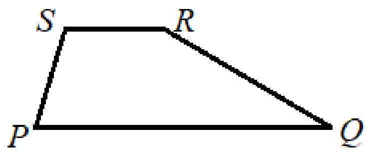
и истите се обоени во црвена, жолта, зелена и сина боја.

26. Вчера го запишав пасфордот на мојот компјутер. Бројот што го запишав има 6 цифри, но се сеќавам дека пасфордот имаше седум цифри. Никако не можам да се сетам која цифра не сум ја запишал и на која позиција е таа. Колку различни пасфорди морам да пробам за да бидам сигурен дека го имам точниот број? (Пасфордот може да почне со било која цифра, вклучувајќи ја и нулата)

A) 55 B) 60 C) 64 D) 70 E) 80

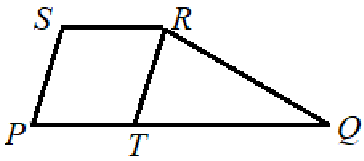
Решение. D). Ако шестцифрениот број кој е запишан го претставиме во облик $XXXXXX$, тогаш седмата цифра може да се запише на местото на било која од вертикалните црти $|X|X|X|X|X|X|$. Според тоа, имаме 7 можни позиции и на секоја од нив можеме да запишеме било која од 10-те цифри. Значи, треба да направиме $7 \cdot 10 = 70$ пасфорди.

27. Во трапезот $PQRS$, страните PQ и RS се паралелни. Аголот RSP е еднаков на 120° и $\overline{RS}=\overline{SP}=\frac{1}{3}\overline{PQ}$. Која е мерката на $\measuredangle PQR$?



A) 15° B) $22{,}5^\circ$ C) 25° D) 30° E) 45°

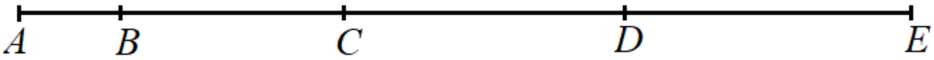
Решение. D). Нека правата која минува низ точката R и е паралелна со страната SP ја сече основата PQ во точката T. Тогаш четириаголникот $PTRS$ е ромб со агли 120° и 60°. Сега имаме $\overline{QT}=\overline{QP}-\overline{PT}=3\overline{RT}-\overline{RT}=2\overline{RT}$ и $\measuredangle RTQ=60^\circ$. Значи, триаголникот RTQ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\measuredangle PQR=30^\circ$.



28. Пет точки лежат на права. Александар го мери растојанието меѓу секој пар точки. Добиените должини се дадени во растечки редослед 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 и 22. Која е вредноста на k?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Решение. E). Нека на правата се распоредени точките A,B,C,D,E, во овој редослед (види цртеж).



Тогаш $\overline{AE}=22$. Понатаму, $\overline{AD}=20$ и $\overline{BE}=17$, или пак $\overline{AD}=17$ и $\overline{BE}=20$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\overline{AD}=17$ и $\overline{BE}=20$. Сега имаме

$$2\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}+\overline{BE}-\overline{DE},$$
$$\overline{BD}=\overline{AD}+\overline{BE}-(\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}),$$
$$\overline{BD}=\overline{AD}+\overline{BE}-\overline{AE},$$
$$\overline{BD}=20+17-22=15.$$

Понатаму,

$$\overline{AB}=\overline{AD}-\overline{BD}=2 \text{ и } \overline{DE}=\overline{BE}-\overline{BD}=5.$$

Сега, од $2+6=8$ и $\overline{AB}=2$ заклучуваме дека $\overline{BC}=6$ и затоа $\overline{CD}=15-6=9$. Значи, растојанијата меѓу точките A,B,C,D,E се:

$\overline{AB}=2$, $\overline{DE}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=8$, $\overline{CD}=9$,

$\overline{CE}=14$, $\overline{BD}=15$, $\overline{BE}=17$, $\overline{AD}=20$, $\overline{AE}=22$,

па затоа $k=14$.

29. Матео го дели бројот 2015 со 1, 2, 3, ... итн. се до 1000. Тој го запишува остатокот од секое делење. Кој е најголемиот можен остаток?

A) 15 B) 215 C) 671 D) 1007 E) друга вредност

Решение. C). Нека $1\le a\le 1000$. Имаме, $2015=aq+r$, $0\le r\le a-1$, па затоа

$$2015\le aq+a-1,$$
$$2016\le a(q+1).$$

Сега, ако $q=1$, тогаш $a\ge 1008$, што противречи на $1\le a\le 1000$.

Понатаму, ако $q=2$, тогаш $a\ge 672$. Според тоа,

$$2015-2\cdot 672\ge 2015-2a\ge 2015-2\cdot 1000, \text{ т.е. } 671\ge r\ge 15.$$

Последното значи дека во случајов најголемиот остаток е 671 и тој се добива при делење на 2015 со 672.

Сега, ако $q\ge 3$, тогаш $3a\le aq+r=2015$, па затоа $a\le \frac{2015}{3}<672$. Но, тогаш најголемиот можен остаток е $a-1<671$.

Конечно, најголемиот можен остаток се добива при делење со 672 и тој остаток е еднаков на 671.

30. Секој природен број треба да се обои според следниве три правила.

1) Секој број е или црвен или зелен.

2) Збирот на било кои два различни црвени броеви е црвен број.

3) Збирот на било кои два различни зелени броеви е зелен број.

На колку различни начини може да се направи вакво боење?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) повеќе од 6

Решение. D). Да ги разгледаме броевите 1 и 2. Ако двата броја се обоени во иста боја, тогаш сите броеви се обоени во истата таа боја. Значи, во овој случај имаме две боења, сите броеви се црвени или сите броеви се зелени. Ако бројот 1 е црвен, а бројот 2 е зелен, тогаш за бројот 3 можни се два случаја:

1) Бројот 3 е црвен и тогаш бидејќи $4=3+1, 5=4+1, 6=5+1,...$ мора сите броеви понатаму да се црвени.
2) Бројот 3 е зелен. Но, тогаш мора и бројот 4 да е зелен, бидејќи ако овој број е црвен тогаш од $5=4+1$ следува дека бројот 5 е црвен, а од $5=2+3$ следува дека бројот 5 е зелен, што е противречност, бидејќи секој број е обоен во една боја.

Според тоа, во овој случај имаме уште 2 боења кои ги задоволуваат условоте на задачата. Ако бројот 1 е зелен, а бројот 2 е црвен, тогаш како погоре добиваме уште две боења кои ги задоволуваат условите на задачата.

Конечно, имаме $2+2+2=6$ боења кои ги задоволуваат условите на задачата.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2016

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Колку цели броеви има меѓу броевите 20,26 и 3,17?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Решение. **C).** Меѓу броевите 3,17 и 20,26 цели броеви се: 4, 5, 6, ..., 20. Значи, има $20-3=17$ цели броеви.

2. Кој од следниве сообраќајни знаци има најмногу оски на симетрија?

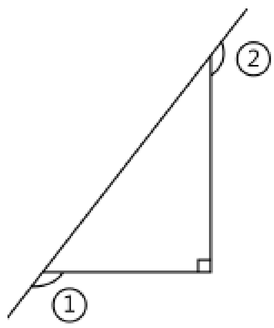
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **A).** Знакот A има 4 оски на симетрија, B има 2 оски на симетрија, C има 3 оски на симетрија, D нема оски на симетрија и E има 1 оска на симетрија.

3. Колкав е збирот на аглите означени на цртежот десно?

A) 150° B) 180° C) 270°

D) 320° E) 360°



Решение. C). Збирот на двата остри агли кои се суплементни на аглите (1) и (2) е еднаков на $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Значи,

$$(1)+(2)=360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$

4. Павел треба да го додаде бројот 26 на некој број. Наместо тоа, Павел од тој број одзел 26 и го добил бројот -14. Кој број требало да го добие Павел, ако точно ја решел задачата?

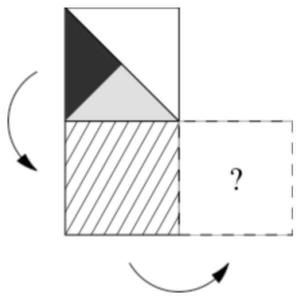
A) 28 B) 32 C) 36 D) 38 E) 42

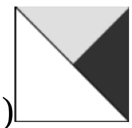
Решение. D). Нека почетниот број е a. Тогаш

$$a+26=a-26+52=-14+52=38.$$

Значи, Павел требало да го добие бројот 38.

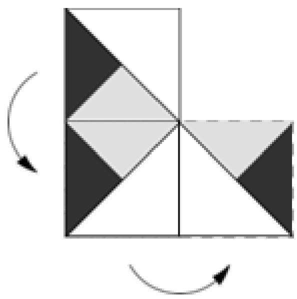
5. Ева ја превртува сликата, така што долната страна на сликата станува горна страна, а потоа сликата ја превртува така што десната страна станува лева страна (види цртеж десно). Што гледа Ева?



A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. B). При секое прврутвање Ева ја гледа симетричната слика на квадратот во однос на страна преку која го превртува како оска на симетрија. Така го добиваме цртежот десно. Значи, Ева ќе го види квадратот B).



6. Сања направила 555 купчиња од по 9 камчиња во едно купче. Потоа, таа камчињата ги собрала во едно купче и новото купче го поделила на купчиња од по 5 камчиња. Колку купчиња добила Сања?

A) 999 B) 900 C) 555 D) 111 E) 45

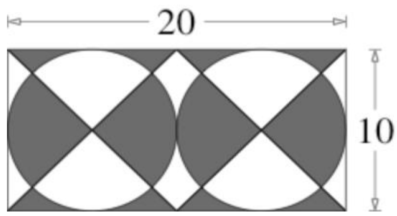
Решение. A). Имаме, $555\cdot 9=(5\cdot 111)\cdot 9=5\cdot(111\cdot 9)=5\cdot 999$ што значи дека Сања добила 999 купчиња од по 5 камчиња.

7. Во моето училиште 45 наставници, односно 60% од наставниците на работа доаѓаат со велосипед. Само 12% од наставниците, за да дојдат на работа, користат автомобил. Колку наставници користат автомобил за доаѓање на работа?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

Решение. C). Нека x е бројот на наставниците во училиштето. Тогаш $0,6x=45$, од каде добиваме $x=75$. Значи, $0,12x=0,12\cdot 75=9$ на работа доаѓаат со автомобил.

8. Колкава е плоштината на обоената површина на цртежот десно?



A) 50 B) 80 C) 100

D) 120 E) 100

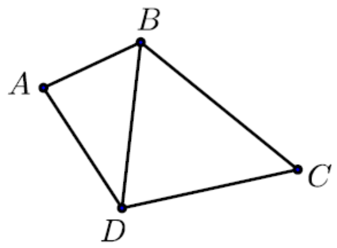
Решение. C). Правоаголникот да го поделиме на два квадрати со димензии 10×10. Потоа ако секој од добиените квадрати го ротираме околу неговиот центар за агол од 90°, тогаш во секој квадрат обоената површина ќе се совпадне со белата површина. Тоа значи дека во секој од двата квадрати половината е бел, а половината е сив. Конечно, плоштината на сивата површина е $10\cdot 20:2=100$.

9. Две парчиња јаже имаат должина 1 m и 2 m. Александар ги сече парчињата на неколку делови. Сите делови имаат иста должина. Кој од следниве броеви не може да биде вкупниот број на делови добиени од двете парчиња?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15

Решение. B). Ако од првото јаже се добиени n парчиња, тогаш од второто јаже се добиени $2n$ парчиња. Значи, вкупно имаме $3n$ парчиња, т.е. бројот на парчињата е делив со 3. Од понудените броеви единствено бројот 8 не е делив со 3.

10. Четири градови A,B,C и D се поврзани со патишта, како на цртежот десно. Трка се организира така што почнува од градот D, завршува во градот B и по секој пат се поминува само по еднаш. На колку начини може да се организира трката?



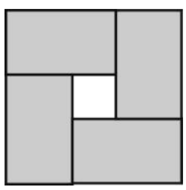
A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Решение. C). Трката може да се организира така што на 3 различни начини ќе излеземе од градот D, по што на единствен начин се стигнува до B. Потоа од B трката може да се продолжи на 2 различни начини, за да понатаму трката се реализира на единствен начин. Значи, имаме $3\cdot 2=6$ различни начини за реализирање на трката.

Патиштата според кои трката може да се реализира се:

$$D\to A\to B\to C\to D\to B,\quad D\to A\to B\to D\to C\to B,$$
$$D\to B\to A\to D\to C\to B,\quad D\to B\to C\to D\to A\to B,$$
$$D\to C\to B\to A\to D\to B,\quad D\to C\to B\to D\to A\to B.$$

11. На цртежот десно имаме четири еднакви правоаголници поставени во внатрешноста на квадрат. Периметарот на секој правоаголник е еднаков на 16 cm. Колку изнесува периметарот на квадратот?



A) 16 cm B) 20 cm C) 24 cm D) 28 cm E) 32 cm

Решение. E). Со a и b да ги означиме должините на страните на малиот правоаголник. Тогаш периметарот на квадратот е еднаков на

$$4(a+b)=2\cdot 2(a+b)=2\cdot 16=32\,cm.$$

12. Андреј има 49 сини и само едно црвено топче. Колку топчиња треба Андреј да отстрани за да 90% од неговите топчиња бидат сини?

A) 4 B) 10 C) 29 D) 39 E) 40

Решение. E). Ако 90% од топчињата се сини, тогаш 10% се црвени. Ние имаме само едно црвено топче, па мораме да имаме 9 сини топчиња. Значи, Андреј треба да отстрани 40 сини топчиња.

13. Која од следниве дропки има вредност најблиска до дропката $\frac{1}{2}$?

A) $\frac{25}{79}$ B) $\frac{27}{59}$ C) $\frac{29}{57}$ D) $\frac{52}{79}$ E) $\frac{57}{92}$

Решение. C). Имаме, $\frac{1}{2}=0,5$ и како

$$\frac{25}{79}=0,31645569...$$
$$\frac{27}{59}=0,45762711...$$
$$\frac{29}{57}=0,50877192...$$
$$\frac{52}{79}=0,65822784...$$
$$\frac{57}{92}=0,61956521...$$

заклучуваме дека бараната дропка е $\frac{29}{57}$.

14. Коста ги запишува резултатите од четвртфиналето, полуфиналето и финалето на еден тениски турнир. Резултатите се (не се подредени по редослед): Бранко го победил Андон, Киро го победил Дамјан, Ѓорѓи го победил Христо, Ѓорѓи го победил Киро, Киро го победил Бранко, Александар го победил Филип и Ѓорѓи го победил Александар.

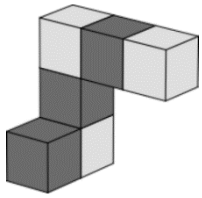
Кој пар бил во финалето?

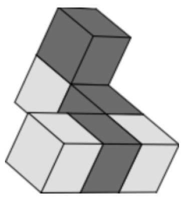
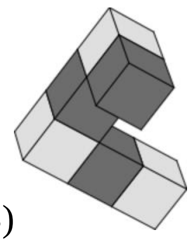
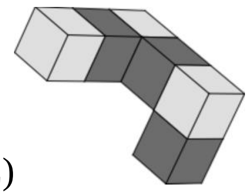
A) Ѓорѓи и Христо B) Ѓорѓи и Киро C) Киро и Бранко

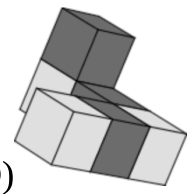
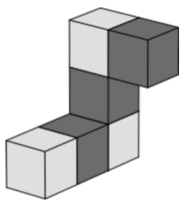
D) Ѓорѓи и Александар E) Киро и Дамјан

Решение. **B).** Ѓорѓи ги победил Александар, Христо и Филип, што значи победил во четвртфиналето, полуфиналето и финалето. Киро ги победил Бранко и Дамјан, а изгубил од Ѓорѓи, што значи дека победил во четвртфиналето и полуфиналето, а изгубил во финалето. Значи, во финалето играле Ѓорѓи и Киро.

15. Павлина составила неколку коцки како на цртежот десно. Таа се движи околу добиеното тело и го гледа од различни агли. Кое од следниве тела Павлина не може да го види?



A)  B)  C) 

D)  E) 

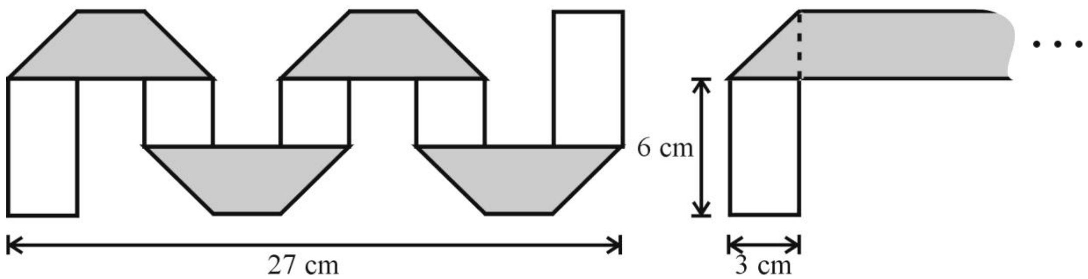
Решение. **B).** Ако даденото тело го обиколуваме тргнувајќи од белата крајна коцка, тогаш се движиме во насока обратна од насоката на движење на стрелките на часовникот. Очигледно ова важи за телата A), D) и E), а ако го превртиме телото C) забележуваме дека тоа важи и за ова тело. Но, кога споменатото обиколување го правиме на телото B), тогаш се движиме во насока на движењето на стрелките на часовникот, па затоа Павлина не може да го види ова тело.

16. Михаил, Григор и Кристијан се тројка (тројца браќа родени во ист ден). Нивните браќа близнаци Мартин и Иван се 3 години помлади. Кој од следниве броеви може да биде збир на годините на петте браќа?

A) 36 B) 53 C) 76 D) 89 E) 92

Решение. D). Нека близнаците имаат по a години. Тогаш Михаил, Григор и Кристијан имаат по $a+3$ години. Значи, збирот на годините на браќата е $2a+3(a+3)=5a+9=5(a+1)+4$. Според тоа, збирот на годините на браќата при делење со 5 дава остаток 4. Од понудените броеви единствен таков број е 89, па само тој може да биде збирот на годините на браќата.

17. Правоаголна лента широка 3 *cm* е бела од едната страна, а сива од другата страна. Тања ја свиткала лентата како на цртежот десно. Сивите трапези се складни. Колкава е должината на правоаголната лента?



A) 36 *cm* B) 48 *cm* C) 54 *cm* D) 57 *cm* E) 81 *cm*

Решение. D). Да замислиме дека трапезите ги сечеме по висините повлечени од темињата на пократките основи кон подолгите основи и истите да ги исправиме. Ќе добиеме 5 правоаголници со должини на страни 3 *cm* и 9 *cm*, кои се поврзани со 5 квадрати со должина на страна 3 *cm*. Според тоа, лентата е долга $5\cdot 9+4\cdot 3=57\,cm$.

18. Два кенгура, Џим и Сем, почнале да скокаат во исто време, од исто место, во иста насока, скокајќи по еднаш во една секунда. Секој скок

на Цим е долг 6 m. Првиот скок на Сем е долг 1 m, вториот 2 m, третиот 3 m итн. Колку скокови му се потребни на Сем за да го стигне Цим?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 313 E) 14

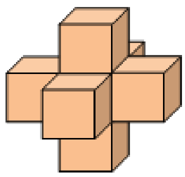
Решение. B). *Прв начин*. Поминатите метри во последователните скокови на кенгурите се дадени во следнава табела:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цим	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
Сем	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Значи, по 11 скокови Сем ќе го стигне Цим.

Втор начин. Ако на Сем му се потребни a скокови за да го стигне Цим, тој ќе помине $1+2+3+...+a=\frac{a(a+1)}{2}$ метри. За тоа време Цим ќе помине $6a$ метри. Значи, $\frac{a(a+1)}{2}=6a$, од каде добиваме $a=11$.

19. Седум коцки за играње се залепени така што е добиено телото на цртежот десно. Лепењето е направено така што се лепат две страни со ист број на точки на нив. Колку точки има на површината на телото?



A) 24 B) 90 C) 95 D) 105 E) 126

Решение. D). На една коцка за играње збирот на сите точки е еднаков на $1+2+3+4+5+6=21$. Според тоа, на шесте надворешни коцки не се гледаат точките на шест ѕида кај кои збирот на точките е 21. Значи, збирот на точките кои се наоѓаат на ѕидовите на телото е еднаков на $6\cdot 21-21=126-21=105$.

20. Во едно одделение има 20 ученици. Тие седат во парови така што точно една третина од момчињата седи со девојче и точно една половина од девојчињата седи со момче. Колку момчиња има во одделението?

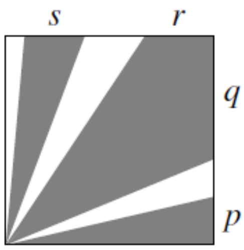
A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

Решение. B). Со x да го означеме бројот на момчињата, а со y бројот на девочињата. Знаеме дека $\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}y$, т.е. $y=\frac{2}{3}x$. Според тоа,

$$x+\frac{2}{3}x=20,$$

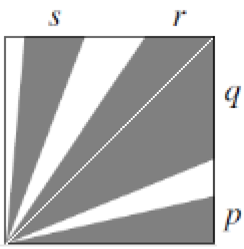
од каде добиваме $5x=60$, односно $x=12$.

21. Квадрат со плоштина 36 има сиви површини како на цртежот десно. Збирот на плоштините на сивите површини е 27. Колку изнесува $p+q+r+s$?



A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

Решение. D). Должината на страната на квадратот е $a=\sqrt{36}=6$. Понатаму, за плоштината на обоениот дел од квадратот добиваме



$$\begin{aligned}27&=\frac{as}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{aq}{2}+\frac{ap}{2}=3s+3r+3q+3p\\&=3(p+q+r+s)\end{aligned},$$

од каде добиваме $p+q+r+s=9$.

22. Часовникот на Драган касни 10 минути, но тој мисли дека е 5 минути напред. Часовникот на Столе е 5 минути напред, но тој мисли дека касни 10 минути. Во ист момент, секој од нив гледа во сопствениот часовник. Драган мисли дека е 12:00 часот. Што мисли Столе, колку е часот?

A) 11:30 B) 11:45 C) 12:00 D) 12:30 E) 12:45

Решение. D). Бидејќи Драган мисли дека неговиот часовник покажува 5 минути повеќе, а мисли дека е 12:00, неговиот часовник покажува 12:05. Но, часовникот на Драган касни 10 минути, па затоа вистинското време е 12:15. Сега часовникот на Столе оди 5 минути напред, па неговиот часовник покажува 12:20. Столе мисли дека часовникот му касни 10 минути, па затоа тој смета дека е 12:30.

23. Дванаесет девојчиња се сретнале во кафетерија. Некои изеле по 2, а некои по 1 колаче. Две од девојчињата само пиеле минерална вода. Во просек, тие изеле по 1,5 колаче. Колку девојчиња изеле по две колачиња?

A) 2 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

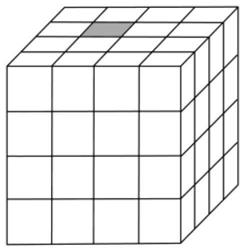
Решение. E). Имаме 12 девојчиња кои во просек изеле по 1,5 колачиња, па затоа вкупниот број изедени колачиња е $12 \cdot 1{,}5 = 18$. Бидејќи 2 девојчиња пиеле само минерална вода, добиваме дека колачињата ги изеле 10 девојчиња. Ако секое девојче изело по 1 колаче, добиваме дека ќе се изедени 10 колачиња. Оние $18 - 10 = 8$ колачиња ги изеле девојчињата кои изеле по 2 колачиња, секое девојче уште по едно. Значи, 8 девојчиња изеле по 2 колачиња.

24. Црвенкапа носи колачи на три бабички. Таа почнала со кошница полна со колачи. Пред да влезе во куќата на секоја од бабичките, Големиот Лош Волк јадел по половина од колачите во нејзината кошница. Црвенкапа на секоја од бабичките и давала еднаков на број на колачи. Кога Црвенкапа заминала од куќата на последната бабичка, во нејзината кошница повеќе немало колачи. Кој од следниве броеви сигурно е делител на бројот на колачите кои Црвенкапа ги имала на почетокот?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

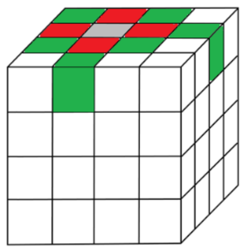
Решение. D). Нека третата бабичка добила a колачи. Пред да влезе во нејзината куќа волкот изел a колачи, што значи дека по излегувањето од куќата на втората бабичка Црвенкапа имала $a + a = 2a$ колачи. Таа на втората бабичка и дала a колачи, па затоа пред да влезе во нејзината куќа таа имала $a+2a=3a$ колачи. Значи волкот пред куќата на втората бабичка изел $3a$ колачи, па затоа кога Црвенкапа излегла од куќата на првата бабичка таа во кошницата имала $3a+3a=6a$ колачи. На првата бабичка таа и дала a колачи, што значи дека пред тоа Црвенкапа имала $a+6a=7a$ колачи. Значи, пред влегувањето во куќата на првата бабичка Црвенкапа имала $7a+7a=14a$ колачи. Според тоа, бројот на колачите кои Црвенкапа ги имала на почетокот сигурно е делив со 1, 2, 7 и 14. Од понудените броеви тоа е само бројот 7.

25. Коцката на цртежот е поделена на 64 помали коцки. Само една од коцките е сива. Првиот ден, сивата коцка ги променила сите свои бели соседи во сиви коцки (две коцки се соседни ако имаат заеднички ѕид). Вториот ден, сите сиви коцки ги промениле сите свои бели соседи во сиви коцки. Колку сиви коцки имало на крајот од вториот ден?



A) 11 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

Решение. **E).** На крајот на првиот ден бојата е променета на 4 коцки во горниот ред на големата коцка (означени со црвена боја) и коцката во вториот ред на големата коцка која е под сивата коцка. Значи, имаме $1+4+1=6$ сиви коцки. На крајот на вториот ден сиви се уште коцката од третиот ред која е под почетната сива коцка, четирите коцки од вториот ред кои се под четирите коцки од првиот ред кои првиот ден ја променија бојата и уште 6 коцки кои во првиот ред се соседни на сивите коцки по првиот ден (означени со зелена боја). Тоа се дополнително $1+4+6=11$ сиви коцки. Значи, на крајот на вториот ден ќе има $6+11=17$ сиви коцки.



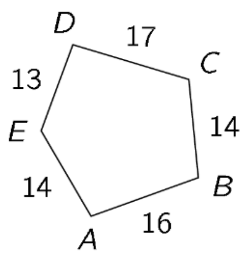
26. Неколку различни природни броеви се запишани на таблата. Производот на најмалите два од нив е 16. Производот на најголемите два од нив е 225. Колку е збирот на запишаните броеви?

A) 38 B) 42 C) 44 D) 58 E) 243

Решение. **C).** Имаме $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, па затоа два можни различни броја чиј производ е 16 се: 1 и 16, или 2 и 8. Од $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ следува дека два различни броја чиј производ е 225 се: 1 и 225, или 3 и 75, или 4 и 45, или 9 и 25.

Бидејќи 16 е производ на двата најмали, тоа мора да се броевите 2 и 8 (1 и 16 не може да бидат бидејќи 3, 4 и 9 се помали од 16). Бидејќи 225 е производ на двата најголеми, тоа се 9 и 25 (само овие два броја од броевите во четирите парови се поголеми од 8). Значи, броевите се 2, 8, 9 и 25, а нивниот збир е $2 + 8 + 9 + 25 = 44$.

27. На цртежот е нацртан петаголник. Горјан нацртал пет кружници со центри во точките A, B, C, D, E така што кружниците со центри на иста страна на петаголникот се допираат. Должините на страните на петаголникот се дадени. Која точка е центар на кружницата со најголем радиус?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. **A).** Нека радиусите на кружницте со центри во точките A, B, C, D, E се a, b, c, d, e, соодветно. Тогаш

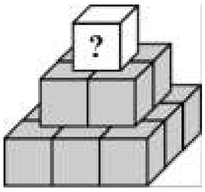
$$a + b = 16,$$
$$b + c = 14,$$
$$c + d = 17,$$
$$d + e = 13,$$
$$e + a = 14.$$

Тогаш

$$2a = (a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+a)$$
$$=16-14+17-13+14=20,$$

од каде добиваме $a=10$. Сега, $b=6, c=8, d=9, e=4$.

28. Бојан запишува различен природен број на секоја од четиринаесетте коцки на пирамидата прикажана на цртежот десно. Збирот на деветте броеви запишани на коцките во основата е еднаков на 50. Природниот број запишан на секоја коцка во вториот и третиот ред е еднаков на збирот на броевите запишани на четирите коцки под неа. Кој е најголемиот природен број кој Бојан може да го запише на коцката на врвот?



A) 80 B) 98 C) 104 D) 110 E) 118

Решение. **E).** Нека на коцките на основата се запишани броевите a,b,c,d,e,f,g,h,m (цртеж десно). Најголемиот број кој може да е запишан на некоја од коцките во првиот ред е 14. Навистина, ако тој број е поголем или еднаков на 15, тогаш бидејќи на коцките се запишани различни броеви добиваме дека збирот на броевите запишани на коцките на првиот ред ќе биде поголем или еднаков на

b	a	h
c	m	g
d	e	f

$$15+1+2+3+4+5+6+7+8=51,$$

што противречи на условот на задачата. Понатаму, на коцките во вториот ред се запишани броевите

$$a+b+c+m, \quad c+d+e+m, \quad e+f+g+m, \quad g+h+a+m,$$

па на најгорната коцка е запишан бројот

$$A = 2a+b+2c+d+2e+f+2g+h+4m$$
$$=(a+b+c+d+e+f+g+h+m)+3m+a+c+e+g$$
$$=50+3m+a+c+e+g$$
$$=100+2m-(b+d+f+h).$$

Најголемата вредност за A се достигнува ако m е најголемиот можен број, а b, d, f, h се најмалите можни броеви. Тоа значи дека $m = 14$ и b, d, f, h се броевите 1, 2, 3, 4, во некој редослед. Значи,

$$A = 100 + 2 \cdot 14 - (1 + 2 + 3 + 4) = 118.$$

29. Еден воз има пет вагони, и притоа во секој вагон има барем по еден патник. За два патника ќе велиме дека се „соседи“ ако тие или се наоѓаат во ист вагон или се наоѓаат во два соседни вагона. Секој патник има или точно пет или точно десет „соседи“. Колку патници има во возот?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 20

E) има повеќе од една можност

Решение. **C).** Нека гледајќи од лево кон десно во вагоните има a, b, c, d, e патници (цртеж десно). Тогаш бидејќи секој патник има 5 или 10 соседи, т.е. бројот на соседите на секој патник е делив со 5, добиваме:

a	b	c	d	e

$$a - 1 + b = 5k$$
$$a + b - 1 + c = 5m,$$
$$b + c - 1 + d = 5n,$$
$$c + d - 1 + e = 5u,$$
$$d + e - 1 = 5v.$$

Ако од втората ја одземеме првата равенка добиваме $c = 5(m - k)$. Но, бројот на патниците во било кој среден вагон не може да е поголем или еднаков на 10, бидејќи тогаш патник од овој вагон ќе има најмалку $9 + 1 + 1 = 11$ соседи, што противречи на условот на задачата. Значи $c = 5$. Сега, патник од вториот вагон може да има најмногу 10 соседи, па затоа $a + b - 1 + c \le 10$, односно $a + b \le 6$. Од друга страна $2 \le a + b = 5k + 1$, па затоа $a + b = 6$. На потполно ист начин се добива дека $d + e = 6$.

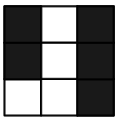
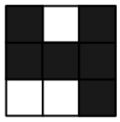
Конечно, $a+b+c+d+e=6+5+6=17$.

На цртежот десно е даден распоред на 17 патници кој ги задоволува условите на задачата. Обиди се да најдеш распоред различен од дадениот.

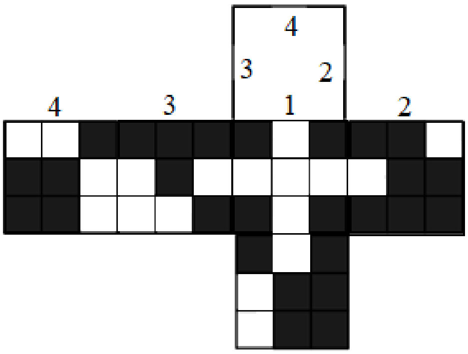
4	2	5	4	2

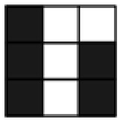
30. Коцка $3\times3\times3$ е составена од 15 црни коцки и 12 бели коцки. Пет страни на големата коцка се прикажани на долниот цртеж.

На кој цртеж е прикажана шестата страна на големата коцка?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **A).** Допирните рабови на два ѕида се составени од три коцки кои се наоѓат на овие рабови, па затоа во мрежата на коцката распоредот на црните и белите квадрати на рабовите мора да е симетричен на секој допирен раб. Ако почнеме од квадратот кој има црни квадратчиња во темињата, а другите квадратчиња се бели, го добиваме распоредот на дадените пет ѕидови кој е прикажан на цртежот десно. На цртежот се означени кои рабови на белиот ѕид треба да се совпаднат со рабовите на четирите ѕида со кои овој ѕид се допира. Притоа, ако се има предвид превиткувањето на мрежата, при кое распоредот на полињата на работ 4 е во обратен редослед добиваме дека на местото на белиот ѕид треба да е квадратот прикажан на цртежот десно, а тоа е квадратот A), кој е ротиран за 180°.





Kadett (осмо и деветто одделение) 2017

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Колку ќе биде часот 17 часа по 17:00?

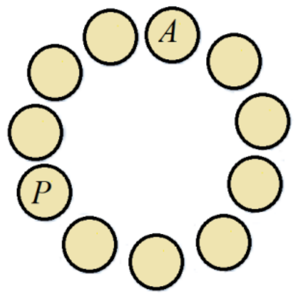
A) 8:00 B) 10:00 C) 11:00 D) 12:00 E) 13:00

Решение. B). Од 17:00 до 24:00 има 7 часа. Значи, по 17 часа ќе биде 10:00.

2. Неколку девојки седат во круг. Ана е четврта од лево од Ратка и седма од десно од неа. Колку девојки има?

A) 9 B) 10 C) 11

D) 12 E) 13



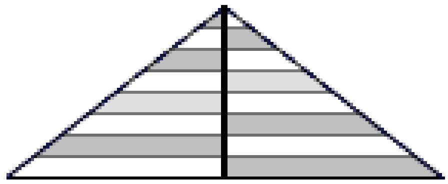
Решение. C). Според условот лево од Ратка има 3 места до Ана, а десно од неа има 6 места до Ана (види цртеж). Според тоа, во кругот вкупно има $1+3+1+6=11$ девојки.

3. Кој број треба да се одземе од -17 за да се добие бројот -33?

A) -50 B) -16 C) 16 D) 40 E) 50

Решение. C). Имаме $-17-a=-33$, од каде добиваме $a=-17+33$, т.е. $a=16$. Значи, бројот кој треба да се одземе е 16.

4. На цртежот десно е прикажан лентест рамнокрак триаголник и неговата висина. Секоја лента има иста висина. Кој дел дел од плоштината на целиот триаголник е белиот дел?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

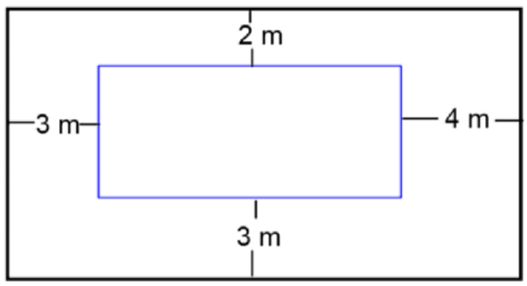
Решение. **A).** Висината повлечена кон основата го дели рамнокракиот триаголник на два складни правоаголни троаголници. Тоа значи дека триаголникот при врвот и секој рамнокрак трапез кој е определен со една лента е поделен на два складни правоаголни триаголници и рамнокраки правоаголни трапези, соодветно. Еден од овие делови е бел, а другиот е сив, па затоа плоштината на белиот дел е еднаква на плоштината на сивиот дел. Според тоа, збирот на плоштините на белите делови е еднаков на $\frac{1}{2}$ од плоштината на триаголникот.

5. Кое од следниве равенства е точно?

A) $\frac{4}{1}=1,4$ B) $\frac{5}{2}=2,5$ C) $\frac{6}{3}=3,6$ D) $\frac{7}{4}=4,7$ E) $\frac{8}{5}=5,8$

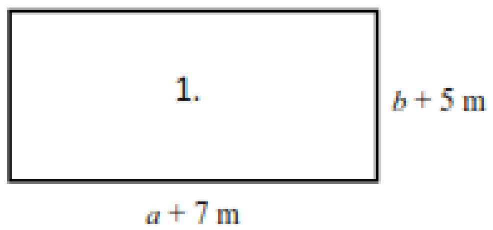
Решение. **B).** Имаме, $\frac{4}{1}=4$, $\frac{6}{3}=2$, $\frac{7}{4}=1,75$ и $\frac{8}{5}=1,6$, што значи дека е точно само равенството $\frac{5}{2}=2,5$.

6. На цртежот се прикажани два правоаголника кои имаат паралелни страни. Која е разликата во периметрите на тие два правоаголника?



A) 12 *m* B) 16 *m*
C) 20 *m* D) 21 *m* E) 24 *m*

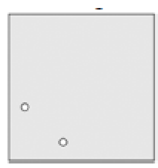
Решение. Е). Должините на двата правоаголника се разликуваат за $3+4=7\,m$, а ширините за $2+3=5\,m$ (види цртеж).

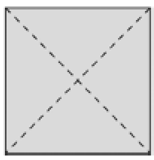
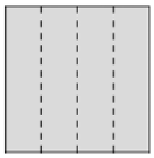
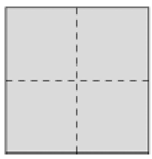
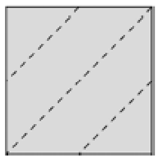
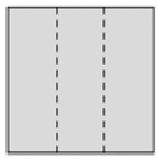


Според тоа, периметрите се разликуваат за

$$2(a+7+b+5)-2(a+b)=2(a+b)+24-2(a+b)=24\,m.$$

7. Филип превиткал квадратно парче хартија двапати, а потоа на свитканата хартија направил една дупка. Кога ја одвиткал хартијата, парчето хартија изгледало како на цртежот десно. Како Филип го превиткал парчето хартија?



A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. D). Добиените дупки по одвиткувањето се симетрични во однос на дијагоналата која ги поврзува долното лево и горното десно теме. Затоа превиткувањата B), C) и E) отпаѓаат. Понатаму, при превиткувањето A) ќе добиеме 4 дупки, па затоа и тоа отпаѓа. Останува превиткувањето D).

8. Збирот на три различни природни броеви е 7. Колку изнесува производот на тие броеви?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 5

Решение. D). Нека a,b,c се три различни природни броја такви што $a<b<c$ и $a+b+c=7$. Тогаш $a=1$, бидејќи ако $a\geq 2$, тогаш $b\geq 3$, $c\geq 4$, па затоа $a+b+c\geq 2+3+4=9$. Сега $b+c=6$, па како погоре

заклучуваме дека $b=2, c=4$. Според тоа, бараниот производ е $1\cdot2\cdot4=8$.

9. На цртежот десно се прикажани четири срциња кои се преклопуваат. Плоштините на срцињата се $1\,cm^2$, $4\,cm^2$, $9\,cm^2$ и $16\,cm^2$, соодветно. Колку е плоштината на осенчената површина?

A) $9\,cm^2$ B) $10\,cm^2$ C) $11\,cm^2$ D) $12\,cm^2$ E) $13\,cm^2$

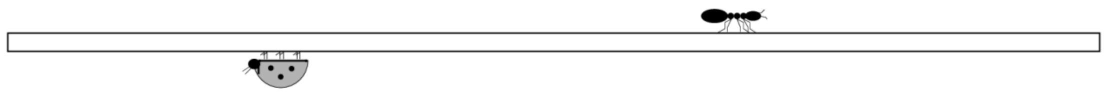
Решение. B). Плоштината на големиот осенчен дел е еднаква на $16-9=7\,cm^2$. Плоштината на малиот осенчен дел е $4-1=3\,cm^2$. Вкупната плоштина на осенчениот дел е $7+3=10\,cm^2$.

10. Ивана има 20 денари. Секоја од нејзините четири сестри има по 10 денари. Колку денари Ивана треба да даде на секоја од своите сестри така што секоја од петте девојки да има иста сума на пари?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10

Решение. A). Сите пет сестри заедно имаат $20+4\cdot10=60$ денари. Ако сите имаат иста сума пари, тогаш тие имаат по $60:5=12$ денари. Значи, секоја сестра на Ивана треба да добие по $12-10=2$ денари.

11. Мраваката Ени почнала да се движи од левиот крај на шината и поминала $\frac{2}{3}$ од нејзината должина. Бубамарата Буба почнала да се движи од десниот крај на истата шина и поминала $\frac{3}{4}$ од нејзината должина. Колкав дел од должината на шината е растојанието меѓу Ени и Буба?



A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{12}$

Решение. E). Мравката поминала $\frac{2}{3}$ од шината, па и останало да помине $\frac{1}{3}$ од шината. Бубамарата поминала $\frac{3}{4}$, па и останало да помине $\frac{1}{4}$ од шината.

Според тоа, растојанието меѓу мравката и бубамарата е

$$1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

од должината на шината.

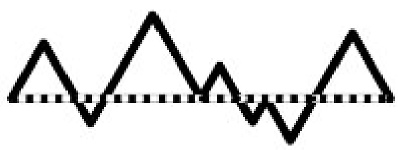
12. Една шестина од публиката на претставата за деца се возрасни. Ако две петтини од децата се момчиња, колкав дел од публиката се девојчиња?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

Решение. B). *Прв начин*. Според условот $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ од публиката се деца. Од нив момчиња се $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$. Значи, девојчиња се $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

Втор начин. Според условот $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ од публиката се деца. Бидејќи $\frac{2}{5}$ од децата се момчиња, добиеам дека $\frac{3}{5}$ од децата се девојчиња. Значи, $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$ од публиката се девојчиња.

13. На цртежот испрекинатата линија и полната линија формираат седум рамностра-



ни триаголници. Должината на испрекинатата линија е 20. Колкава е должината на полната линија?

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Решение. **D).** Испрекинатата линија е составена од по една страна на седумте рамнострани триаголници, а полната линија од по две страни на седумте рамнострани триаголници. Затоа должината на полната линија е двапати поголема од должината на испрекинатата линија. Според тоа, должината а полната линија е 40.

14. Четири братучетки Ема, Ива, Рената и Зора имаат 3, 8, 12 и 14 години, при што нивните години не мора да соодветствуваат на редоследот по кој се запишани. Ема е помлада од Рената. Збирот на годините на Зора и Ема е делив со 5. Збирот на годините на Зора и Рената исто така е делив со 5. Колку години има Ива?

A) 14 B) 12 C) 8 D) 3

E) не може да се определи

Решение. **A).** Имаме само две можности во кои збирот на годините на две девојчиња е делив со 5 и тоа: $3+12=15$ и $8+12=20$. Бидејќи едната можност е на Зора и Ема, а другата на Зора и Рената. Значи, Ема, Зора и Рената имаат 3, 8 и 12 години во некој редослед. Според тоа, Ива има 14 години.

Забелешка. Како што можеме да видиме при решавањето на задачата условот *Ема е помлада од Рената* не го искористивме, што значи дека истиот не е потребен. Но, ако во задачата се бара да се определи кое девојче колку години има, тогаш бидејќи Зора има 12 години, од овој услов ќе следува дека Ема има 3 години, Рената има 8 години и како погоре Ива има 14 години.

15. Оваа година на Скопскиот маратон точно 35% од маратонците се жени и има 252 повеќе мажи отколку жени. Колку маратонци учествуваат на маратонот?

A) 840 B) 810 C) 798 D) 624 E) 546

Решение. **A).** Нека на маратонот учествуваат a маратонци. Тогаш $0,35a$ се жени и $0,65a$ се мажи. Бидејќи на маратонот учествуваат 252 мажи повеќе од жени, добиваме $0,65a-0,35a=252$. Значи, $0,3a=252$, од каде добиваме $a=840$.

16. Теодора треба да запише по еден број во секое поле од фигурата дадена на цртежот десно. Таа веќе запишала два од броевите. Теодора сака збирот на сите броеви запишани во полињата да биде 35, збирот на броевите запишани во првите три полиња да биде 22, а збирот на броевите запишани во последните три полиња да биде 25. Колку изнесува производот на броевите кои Теодора треба да ги запише во сивите полиња?

3				4

A) 63 B) 108 C) 0 D) 48 E) 39

Решение. **A).** Со a,b,c да ги означиме броевите кои недостасуваат во средните полиња. Тогаш $3+a+b+c+4=35$, $3+a+b=22$ и $b+c+4=25$. Според тоа, $a+b+c=28$, $a+b=19$, $b+c=21$, па ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $c=9$. Потоа ако од првата равенка ја одземеме третата равенка, добиваме $a=7$. Конечно, бараниот производ е $ac=63$.

3	a	b	c	4

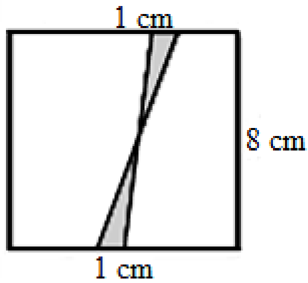
17. Марионка сака да пресече парче конец на девет парчиња со иста должина, па затоа ги означува точките во кои треба да сече. Менче сака

да го пресече истото парче конец на осум еднакви парчиња, па затоа и таа ги означува точките во кои треба да сече. На крајот Зоран го зел конецот и го пресекол во сите означени точки. Колку делови добил Зоран?

A) 15　　B) 16　　C) 17　　D) 18　　E) 19

Решение. B). Марионка на конецот означила деветтини, а Менче означила осмини, бидејќи и едната и другата сакале конецот да го пресечат на еднакви делови. Значи, Марионка означила 8 места, а Менче означила 7 места на кои треба да се пресече конецот. Бидејќи броевите 7 и 8 се заемно прости, никои две означени места нема да се совпаднат. Значи, конецот е пресечен на $8+7=15$ места и се добиени 16 парчиња.

18. Две отсечки, секоја со должина еднаква на 1 *cm*, се означени на спротивните страни на квадрат со должина на страна еднаква на 8 *cm*. Краевите на отсечките се поврзани како на цртежот десно. Колкава е плоштината, изразена во cm^2, на делот од квадратот обоен во сиво?



A) 2　　B) 4　　C) 6,4　　D) 8　　E) 10

Решение. B). Плоштината на сивиот дел е еднаква на збирот на плоштините на два триаголника со основа 1 *cm* и збир на висините еднаков на 8 *cm*. Според тоа, бараната плоштина е

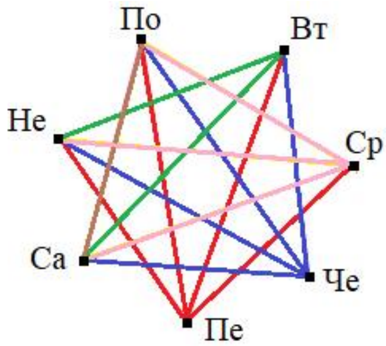
$$P=\frac{1\cdot h}{2}+\frac{1\cdot h'}{2}=\frac{h+h'}{2}=\frac{8}{2}=4\,cm^2.$$

19. Влатко сака да си направи седмичен распоред за трчање. Тој сака да трча точно двапати седмично и тоа секогаш во исти денови од седмицата. Влатко не сака да трча во два последователни денови.

Колку различни распореди може да направи Влатко?

А) 16 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

Решение. **B).** Изборот на првиот ден за трчање Влатко може да го направи на 7 различни начини. Вториот ден за трчање може да го избере на 4 различни наини. Така добива $7 \cdot 4 = 28$ начини на избор на деновите, при што секој избор е броен два пати (на пример, По-Ср и Ср-По, види цртеж десно). Значи, вкупниот број на избори е еднаков на $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$.



20. Соња сака да запише по еден број во секое поле на 3×3 табела така што збирот на броевите во секои две полиња кои имаат заедничка страна е еднаков. Два броја се запишани како што е прикажано на цртежот десно. Колку е збирот на сите запишани броеви во табелата?

2		
		3

А) 18 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Решение. **D).** Првото и третото поле во првиот ред се соседни на второто поле, па затоа во нив мора да се запишани еднакви броеви. Значи, во третото поле на првиот ред е запишан бројот 2. Второто поле од првиот ред и второто поле од третата колона се соседни на горното десно аголно поле, па затоа во овие две полиња мора да се запишани еднакви броеви, т.е. запишан е бројот 3. Сега лесно се добива дека пополнетата табела е како на цртежот десно. Конечно збирот на сите запишани броеви е 22.

2	3	2
3	2	3
2	3	2

21. Големините на аглите, изразени во степени, во еден триаголник се три различни природни броеви. Кој е најмалиот можен збир на најмалиот и најголемиот агол во триаголникот?

A) 61° B) 90° C) 91° D) 120° E) 121°

Решение. **C).** Со α, β, γ да ги означиме аглите на триаголникот, при што важи $\alpha < \beta < \gamma$. Бидејќи $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$, најмалиот можен збир на α и γ се добива за најголемата можна вредност на β. Бидејќи $\beta < \gamma$, добиваме дека β мора да е остар агол. Најголема целобројна вредност на остар агол во триаголник е 89°, па затоа најмалата вредност на $\alpha + \gamma$ е $180^\circ - 89^\circ = 91^\circ$.

22. Десет кенгури се наредени во еден ред како на цртежот. Во даден момент, два кенгура кои се еден до друг и се свртени еден кон друг, ги заменуваат местата така што едниот го прескокнува другиот. Ова се повторува се додека вакви прескокнувања се можни. Колку прескокнувања се направени?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

Решение. **C).** Бидејќи едниот од кенгурите го прескокнува другиот доволно е да ги преброиме прескокнувањата на кенгурите кои се завртени кон десно. Секој од нив ги прескокнува сите кенгури кои се завртени кон лево. Значи прviот, вториот и третиот кенгур прескокнуваат по $2+2=4$ кенгури, а шестиот седмиот и осмиот кенгур прескокнуваат по 2 кенгури. Конечно, вкупно имаме $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$ прескокнувања.

23. Дамјан има девет броја: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Тој додава 2 на некои од нив и 5 на останатите броеви. Кој е најмалиот број на различни резултати кои може да ги добие?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. **B).** Бидејќи разликата на броевите кои Дамјан ги додава е $5-2=3$, исти резултати ќе добива кога на два броја чија разлика е 3 му ги додава броевите 2 и 5 (5 на помалиот и 2 на поголемиот). Затоа треба да ги определиме најголем можен број парови броеви чија разлика е 3, а притоа ниту еден од броевите да не се повторува.

За таа цел доволно е да тргнеме од бројот 1 и притоа ги добиваме паровите: 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6. Од овие парови најмалиот можен број резултати е три:

$$1+5=6, 4+2=6, 2+5=7, 5+2=7, 3+6=8, 6+2=8.$$

Понатаму, со додавање на било кој од броевите 2 и 5 на некој од броевите 7, 8 и 9 не може да се добие ниту еден од броевите 6, 7 и 8, па затоа најмалиот број резултати е 6.

Забелешка. а) При изборот на паровите броеви чија разлика е 3 може да се тргне и од најголемиот број. Така се добиваат паровите 9 и 6, 8 и 5, 7 и 4. Притоа збировите се 11, 10 и 9, а од броевите 1, 2 и 3 со додавање на броевите 2 и 5 најголемиот можен збир кој се добива е 8, па затоа најмалиот можен број резултати е 6.

б) Други парови со чија помош може да се добие најмалиот можен број резултати се: 2 и 5, 3 и 6, 4 и 7, односно 3 и 6, 4 и 7, 5 и 8. Провери!

24. На секои три минути автобус оди од аеродромот до центарот на градот. Автомобил поаѓа од аеродромот во исто време како и еден автобус и до центарот на градот вози по истата патека. Патот од аеродромот до центарот на градот автобусите го поминуваат за 60 минути, а автомобилот за 35 минути. Колку автобуси автомобилот престигнал одејќи кон центарот на градот, не сметајќи го автобусот кој поаѓа во исто време со автомобилот?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

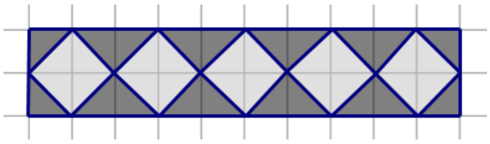
Решение. А). Автобусот патува 60 минути, а автомобилот 35 минути. Бидејќи $60-35=25$ до центарот на градот автомобилот ќе ги престигне сите автобуси кои пред него тргнале 25 и помалку минути. Понатаму, автобусите тргнуваат на секои 3 минути и бидејќи $25=8\cdot 3+1$, заклучуваме дека автомобилот ќе престигне 8 автобуси.

25. Прекривката за маса на Темјана изгледа како на цртежот десно. Колкав процент од прекривката е обоен со црна боја?

A) 16 B) 24 C) 25

D) 32 E) 36

Решение. D). Чаршавот има квадратен облик и на секоја негова страна има по пет квадрати, секој од кои половината е црн, а половината е бел (цртеж десно). Според тоа, можеме да земеме дека чаршавот е 5×5 квадрат, во кој $5+5+3+3=16$ единечни квадрати се половина бели, половина црни. Значи, од $5\cdot 5=25$ квадрати точно $\frac{16}{2}=8$ се црни. Според тоа, $\frac{8}{25}\cdot 100=32\%$ од чаршавот на Темјана е обоен со црна боја.

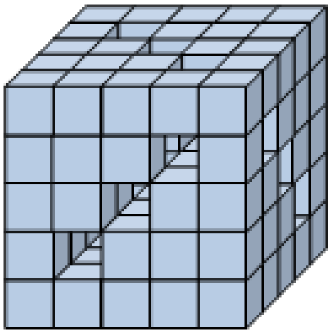


26. Секоја цифра од низата која почнува со цифрите 2, 3, 6, 8, 8, ... е добиена на следниов начин: првите две цифри се 2 и 3 и потоа секоја цифра е цифрата на единиците од производот на претходните две цифри во низата. Која е 2017-тата цифра во низата?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

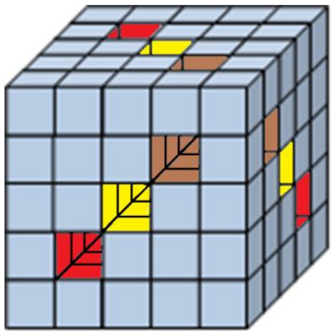
Решение. А). Да ги запишеме првите 16 члена на низата: 2, 3, **6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8,** 6, 8, ... Забележуваме дека почнувајќи од третиот член во низата периодично се повторуваат броевите **6, 8, 8, 4, 2, 8** што значи дека имаме периодично повторување на шест броја. Сега, бидејќи $2017-2=2015=6\cdot 335+5$ заклучуваме дека 2017-ти-от член на низата ќе биде петтиот број во периодата, а тоа е бројот 2.

27. Горјан имал 125 мали коцки. Тој залепил некои од нив едни со други и формирал голема коцка со девет тунели кои минуваат низ целата коцка, како што е прикажано на цртежот. Колку мали коцки не искористил Горјан?

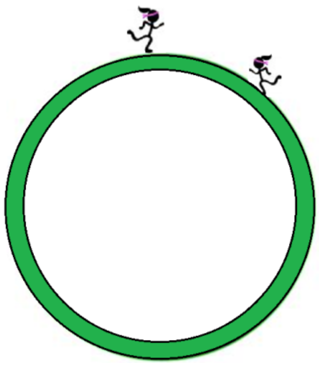


A) 52 B) 45 C) 42 D) 39 E) 36

Решение. **D).** Големата коцка е со димензија $5\times 5\times 5$, што значи дека за секој тунел се извадени по 5 мали коцки. Но три од овие коцки се броени по три пати и тоа коцките во црвените, жолтите и кафеавите тунели. Значи, Горјан не употребил $9\cdot 5-3\cdot 2=39$ коцки.



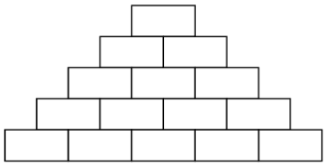
28. Две атлетичарки трчаат на кружна патека со должина 720 метри. Атлетичарките трчаат во спротивни насоки, со постојани брзини. За да истрча еден круг на првата атлетичарка ѝ се потребни четири минути, а додека на втората атлетичарка ѝ се потребни пет минути. Колку метри ќе истрча втората атлетичарка помеѓу две последователни срекавања на атлетичарките?



A) 355 B) 350 C) 340 D) 330 E) 320

Решение. **E).** Брзината на првата атлетичарка е $720:4=180\,m/\min$, а на втората атлетичарка е $720:5=144\,m/\min$. Ако втората атлетичарка истрчала x метри, тогаш првата истрчала $720-x$ метри. Затоа, $\frac{720-x}{180}=\frac{x}{144}$, од каде добиваме $144\cdot 720-144x=180x$, т.е. $x=320$.

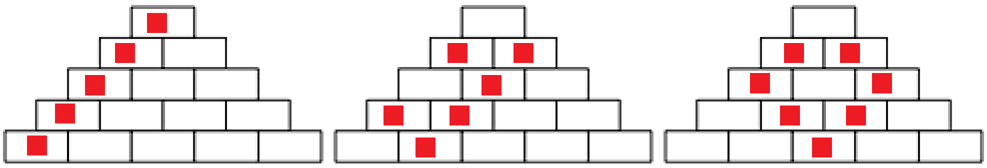
29. Симона сака да запише по еден природен број во секое поле на цртежот така да секој број над долниот ред е збир од двата броја во полињата веднаш под него. Кој е најголемиот број на непарни броеви кои Симона може да ги запише?



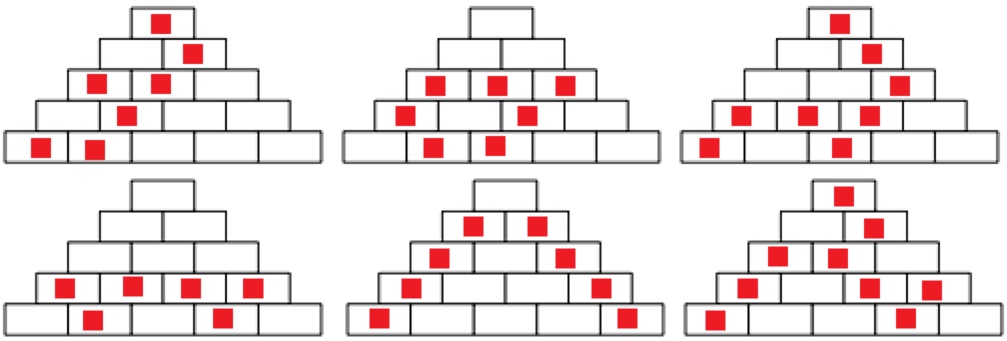
A) 5 B) 7 C) 8 D) 10 E) 11

Решение. **D).** Бројот на непарните броеви е определен со бројот на непарните броеви и нивниот распоред во првиот ред.

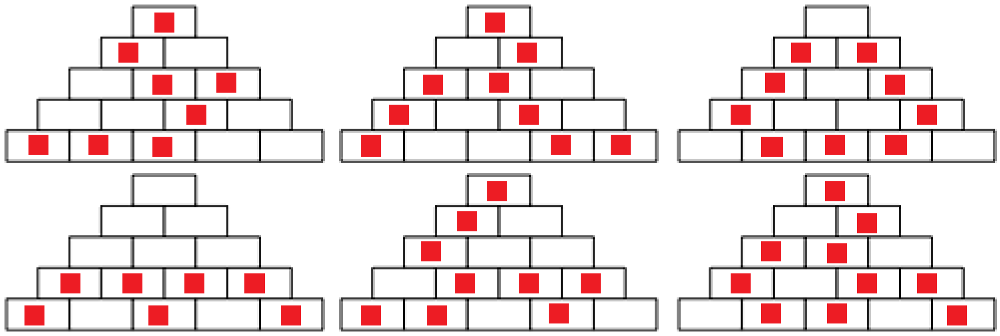
Ако долу имаме еден непарен број, тогаш ќе има 5, 6 или 7 непарни броја (види ги долните цртеи во кои полињата со непарните броеви се означени со црвени квадратчиња).



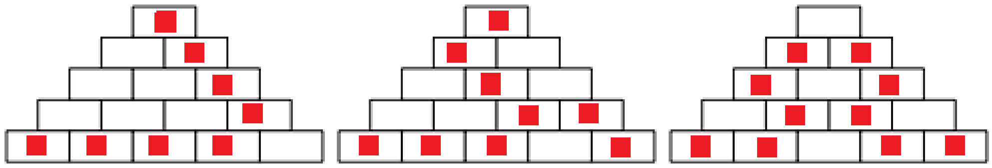
Ако долу имаме два непарни броја, тогаш ќе имаме 6, 7, 8 или 9 непарни броја (види цртеж долу).



Ако долу имаме три непарни броја, тогаш ќе имаме 7, 8, 9 или 10 непарни броја (види цртеж долу).



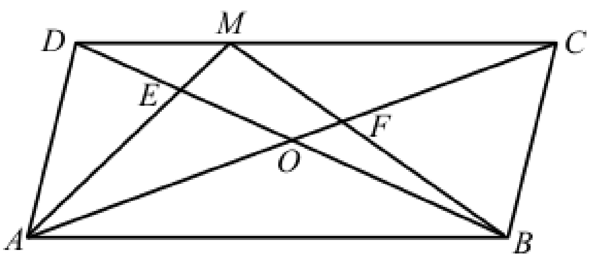
Ако долу имаме четири непарни броја, тогаш ќе имаме 8, 9 или 10 непарни броја (види цртеж долу).



На крајот ако долу имаме 5 непарни броја, тогаш вкупно ќе имаме 5 непарни броја.

Значи, Симона може најмногу да запише 10 непарни броја.

30. На цртежот десно е даден паралелограм $ABCD$ со плоштина S. Пресечната точка на дијагоналите на паралелограмот е O. На отсечката DC е означена точката M. Пресечната точка на AM и BD е E, пресечната точка на BM и AC е F. Збирот на плоштините на триаголниците AED и BFC е $\frac{1}{3}S$. Колкава е плоштината на четириаголникот $EOFM$, изразена преку S?



A) $\frac{1}{6}S$ B) $\frac{1}{8}S$ C) $\frac{1}{10}S$ D) $\frac{1}{12}S$ E) $\frac{1}{14}S$

Решение. D). Паралелограмот $ABCD$ и триаголникот ABM имаат исти основи и исти висини, па затоа $P_{ABM} = \frac{1}{2}S$. Понатаму, паралелограмот $ABCD$ и триаголникот COD имаат исти основи и висината на триаголникот е половина од висината на паралелограмот, па затоа $P_{COD}=\frac{1}{4}S$. Според тоа,

$$P_{ABCOD}=P_{ABCD}-P_{COD}=S-\frac{1}{4}S=\frac{3}{4}S.$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}P_{ABCOD}&=P_{AED}+P_{BFC}+P_{EOFBA}\\&=\frac{1}{3}S+(P_{ABM}-P_{EOFM})\\&=\frac{1}{3}S+\frac{1}{2}S-P_{EOFM}\\&=\frac{5}{2}S-P_{EOFM},\end{aligned}$$

па затоа $\frac{3}{4}S=\frac{5}{6}S-P_{EOFM}$, т.е. $P_{EOFM}=\frac{1}{12}S$.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2018

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Вредноста на изразот $(20+18):(20-18)$ е:

A) 18 B) 19 C) 20 D) 34 E) 36

Решение. B). Имаме: $(20+18):(20-18)=38:2=19$.

2. Ако буквите на зборот MAMA ги запишеме вертикално една под друга, тогаш зборот има вертикална оска на симетрија (вид цртеж десно). Кој од следните зборови, запишан на истиот начин, има вертикална оска на симетрија?

A) ROOT B) BOOM C) BOOT

D) LOOT E) TOOT

Решение. E). Буквите R, B и L немаат вертикални оски на симетрија, па затоа зборовите ROOT, BOOM, BOOT и LOOT запишани на зададениот начин немаат вертикална оска на симетрија. Единствено зборот TOOT го има саканото својство.

3. Даден е триаголник со должини на страни се 6, 10 и 11. Рамностран триаголник има ист периметар како дадениот. Колкава е должината на страната на рамностраниот триаголник?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 11 E) 27

Решение. B). Периметарот на дадениот триаголник е еднаков на $6+10+11=27$. Значи, должината на странатра на рамностраниот триаголник е $27:3=9$.

4. Кој број треба да се стави на местото на буквата A за да пресметувањата $2\cdot18\cdot14=6\cdot A\cdot7$ се точни?

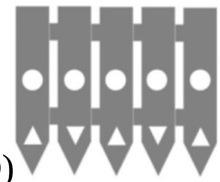
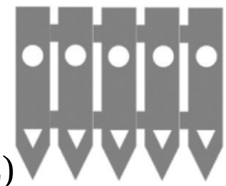
A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Решение. D). Имаме

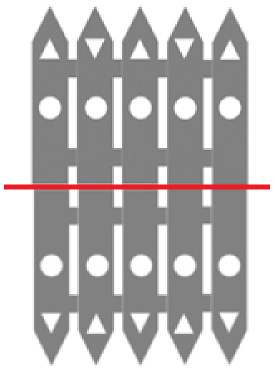
$$2\cdot18\cdot14=6\cdot A\cdot7$$
$$2\cdot6\cdot3\cdot14=42A,$$
$$12\cdot42=42A,$$
$$A=12.$$

5. Оградата на Филип е составена од панели од по 5 штици на кои се издупчени кругови и триаголници. Едно утро, панелот прикажан на цртежот десно паднал на земја. Што видел Филип приближувајќи се до оградата?

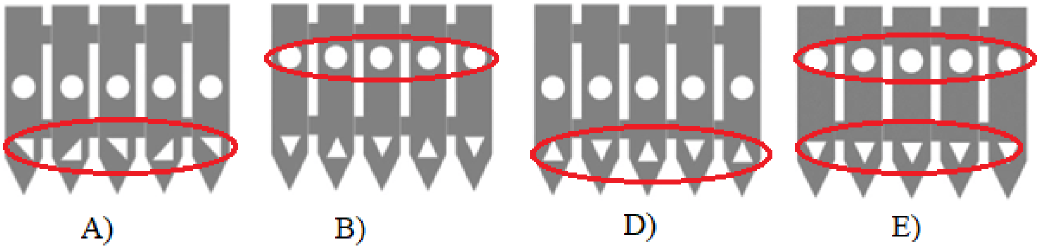
A)  B)  C) 

D)  E) 

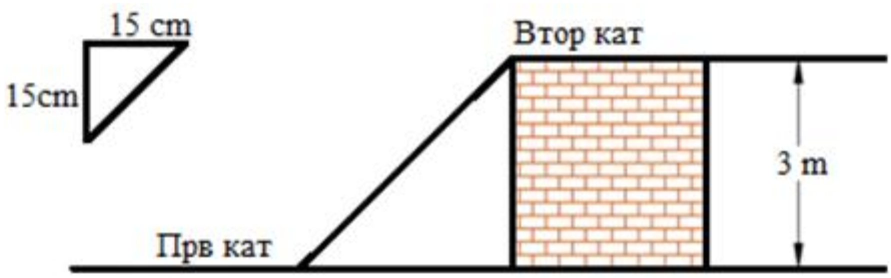
Решение. C). При паѓање на панелот на подот, се добива осносиметрична слика на панелот во однос на правата на која и припаѓа долниот раб на оградата. На цртежот десно е даден панелот и неговата осносиметрична слика која се совпаѓа со C), а на



долните цртежи се означени деловите на панелите кои не се осносиметрична слика на дадениот панел.



6. Во зградата на Горјан скалилата се високи 15 *cm* и се широки 15 *cm* (види цртеж).



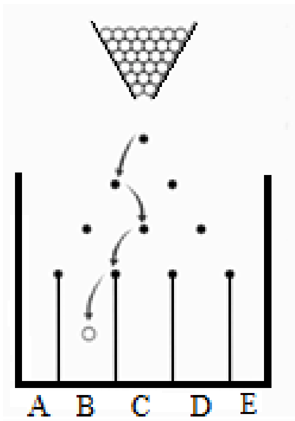
Колку скалила ќе изброи Горјан качувајќи се од првиот на вториот кат, ако растојанието меѓу подовите на двата ката е 3 *m*?

A) 8 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Решение. **D).** Височината меѓу катовите е $3\,m$ и истата е распределена на скалила чија висина е $15\,cm$. Според тоа, имаме

$$3\,m:15\,cm=300:15=20 \text{ скалила.}$$

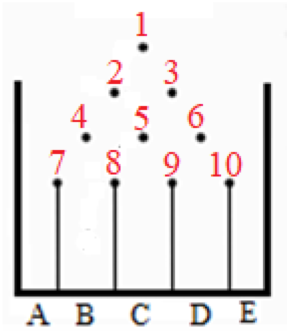
7. Топче се пушта од врвот на таблата на која во редици се поставени прегради (види цртеж). Ако топчето удри во преграда, тоа продолжува лево или десно од преградата. Една можна патека на движење на топчето е прикажана на цртежот. Кој е бројот на различните патеки по кои топчето може да стигне до корпата *B*?



Забелешка. Топчињата кои се пуштаат се такви што тие можат да поминат меѓу преградите на таблата.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

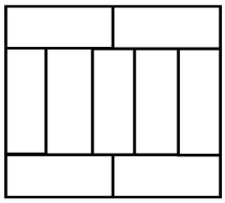
Решение. **C).** При ознаки како на цртежот десно можни патеки се:



$$1-2-4-7-B,$$
$$1-2-4-8-B,$$
$$1-2-5-8-B,$$
$$1-3-5-8-B.$$

Значи, имаме точно 4 патеки.

8. Големиот правоаголник на цртежот десно е составен од 9 мали идентични правоаголници. Поголемата страна на малите правоаголници е долга 10 *cm*. Колкав е периметарот на големиот четириаголник?

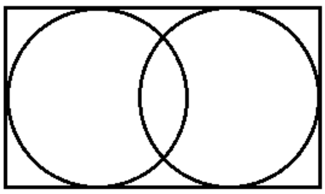


A) 40 *cm* B) 48 *cm* C) 76 *cm* D) 81 *cm* E) 90 *cm*

Решение. C). Сите мали правоаголници се меѓусебно складни. Со a и b да ги означиме должините на страните. Од цртежот имаме $2a=5b$ и како $a=10\,cm$, добиваме $5b=20$, односно $b=4\,cm$. Според тоа, периметарот на големиот правоаголник е

$$L=6a+4b=6\cdot 10+4\cdot 4=76\,cm.$$

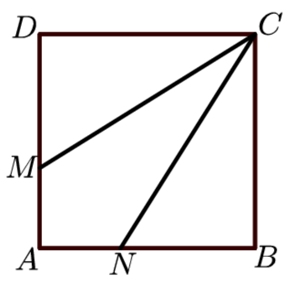
9. На цртежот десно се прикажани правоаголник со димензии 7×11 и две кружници, секоја од кои допира три страни на правоаголникот. Колкаво е растојанието меѓу центрите на кружниците



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. D). Радиусот на кружницата е еднаков на $7:2=3{,}5$. Според тоа, растојанието меѓу центрите на двете кружници е еднакво на $11-2\cdot 3{,}5=11-7=4$.

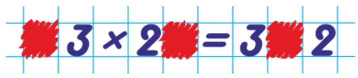
10. Должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на 3 *cm*. Точките M и N припаѓаат на страните AD и AB, соодветно, и се такви што отсечките CM и CN го делат квадратот на три делови со еднакви плоштини. Колкава е должината на отсечката DM?



A) 0,5 *cm* B) 1 *cm* C) 1,5 *cm* D) 2 *cm* E) 2,5 *cm*

Решение. D). Плоштината на квадратот е еднаква на $3^2=9\,cm^2$. Значи, плоштината на триаголникот CDM е еднаква на $\frac{1}{3}\cdot 9=3\,cm^2$. Според тоа, $\frac{\overline{CD}\cdot\overline{DM}}{2}=3$, од каде следува $\frac{3\overline{DM}}{2}=3$, т.е. $\overline{DM}=2\,cm$.

11. Пабло помножил два двоцифрени броја, а потоа избришал по една цифра од секој од трите броја, како што е прикажано на цртежот десно. Колку е збирот на три-те избришани цифри?



A) 5 B) 6 C) 9 D) 12 E) 14

Решение. B). Производот на бројот 3 со друг едноцифрен број дава резултат чија цифра на единиците е 2, ако бројот е 4. Сега имаме $\_3\cdot 24=3\_2$. Потоа, бидејќи $23\cdot 24=552$ и $13\cdot 24=312$, заклучуваме дека решение на бројниот ребус е $13\cdot 24=312$. Значи, трите избришани цифри се 1, 1 и 4, а нивниот збир е 6.

12. Правоаголник е поделен на 40 исти квадрати. Правоаголникот содржи повеќе од еден ред квадрати. Стојан го нашол средниот ред квадрати и истиот го обоил. Колку квадрати не обоил Стојан?

A) 20 B) 30 C) 32 D) 35 E) 39

Решение. **C).** Имаме, $40=1\cdot 40=2\cdot 20=4\cdot 10=5\cdot 8$. Сега, бидејќи Стојан го обоил средниот ред заклучуваме дека правоаголникот има 5 реда, и во еден ред има 8 квадрати. Бидејќи е обоен еден ред, останале необоени 4 реда, па затоа необоени останале $4\cdot 8=32$ квадрати.

13. Филип располага со вага која мери со точност од 10 g. Тој сака да ја измери тежината на учебникот по математика со точност до половина грам. Кој е најмалиот број идентични копии на учебникот кои Филип треба да ги употреби за да ја постигне саканата цел?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 50

Решение. **D).** Нека имаме n учебници. Тогаш масата на овие n книги ќе биде измерена со точност од 10 g. Значи, масата на еден учебник ќе биде определена со точност $\frac{10}{n}g$. Значи, потребно е да важи $\frac{10}{n}=0,5$, од каде следува $n=\frac{10}{0,5}=20$. Според тоа, потребни се 20 учебници.

14. Лав се наоѓа во едната од трите соби. На вратата на првата соба пишува „Лавот е тука“. На врата на втората соба пишува „Лавот не е тука“. На вратата на третата соба пишува „$2+3=2\times 3$“. Од трите реченици напишани на вратите само една е вистинита. Во која соба е лавот?

A) Во првата соба .

B) Во втората соба.

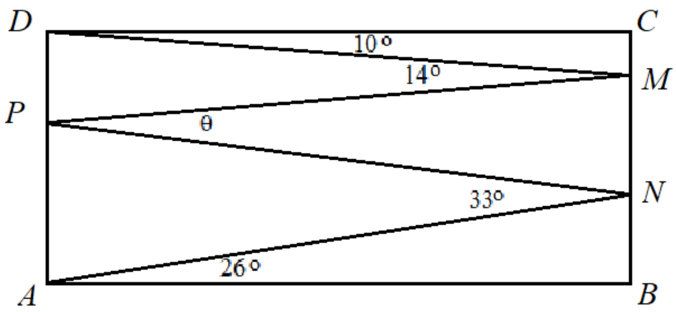
C) Во третата соба.

D) Може да биде во која било соба.

E) Може да биде во првата или втората соба.

Решение. **C).** Јасно, исказот на третата врата не е вистинит. Тогаш ако е вистинит исказот на првата врата, вистинит ќе биде и исказот на втората врата што е противречност. Значи, исказот на првата врата не е вистинит, а вистинит е исказот на втората врата. Тоа значи, лавот не е во првата и не е во втората соба, па останува лавот да е во третата соба.

15. Васко во правоаголник нацртал искршена линија при што формирал агли од $10^\circ, 14^\circ, 33^\circ$ и 26° (види цртеж).

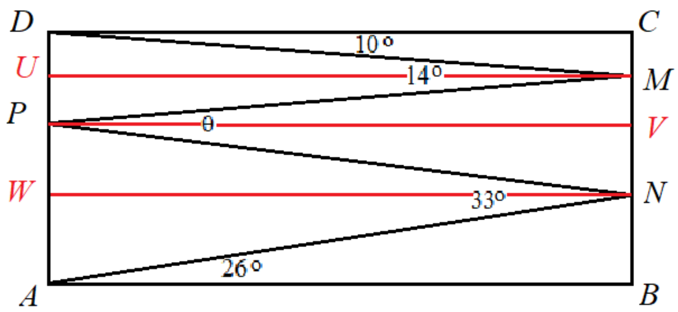


Колку е мерката на аголот θ ?

A) 11° B) 12° C) 16° D) 17° E) 33°

Решение. **A).** Нека MU, PV и NW се паралелни на страната AB на правоаголникот $ABCD$. Тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle VPM &= \measuredangle PMU \\ &= 14^\circ - \measuredangle UMD \\ &= 14^\circ - \measuredangle MDC \\ &= 14^\circ - 10^\circ = 4^\circ, \\ \measuredangle VPN &= \measuredangle PNW \\ &= 33^\circ - \measuredangle WNA \\ &= 33^\circ - \measuredangle NAB \\ &= 33^\circ - 26^\circ = 7^\circ.\end{aligned}$$



Според тоа,

$$\theta = \measuredangle VPM + \measuredangle VPN = 4^\circ + 7^\circ = 11^\circ.$$

16. Андреј, користејќи ги цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, и тоа само по еднаш, запишал неколку прости броеви помали од 100. Кој број мора да биде меѓу запишаните прости броеви?

A) 2 B) 5 C) 31 D) 41 E) 53

Решение. D). Цифрата 4 може да се употреби само во записот на двоцифрен број и тоа на местото на десетките. Имено, едноцифрениот број 4 е сложен, а секој двоцифрен број со цифра на единиците 4 е делив со 2, па затоа не е сложен број. Прости броеви со цифра на единиците 4 се: 41, 43 и 47. Бројот 47 отпаѓа бидејќи 7 не е меѓу дадените цифри. Ако го запишеме бројот 43, тогаш ни остануваат цифрите 1, 2 и 5. Сега, цифрата 1 мора да учествува во записот на двоцифрен број, па така можни се броевите: 12, 15, 21 и 51, кои се сложени броеви. Значи, мора да биде запишан бројот 41 и тоа е бараниот број. Притоа другите броеви кои можеме да ги запишеме се: 2, 3, 5 или 2, 53 или 5, 23.

17. Хотел на еден Хрватски остров се рекламира користејќи го слоганот: „350 сончеви денови секоја година!“. Ако рекламата е точна, колку најмалку денови во 2018 година треба да остане Вангел на островот за да биде сигурен дека во текот на одморот ќе има два последователни сончеви денови?

A) 17 B) 21 C) 31 D) 32 E) 35

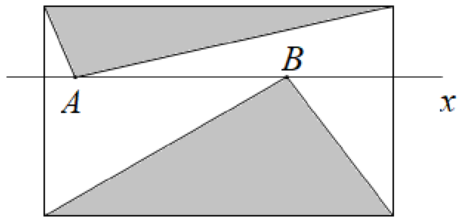
Решение. D). Бидејќи 2018. година не е престапна, таа има 365 дена. Од $365-350=15$ добиваме дека на островот има 15 облачни денови. Најдолго треба да се остане ако деновите наизменично се менуваат сончев ден и облачен ден.

Ако првиот ден е сончев, тогаш првите 15 парни денови 2, 4, 6,..., 30 се облачни, па затоа 31. и 32. ден се сончеви.

Ако првиот ден е облачен, тогаш првите 15 непрани денови 1, 3, ..., 29 се облачни, па затоа 30. и 31. ден се сончеви.

Значи, во неповолниот случај Вангел мора да остане најмалку 32 дена.

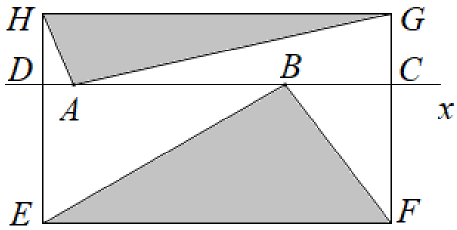
18. На цртежот десно се дадени правоаголник, права x која е паралелна на страната на правоаголникот и точки A и B од правата x. Збирот на плоштините на обоените делови на правоаголникот е еднаков на $10\,cm^2$. Колкава е плоштината на правоаголникот?



A) $18\,cm^2$ B) $20\,cm^2$ C) $22\,cm^2$ D) $24\,cm^2$

E) Зависи од положбата на точките A и B

Решение. **B).** При ознаки како на цртежот десно правоаголник $EFCD$ и EFB триаголникот имаат заедничка основа EF и еднакви висини, а исто важи и за правоаголникот $GHDC$ и триаголникот GHA. Затоа важи



$$P_{EFGH} = P_{AFCD} + P_{GHDC} = 2P_{EFB} + 2P_{GHA}$$
$$= 2(P_{EFB} + P_{GHA}) = 2 \cdot 10 = 20\,cm^2.$$

19. Матео во секое поле на 3×3 табелата запишал различен број од 1 до 9, а потоа ги нашол збировите на броевите во секој ред и секоја колона. Пет од збировите кои ги добил се: 12, 13, 15, 16 и 17. Кој е шестиот збир?

A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

Решение. A). Збирот на сите броеви запишани во табелата е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Збирот на збировите на броевите запишани во трите редици е еднаков на збирот на сите броеви запишани во табелата, а истото важи и за збирот на збировите на броевите запишани во трите колони. Значи збирот на овие шест збира е два пати поголем од збирот на броевите на сите броеви запишани во табелата. Познати ни се пет од овие шест збира и нека шестиот збир го означиме со a. Имамр

$$a+12+13+15+16+17=2\cdot 45,$$
$$a+73=90,$$
$$a=17.$$

6	8	3
1	7	5
9	2	4

Еден распоред на броевите кој ги задоволува условите на задачата е даден на цртежот десно.

20. На една права од лево кон десно се означени единаесет точки. Збирот на сите растојанија од првата до останатите точки е еднаков на 2018. Збирот на сите растојанија од втората до останатите точки е еднаков на 2000. Колкаво е растојанието меѓу првата и втората точка?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. B). Одејќи од лево кон десно точките да ги означиме со $A_1, A_2, A_3 ..., A_{10}, A_{11}$ (направи цртеж). Тогаш

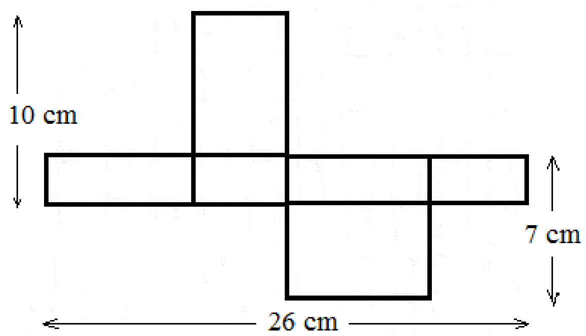
$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_3}+\overline{A_1A_4}+...+\overline{A_1A_{10}}+\overline{A_1A_{11}}=2018$$
$$\overline{A_1A_2}+(\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3})+...+(\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{10}})+(\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{11}})=2018$$
$$9\overline{A_1A_2}+(\overline{A_2A_1}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_2A_4}+...+\overline{A_2A_{10}}+\overline{A_2A_{11}})=2018$$
$$9\overline{A_1A_2}+2000=2018,$$
$$\overline{A_1A_2}=2.$$

21. За член на училишниот совет гласаат 130 ученици. Избран е кандидатот кој ќе освои најмногу гласови. На изборите се јавиле учениците: Софија, Кирил и Александар. До овој момент Софија добила 24 гласови, Кирил добил 29 гласови и Александар добил 37 гласови. Уште колку ученици треба да гласаат за Александар за тој сигурно да победи на изборите?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Решение. E). До овој момент гласале $24+29+37=90$ ученици. Значи, треба да гласаат уште $130-90=40$ ученици. Александар има $37-29=8$ гласови повеќе од Кирил. Значи, ако 8 од овие 40 ученици гласат за Кирил, тогаш Александар и Кирил ќе имаат еднаков број гласови, а остануваат уште $40-8=32$ гласа. Според тоа, за да победи на изборите за Александар треба да гласаат повеќе од половината од овие 32 ученици. Значи, треба да гласаат $32:2+1=17$ ученици.

22. На цртежот десно е прикажан мрежа на квадар, на која се означени неколку должини. Колку е волуменот на овој квадар?

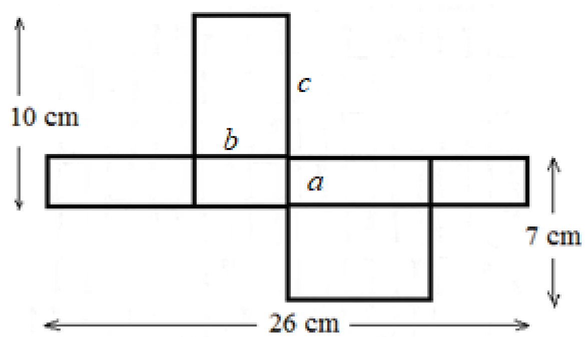


A) $43\,cm^3$ B) $70\,cm^3$ C) $80\,cm^3$

D) $100\,cm^3$ E) $120\,cm^3$

Решение. C). При ознаки како на цртежот десно имаме

$$a+b=7,$$
$$a+c=10,$$
$$2b+2c=26.$$



Спотред тоа, $b+c=13$, па затоа $2a+2b+2c=30$, од каде добиваме $a+b+c=15$. Сега лесно се добива дека $a=2, b=5, c=8$. Значи, волуменот на квадарот е еднаков на $2\cdot 5\cdot 8=80\,cm^3$.

23. Пабло треба да запише по еден број во секое квадратче на границата на табела со димензии 5×6. Бројот запишан во секое квадратче треба да биде еднаков на збирот на броевите запишани во сосед-ните квадратчиња од границата на табелата (соседни се квадратчи-њата кои имаат заедничка страна). Два броја веќе се запишани во табелата (цртеж десно). Кој број ќе го запише Пабло во полето означено со x?

10					3
	x				

A) 10 B) 7 C) 13 D) -13 E) -3

Решение. **B).** При ознаки како на цртежот десно имаме: $10+b=a$, $a+c=b$, па затоа $10+a+c=a$, т.е. $c=-10$. Сега имаме:

10	*a*	*b*	*c*	*d*	3
e					
f					
g					
h	*x*				

$3+c=d$, па е $d=-7$,

$b+d=c$, па е $b=-3$,

$a+c=b$, па е $a=7$,

$e+a=10$, па е $e=3$,

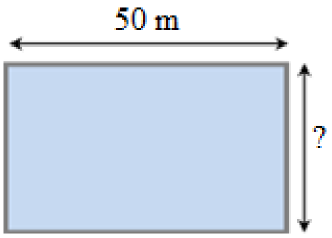
$f+10=e$, па е $f=-7$,

$g+e=f$, па е $g=-10$,

$h+f=g$, па е $h=-3$,

$g+x=h$, па е $x=7$.

24. Симон и Јован биле на базен (цртеж десно). Симон трчал околу базенот, а Јован ја пливал должината на базенот. Симон трчал трипати побрзо отколку што пливал Јован. Јован шест пати ја препливал должината на



базенот, а во исто време Симон пет пати завртел околу базенот. Колку е широк базенот?

A) 25 m B) 40 m C) 50 m D) 80 m E) 180 m

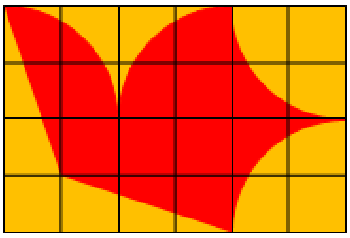
Решение. **B).** Ако a е брзината со која плива Јован, тогаш брзината со која трча Симон е $3a$. Нека x ширината на базенот. Јован испливал шест должини на базенот, односно $6 \cdot 50 = 300\ m$. За тоа време Симон истрчал

$$5(100+2x)\ m = (500+10x)\ m.$$

Според тоа,

$$\frac{300}{a} = \frac{500+10x}{3a},$$
$$900 = 500 + 10x,$$
$$10x = 400,$$
$$x = 40\ m.$$

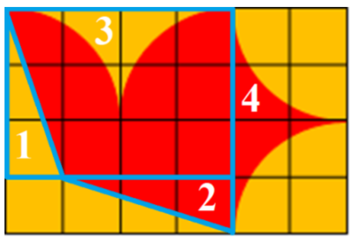
25. На цртежот десно е прикажано знамето на извидничкиот клуб на Фросина, на кое е нацртан гулаб во лет. Границата на гулабот е составена само од отсечки и делови од кружница. Површната на гулабот има плоштина $192\ cm^2$. Кои се димензиите на знамето?



A) $6\ cm \times 4\ cm$ B) $12\ cm \times 8\ cm$ C) $20\ cm \times 12\ cm$

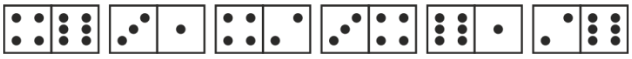
D) $24\ cm \times 16\ cm$ E) $30\ cm \times 20\ cm$

Решение. **D).** Со повлекувањето на сините отсечки (цртеж десно) ги добиваме портокаловиот триаголник 1 и црвениот триаголник 2 кои се складни. Понатаму, складни се и портокаловиот лик 3 и црвениот лик 4. Оттука плоштината на ликот на гулабот е еднаква на плоштината на правоаголникот кој е соста-



вен со 12 складни квадрати кои ја формираат мрежата. Значи, плоштината на еден мал квадрат е $192:12=16\,cm^2$, па затоа должината на неговата страна е $4\,cm$. Значи, димензиите на знамето се $4\cdot 4=16\,cm$ и $6\cdot 4=24\,cm$.

26. Домино плочките се правилно наредени ако две домина кои се допираат имаат ист број точки на соседните половинки.

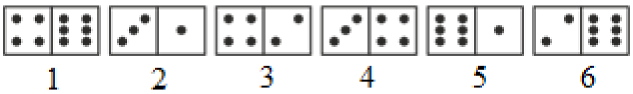


Павле наредил шест домина како што е прикажано на цртежот. Тој во еден потез може или да ги замени местата на две домина или за 180° да ротира едно домина. Кој е најмалиот број потези што треба да ги направи Павле за доминатa да се правилно наредени?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

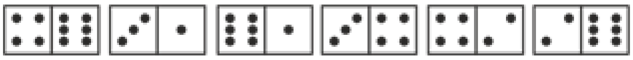
E) тоа не е можно да се направи

Решение. C). Домино плочките да ги означиме од лево кон десно со броевите од 1 до 6.



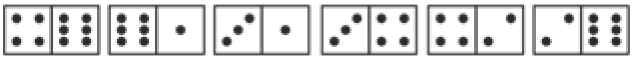
Забележуваме дека на шесте плочки има 3 четворки, 3 шестки, 2 единици, 2 двојки и 2 тројки. Притоа четворка и шестка се наоѓаат на краевите на плочките, па затоа најмал број потези би бил ако тие останат на своите места. Понатаму, имаме пет пара со еднаков број точки кои треба правилно да ги поставиме, а ниту еден од нив не е правилно поставен. Притоа, ако земеме предвид дека со поместување или ротација на една плочка можеме правилно да поставиме најмногу два пара точки, заклучуваме дека ни се потребни најмалку три потези. Дека тоа може да се постигне со три потези доволно е да постапиме на следниов начин.

Прв потез. За да двојките се една до друга, бидејќи едната двојка останува на своето место доволно е местата да ги заменат плочките 3 и 5, по што состојбата е:

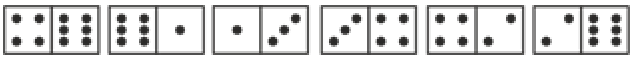


при што и двете четворки се една до друга.

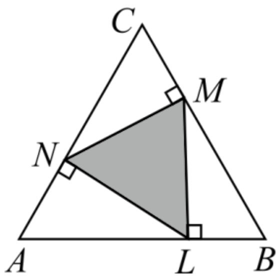
Втор потез. Понатаму, за да третата шестка дојде на место до првата шестка треба домината 2 и 5 да ги заменат местата, по што состојбата е:



Трет потез. Со ротација на доминото 2 единиците и тројките ќе се поставaт правилно, т.е. сите плочки ќа бидат правилно наместени. Состојбата е:



27. Точките N, M и L од страните на рамностраниот триаголник ABC, се такви што $NM \perp BC$, $ML \perp AB$ и $LN \perp AC$ (види цртеж). Плоштината на триаголникот ABC е 36. Колкава е плоштината на триаголникот LMN?



A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

Решение. B). Триаголникот ABC е рамностран, па затоа $\measuredangle NAL = 60^\circ$, што значи $\measuredangle ALN = 30^\circ$. Според тоа, $\measuredangle NLM = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle LMN = \measuredangle MNL = 60^\circ$, што значи дека триаголникот LMN е рамностран. Понатаму, од $\measuredangle NAL = 60^\circ$ и $\measuredangle ALN = 30^\circ$ следува дека триаголникот ALN е половина од рамностран триаголник, а истото важи и за триаголниците BML и CNM. Но, $\overline{LM}=\overline{MN}=\overline{NL}$, па затоа триаголниците ALN, BML и CNM се складни со катети x и $2x$. Јасно, $x+2x=a$, т.е. $x=\frac{a}{3}$ каде a е должината на страната на дадениот триаголник. Значи, должината на страната на триаголникот LMN е $\sqrt{(2x)^2-x^2}=x\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, па затоа неговата плоштина е $\frac{1}{4}(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2\sqrt{3}=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}\cdot 36=12$.

28. Андреј, Бојан и Велко отишле на пазар. Бојан потрошил 15% од сумата која ја потрошил Велко, а Андреј потрошил 60% повеќе од сумата која ја потрошил Велко. Тројцата заедно потрошиле 5500 денари. Колку денари потрошил Андреј?

A) 300 B) 2000 C) 2500 D) 2600 E) 3200

Решение. **E).** Нека Велко потрошил a денари. Тогаш Бојан потрошил $0,15a$ денари и Андреј потрошил $1,6a$ денари. Според тоа,

$$a+0,15a+1,6a=5500,$$
$$2,75a=5500,$$
$$a=2000.$$

Значи, Андреј потрошил $1,6\cdot 2000=3200$ денари.

29. Виолета неколку пати скокала во далечина. Просечната должина на направените скокови била 3,80 *m*. Во следниот скок таа скокнала 3,99 *m* и просечната должина на досегашните скокови се зголемила на 3,81 *m*. Колку треба да скокне во следниот скок за да просечната должина на сите направени скокови биде 3,82 m?

A) 3,97 *m* B) 4,00 *m* C) 4,01 *m* D) 4,03 *m* E) 4,04 *m*

Решение. **C).** Ако Виолета во n скокови $a_1,a_2,...,a_n$ имала просек на скоковите $3,80\,m$, тогаш

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=3{,}80,$$

од каде добиваме дека $a_1+a_2+...+a_n=3{,}80n$. Понатаму, со скокот од 3,99 m просечната должина на скоковите била 3,81 m, па затоа

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+3{,}99}{n+1}=3{,}81,$$

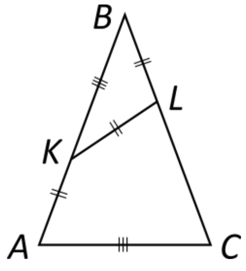
односно $a_1+a_2+...+a_n+3{,}99=3{,}81(n+1)$. Значи,

$$3{,}80n+3{,}99=3{,}81(n+1),$$

т.е. $0{,}01n=0{,}18$, од каде добиваме $n=18$. Следниот скок нека е со должина x. Тогаш треба да важи

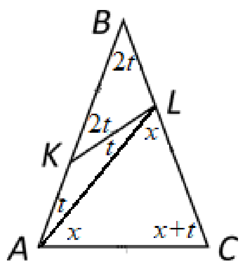
$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+3{,}99+x}{18+2}=3{,}82,$$
$$a_1+a_2+...+a_n+3{,}99+x=20\cdot 3{,}82,$$
$$3{,}8\cdot 18+3{,}99+x=76{,}4,$$
$$x=4{,}01\,m.$$

30. Во рамнокрак триаголник ABC, точките K и L припаѓаат на страните AB и BC соодветни и важи $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LB}$ и $\overline{KB}=\overline{AC}$. Колкав е аголот ACB?



A) 30° B) 35° C) 36° D) 40° E) 44°

Решение. C). Триаголник ABC е рамнокрак, па затоа $\overline{CL}=\overline{KB}=\overline{AC}$. Според тоа, триаголниците ACL, ALK, BKL се рамнокраки, па ако се земе предвид дека надворешниот агол на триаголникот е еднаков на збирот на неговите два несоседни внатрешни агли ги добиваме ознаките како на цртежот десно. Сега, $2t+2t=x+t$, од каде добиваме $x=3t$. $2x+4t=180^\circ$, од каде добиваме $10t=180^\circ$, т.е. $2t=36^\circ$. Значи, $\measuredangle ACB=2t=36^\circ$.



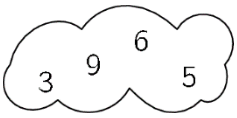
Kadett (осмо и деветто одделение) 2019

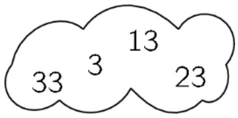
Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

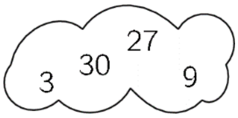
Не е дозволено користење на калкулатор.

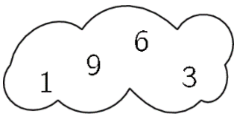
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

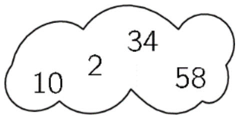
1. Кој од облаците содржи четири парни броеви?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. **E).** Во облаците A, B, C, D соодветно непарни броеви се 3, 5, 9; 3, 13, 23, 33; 3, 9, 27; 1, 3, 9, а додека во облакот E сите четири броеви се парни.

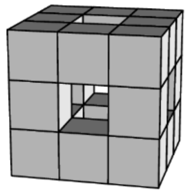
2. Колку часа има во десет чевртини од часот?

A) 40 B) 5 и половина час C) 4

D) 3 E) 2 часа и половина час

Решение. **E).** Од $\frac{10}{4}h=\frac{5}{2}h=2{,}5\,h$ следува дека во десет четвртини часа има 2 часа и половина час.

3. Коцка со димензии $3\times3\times3$ е направена од коцки со димензии $1\times1\times1$. Средните коцки кои се од напред и од назад, од лево и од десно, од врвот и дното на голе-

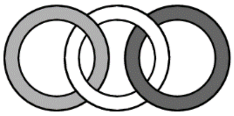


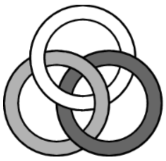
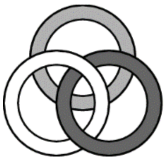
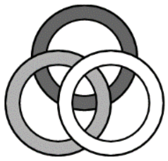
мата коцка и коцката во средината, се извадени, како што е прикажано на цртежот. Колку $1\times1\times1$ коцки се останати?

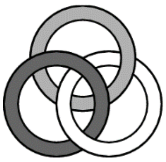
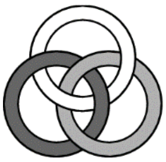
A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22

Решение. C). Коцката $3\times3\times3$ има 27 коцки $1\times1\times1$. Коцката има 6 ѕида. Бидејќи од секој ѕид е извадена по 1 коцка и е извадена коцката која е во средината на коцката $3\times3\times3$, извадени се 7 коцки. Значи вкупно остануваат $27-7=20$ коцки.

4. Три прстени се поврзани како на цртежот. На кој од цртежите подолу трите прстени се поврзани на ист начин како на почетниот цртеж?



A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. D). На почетниот цртеж сивиот прстен е поврзан со белиот прстен, белиот со црниот прстен, но сивиот и црниот прстен не се поврзани.

На цртежот A) сите прстени се поврзани меѓусебно.

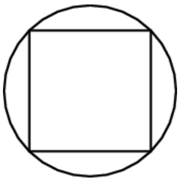
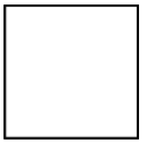
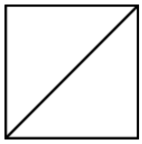
На цртежот B) само белиот и црниот прстен се поврзани.

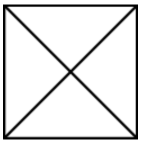
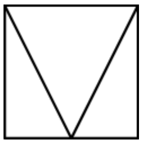
На цртежот C) никој од прстените не е поврзан со друг прстен.

На цртежот E) се поврзани сивиот и црниот прстен кои не се поврзани на дадениот цртеж.

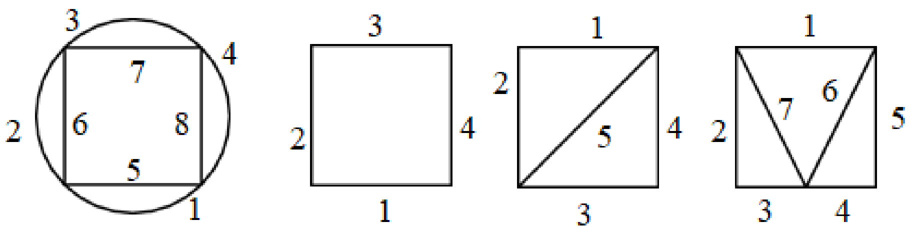
На цртежот D) сивиот прстен е поврзан со белиот прстен, белиот со црниот прстен, но сивиот и црниот прстен не се поврзани, што е исто како на дадениот цртеж.

5. Кој од следниве цртежи не може да се нацрта без да се крева молив от од листот или без да се црта некоја од линиите по втор пат?

A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. D). Кога цртаме само низ почетното и крајното теме на патот кој го исцртуваме можеме да поминеме по непарен број линии чија крајна точка е тоа теме. Имено, низ другите темиња имаме влез и излез, што значи при секое поминување имаме парен број линии. Тоа значи дека фигурата која има повеќе од две темиња поврзани со непарен број линии не може да се нацрта. Во нашиот случај тоа е фигурата D). На долните цртежи е покажано како може да се нацртаат останатите фигури.



6. Кога пет пријатели се сретнале, секој од нив дал по едно колаче на останатите. Потоа секој од нив ги изел колачињата кои му биле дадени од пријателите. На крајот вкупниот број на колачиња се намалил за половина во однос на почетниот број. Колку колачиња имале петте пријатели на почетокот?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 40 E) 60

Решение. D). Секој од петте пријатели добил по четири колачиња од останатите, а потоа секој ги изел добиените колачиња. Значи, тие вкупно изеле $5\cdot4=20$ колачиња. Конечно, на почетокот петте пријатели имале вкупно $20\cdot2=40$ колачиња.

7. Во една трка, Ласте стигнал на целта пред Максим, Виктор стигнал на целта по Јане, Максим стигнал пред Јане, а Едвин стигнал на целта пред Виктор. Кој од петте тркачи, стигнал на целта последен?

A) Виктор B) Максим C) Ласте D) Јане E) Едвин

Решение. A). Ако со почетните букви на имињата ги означиме времињата на пристигнување на натпреварувачите, добиваме

$$L<M,\ J<V,\ M<J,\ E<V, \text{ т.е. } L<M<J<V \text{ и } E<V.$$

Значи, последен стигнал Виктор.

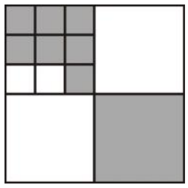
8. Нумерирањето на страниците на една книга почнува од бројот 1. Броевите кои се искористени за нумерирање на страниците ја содржат цифрата 0 точно пет пати и цифрата 8 точно шест пати. Со кој број е нумерирана последната страница?

A) 48 B) 58 C) 60 D) 68 E) 88

Решение. B). Цифрата 0 е употребена точно пет пати, што значи за броевите 10, 20, 30, 40 и 50. Цифрата 8 е употребена шест пати, што значи за броевите 8, 18, 28, 38, 48 и 58.

Бидејќи книгата има парен број страници (по две на секој лист) последниот број мора да е парен. Прв парен број по бројот 58 е бројот 60, но тој не може да се употреби за нумерирање на книгата бидејќи тогаш цифрата 0 би била употребена шест пати. Значи, книгата има 58 страници и со бројот 58 е нумерирана последната страница.

9. Голем квадрат е поделен на помали квадрати (цртеж десно). Колкав дел од квадратот е обоен со сиво?



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{12}$

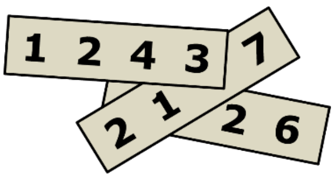
Решение. D). Големиот сив квадрат е $\frac{1}{4}$ од целиот квадрат. Малите сиви квадрати се $\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}$ од големиот квадрат. Значи, сивата површина е $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}=\frac{9+7}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ од големиот квадрат.

10. Андреј поделил неколку јаболки на шест еднакви купчиња. Борис истиот број на јаболки ги поделил на пет еднакви купчиња. Борис забележал дека секое од неговите купчиња има по две јаболка повеќе од секое од купчињата јаболка на Андреј. Колку јаболки има Андреј?

A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

Решение. A). Ако со x го означиме бројот на јаболката во купчињата на Андреј, тогаш во купчињата на Борис има $x+2$ јаболка. Значи, $6x=5(x+2)$, од каде добиваме $x=10$. Значи, Андреј има $6\cdot 10=60$ јаболка.

11. Три четирицифрени броеви се запишани на три различни парчиња од хартија. Парчињата од хартија се наместени така што три цифри се покриени, како што е прикажано на цртежот.



Збирот на трите четирицифрени броеви е 10126. Кои се покриените цифри?

A) 5, 6 и 7 B) 4, 5 и 7 C) 4, 6 и 7 D) 4, 5 и 6 E) 3, 5 и 6

Решение. A). Од цртежот следува дека броевите се 1243, $2107+10a$ и $1000b+100c+26$, па затоа

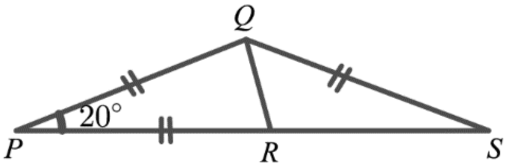
$$1243+2107+10a+1000b+100c+26=10126,$$
$$1000b+100c+10a=6750,$$
$$100b+10c+a=675.$$

Според тоа, $a=5, c=7, b=6$.

12. На цртежот десно важи

$\overline{PQ}=\overline{PR}=\overline{QS}$ и $\measuredangle QPR=20°$.

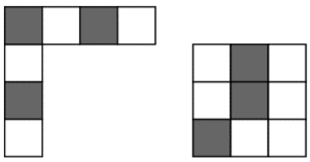
Колку е мерката на $\measuredangle RQS$?

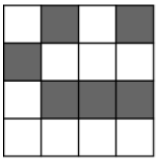


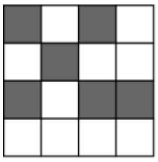
A) 50° B) 60° C) 65° D) 70° E) 75°

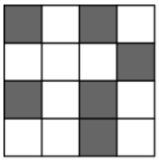
Решение. **B).** Триаголниците PQR и PQS се рамнокраки. Тоа значи дека $\measuredangle RSQ=20°$ и $\measuredangle PRQ=\measuredangle PQR=80°$. Значи, $\measuredangle QRS=100°$, од каде $\measuredangle RQS=60°$.

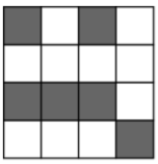
13. Кој од дадените квадрати не може да се формира со помош на фигурите прикажани на цртежот десно?

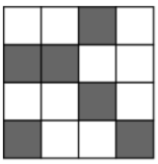


A) 

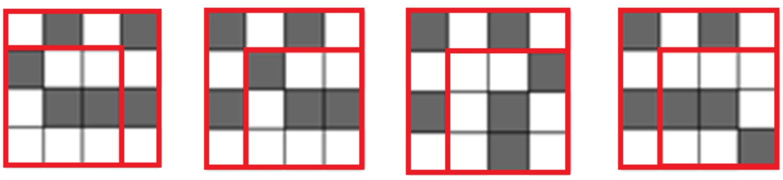
B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. **E).** Квадратите A, B, C, D може да се формираат како што и прекажано на долните цртежи.

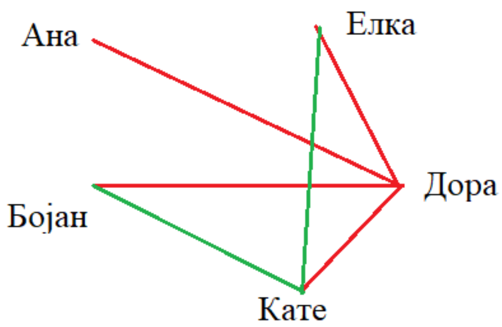


Квадратот E не содржи фигура L од дадениот облик, па не може да се состави.

14. Ана, Бојан, Кате, Дора и Елка се сретнале на забава и се ракувале точно по еднаш со секој со кој се познавале. Ана се ракувала еднаш, Бојан се ракувал двапати, Кате се ракувала трипати и Дора се ракувала четири пати. Колку пати се ракувала Елка?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Решение. B). Бидејќи Дора се ракувала четири пати, тоа значи дека се ракувала со сите. Од друга страна, бидејќи Ана се ракувала само еднаш, тоа значи дека се ракувал само со Дора. Кате се ракувала три пати, па како не се ракувала со Ана, таа се ракувала со Дора, со Бојан и со Елка. Бојан се ракувал двапати и тоа со Дора и со Кате.



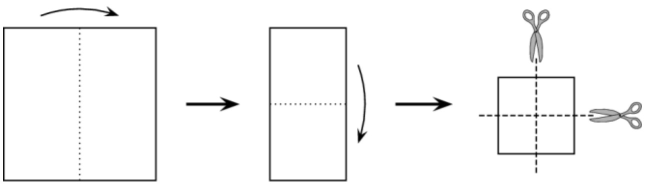
Конечно, добиваме дека Елка се ракувала Дора и со Кате, односно два пати. Ракувањата се прикажани на цртежот.

15. Филип играл кошарка. Во првите 20 шутеви на кошот, Филип погодил 55% од шутевите. Во следните пет шутеви, неговиот процент на успешност се искачил на 56%. Колку од последните пет шутеви ги погодил Филип?

A) 1 B) 2 **C)** 3 D) 4 E) 5

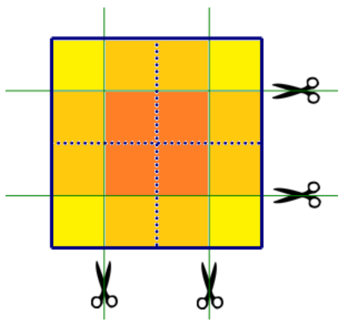
Решение. C). Во првите 20 шутеви на кошот, Филип погодил 55% од шутевите, односно тој погодил $(20 \cdot 55):100 = 11$ шутеви. Ако во 25 шутеви има успешност 56%, добиваме дека Филип погодил $(25 \cdot 56):100 = 14$ шутеви. Значи, во последните 5 шутеви Филип погодил $14 - 11 = 3$ шутеви.

16. Јована два пати превиткала квадратно парче хартија и тогаш два пати го пресекла како на цртежот десно. Колку парчиња хартија во форма на квадрат добила Јована?

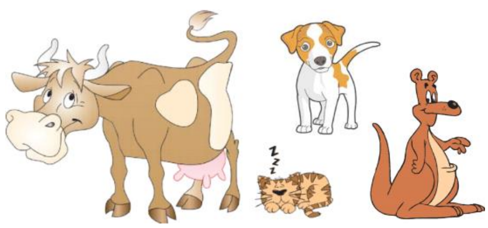


А) 3 В) 4 С) 5 D) 6 Е) 8

Решение. **С).** На цртежот десно со испрекинати линии се прикажани местата на кои Јована го превиткала листот, а со цели линии се прикажани местата по кои листот е пресечен. При сечењето се добиени 4 мали квадрати, 4 правоаголници составени од по два мали квадрати и 1 квадрат составен од четири мали квадрати. Значи, Јована добила $4+1=5$ делови во форма на квадрат.



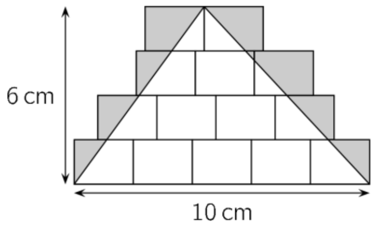
17. Матео чува кучиња, крави, мачки и кенгури како миленичиња. Тој и кажал на Елена дека има вкупно 24 миленици, потоа $\frac{1}{8}$ од нив се кучиња, $\frac{3}{4}$ од нив не се крави и $\frac{2}{3}$ од нив не се мачки. Колку кенгури чува Матео?



А) 4 В) 5 С) 6 D) 7 Е) 8

Решение. **D).** Од условот на задачата имаме дека тој чува $24:8=3$ кучиња. Бидејќи $\frac{3}{4}$ од нив не се крави, тоа значи дека $\frac{1}{4}$ од нив се крави, т.е. Матео чува $24:4=6$ крави. Од миленичињата $\frac{2}{3}$ не се мачки, односно $\frac{1}{3}$ се мачки, па тој чува $24:3=8$ мачки. Конечно, бројот на кенгури кој ги чува Матео е $24-(3+6+8)=24-17=7$.

18. Неколку идентични правоаголници се нацртани на подот. Триаголник со основа 10 *cm* и висина 6 *cm* е нацртан врз нив, како на цртежот. Делот надвор од триаголникот е обоен со сиво. Колкава е плоштината на делот обоен во сиво?



A) 10 cm^2 B) 12 cm^2 C) 14 cm^2 D) 15 cm^2 E) 21 cm^2

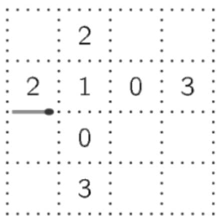
Решение. B). Секој од правоаголниците нацртани на подот има должина $2\,cm$ и ширина $1{,}5\,cm$. Плоштината на еден таков правоагол-ник е $2\cdot 1{,}5 = 3\,cm^2$, од каде добиваме дека плоштината на фигурата составена од правоаголниците е $14\cdot 3 = 42\,cm^2$. Плоштината на триаголникот е $\frac{10\cdot 6}{2} = 30\,cm^2$. Значи, плоштината на делот обоен во сиво е $42 - 30 = 12\,cm^2$.

19. Пабло има две цилиндрични свеќи со различни висини и дијаметри. Првата свеќа изгорува за 6 часа, додека втората свеќа изгорува за 8 часа. Тој ги запалил двете свеќи во ист момент и три часа потоа двете свеќи биле со иста височина. Кој е односот на нивните почетни височини?

A) $4:3$ B) $8:5$ C) $5:4$ D) $3:5$ E) $7:3$

Решение. C). По три часа од првата свеќа ќе остане $\frac{1}{2}$, додека од втората свеќа, ќе остане $\frac{5}{8}$. Значи, односот на нивните оригинални висини е $\frac{5}{8}:\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

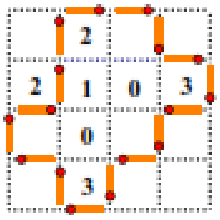
20. Ана сака да направи пат од чкорчиња, притоа користејќи што е можно помалку чкорчиња. Таа го става секое чкорче на парче хартија, како на цртежот, во



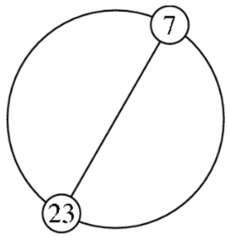
правец на испрекинатите линиии. Нејзиот пат треба да стигне до левиот дел од чкорчето кое е веќе поставено. Бројот кој се наоѓа во едно квадратче го означуваат бројот на чкорчињата кои треба да бидат поставени околу тоа квадратче. Колку чкорчиња ќе употреби Ана?

A) 12 B) 14 **C)** 16 D) 18 E) 20

Решение. C). Патот кој треба да го направи Ана е прикажан на цртежот десно. Според тоа, за правење на патот Ана ќе употреби 16 чкорчиња.



21. Сите природни броеви од 1 до n, во растечки редослед, се запишани на еднакво растојаниена кружницата. Дијаметарот на кружницата минува низ точките во кои се запишани броевите 7 и 23, како на цртежот. Која е вредноста на n?



A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 38

Решение. B). Броевите се запишани на еднакво растојание на кружницата, броевите 7 и 23 лежат на дијаметар на кружницата и $23-7=16$. Тоа значи дека има по 15 броеви запишани од двете страни на дијаметарот.

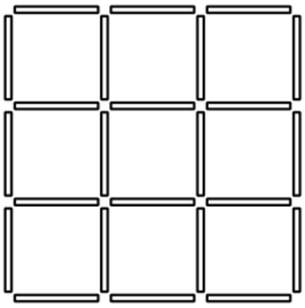
Според тоа, вкупно има запишано $2\cdot15+2=32$ броеви, односно $n=32$.

22. Трговецот Ласте набавил 50 шишиња минерална вода, секое по цена 10 денари. Откако продал 40 шишиња, тој имал 100 денари повеќе од парите кои ги платил за набавката на целата вода. Покасно тој, по иста продажна цена, ги продал и преостанатите шишиња вода. Колку пари добил Ласте од продажбата на водата?

A) 700 ден B) 750 ден C) 800 ден D) 900 ден E) 1000 ден

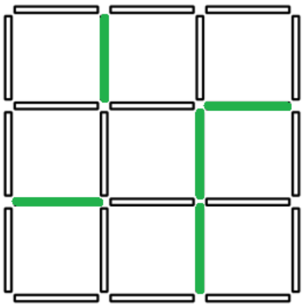
Решение. **А).** За набавката на водата Ласте потрошил $50 \cdot 10 = 500$ денари. Тој 40 шишиња продал за $500 + 100 = 600$ денари, што значи 1 шише продал за $600 : 40 = 15$ денари. Конечно, од продажбата на целата вода Ласте добил $50 \cdot 15 = 750$ денари.

23. Наташа има стапчиња со должина 1. Стапчињата се сини, црвени, жолти или зелени. Таа сака да направи 3×3 мрежа, како на цртежот, така што секое 1×1 квадратче во мрежата има четири страни обоени во различни бои. Кој е најмалиот број на зелени стапчиња кои таа може да ги искористи?

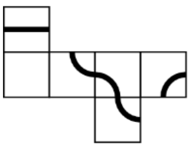
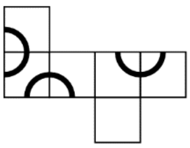
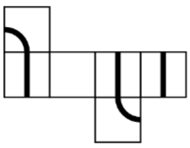


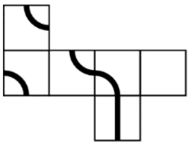
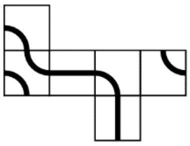
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Секое од малите 1×1 квадратчиња треба да има страни кои се обоени во различни бои. За да бидат искористени што е можно помалку зелени стапчиња, потребно е зелените стапчиња да бидат поставени така што ќе бидат заедничка страна за две мали квадратчиња. Тоа може да се направи на повеќе начини. Еден од нив е прикажан на цртежот десно. Значи, најмалку Наташа може да искористи 5 зелени стапчиња.

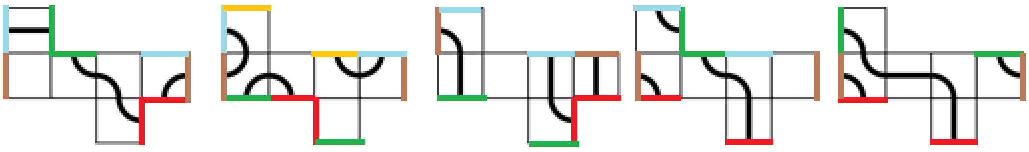


24. Мравка се движи по означената линија на површината на коцка, се додека не се врати на почетната позиција. Од која следниве мрежи може да се состави коцка, така што вакво патување е можно?

A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. **E).** Да ги означиме со иста боја рабовите кои се поврзуваат при формирање на коцката.



A) B) C) D) E)

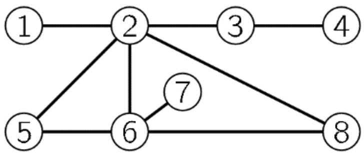
Како што можеме да видиме само на мрежата E) сите линии се надоврзуваат во затворена линија.

25. Елизабета има торба со 60 чоколади. Таа изела една десетина во понеделникот, потоа една деветина од остатокот во вторник, потоа една осмина од остатокот во среда, потоа една седмина од остатокот во четвртокот и така понатаму се додека не изела една половина од преостанатите чоколади од претходниот ден. Колку чоколади ѝ останале?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Решение. **E).** Елизабета во понеделникот изела $\frac{1}{10}\cdot 60=6$ чоколади, па ѝ останале 54 чоколади. Во вторникот изела $\frac{1}{9}\cdot 54=6$ чоколади, па ѝ останале 48 чоколади. Потоа изела $\frac{1}{8}\cdot 48=6$ чоколади, па останале 42 чоколади, па изела $\frac{1}{7}\cdot 42=6$ чоколади па ѝ останале 36 чоколади. Наредниот ден изелела $\frac{1}{6}\cdot 36=6$ чоколади, па ѝ останале 30 чоколади. Утредента изела $\frac{1}{5}\cdot 30=6$ чоколади, па ѝ останале 24 чоколади. Потоа, наредниот ден изела $\frac{1}{4}\cdot 24=6$ чоколади, па останале 18 чоколади, па потоа изела $\frac{1}{3}\cdot 18=6$ чоколади, па ѝ останале 12 чоколади. Деветтиот ден изела половина од чоколадите, односно изела $\frac{1}{2}\cdot 12=6$ чоколади, па ѝ останале 6 чоколади.

26. Андреј ги обоил секој од осумте кругови на цртежот црвено, жолто или сино, така што било кои два круга кои се поврзани со линија не се обоени во иста боја. Кои два круга мора да бидат обоени во иста боја?



A) 5 и 8 B) 1 и 6 C) 2 и 7 D) 4 и 5 E) 3 и 6

Решение. A). Броевите 5 и 8 се истовремено поврзани со броевите 2 и 6. Но, броевите 2 и 6 се поврзани меѓу себе, па круговите во кои се тие броеви мора да бидат обоени во различни бои. Сега, кругот 5 мора да е обоен во различни бои од 2 и 6, а исто и кругот 8 мора да е обоен во различни бои од 2 и 6. Но, Андреј бои во три бои, па затоа 5 и 8 мора да се обоени во иста боја.

27. Кога Весна и Маја ги споредиле своите заштеди, заклучиле дека односот помеѓу нивните заштеди е $5:3$. Весна купила таблет кој чини 160 евра, па односот на нивните заштеди се променил во $3:5$. Колку пари имала Весна пред да го купи таблетот?

A) 192 B) 200 **C)** 250 D) 400 E) 420

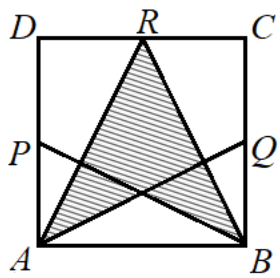
Решение. C). Нека со x ја означиме заштедата на Весна, а со y заштедата на Маја. Тогаш од условот на задачата имаме дека $x:y=5:3$ и $(x-160):y=3:5$. Од првата равенка добиваме дека $y=\frac{3x}{5}$. Со замена во втората равенка добиваме $5x-800=3\cdot\frac{3x}{5}$, од каде добиваме $x=250$ евра, $y=150$ евра.

28. Неколку тима од по тројца шахисти учествуваат на турнир во шах. Секој шахист од тимот игра точно еднаш против секој шахист од сите останати тимови. Поради организациски причини вкупно на турнирот може да се одиграат најмногу 250 партии шах. Колку најмногу тимови може да учествуваат на овој турнир?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

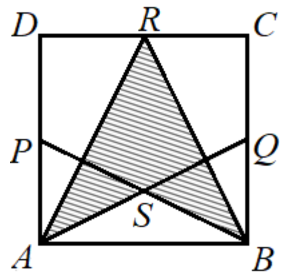
Решение. **E).** Нека на турнирот учествуваат n тимови. Тогаш вкупниот број шахисти е $3n$. Бидејќи секој шахист игра со сите шахисти од другите тимови добиваме дена секој шахист игра $3n-3$ партии. Значи, на турнирот треба да се одиграат $\frac{3n(3n-3)}{2}$ партии. Сега важи $\frac{3n(3n-3)}{2} \leq 250$, од каде добиваме $n(n-1) \leq \frac{500}{9} = 55\frac{5}{9}$. Сега, бидејќи $7 \cdot 6 = 42 < 55\frac{5}{9} < 56 = 8 \cdot 7$ заклучуваме дека на турнирот може да учествуваат најмногу 7 тимови.

29. На цртежот десно е даден квадрат $ABCD$, во кој P, Q и R се средини на страните DA, BC и CD, соодветно. Колкав дел од квадратот $ABCD$ е обоен со сива боја?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{3}{8}$

Решение. **E).** Нека квадратот $ABCD$ има должи-на на страна a. Плоштината на триаголникот ABR е $P_{\Delta ABR} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$. Од условот на задачата, имаме дека четириаголникот $ABPQ$ е правоаголник, па неговите дијагонали се преполовуваат. Нека S е пресечната точка на дијагоналите на $ABPQ$. Значи, $P_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}$.



Конечно плоштината на делот обоен во сиво е

$$P_{ASBR}=P_{\Delta ABR}-P_{\Delta ABS}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{8}=\frac{3a^2}{8}=\frac{3}{8}P_{ABCD}.$$

30. Еден воз има 18 вагони. Со возот патуваат 700 патници. Во било која група од пет соседни вагони има вкупно 199 патници. Колку патници има во двата вагона кои се на средината на возот?

A) 70 B) 77 C) 78 D) 96 E) 103

Решение. D). Нека со a_i, $i=1,2,...18$ го означиме бројот на патници во i-тиот вагон. Треба да одредиме колку е a_9+a_{10}. Од условот на задачата

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=199,\\&a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=199,\\&a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}=199,\\&a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}+a_{19}=199.\end{aligned}$$

Ако ги собереме горните равенства во кои се јавуваат броевите a_i, $i=1,2,...18$ при што a_9,a_{10} се јавуваат два пати и ако земеме предвид дека

$$a_1+a_2+...+a_{16}+a_{17}+a_{18}=700,$$

добиваме

$$a_9+a_{10}+700=4\cdot 199\text{, т.е. } a_9+a_{10}=96.$$

Kadett (осмо и деветто одделение) 2020

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

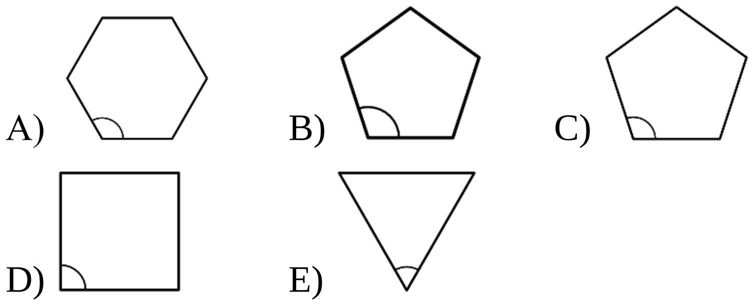
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Колку од броевите 2, 20, 202, 2020 се прости броеви?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. B). Дадените броеви се парни, што значи дека се деливи со 2. Тоа значи дека сите освен бројот 2 се сложени броеви. Според тоа, само бројот 2 е прост број.

2. Во кој од следните правилни многуаголници означениот агол е најголем?



Решение. A). Внатрешниот агол на рамностран триаголникот е $60°$, на квадратот е $90°$, на правилниот петаголник е $108°$ и на правилниот шестаголник е $120°$. Значи, најголем е аголот кај правилниот шестаголник.

3. Михаил секој ден решавал шест задачи, а Лазар секој ден решавал четири задачи. Колку денови му се потребни на Лазар да реши еднаков број на задачи колку што Михаил решил за четири дена?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. C). Михаил за четири дена решил $4\cdot 6=24$ задачи. На Лазар ќе му бидат потребни $24:4=6$ дена.

4. На еден турнир во фудбал учествуваат 4 екипи. Секоја екипа игра по еден натпревар со секоја друга екипа. На секој натпревар, победникот добива 3 поени, поразениот добива 0 поени, а ако натпреварот заврши без победник двате екипи добиваат по 1 поен. По сите одиграни натпревари, кој од следниот број на поени е невозможно вкупно да освоила некоја екипа?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. E). Секоја екипа игра по три натпревари. Во табелата е прикажан можниот број бодови на една екипа.

Победени натпревари	Нерешени натпревари	Изгубени натпревари	Вкупно поени
3	0	0	$3\cdot 3=9$
2	1	0	$2\cdot 3+1\cdot 1=7$
2	0	1	$2\cdot 3=6$
1	2	0	$2\cdot 1+1\cdot 3=5$
1	1	1	$1\cdot 3+1\cdot 1=4$
1	0	2	$1\cdot 3=3$
0	3	0	$3\cdot 1=3$
0	2	1	$2\cdot 1=2$
0	1	2	$1\cdot 1=1$
0	0	0	0

Значи, од дадените поени екипата не може да освои само 8 бодови.

5. Која од следниве дропки има најголема вредност?

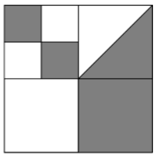
A) $\frac{8+5}{3}$ B) $\frac{8}{3+5}$ C) $\frac{3+5}{8}$ D) $\frac{8+3}{5}$ E) $\frac{3}{8+5}$

Решение. A). Имаме

$$\frac{8}{3+5}=\frac{3+5}{8}=1,\ \frac{3}{8+5}=\frac{3}{13}<1,\ \frac{8+3}{5}=\frac{11}{5}<3 \text{ и } \frac{8+5}{3}=\frac{13}{3}>4.$$

Значи, најголема вредност има дропката $\frac{8+5}{3}$.

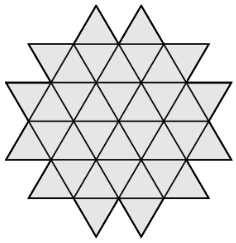
6. Големиот квадрат е поделен на помали квадрати и во еден од помалите квадрати е повлечена дијагонала, како на цртежот. Кој дел од големиот квадрат е обоен со сиво?



A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

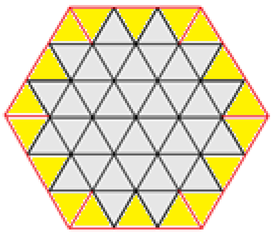
Решение. E). Големиот квадрат е поделен на четвртини. Во секоја од горните две четвртини обоена е половина од површината. Во долните две четвртини едната е бела, а другата е обоена, т.е. половината од површината е обоена. Значи, обоен е половина од големиот квадрат.

7. На цртежот е прикажана фигура која е добиена со составување на 36 складни рамнострани триаголници. Кој е најмалиот број на такви триаголници кои треба да се додадат на фигурата за да се добие шестаголник?



A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Решение. D). При добивање на шестаголник ќе додадеме најмал број триаголници ако го составиме најмалиот можен шестаголник. Тој се добива ако низ темињата на крајните триаголници на фигурата повлечеме прави паралелни на спротивните страни на тие триаголници. Така го добиваме шестаголникот



прикажан на цртежот десно. Сега лесно се гледа дека најмалиот можен број триаголници е 18 и овие триаголници се обоени со жолта боја.

8. Филип сака да помножи три различни броја од следниве броеви: $-5, -3, -1, 2, 4, 6$. Кој е најмалиот производ кој Филип може да го добие?

A) -200 B) -120 C) -90 D) -48 E) -15

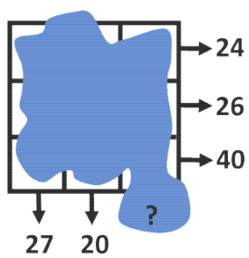
Решение. **B).** За да производот биде најмал тој мора да биде негативен. За да биде негативен, треба да има или еден или три негативни броеви и притоа избраните броеви да бидат најголеми по апсолутна вредност. Според тоа, Филип треба да ги избере броевите $-5, 4, 6$. Па, бараниот производ е -120.

9. Ако Андреј оди на училиште со автобус, а потоа до дома се враќа пешки, тој патува 3 часа. Ако оди со автобус во двата правци, тој патува 1 час. Колку време ќе му треба ако оди и во двата правци пешки?

A) 3.5 часа B) 4 часа C) 4.5 часа D) 5 часа E) 5.5 часа

Решение. **D).** Бидејќи Андреј во двата правца со автобус патува 1 час, тој со автобус во еден правец патува 0,5 часа. Оттука, бидејќи кога со автобус оди на училиште, а потоа се враќа пешки му требаат 3 часа, тој пешки од дома до училиште оди $3-0,5=2,5$ часа. Затоа на Андреј, ако во двата правца оди пешки, му требаат $2\cdot 2,5=5$ часа.

10. Во секое од квадратчињата од 3×3 квадратот е запишан по еден број. За жал броевите не се видливи бидејќи на листот се истурило мастило. Но, збирот на броевите во секој редица и збирот на бро-

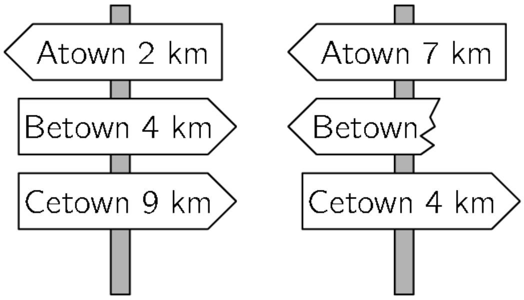


евите во две од колоните се познати, (види цртеж). Колку е збирот на броевите во третата колона?

A) 41 B) 43 C) 44 D) 45 E) 47

Решение. B). Збирот на сите броеви во 3×3 квадратот е еднаков на збирот на збировите од сите броеви во трите редици, односно на збирот на збировите на броевите во трите колони. Затоа збирот на броевите во целиот квадрат е еднаков на $24+26+40=90$. Значи, збирот на броевите од третата колона е $90-(27+20)=43$.

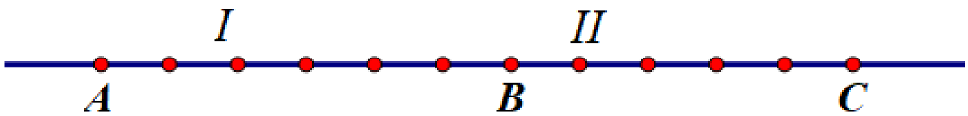
11. Најкраткиот пат помеѓу Atown до Cetown оди преку Betown. Двата знака се поставени по патот од Atown до Cetown. Кое е растојанието кое било напишано на скршениот знак?



A) 1 *km* B) 3 *km* C) 4 *km* D) 5 *km* E) 9 *km*

Решение. A). Нека положбите на градовите и знаците ќе ги претставиме на бројната права, при што растојанието меѓу секои две точки е 1 km .

Од патоказите заклучуваме дека градот Atown (A) е лево од знаците I и II. Ако градот A го поставиме во крајната лева точка, тогаш до знаците I и II има соодветно 2 и 7 растојанија. Сега градот Betown (B) е на четири растојанија десно од знакот I, што значи дека растојанието меѓу градовите Atown и Betown е $2+4=6\,km$. Но, знакот II е на 7 *km* од градот Atown, па затоа градот Betown е меѓу знакот II и градот Atown и е на растојание $7-6=1\,km$ од знакот II.



Значи, на скршениот знак е запишано растојанието 1 *km*.

Коментар. Како што можеме да видиме при решавањето на задачата воопшто не ги искористивме податоците за градот Cetown. Задачата може да се реши и ако ги искористиме податоците за градовите Betown и Cetown, т.е. ако не се користат податоците за градот Atown. Според тоа, дадената задача е преопределена, т.е. има повеќе информации отколку што се потребни за нејзино решавање.

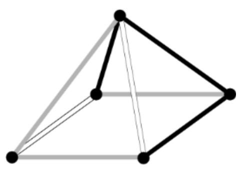
Обиди се задачата да ја решиш само со користење на податоците за градовите Betown и Cetown.

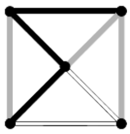
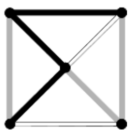
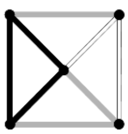
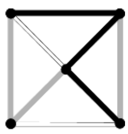
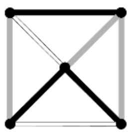
12. Андреј сака да пешачи 5 *km* во просек секој ден во март. На 16-ти март, вечерта пред спиење, тој пресметал дека досега вкупно поминал 95 *km*. Колкаво растојание треба да пешачи дневно во просек во преостанатите денови, ако сака да ја постигне почетната цел, 5 *km* во просек секој ден?

A) 5,4 *km* B) 5 *km* C) 4 *km* D) 3,6 *km* E) 3,1 *km*

Решение. **C).** Андреј во првите 16 дена поминал 95 *km*. Нека во следните 15 дена вкупно помине x *km*. Според условот на задачата имаме, $\frac{95+x}{31}=5$, од каде добиваме $95+x=155$, односно $x=60$ *km*. Бидејќи овие 60 *km* треба да ги помине за 15 дена, Андреј во просек дневно треба да пешачи $60:15=4$ *km*.

13. На цртежот десно е прикажана пирамида. На кој од следниве цртежи е прикажана пирамидата гледано од горе?



A)  B)  C)  D)  E) 

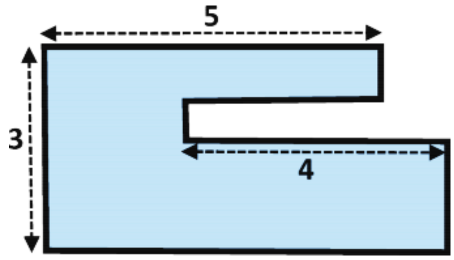
Решение. B). Рапоредот боите на страните на основата е: црна, сива, бела и сива и тоа е кај сите пет цртежи. Тргнувајќи од десното теме на црниот раб на основата распоредот на боите на рабовите на пирамидата е: црна, црна, сива и бела. Бидејќи овој распоред треба да се запази на половинките од дијагоналите на квадратот кој го гледаме, заклучуваме дека бараниот квадрат е B).

14. Секој ученик во едно одделение плива или танцува. Три петини од учениците во одделението пливаат и три петини од учениците танцуваат. Пет ученици и пливаат и танцуваат. Колку ученици има во одделението?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

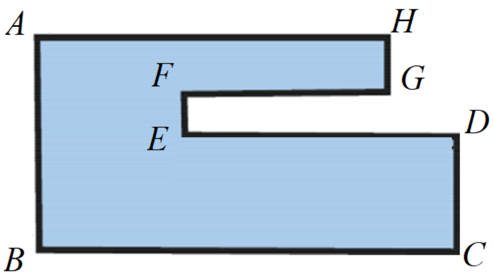
Решение. C). Нека со x го означиме бројот на ученици во одделението. Од условот на задачата имаме дека $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-1=\frac{1}{5}$ од учениците и пливаат и танцуваат. Значи, $\frac{1}{5}x=5$, од каде следува $x=5\cdot 5=25$.

15. Градината на Горјан има форма како на цртежот десно. Сите страни на цртежот се паралелни или нормални меѓу себе. Некои од димензиите се дадени на цртежот. Колку е периметарот на градината на Горјан?



A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Решение. C). При ознаки како на цртежот десно имаме:



$$\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{AB}=3,$$
$$\overline{BC}+\overline{FG}=\overline{ED}+\overline{AH}=4+5=9.$$

Според тоа, периметарот на гради-ната на Горјан е:

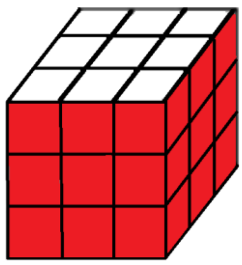
$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{BC}+\overline{FG}+\overline{ED}+\overline{AH}=2\cdot 3+2\cdot 9=24\,.$$

16. Андреј купил 27 идентични мали коцки, секоја од кои има точно два соседни ѕида обоени црвено. Тој ги искористил сите мали коцки да состави голема коцка. Кој е најголемиот број на црвени ѕидови на големата коцка составена на овој начин?

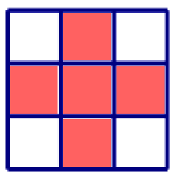
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). Големата коцка е составена од 27 мали коцки, па затоа таа има димензии $3\times3\times3$. Бидејќи немаме коцка со три црвени ѕидови, во секое теме на големата коцка ќе има барем по еден бел ѕид на мала коцка. Јасно, во две дијаметрално спротивните темиња барем по еден ѕид не може да е црвен, што значи дека големата коцка може да има најмногу четири црвени ѕида.

Понатаму, во темињата на големата коцка белите ѕидови на малите коцки можеме да ги поставиме така што тие ќе лежат на два спротивни ѕида на големата коцка. Навистина, доволно е на секој вертикален раб на големата коцка малите коцки да ги поставиме така што нивните црвени ѕидови ќе се совпаднат со ѕидовите на големата коцка (види цртеж). Сега доволно е во средината на големите ѕидови трите мали коцки да ги поставиме така што еден нивен црвен ѕид ќе биде надворешен. На тој начин предниот, задниот, левиот и десниот ѕид на големата коцка ќе бидат црвени. Значи, големата коцка може да има најмногу четири црвени ѕида.

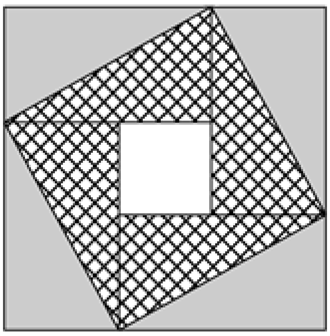


Забелешка. При горното поставување горниот и долниот ѕид на големата коцка може да се бели како на цртежот, но може малите коцки да се поставаат така што дел од овие ѕидови ќе се црвени. Овие два ѕида може да имаат



најмногу по пет мали црвени квадрати, како што е прикажано на цртежот горе десно.

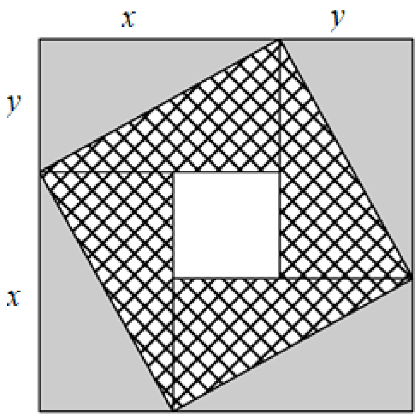
17. Голем квадрат се составен од четири идентични правоаголници и еден мал квадрат. Плоштината на големиот квадрат е $49\,cm^2$ и должината на дијагоналата еден од правоаголниците е 5 *cm*. Колку е плоштината на малиот квадрат?



A) 1 cm^2 B) 4 cm^2 C) 9 cm^2 D) 16 cm^2 E) 25 cm^2

Решение. **A).** Нека со x и y ги означиме должините на страните на еден од идентичните правоаголници. Тогаш

$$x+y=7 \text{ и } x^2+y^2=25.$$



Имаме

$$49=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=25+2xy,$$

па затоа $xy=12$. Плоштината на малиот квадрат е

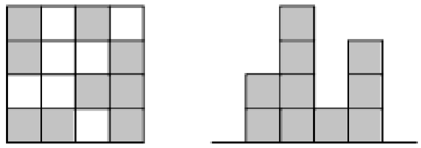
$$P=49-4xy=49-4\cdot12=49-48=1\,cm^2.$$

18. Платата на Виктор е 20% од платата на неговиот шеф. За колку проценти платата на шефот е поголема од платата на Виктор?

A) 80% B) 120% C) 180% D) 400% E) 520%

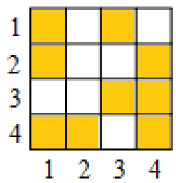
Решение. **D).** Ако платата на шефот е y, тогаш платата на Виктор е $x=0,2y$. Значи, $y=\frac{x}{0,2}=5x$, т.е. платата на шефот е пет пати поголема од платата на Виктор. Според тоа, плата на шефот 400% поголема од платата на Виктор.

19. Ивона направила „град“ од идентични дрвени коцки. Првата слика е поглед на „градот“ одозгора, додека втората е поглед од една страна. Не е познато од која страна е направен погледот. Кој е најголемиот број коцки кои Ивона можела да ги искористи?

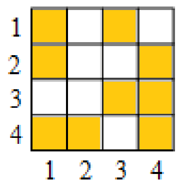


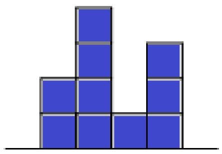
A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

Решение. **B).** Да ги означиме редовите и колоните како на цртежот десно. Можни се четири случаи, кои одделно ќе ги разгледаме.

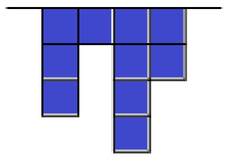


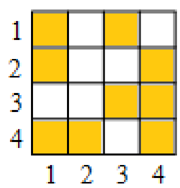
Ако погледот е однапред, тогаш во првата колона може да има најмногу $3\cdot2=6$ коцки, во втората може да има најмногу 4 коцки, во третата може да има најмногу $2\cdot1=2$ коцки и во четвртата може да има најмногу $3\cdot3=9$ коцки. Според тоа, во овој случај најголемиот број кои Ивона можела да ги употреби е $6+4+2+9=21$.



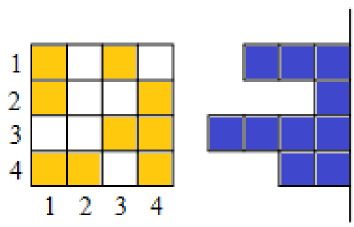


Ако погледот е одназад, тогаш во првата колона може да има најмногу $3\cdot3=9$ коцки, во втората може да има најмногу 1 коцка, во третата може да има најмногу $2\cdot4=8$ коцки и во четвртата може да има најмногу $3\cdot2=6$ коцки. Според тоа, во овој случај најголемиот број кои Ивона можела да ги употреби е $9+1+6+4=24$.



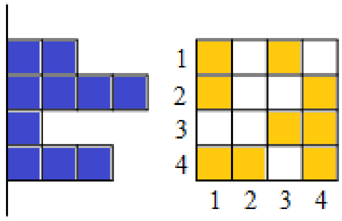


Ако погледот е оддесно, тогаш во првиот ред може да има најмногу $2\cdot3=6$ коцки, во вториот може да има најмногу $2\cdot1=2$ коцки, во третиот може да има најмногу $2\cdot4=8$ коцки и во четвртиот може да има најмногу $3\cdot2=6$ коцки. Според тоа, во



овој случај најголемиот број кои Ивона можела да ги упо-треби е $6+2+8+6=22$.

Ако погледот е одлево, тогаш во првиот ред може да има најмногу $2\cdot2=4$ коцки, во вториот може да има најмногу $2\cdot4=8$ коцки, во третиот може да има најмногу $2\cdot1=2$ коцки и во четвртиот може да има најмногу $3\cdot3=9$ коцки. Значи, во овој случај најголемиот број кои Ивона можела да ги употреби е $4+8+2+9=23$.



Според тоа, Ивона можела да употреби најмногу 24 коцки.

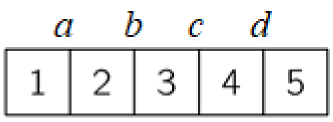
20. Александра има хартиена лента со броевите 1, 2, 3, 4 и 5 запишани во пет квадратчиња, како на цртежот. Таа ја превиткала лентата, така што квадратчињата целосно се преклопуваат, формирајќи пет слоја. Кој од следниве распореди од горниот слој кон долниот слој, не е можно да се добие?

1	2	3	4	5

A) 3, 5, 4, 2, 1　　B) 3, 4, 5, 1, 2　　C) 3, 2, 1, 4, 5

D) 3, 1, 2, 4, 5　　E) 3, 4, 2, 1, 5

Решение. **E).** Линиите по кои се врши превиткувањето да ги означиме како на цртежот десно.



Распоредот 3, 5, 4, 2, 1 може да се добие ако по ред превиткуваме по d, па по c, па по b и по a.

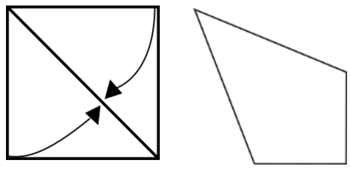
Распоредот 3, 4, 5, 1, 2 може да се добие ако по ред превиткуваме по c, па по d, па по a и по b.

Распоредот 3, 2, 1, 4, 5 може да се добие ако по ред превиткуваме по b, па по a, па по c и по d.

Распоредот 3, 1, 2, 4, 5 може да се добие ако по ред превиткуваме по a, па по b, па по c и по d.

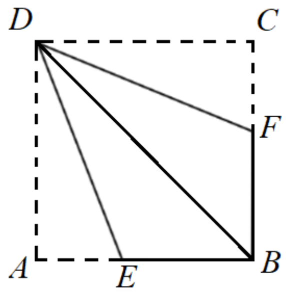
За распоредот 3, 4, 2, 1, 5 прво треба да превиткаме по c. Тогаш 5 ќе дојде под 2, па затоа нема превиткување со кое 2 може да дојде под 4.

21. Зоран превиткал квадратно парче хартија, така што две соседни страни ги поклопил со дијагоналата на квадратот, како на цртежот десно. Определи го најголемиот агол во новодобиениот четириаголник?



A) $112,5^\circ$ B) 120° C) 125° D) 135° E) 150°

Решение. **A).** Нека квадратот е $ABCD$ и со превиткувањето е добиен четириаголникот $DEBF$. Тогаш DF е симетрала на $\measuredangle BDC$, па затоа $\measuredangle BDF = 22^\circ 30'$. Според тоа,



$$\measuredangle BFD = 180^\circ - (45^\circ + 22^\circ 30') = 112^\circ 30'.$$

Сега, заради симетрија имаме $\measuredangle BED = 112^\circ 30'$.

22. Дванаесет обоени коцки се наредени во редица. Од нив, 3 се сини, 2 се жолти, 3 се црвени и 4 се зелени, но не се наредени во овој редослед. На еден од краевите има жолта коцка, а на другиот има црвена коцка. Коцките обоени црвено се соседни. Коцките обоени зелено се соседни. Десеттата коцка од лево кон десно е обоена сино. Која е бојата на шестата коцка од лево кон десно?

A) зелена B) жолта C) сина D) црвена E) црвена или сина

Решние. **A).** Бидејќи десеттата коцка е сина, црвена коцка е на едниот крај, жолта е на другиот крај и трите црвени коцки меѓу себе се допираат тие не може да се на крајот. Значи, трите црвени коцки се на почетокот и го имаме распоредот прикажан на долниот цртеж.

Ц	Ц	Ц							С		Ж

Сега имаме 4 зелени коцки кои се соседни па тие се во четири последователни полиња меѓу третата црвена и десетата сина коцка. Тоа значи дека шестата коцка мора да е зелена.

23. Колку четирицифрени броеви A постојат, такви што половината од бројот A е делива со 2, неговата третина е делива со 3 и неговата петтина е делива со 5?

A) 1 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. D). Од условот на задачата следува дека четирицифрениот број A да биде делив со 4, 9 и 25, односно со $\mathrm{NZS}(4,9,25)=900$.

Такви четирицифрени броеви се

1800, 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, 7200, 8100, 9000 и 9900.

Значи, вкупно има 10 броеви со саканото својство.

24. Во финалето на еден натпревар за танцување, секој од трите членови на жирито на петте натпреварувачи дава 0 поени, 1 поен, 2 поени, 3 поени или 4 поени. Било кои два натпреварувачи не добиле иста оценка од било кој судија. Во долната табела се дадени збировите на сите оценки на натпреварувачите и некои поединечни оценки. Колку поени добил Адам од судијата III?

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0			
II		2	0		
III					
Збир	7	5	3	4	11

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. B). Од судијата III Берта добила оценка 3. Сега Цвета не може да добие оценка 3 од судијата III, но не може да добие ниту оценка 1 од судијата III, бидејќи тогаш судијата I мора да и даде оценка 2 (противречност). Значи, Цвета од судијата III може да добие оценка 2 или 0. Да го разгледаме случајот кога од судијата III добила оценка 0. Тогаш ја имаме табелата:

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3		
II		2	0		
III		3	0		
Збир	7	5	3	4	11

Збирот на оценките на Емил е 11, а тоа е можно само ако оценките се 3, 4 и 4. Притоа оценката 3 може да ја добие само од судијата II

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3		4
II		2	0		3
III		3	0		4
Збир	7	5	3	4	11

Сега, Дејан има збир 4 и тој не може да има оценка 3 и може да има најмногу една оценка 2. Значи неговите оценки се 1, 1 и 2, при што оценката 2 е добиена од судијата III. Така ја имаме долната табела.

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3	1	4
II		2	0	1	3
III		3	0	2	4
Збир	7	5	3	4	11

Конечно, бидејќи секој судија дава различни оценки на натпреварувачите, добиваме дека Адам од судијата III добил оценка 1, а од судијата II добил оценка 4.

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3	1	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	0	2	4
Збир	7	5	3	4	11

Сега да го разгледаме случајот кога Цвета од судијата III добила оценка 2 и да ја дополниме како погоре табелата.

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	1		
II		2	0		
III		3	2		
Збир	7	5	3	4	11

Сега, Дејан има збир на оценки 4, па како не може да има оценка 2, неговите оценки се 0, 1 и 3. Притоа оценката 0 е од судијата III, оценката 1 е од судијата II и останува оценката 3 да е од судијата I. Така ја имаме табелата.

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	1	3	
II		2	0	1	
III		3	2	0	
Збир	7	5	3	4	11

Понатаму, како и во првиот случај заклучуваме дека Емил има оценки 4, 3, 4 добиени во овој редослед од судиите I, II, III, а Адам има оценки 2, 4, 1 добиени во овој редослед од судиите I, II, III. Ова е прикажано во долнататабела.

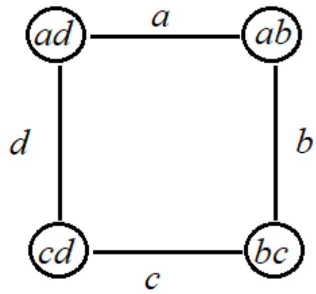
	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	1	3	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	2	0	4
Збир	7	5	3	4	11

25. Сања запишала по еден природен број на секој раб од еден квадрат. Потоа таа ги запишала производите на броевите од секои од рабовите во темињата во кои тие рабови се сечат. Збирот на броевите во сите темиња е 15. Колку е збирот на броевите запишани на рабовите на квадратот?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 15

Решение. **C).** Запишаните броеви и нивните производи да ги означиме како на цртежот десно. Тогаш важи

$$ab+bc+cd+da=15,$$
$$b(a+c)+d(a+c)=15,$$
$$(a+c)(b+d)=15.$$



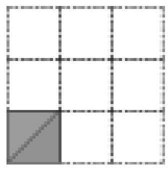
Бројот 15 може да се запише како производ на два природни броја на следниве начини $15=1\cdot 15=3\cdot 5$. Но, збир на два природни броја е поголем од 1, па затоа едниот множител е 3, а другиот е 5. Конечно, $a+c+b+d=8$. Четирите броја во случајов се 1, 2, 2 и 3.

26. Симон има 52 складни рамнокраки правоаголни триаголници. Тој сака да направи квадрат користејќи некои од нив. Колку квадрати со различни димензии може да направи?

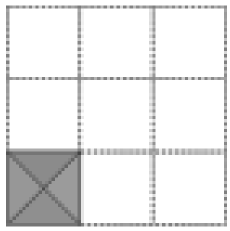
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Решение. **C).** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека должините на катетите на овие триаголници се 1.

Првиот основен квадрат Симон може да го состави од два такви триаголници, а потоа различни квадрати ќе добие со помош на основните квадрати. Нека n е бројот на триаголниците кои може да ги постави на една страна на квадратот. Тогаш вкупниот број употребени триаголници ќе биде $2n^2$, па затоа ќе важи $2n^2 \le 52$, од каде добиваме $n^2 \le 26$. Значи, $n=1,2,3,4,5$, т.е. во овој случај имаме 5 различни квадрати.



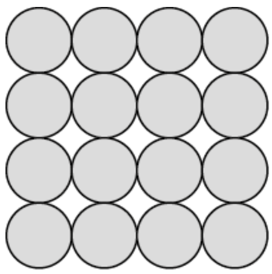
Вториот основен квадрат Симон може да го состави со помош на четири триаголници, а потоа различни квадрати да добива со помош на тие основни квадрати. Нека n е бројот на триаголниците кои може да ги постави на една страна на квадратот. Тогаш вкупниот број употребени триаголници ќе биде $4n^2$, па затоа ќе важи $4n^2 \le 52$, од каде



добиваме $n^2 \leq 13$. Значи, $n = 1, 2, 3$, т.е. во овој случај имаме 3 различни квадрати.

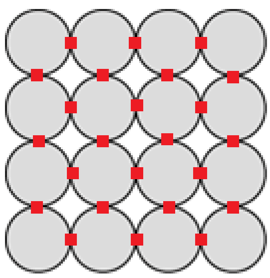
Сега треба да видиме дали може да се состави квадрат ако на една негова страна се ставени n триаголници налегнати со катетата и m триаголници налегнати со хипотенузата. Тогаш бидејќи катетата има должина 1, а хипотенузата има должина $\sqrt{2}$, должината на страната на квадратот ќе биде $n + m\sqrt{2}$. Значи, неговата плоштина ќе биде $(n + m\sqrt{2})^2 = n^2 + 2mn\sqrt{2} + m^2$. Но плоштината на еден триаголник е $\frac{1}{2}$, па затоа плоштината на квадратот ќе биде рационален број, т.е. $n^2 + 2mn\sqrt{2} + m^2 \in \mathbb{Q}$, од каде добиваме $mn = 0$. Тоа значи $m = 0$ и го добиваме првиот основен квадрат или $n = 0$ и го добиваме вториот основен квадрат. Значи, Симон може да состави $5 + 3 = 8$ различни квадрати.

27. Филип прави пирамида од метални топки. Основата се состои од 4×4 топки како на цртежот десно. Вториот кат се состои од 3×3 топки, третиот од 2×2 топки и четвртиот од една топка. Во секоја допирна точка на топките е ставена капка лепило. Колку капки лепило се ставени?

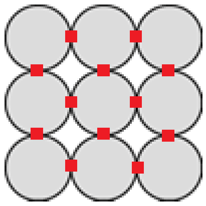


A) 72 B) 85 C) 88 D) 92 E) 96

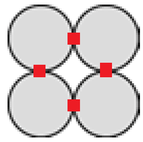
Решение. E). Основата на пирамидата се состои 16 топки кои се поврзани со 4 реда од по 3 капки и 3 реда од по 4 капки лепило (цртеж десно), т.е. со $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$ капки лепило.



Вториот кат од пирамидата се состои од 9 топки кои се поврзани со 3 реда со по 2 капки и 2 реда со по 3 капки лепило



(цртеж лево), т.е. со $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ капки лепило. Понатаму, секоја од овие 9 топки со топките од првиот ред е поврзана со 4 капки лепило, па имаме уште $9 \cdot 4 = 36$ капки лепило.



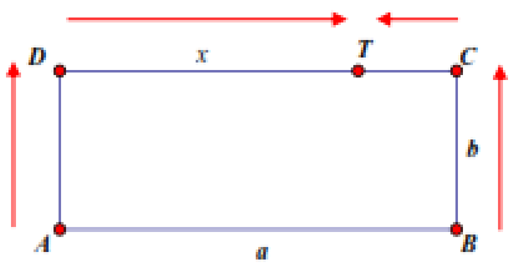
Третиот кат на пирамидата се состои од 4 топки и тие меѓу себе се поврзани со 4 капки гориво, а секоја од овие топки со топките од вториот кат е повзрана со 4 капки лепило, па имаме уште $4 \cdot 4 = 16$ капки лепило. Горната топка со топките под неа е поврзана со 4 капки лепило. Конечно, вкупно имаме

$$24 + 12 + 36 + 4 + 16 + 4 = 96 \text{ капки лепило.}$$

28. Четири деца се наоѓаат во четирите ќошиња на $10m \times 25m$ базен. Нивниот тренер се наоѓа некаде на една страна од базенот. Кога тој ги повикал, три од децата излегле од базенот и дошле до него одејќи по рабовите на базенот по најкраткото растојание. Тие поминале вкупно 50 *m*. Кое е најкраткото растојание кое тренерот треба да го измине за да стигне до четвртото дете?

A) 10 *m* B) 12 *m* C) 15 *m* D) 20 *m* E) 25 *m*

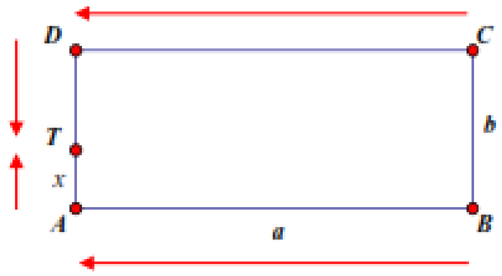
Решение. **D).** Со T да ја означиме положбата на тренерот, а со A, B, C, D положбите на децата во базенот. Тренерот можел да стои на подолгата или на пократката страна од базенот.



Нека тренерот стои на подолгата страна од базенот и нека тоа е страната CD (цртеж десно). Со стрелки да го означимедвижењето на децата околу базенот (најкратките можни патишта). Три деца излегле од базенот и тргнале по најкратките патишта кон тренерот. При ознаки како на цртежот имаме:

- Ако се тоа A, B, C, тогаш $10 + x + 10 + 25 - x + 25 - x = 50$, па е $x = 20$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $20\,m$ до четвртото дете D.
- Ако се тоа A, B, D, тогаш $10 + x + 10 + 25 - x + x = 50$, па е $x = 5$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $25 - 5 = 20\,m$ до четвртото дете C.
- Ако се тоа A, C, D, тогаш $10 + x + x + 25 - x = 50$, па е $x = 15$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $25 - 15 + 10 = 20\,m$ до четвртото дете B.
- Ако се тоа B, C, D, тогаш $10 + x + 25 - x + 25 - x = 50$, па е $x = 10$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $10 + 10 = 20\,m$ до четвртото дете A.

Нека тренерот стои на пократката страна од базенот и нека тоа е страната AD (цртеж десно). Со стрелки да го означиме движењето на децата околу базенот (најкратките можни патишта).



Три деца излегле од базенот и тргнале по најкратките патишта кон тренерот. При ознаки како на цртежот имаме:

- Ако се тоа A, B, C, тогаш $x + 25 + x + 25 + 10 - x = 50$, па е $x = -10$, што не е можно бидејќи $x > 0$.
- Ако се тоа A, B, D, тогаш $25 + x + 10 + x - x = 50$, па е $x = 15$, што не е можно бидејќи $x < 10$.
- Ако се тоа A, C, D, тогаш $x + 10 - x + 25 + 10 - x = 50$, па е $x = -5$, што не е можно бидејќи $x > 0$.
- Ако се тоа B, C, D, тогаш $25 + x + 25 + 10 - x + 10 - x = 50$, па е $x = 20$, што не е можно бидејќи $x < 10$.

Конечно, тренерот стои на подолгата страна, а до детето кое останало во базенот ќе помине $20\,m$.

29. Ане, Борис и Кире се натпреваруваат во трчање. Тие ја започнале трката во исто време и секој трчал со своја константна брзина. Кога Ане завршил, Борис имал уште 15 m до целта, а Кире имал 35 m до целта. Кога Борис завршил, Кире имал уште 22 m до целта. Колку била долга патеката на која се натпреварувале?

A) 135 m B) 140 m C) 150 m D) 165 m E) 175 m

Решение. D). Од условот на задачата имаме дека $s=v_A t$, $s=v_B t+15$ и $s=v_K t+35$. Со елиминација на времето t имаме, $v_B=\frac{(s-15)v_K}{s-35}$

Дополнително, од вториот услов на задачата, имаме дека $s=v_B t_1$ и $s=v_K t_1+22$, од каде со елиминација на t_1, добиваме $v_B=\frac{s\cdot v_K}{s-22}$. Со изденачување на двете равенки за брзината на Борис, добиваме дека $s(s-35)=(s-15)(s-22)$, од каде $s=165\,m$.

30. Тврдењата подолу се однесуваат на еден четирицифрен број.

4132 Две цифри се точни, но се на погрешни места.

9826 Една цифра е точна и е на вистинското место.

5079 Две цифри се точни, но една е на погрешно место.

2741 Една цифра е точна и е на погрешно место.

7642 Ниту една цифра не е точна.

Која е цифрата на единиците на четирицифрениот број?

A) 0 B) 1 **C)** 3 D) 5 E) 9

Решение. C). Од петтото тврдење следува дека цифрите 2, 4, 6 и 7 не се од бараниот број, па затоа имаме:

_13_ Две цифри се точни, но се на погрешни места.

98_ _ Една цифра е точна и е на вистинското место.

50_9 Две цифри се точни, но една е на погрешно место.

_ _ _1 Една цифра е точна и е на погрешно место.

Сега од второто тврдење имаме дека една од цифрите 8 или 9 е точна. Ако тоа е цифрата 8, тогаш од третото тврдење добиваме дека 5 и 0 се цифри од бараниот број. Значи, четирицифрениот број е запишан со цифрите 1, 3, 8, 5 и 0, што не е можно бидејќи тоа се пет различни цифри. Значи од цифрите 9 и 8 цифрата 9 е во записот на бараниот број. Сега имаме:

_13_ Две цифри се точни, но се на погрешни места.

9_ _ _ Една цифра е точна и е на вистинското место.

50_9 Две цифри се точни, но една е на погрешно место.

_ _ _1 Една цифра е точна и е на погрешно место.

Од вториот исказ следува дека цифрата 9 е цифра на илјадитите, па како во 50_9 само една цифра е на погрешно место, добиваме дека цифрата 5 не е во записот на бројот и бројот е 90_ _. Сега имаме

_13_ Две цифри се точни, но се на погрешни места.

90 _ _ Две цифри се точни и се на вистинските места.

_ _ _1 Една цифра е точна и е на погрешно место,

од каде следува дека бараниот број е 9013. Цифрата на единиците на бројот е 3.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2021

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

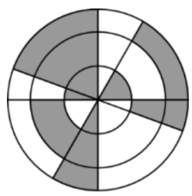
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Која од наведените фигури има оска на симетрија?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. A). Единствено само првата фигура има оска на симетрија и тоа е прикажано на цртежот десно.

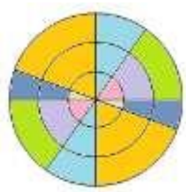
2. На цртежот десно се прикажани три концентрични кружници со четири дијаметри. Колку проценти од добиената фигура се засенчени?



A) 30% B) 35% C) 40%

D) 45% E) 50%

Решение. E). За секој сив дел постои бел дел кој е складен со сивиот. Истото во различни бои е прикажано на цртежот десно. Според тоа, сивиот дел е 50% од целата површина.



3. Колку е вредноста на изразот $(20\cdot 21):(2+0+2+1)$?

A) 42 B) 64 C) 80 D) 84 E) 105

Решение. D). Имаме

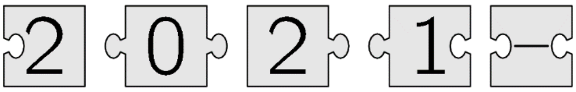
$$(20 \cdot 21):(2+0+2+1) = 420:5 = 84.$$

4. Колку четирицифрени броеви имаат својство нивните цифри гледани од лево на десно да се последователни природни броеви подредени во растечки редослед?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

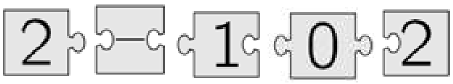
Решение. B). Бараните броеви се од видот $\overline{abcd}, a \neq 0$, при што важи $b = a+1, c = b+1 = a+2, d = c+1 = a+3$. Според тоа, за секоја почетна цифра a бројот е еднозначно определен. Понатаму, најмалата вредност на a е 1, а за најголемата мора да важи $a+3=9$, т.е. $a=6$. Значи, има 6 броја со саканото својство.

5. Ако петте прикажани фигури се поставаат правилно, т.е. правилно се поврзат, се добива правоаголник на кој е запишан броен израз. Колку е вредноста на овој броен израз?



A) -100 B) -8 C) -1 D) 199 E) 208

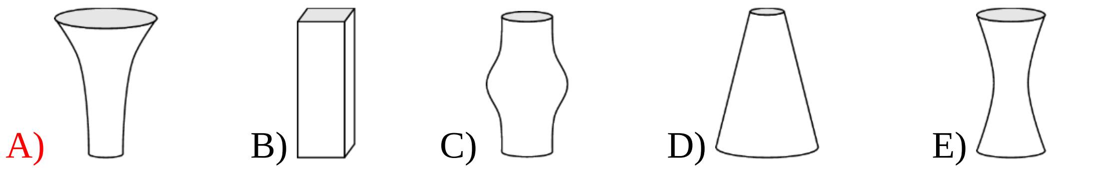
Решение. A). Очигледно фигурите  и  се прва и последна во бројниот израз. Лесно се гледа дека единствен можен распоред е

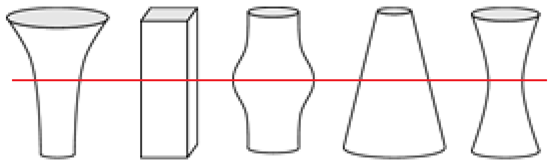


.

Според тоа, бројниот израз е $2-102$ и неговата вредност е -100.

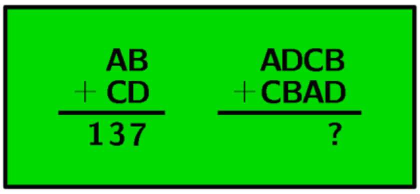
6. Секоја од петте вазни (прикажани на цртежите во понудените одговори на задачата) има иста висина и секоја од нив има волумен од 1 литар. Во секоја вазна се тура половина литар вода. Во која вазна ќе биде највисоко нивото на водата?





Решение. A). Бидејќи сите вазни имаат иста висина и во сите е турено половина литар вода, нивото на водата ќе биде симетрично во вазните B, C и E (цртеж десно). Вазната A има најмала долна основа и постепено се шири кон врвот, па затоа нивото на водата во неа ќе биде најголемо.

7. Еден ученик правилно ги собрал двоцифрените броеви дадени лево на таблата и добил резултат 137. Кој број ќе го добие ако ги собере двата четирицифрени броја кои се запишани десно на таблата?



A) 13737 B) 13837 C) 14747 D) 23737 E) 137137

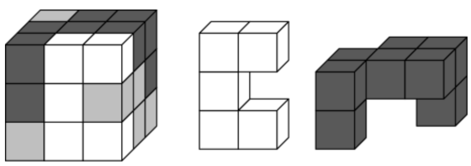
Решение. **B).** Од собирањето на двоцифрените броеви имаме

$$10(A+C)+B+D=137.$$

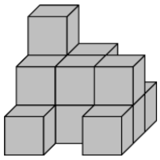
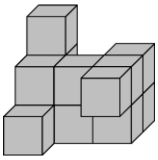
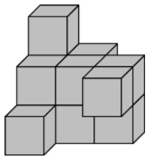
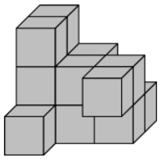
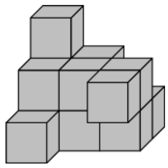
Затоа

$$\begin{aligned}\overline{ADCB}+\overline{CBAD}&=1000(A+C)+100(B+D)+10(A+C)+B+D\\&=1010\cdot(A+C)+101(B+D)\\&=101\cdot(10(A+C)+B+D)\\&=101\cdot 137=138137.\end{aligned}$$

8. Коцка со димензии $3\times3\times3$ е направена од бели, сиви и црни коцки со димензија $1\times1\times1$, како што е прикажано на првиот цртеж десно. На другите два цртежи се прикажани белиот

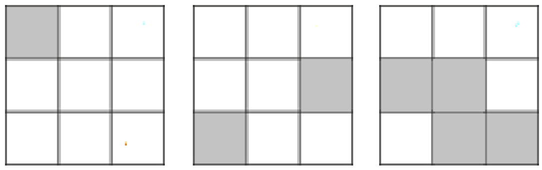


и црниот дел од коцката. На кој од наведените цртежи е прикажан сивиот дел од коцката?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. E). *Прв начин.* Најгорниот ред има 1 сива коцка, па затоа фигурата D отпаѓа. На предниот ѕид во долниот ред има 1 сива коцка, па затоа фигурата A отпаѓа. На десниот ѕид во средниот ред има 2 сиви и 1 црна коцка, па затоа фигурата B отпаѓа. На десниот ѕид во долниот ред има 2 сиви коцки, па затоа фигурата C отпаѓа. Останува фигурата E која целосно се совпаѓа со сивиот дел на коцката.

Втор начин. Црниот и белиот дел на коцката е видливи на коцката. Од сивиот дел ги гледаме само деловите кои се видливи од горе, од напред и од десно и тоа е прикажано на горните цртежи.



Погледот од горе соодветствува на A, B, C и E.

Погледот од напред соодветствува на B, C, D и E.

Погледот од десно соодветстува на D и E.

Бидејќи само делот E се јавува во сите три случаи, заклучуваме дека бараната фигура е E.

9. Бравата на велосипедот има четири тркалца нумерирани по ред со цифрите од 0 до 9. Секое од четирите тркалца се ротира за 180° од положбата прикажана на цртежот десно и се добива бројот со кој се отклучува бравата. Кој може да е точниот број за отклучување на бравата на велосипедот?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. В). Бројот 1893 се добива со пет завртувања на секој дел во иста насока. Бројот 0815 не може да се добие бидејќи 0 се добива со 4 завртувања, а 8 со пет завртувања во иста насока. Бројот 1972 не може да се добие бидејќи 1 се добива со пет завртувања, а 9 со 6 завртувања во иста насока. Бројот 4892 не може да се добие бидејќи бројот 4 се добива со 8, а бројот 8 со 5 завртувања во иста насока. Бројот 8436 не може да се добие бидејќи бројот 8 се добива со 2 завртувања, а бројот 4 со 1 завртување во иста насока. Значи, точниот број за отклучување на бравата е 1893.

10. Бранко е 5 *cm* повисок од Арон, но 10 *cm* е понизок од Цане. Дарко е 10 *cm* повисок од Цане, но 5 *cm* е понизок од Емил. Кој од следниве искази е точен?

А) Арон и Емил се со еднакви височини

Б) Арон е 10 *cm* повисок од Емил

В) Арон е 10 *cm* понизок од Емил

Д) Арон е 30 *cm* повисок од Емил

Е) Арон е 30 *cm* понизок од Емил

Решение. Е). Нека височините на височините на Арон, Бранко, Цане, Дарко и Емил ги означиме со a,b,c,d,e, соодветно. Тогаш важи

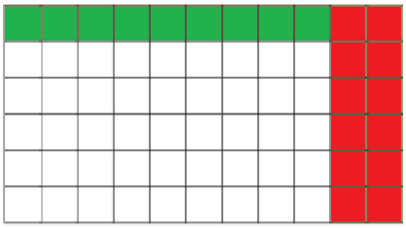
$$b=a+5, \qquad c=b+10=a+15,$$
$$d=c+10=a+25, \qquad e=d+5=a+30.$$

Според тоа, Арон е 30 *cm* понизок од Емил.

11. Правоаголна чоколадна табла е составена од еднакви квадрати. Наум скршил две цели ребра од таблата на квадрати и ги изел 12-те квадрати што ги добил. Потоа, Јасен скршил едно цело ребро од делот што преостанал од истата чоколадна табла и ги изел 9-те квадрати што ги добил. Колку квадрати од чоколадната табла останале?

A) 72 B) 63 C) 54 D) 45 E) 36

Решение. **D).** Бидејќи чоколадото е со правоаголен облик поделен на квадрати, две ребра можеме да откршиме по должина или по ширина. Ако Наум откршил две ребра кои вкупно имаат 12 квадрати, тогаш секое ребро има по 6 квадрати, па останало парче чоколадо со правоаголен облик чија ширина соодветствува на ширина од 6 квадрати. Потоа Јасен откршил едно ребро кое има 9 квадрати, па новиот остаток исто така е со правоаголен облик со димензии кои се должина 9 квадрати и ширина $6-1=5$ квадрати. Затоа останале $9\cdot 5=45$ квадрати.



12. Кога една тегла е една петтина наполнета со вода нејзината маса е 560 грама. Ако истата тегла е четири петтини наполнета со вода, тогаш таа има маса 740 грама. Колку е масата на празната тегла?

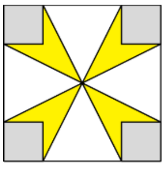
A) 60 g B) 112 g C) 180 g D) 300 g E) 500 g

Решение. **E).** Нека масата на водата во теглата е a грама. Тогаш

$$(\frac{4}{5}-\frac{1}{5})a=740-560,$$

т.е. $\frac{3}{5}a=180$, од каде добиваме $\frac{1}{5}a=60\ g$. Значи празната тегла има маса $560-60=500\ g$.

13. Плоштината на големиот квадрат прикажан на цртежот десно е $16\ cm^2$, а плоштината на секој од малите квадрати е $1\,cm^2$. Колкава е плоштината на жолтиот цвет?



A) $3\,cm^2$ B) $\frac{7}{2}cm^2$ C) $4\ cm^2$ D) $\frac{11}{2}cm^2$ E) $6\ cm^2$

Решение. **C).** *Прв начин.* Должината на страната на големиот квадрат е $4\ cm$, а должината на страната на малиот квадрат е $1\,cm$. Според тоа, секој од четирите бели триаголници има основа која лежи на страната на големиот квадрат со должина $2\,cm$ и соодветна висина со должина $2\,cm$. Значи, плоштината на жолтиот цвет е

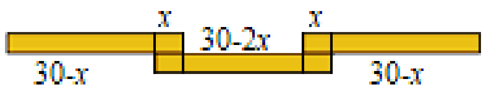
$$P = 16 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 4\,cm^2.$$

Втор начин. Должината на страната на големиот квадрат е $4\,cm$, а должината на страната на малиот квадрат е $1\,cm$. Значи, жолтиот цвет е составен од 8 складни триаголници со основа која се совпаѓа со страната на мал квадрат, па има должина $1\,cm$ и висина $1\,cm$. Значи, плоштината на жолтиот цвет е $P = 8 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 4\,cm^2$.

14. Коста направил нова ограда во својата градина. Тој искористил 25 штици од дрво, секоја од кои е долга 30 *cm*. Коста штиците ги поврзал така што во секоја спојка на било кои две штици има исто мало преклопување (види цртеж). Вкупната должина на новата ограда на Коста е 6,9 метри. Колкава е должината во сантиметри на преклопувањето меѓу кој било пар соседни штици?

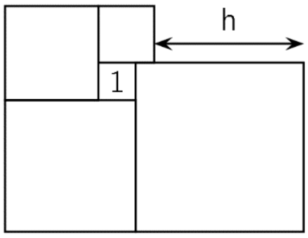
A) 2.4 B) 2,5 C) 3 D) 4.8 E) 5

Решение. **B).** Со x да ја означиме должината на преклопувањето. Тогаш должините на преклопените и непроклопените делови на штиците се како на цртежот десно. Бидејќи во долниот ред имаме 12 штици, а на секоја штица имаме по две преклопувања, вкупниот број преклопувања ќе биде 24, па нивната должина ќе биде $24x$. Понатаму, имаме 23 внатрешни штици кај кои непреклопениот дел е со должина $30 - 2x$ и две крајни штици кај кои непреклопениот дел е со должина $30 - x$. Оттука следува дека



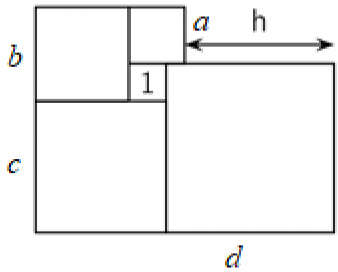
$$24x+23(30-2x)+2(30-x)=690,$$
$$24x-46x-2x+690+60=690,$$
$$24x=60,$$
$$x=2{,}5\,cm.$$

15. Пет квадрати се поставени како што е прикажано на цртежот десно. Најмалиот квадрат има должина на страна 1. Колку е бројната вредност на должината h?



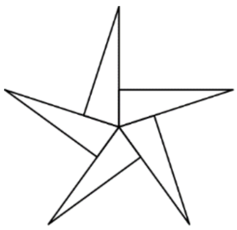
A) 3 B) 3.5 C) 4 D) 4.2 E) 4.5

Решение. C). Должината на страната на најмалиот квадрат е 1. При ознаки како на цртежот десно имаме



$$b=a+1,\quad c=b+1,\quad d=c+1,$$
$$\begin{aligned}h&=c+d-(a+b)\\&=2c+1-(2b-1)\\&=2+2(c-b)\\&=2+2\cdot1=4.\end{aligned}$$

16. Пет складни правоаголни триаголници се поставени така што нивните поголеми остри агли се допираат и е добиена ѕвездата прикажана на цртежот десно. Но, исто така е можно да се формира друга ѕвезда со поставување на повеќе од дадените правоаголни триаголници така што нивните помали остри агли ќе се допираат. Колку триаголници се потребни за да се формира втората ѕвезда?



A) 10 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

Решение. D). Едниот остар агол на правоаголниот триаголник е еднаков на $360^\circ:5=72^\circ$. Значи, вториот остар агол е еднаков на

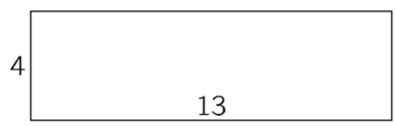
$90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Бидејќи малите остри агли мораат да бидат поставеи еден до друг, за формирање на ѕвездата се потребни $360^\circ : 18^\circ = 20$ триаголници.

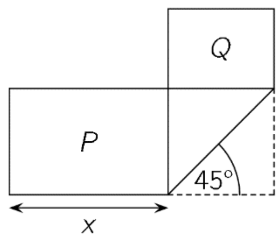
17. На еден квиз има 20 прашања. За секој точен одговор на поставено прашање се добиваат 7 поени, за секој погрешен одговор на поставено прашање се одземаат 4 поени, а за секое неодговорено прашање се добиваат 0 поени. Натпреварувачот Емил учествувал на квизот и освоил 100 поени. На колку прашања Ерик не дал одговор?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. B). Јасно, Емил не одговорил точно на сите 20 прашања. Ако Емил точно одговорил на x прашања, а погрешно одговорил на y прашања, тогаш $7x - 4y = 100$. Во последната равенка два члена се деливи со 4, и како $7x \geq 100$, т.е. $x \geq 14\frac{2}{7}$ и $x < 20$, залучуваме дека $x = 16$. Значи, Емил точно не одговорил на $(7 \cdot 16 - 100) : 4 = 3$ прашања. Конечно, тој не одговорил на $20 - 16 - 3 = 1$ прашање.

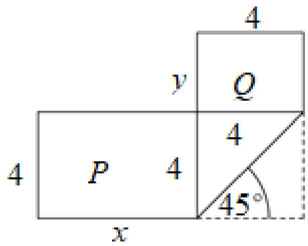
18. Правоаголна лента од хартија со димензии 4×13 (цртеж десно) е преклопена како што е прикажано на долниот десен цртеж. Притоа се формирани два правоаголници со плоштини P и Q (види цртеж) при што $P = 2Q$. Колкава е вредноста на x?





A) 5 B) 5,5 C) 6 D) 6,5 E) $4\sqrt{2}$

Решение. C). Бидејќи аголот на превиткување на 45°, отсечката по која се врши превиткувањето е дијагоналата на квадрат со страна 4.

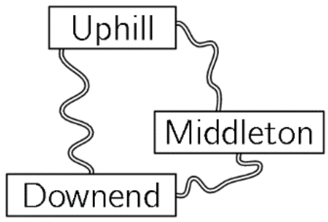


Според тоа, при ознаки како на цртежот десно имаме: $x+4+y=13$, па затоа $y=9-x$. Значи,

$$P=4x \text{ и } Q=4y=4(9-x),$$

од каде бидејќи $P=2Q$ добиваме $4x=8(9-x)$, т.е. $x=6$.

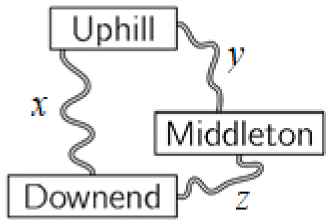
19. Три села се поврзани меѓу себе со патеки како што е прикажано на цртежот десно. Од Downend до Uphill, со заобиколување преку Middleton патот е за 1 *km* подолг од директниот пат. Од Downend до Middleton, со заобиколен пат преку Uphill патот е за 5 *km* подолг од директниот пат. Од Uphill до Middleton, со заобиколен пат преку Downend патот е за 7 *km* подолг од директниот пат. Колку е долг најкраткиот пат од трите директни патишта меѓу селата?



A) 1 *km* B) 2 *km* C) 3 *km* D) 4 *km* E) 5 *km*

Решение. C). При ознаки како на цртежот имаме

$$x+1=y+z,$$
$$y+7=z+x,$$
$$z+5=x+y.$$



Ако собереме првата и втората равенка, тогаш

$$x+y+8=x+y+2z,$$

па затоа $z=4$. Слично, од втората и третата равенка добиваме $x=6$, а од третата и првата равенка добиваме $y=3$.

20. Во една чинија со овошје има двапати повеќе јаболки од круши. Кристина и Лилјана го поделија овошјето од чинијата така што Кристина зеде двапати повеќе парчиња овошје од Лилјана.

Кој од следниве искази е секогаш вистинит?

A) Кристина зеде барем една круша.

B) Кристина зеде двапати повеќе јаболка од круши.

C) Кристина зеде двапати повеќе јаболка од Лилјана.

D) Кристина зеде толку јаболка колку што Лилјана доби круши.

E) Кристина зеде круши онолку колку што Лилјана доби јаболка.

Решение. E). Исказот A) не е точен ако Кристина ги земе сите јаболка, а притоа и исказот D) не е точен. Исказот B) не е точен ако Кристина ги земе сите круши и исто толку јаболка, а притоа и ис-жказот C) не е точен.

Ќе покажеме дека исказот E) е секогаш точен. Нека во кутијата има a круши и $2a$ јаболка. Тогаш Кристина зела $2a$ парчиња овошје, а Лилјана зела a парчиња овошје. Ако Кристина зела x круши, тогаш таа зела $2a-x$ јаболка. Според тоа, во кутијата останале $a-x$ круши и $2a-(2a-x)=x$ јаболка кои ги зела Лилјана. Конечно, Кристина зела x круши, а Лилјана x јаболка, што значи дека секогаш е точен исказот E).

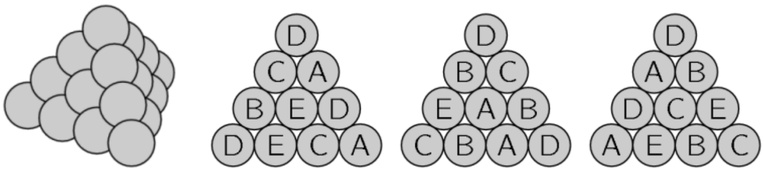
21. Дадена е дропка во која броителот и именителот се позитивни броеви. Броителот на оваа дропка го зголемуваме за 40%. За колкав процент треба да го намалиме именителот, така што новодобиената дропка е двојно поголема од дадената дропка?

A) 10% B) 20% C) 30% D) 40% E) 50%

Решение. C). Нека дропката е $\frac{a}{b}$ и именителот е променет за $x\%$.

Тогаш $\frac{(1+\frac{40}{100})a}{(1+\frac{x}{100})b}=2\frac{a}{b}$, од каде добиваме $\frac{140}{100+x}=2$, т.е. $x=-30$. Значи, именителот на дропката треба да се намали за 30%.

22. Триаголна пирамида е направена со 20 топчиња, како што е прикажано на долниот лев цртеж. Секое топче е означена со една од буквите A, B, C, D или E. При правењето на пирамидата се искористени по четири топчиња означени со секоја од дадените букви. На долните цртежи се прикажани три од четирите ѕида на пирамидата. Со која буква е означено средното топче на четвртиот ѕид?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. D). На долните цртежи со иста боја се означени топчињата кои припаѓаат на ист раб на пирамидата. Водејќи сметка дека топчињата кои се на заедничките рабови на пирамидата не треба да ги броиме повеќекратно, можеме да забележиме дека секое од топчињата A, B, C и E се појавува по четири пати, а топчето D се појавува три пати. Значи, топчето кое не се гледа е означено со D.

23. Шестцифрениот број $\overline{2ABCDE}$ се множи со 3 и резултатот од множењето е шестцифрениот број $\overline{ABCDE2}$. Колку е збирот на цифрите на почетниот број?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36

Решение. B). Нека $x = \overline{ABCDE}$. Тогаш

$$3 \cdot (200000 + x) = 10x + 2,$$
$$600000 + 3x = 10x + 2,$$
$$7x = 599998,$$
$$x = 85714.$$

Значи, $\overline{2ABCDE}=285714$, па збирот на цифрите на бројот е

$$2+8+5+7+1+4=27.$$

24. Во една кутија има само зелени, црвени, сини и жолти топчиња, со иста големина и маса. Ако од кутијата без гледање извадиме 27 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно зелено топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 25 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно црвено топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 22 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно сино топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 17 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно жолто топче. Кој е најголемиот можен број топчиња во таа кутија?

A) 27 B) 29 C) 51 D) 87 E) 91

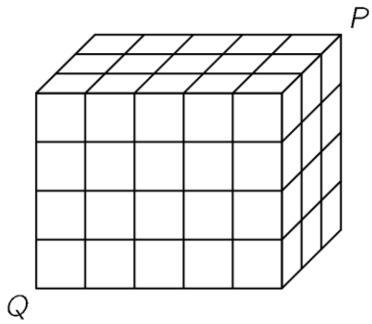
Решение. **B).** Со a,b,c,d редоследно да го означиме бројот на зелените, црвените, сините и жолтитие топчиња. Бидејќи меѓу 27 топчиња има барем едно зелено добиваме $b+c+d\le 26$. Бидејќи меѓу 25 топчиња има барем едно црвено добиваме $a+c+d\le 24$. Бидејќи меѓу 22 топчиња има барем едно сино добиваме $a+b+d\le 21$. Бидејќи меѓу 17 топчиња има барем едно жолто добиваме $a+b+c\le 16$. Ги собераме добиените неравенства и наоѓаме $3a+3b+3c+3d\le 87$, односно $a+b+c+d\le 29$. Значи, најголемиот можен број топчиња во кутијата е 29.

25. Фудбалска топка е направена од бели шестаголници и црни петаголници, како што е прикажано на цртежот десно. Вкупно на топката има 12 петаголници. Колку шестаголници има на топката?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

Решение. D). Нека имаме a шестаголници. Секој шестаголник има по 3 соседни страни со петаголнците, а петаголниците меѓу себе немаат соседни страни. Значи, вкупно $3a$ страни на шестаголниците се соседни со $5 \cdot 12 = 60$ страни на петаголниците. Според тоа, $3a = 60$, односно $a = 20$.

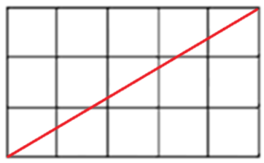
26. Дрвен паралелопипедот со димензии $3 \times 4 \times 5$ се состои од 60 идентични мали коцки. Еден термит се пробива по неговата дијагонала од темето P до темето Q. Оваа дијагонала не ги пресекува рабовите на било која мала коцка која е во внатрешноста на паралелопипедот.



Низ колку од малите коцки поминува термитот на своето патување?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Решение. C). Ако поставиме поставиме рамнина која минува низ точките P и Q, а е нормална на горниот ѕид на квадарот, тогаш таа горниот ѕид ќе го сече по дијагоналата која минува низ $5+3-1=7$ квадрати, односно во 7 коцки (види цртеж). Сега ако левото долно теме од дијагоналата го движиме надолу кон темето Q, тогаш во секој следен ред бројот на пресечените коцки ќе се зголемува за 1 (тоа е коцката во која дијагоналата преминува од еден во друг ред). Значи, дијагоналата која минува низ точките P и Q ќе сече $7+3=10$ мали коцки.



27. 2021 топчиња се наредени во ред и редоследно се нумерирани со броевите од 1 до 2021. Секое топче е еднобојно и тоа: црвено, зелено или сино. Во редот меѓу било кои три последователни топчиња, секогаш има топчиња од сите три бои. Борис ги погодува боите на пет точиња.

Ова се неговите претпоставки: топчето 2 е зелено; топчето 20 е сино; топчето 202 е црвено; топчето 1002 е сино; топчето 2021 е зелено. Само една од неговите претпоставки е погрешна. Кој е бројот на топчето чија боја Борис не ја погодиил?

A) 2 B) 20 C) 202 D) 1002 E) 2021

Решение. **B).** Јасно, нема две последователни топчиња кои се обоени со иста боја. Сега, бидејќи било кои три последователни топчиња се обоени во три различни бои, добиваме дека топчињата со редни броеви кои при делење со 3 даваат ист остаток се истобојни. Така имаме: $2=3\cdot 0+2$ е зелено, $20=3\cdot 6+2$ е сино, $202=3\cdot 67+1$ е црвено, $1002=3\cdot 334$ е сино, $2012=3\cdot 670+2$ е зелено. Две топчиња со зелена боја се нумерирани со броеви кои при делење со 3 даваат остаток 2, па мора и третото кое дава остаток 2 при делење со 3 да е зелено, но Борис кажал дека тоа е сино. Значи, Борис не ја погодил бојата на топчето со реден број 20.

28. Во еден град има 21 витез и 2000 лажговци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажговците секогаш лажат. Волшебник поделил 2020 од овие 2021 луѓе на 1010 парови. Секој човек во парот го опишува другиот човек од парот или како витез или како лажливец. Како резултат на тоа, 2000 луѓе беа наречени витези, а 20 луѓе беа наречени лажговци. Колку парови составени од двајца лажговци имало во поделбата?

A) 980 B) 985 C) 990 D) 995 E) 1000

Решение. **D).** Со В да означуваме витез, а со Л да означуваме лажливец. Тогаш во поделбата волшебникот може да состави парови: В-В, В-Л, Л-Л. Сега секој од трите вида парови го дал следниов опис на парот:

- парот В-В дал опис В-В,

- паротот В-Л дал опис Л-Л,
- паротот Л-Л дал опис В-В.

Бидејќи 20 луѓе се наречени лажговци добиваме дека 10 парови одговориле Л-Л, што значи дека имаме 10 парови од видот В-Л. Во овие 10 парови има 10 лажговци, што значи дека преостанатите $2000-10=1990$ лажговци се распоредени во парови Л-Л. Конечно, имаме $1990:2=995$ парови составени од двајца лажговци.

29. На турнир, секоја од шесте екипи игра по еден натпревар против секоја друга екипа. Во секое коло трите натпревари се одвиваат истовремено. Една ТВ станица одлучила кој натпревар ќе го пренесува за секое коло и тоа е прикажано на дијаграмот десно. Во кое коло тимот D ќе игра против тимот F?

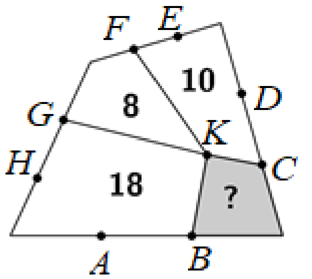
1	2	3	4	5
A – B	C – D	A – E	E – F	A – C

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **A).** Тимот A не може во второто коло да игра против тимот D, па затоа против D ќе игра во четвртото коло, а во ова коло третиот натпревар ќе биде B-C. Сега е јасно дека во второто коло тимот A ќе игра против тимот F, па затоа во второто коло третиот натпревар ќе биде B-E (види ја табелата десно). Понатаму, тимот E треба да игра со C и со D, па како со C не може да игра во петтото коло, распоредот ќе биде со C во првото и со D во петтото коло. Значи, третиот натпревар во првото коло е D-F, а третиот натпревар во петтото коло е B-F. Конечно, во третото коло се играат уште нат-превариите B-D и C-F. Значи, во првото коло тимот D ќе игра против тимот F

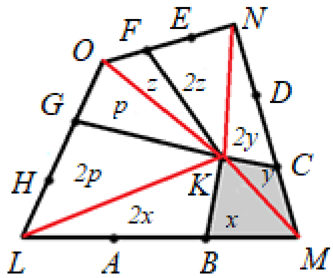
1	2	3	4	5
A-B	C-D	A-E	E-F	A-C
C-E	**A-F**	**B-D**	**A-D**	**D-E**
D-F	**B-E**	**C-F**	**B-C**	**B-F**

30. На цртежот десно е прикажан четириаголник кој е поделен на четири помали четириаголници со заедничко теме K. Другите обележани точки ги делат страните на големиот четириаголник на три еднакви делови. Запишаните броеви ги означуваат плошините на соодветните мали четириаголници. Колкава е плоштината на засенчениот четириаголник?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 6,5 E) 7

Решение. **C).** Четириаголникот да го означиме со $LMNO$ и неговите темиња да ги поврзиме со точката K. Така добиваме осум триаголници такви што по два имаат основи кои се однесуваат 2:1 и имаат заеднички висини. Според тоа, нивните плоштини се: $2x$ и x, $2y$ и y, $2z$ и z, $2p$ и p (цртеж десно). Според тоа, $2x+2y+2z+2p=10+18$, па затоа $x+y+z+p=14$. Конечно, $x+y=14-(z+p)=14-8=6$.



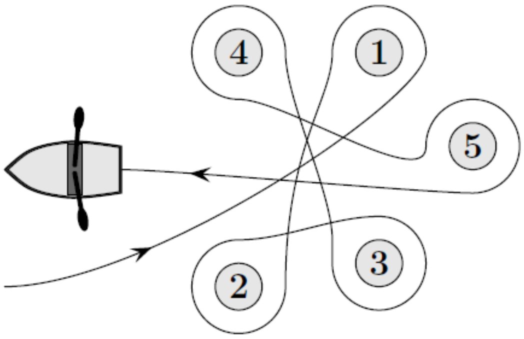
Kadett (осмо и деветто одделение) 2022

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Андреј со чамец вози околу 5 пловки (цртеж десно). Кои пловки Андреј ќе ги заобиколи во насока на движењето на стрелките на часовникот?



A) 2, 3, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 3, 5
D) 2, 4, 5 E) 2, 3, 5

Решение. **E).** Тоа се пловките кои при движењето му се од десна страна, т.е. пловките 2, 3 и 5.

2. Горјан ги наредил петте картички дадени подолу така што тие формираат најмал можен деветцифрен број. Која картичка е последна во низата гледајќи од лево кон десно?

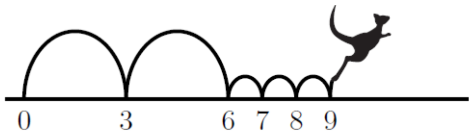
A) $\boxed{4}$ B) $\boxed{8}$ C) $\boxed{31}$ D) $\boxed{59}$ E) $\boxed{107}$

Решение. **B).** Деветцифрениот број кој го формирал Горјан е

$$\boxed{107}\boxed{31}\boxed{4}\boxed{59}\boxed{8}$$

Значи, последна е картичката $\boxed{8}$.

3. Кенгурот Скокалко скока на бројната права. Тој секогаш скока така што прави два големи скока десно, а потоа следуваат три мали скокови пак десно и оваа постапка ја повторува. Должината на големите скокови е 3 мерни единици, а на малите е 1 мерна единица. Скокалко тргнал од бројот 0. На кој од дадените броеви ќе скокне Скокалко?



A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

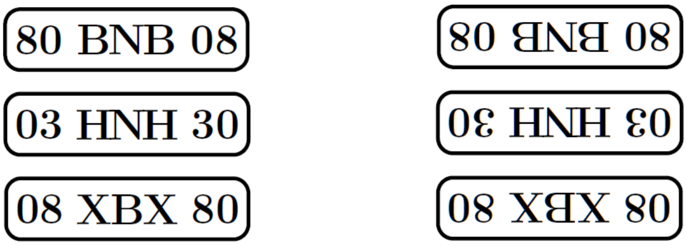
Решение. C). Во еден циклус Скокалко на бројната оска се поместува 9 броја во десно. Значи, по 9 циклуси тој ќе се најде на бројот $9 \cdot 9 = 81$. Сега следуваат два скока со должина 3, па затоа Скокалко прво ќе скокне на бројот 84, а потоа на бројот 87. Значи, од дадените броеви Скокалко ќе се најде само на бројот 84.

4. На Пабло од автомобилот му паднала регистерската таблица. Тој се збунил и ја прицврстил наопаку, но за среќа регистерската ознака останала иста. Која од следниве таблици може да е регистарската таблица на Пабло?

A) 04 NSN 40 B) 60 HOH 09 C) 80 BNB 08

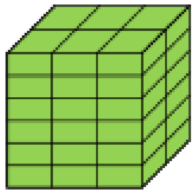
D) 03 HNH 30 E) 08 XBX 80

Решение. B). Кога регистерската таблица се поставува наопаку, таа всушност се ротира за 180°. Дадените пет таблици ротирани се прикажани на долните цртежи:



Како што можеме да забележиме само втората таблица дава при ротација за 180° слика која е идентична на опргиналот.

5. Ѕидарот Марко со помош на цигли кај кои најкраткиот раб е $4\,cm$ ја направил коцката која е прикажана на цртежот десно. Кои се димензиите на циглите изразени во сантиметри?

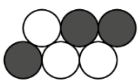
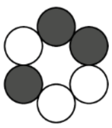
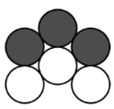
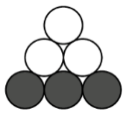
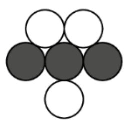


A) $4\times6\times12$ B) $4\times6\times16$ C) $4\times8\times12$

D) $4\times8\times16$ E) $4\times12\times16$

Решение. C). Најкраткиот раб е 6 пати на работ на големата коцка, средниот раб е 3 пати и најдолгиот раб е 2 пати. Значи, средниот раб е $6:3=2$ пати подолг, т.е. тој е долг $8\,cm$, а најдолгиот раб е $6:2=3$ пати подолг, т.е. тој е долг $12\,cm$. Конечно, димензиите на циглите се $4\times8\times12$.

6. Црно-бела гасеница која е прикажана на цртежот десно се склупчила за да спие. На кој од долните цртежи е прикажано како може да изгледа склупчената гасеница?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. A). Единствено на првиот цртеж може наизменично со непрекината линија да се поврзат белите и црните кругчиња. Значи, тоа е цртежот A).

На другите цртежи тоа не е можно. На пример, на цртежите B) и C) можеме да поврземе најмногу 4 кругчиња, а на цртежите D) и E) најмногу 5 кругчиња.

7. Колку се природни броеви поголеми од 101, а помали од 300, кои се запишуваат со непарни цифри?

A) 25 B) 50 C) 75 D) 100 E) 150

Решение. **A).** Ако цифрата на стотките е 1, тогаш за цифрите на десетките и единиците имаме по 5 можности, т.е. имаме $5 \cdot 5 = 25$ такви броеви. Ако цифрата на стотките е 2, тогаш немаме нити еден брпј кој ги зсоволува условите на задачата. Значи, вкупно имаме 25 броеви кои ги зсдоволуваат условите на задачата.

8. Во квадратчињата на шемата треба да се запишат четири знаци + и еден знак − така што ќе се добие точно равенство.

$$6\square 9\square 12\square 15\square 18\square 21=45$$

Каде треба да се запише знакот $-$?

A) меѓу 6 и 9 B) меѓу 9 и 12 C) меѓу 12 и 15

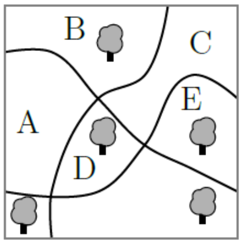
D) меѓу 15 и 18 E) меѓу 18 и 21

Решение. **D).** Ако секаде запишеме знак +, тогаш добиваме

$$6+9+12+15+18+21=81.$$

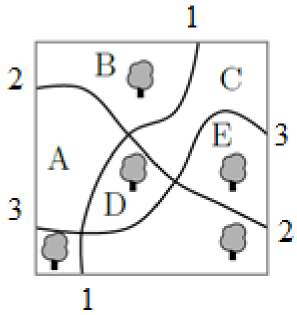
Значи, резултатот е за $81-45=36$ поголем од тој што треба да го добиеме. Ако еден знак + замениме со знак $-$, тогаш резултатот се намалува за двократната вредност на бројот пред кој е извршена промената. Значи, промената треба да се направи пред бројот $36:2=18$ и тогаш се добива $6+9+12+15-18+21=45$.

9. Во паркот кој е прикажан на цртежот десно има пет дрва и три патеки. Во кој дел од паркот треба да се засади уште едно дрва така што на двете страни од секоја патека ќе има еднаков број дрва?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. B). Патеките да ги означиме како на цртежот десно и притоа страните да ги разликуваме кога одиме оддолу-нагоре.



Лево од 1 имаме две, а десно три дрва. Лево од 2 имаме три, а десно две дрва. Лево од 3 имаме две, десно три дрва. Значи, дрвото треба да го засадиме во делот кој е лево од 1, десно од 2 и лево од 3. Тоа е делот B).

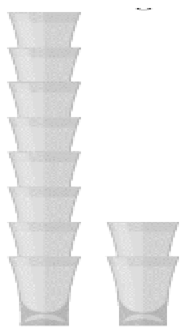
10. Филип го запишал збирот на квадратите на два броја како што е прикажано на долниот цртеж.

За жал дел од цифрите се покриени со истурено мастило. Која е цифрата на единиците на првиот број?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. C). Цифрата е единиците на вториот број е 2, па затоа цифрата на единиците на неговиот квадрат е 4. Значи, цифрата на единиците на квадратот на првиот број е $9-4=5$. Конечно, цифрата на единиците на првиот број е 5.

11. Кога еднакви чаши се наредени во височина, една во друга, група од 8 чаши е висока $42\,cm$, а група од 2 чаши е висока $18\,cm$. Растојанието меѓу две полици во кујната на Цетанка е $36\,cm$.

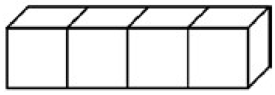


Кој е најголемиот број чаши што може да се стават една во друга и да се постават меѓу две полици?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **D).** Разликата на височините на двете групи е еднаква на $42-18=24\,cm$. Според тоа, со додавање на една чаша на малата група височината пораснува за $24:6=4\,cm$. Значи, една чаша е висока $18-4=14\,cm$. Конечно, бидејќи $36=14+5\cdot4+2$ на полицата може да се ствата $1+5=6$ чаши.

12. На стандардна коцка за играње збирот на точките на спротивните ѕидови е еднаков на 7. Четири стандардни коцки се залепени на начин како што е прикажан на цртежот десно. Кој е најмалиот можен збир на бројот на точките кои се наоѓаат на сите страни на добиениот квадар?



A) 52 B) 54 C) 56 D) 58 E) 60

Решение. **D).** На секоја коцка збирот на точките на горниот и долниот ѕид е 7, а исто важи и за предниот и задниот ѕид. Најмалиот можен број точки се добива ако на левиот и десниот ѕид на квадарот има по 1 точка. Според тоа, најмалиот можен збир на бројот на точките е $8\cdot7+2=58$.

13. Три сестри, чиј просек на години е 10, се на различна возраст. Кога се во парови просеците на два такви пара се 11 и 12. Колку години има најстарата сестра?

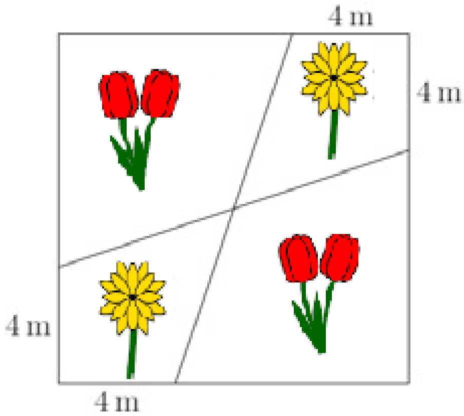
A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 16

Решение. **E).** Нека a,b,c се годините на сестрите. Имаме

$$a+b+c=30,\ a+b=22 \text{ и } a+c=24.$$

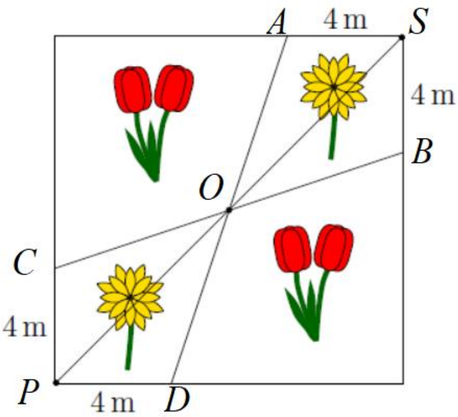
Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $c=8$, а ако од првата равенка ја одземеме третата добиваме $b=6$. Според тоа, $a=30-8-6=16$.

14. Градинарката Катица засадила лалиња и маргаритки во квадратна градина со должина на страна 12 m, при што цвеќето го распоредила како на цртежот десно. Колкава е вкупната плоштина на делот од градината во кој Катица засадила маргаритки?



A) $48\,m^2$ B) $46\,m^2$ C) $44\,m^2$ D) $40\,m^2$ E) $36\,m^2$

Решение. A). Збирот на висините x и y на триаголниците PCO и BSO повлечени од темето O е еднаков на 12 m, а исто важи и за збирот на висините u и v на триаголниците PDO и SAO повлечени од темето O. Затоа бараната плоштина е еднаква на



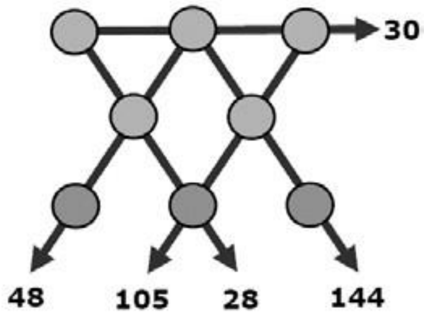
$$P=\frac{4x}{2}+\frac{4y}{2}+\frac{4u}{2}+\frac{4v}{2}=2(x+y)+2(u+v)=2\cdot 12+2\cdot 12=48\,m^2.$$

15. Во канцеларијата на Маја има два часовника. Едниот на секој час покажува 1 минута повеќе, а другиот на секој час покажува 2 минути помалку. Вчера Маја двата часовника ги наместила да покажуваат точно време. Кога денес погледнала во часовниците едниот покажал 11:00, а другиот 12:00. Во колку часот вчера Маја ги наместила часовниците да покажуваат точно време?

A) 23:00 B) 19:40 C) 15:40 D) 14:00 E) 11:20

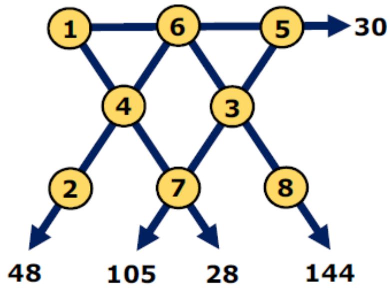
Решение. **C).** Бидејќи едниот часовник оди напред 1 минута, а другиот заостанува 2 минути, со секој изминат час разликата на времињата кои ги покажуваат се зголемува за 3 минути. Сега разликата е 60 минути, што значи дека часовниците се наместени пред $60:3=20$ часа. Во текот на овие 20 часа првиот часовник покажува 20 минути повеќе, па точното време е 11:40. Пред 20 часа било 15:40.

16. Во круговите на цртежот десно се запишани броевите од 1 до 8, секој број по еднаш. Броевите кои ги покажуваат стрелките се еднакви на производите на броевите на соодветните прави. Колку е збирот на броевите запишани во најдолните кругчиња?



A) 11 B) 12 C) 15 D) 17 E) 19

Решение. **D).** Единствени броеви кои се делив со 5 се 30 и 105, па затоа во пресекот на двете прави е бројот 5. Понатаму, единствени броеви кои се деливи со 7 се броевите 105 и 28, па затоа во пресекот на соодветните прави е бројот 7. Сега, меѓу броевите 5 и 7 е бројот 3. Но, $144:3=48$, па затоа двата броја на правата на бројот 144 се 6 и 8, а како 8 не е делител на 30, добиваме дека горе е бројот 6, а долу е бројот 8. Јасно, горе лево е бројот 1, па под него е бројот 4 и на крајот долу лево е бројот 2. Конечно, бараниот збир е $2+7+8=17$.



17. Филип на таблата запишал неколку позитивни броеви помали од 7. Андреј ги прецртал сите негови броеви и на местото на секој број ја

запишал разликата на бројот 7 и тој број. Збирот на броевите кои ги запишал Филип е 22, а збирот на броевите кои ги запишал Андреј е 34. Колку броеви запишал Филип?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. **B).** Нека Филип го запишал бројот a. Тогаш Андреј го запишал бројот $7-a$, па затоа збирот на запишаниот број од Филип и бројот со кој е заменет од Андреј е $a+7-a=7$. Бидејќи збирот на сите парови броеви е еднаков на збирот на броевите запишани од Филип и броевите запишани од Андреј добиваме дека тој збир е еднаков на $22+34=56$. Значи, двете деца запишале $56:7=8$ парови броеви, т.е. Филип запишал 8 броја.

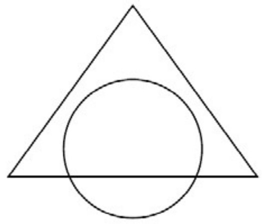
18. Пабло секогаш вози велосипед со иста брзина и секогаш оди пешки со иста брзина. Со велосипедот патот од дома до училиштето и назад го поминува за 20 минути, а ако оди пешки, по истиот пат за тоа му се потребни 60 минути. Вчера на училиште тргнал со велосипед, по истиот пат како и обично, по пат го оставил велосипедот кај Филип и продолжил пешки. Од училиштето назад пешачел до куќата на Филип, го зел велосипедот и возел до дома. За тоа му требале 52 минути. Колкав дел од патот Пабло поминал возејќи велосипед?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Решение. **B).** Нека a е делот од патот кој вчера Пабло го поминал со велосипед. Тогаш пешки поминал $1-a$ од патот. Та значи дека со велосипед се возел $20a$ минути, а пешки одел $60(1-a)$ минути. Затоа $20a+60(1-a)=52$, од каде добиваме $40a=8$, односно $a=\frac{1}{5}$.

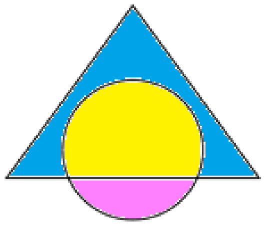
19. Круг и триаголник се преклопени како на цртежот десно. Плоштината на пресекот на кругот и триаголникот е еднаква на 45% од плошти-

ната на добиената фигура. Плоштината на триаголникот надвор од кругот е еднаква на 40% од плоштината на целата фигура. Колкав процент на кругот е надвор од триаголникот?



A) 20% B) 25% C) 30% D) 35% E) 50%

Решение. **B).** Со P да ја означиме плоштината на целата фигура. Бидејќи плоштината на пресекот на кругот и триаголникот (жолтиот дел) е $45\%P = 0,45P$, а плоштината на триаголникот надвор од кругот (синиот дел) е $40\%P = 0,4P$, добиваме дека плоштината на кругот надвор од триаголникот е еднаква на

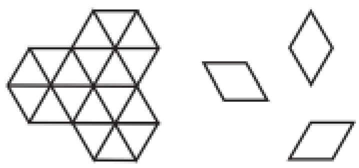


$$P-(0,45P+0,4P)=0,15P.$$

Плоштината на целиот круг е збир на плоштините на жолтиот и розевиот дел од кругот, т.е. $0,45P+0,15P=0,6P$. Според тоа, процентот на кругот кој е надвот од триаголникот е еднаков на

$$\frac{0,15P}{0,60P}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}=25\%.$$

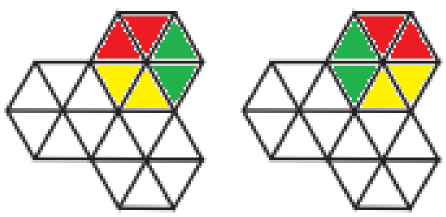
20. На колку начини фигурата прикажана на цртежот десно може да се покрие со користење на девет плочки како плочките кои се прикажани на цртежот десно од фигурата? .



A) 1 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

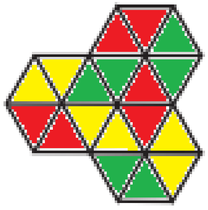
Решение. **D).** Дадената фигура е составена од три шестаголници. При покривањето на фигурата можни се два случаја.

1) ромбоидните плочки не покриваат триаголници кои припаѓаат на различни шестаголници. Притоа бидејќи во секој шестаголник може да



се покрие на два начина (цртеж десно). Сега, бидејќи имаме три шестаголници и за секој имаме по две покривања, во случа-јот имаме осум различни покривања.

2) постои ромбоидна плочка која покрива два три-аголника од различни шестаголници и притоа имаме единствено покривање на фигурата (цр-теж десно).



Конечно, имаме вкупно $8+1=9$ покривања на саканиот начин.

21. Матео одлучил да запише броеви во сите полиња на 3×3 табелата, така што збирот на броевите во сите мож-ни 2×2 квадрати ќе биде секогаш еднаков. Во гри агли тој запишал броеви како што е прикажано на цртежот десно. Кој број треба да го запише во четвртиот агол на табе-лата?

2		4
?		3

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **B).** При ознаки како на цртежот десно имаме

2		4
a		b
x		3

$$2+a=b+4,\ a+x=b+3.$$

Сега, ако од втората ра-венка ја одземе првата, добиваме

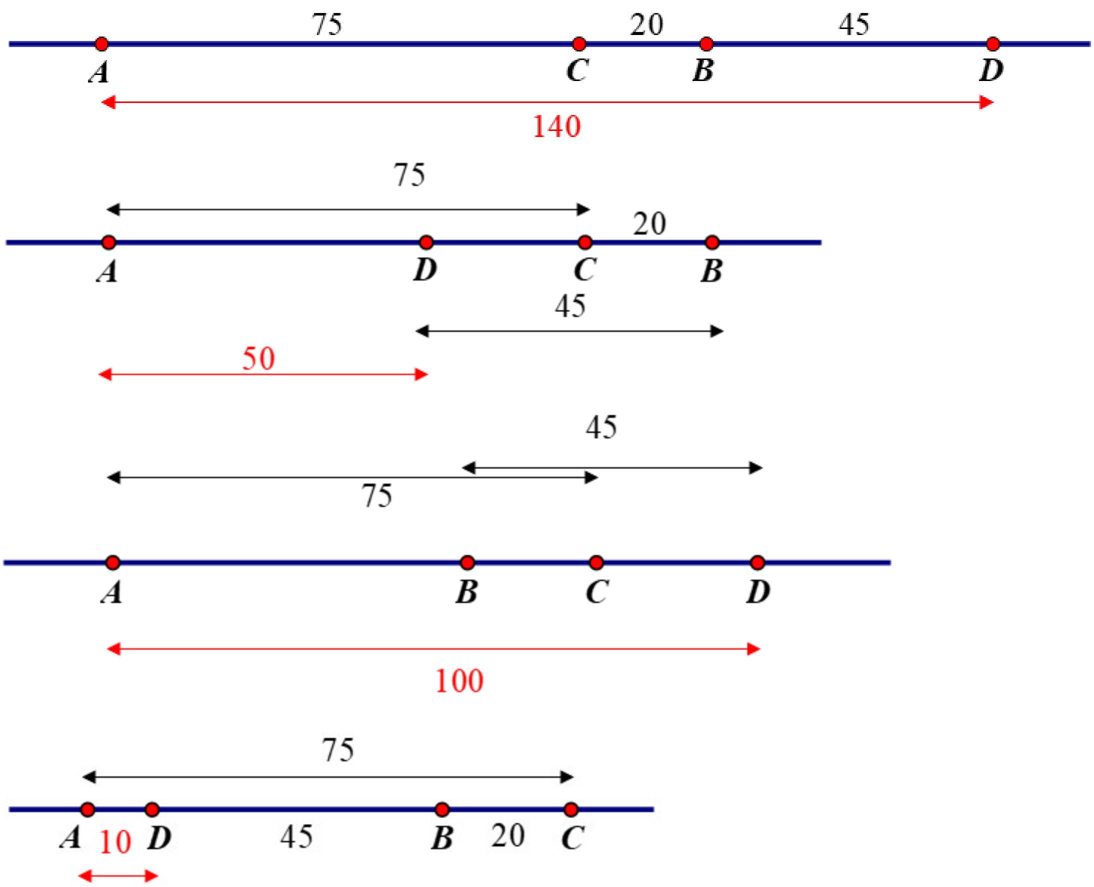
$$a+x-2-a=b+3-b-4,$$

па затоа $x-2=-1$, т.е. $x=1$.

22. Селата A,B,C,D се распоредени покрај прав долг пат, но не задол-жително во овој редослед. Растојанието од A до C е $75\,km$, расто-јанието од B до D е $45\,km$, а растојанието од B до C е $20\,km$. Која од следниве вредности не може да е растојанието од A до D?

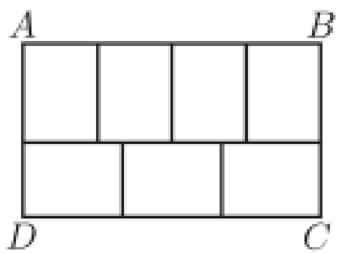
A) 10 B) 50 C) 80 D) 100 E) 140

Решение. **C).** Сите можни положби на селата се прикажани на дол-ните цртежи.



Од понудените растојанија единствено $80\,km$ не може да е растојанието од A до D.

23. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на седум складни правоаголници (цртеж десно). Колку е односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{12}{7}$ E) $\frac{7}{3}$

Решение. **E).** Нека a и c се должините на поголемата и помалата страна на складните правоаголници. Тогаш $3a = 4c$, па затоа $a = \frac{4}{3}c$.

Според тоа,

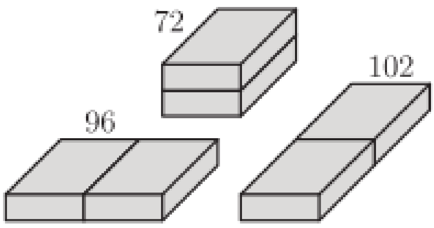
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4c}{a+c} = \frac{4c}{\frac{4}{3}c+c} = \frac{12}{7}.$$

24. Сликарот Пабло планирал да измеша 2 литри сина и 3 литри жолта боја за да добие 5 литри зелена боја. Но, тој се збунил и зел 3 литри сина и 2 литри жолта боја и добил друга нијанса зелена боја. Кое е најмалото количество од зелената боја кое треба да го отстрани така што со дотурање на некои количества сина и/или жолта боја ќе добие 5 литри од саканата нијанса зелена боја?

A) $\frac{5}{3}l$ B) $\frac{3}{2}l$ C) $\frac{2}{3}l$ D) $\frac{3}{5}l$ E) $\frac{5}{9}l$

Решение. A). Во добиената смеса има 3 литри сина боја наместо потребните 2 литри, што значи 1 литар повеќе сина боја отколку што е потребно. Јасно, за да вкупно остане повторно 5 литри боја, Пабло мора од смесата да го острани вишокот количество сина боја и да го замени со жолта боја. Во смесата има 3 литри сина боја, па тој треба да отстрани $\frac{1}{3}$ од сината боја, што значи $\frac{1}{3}$ од целата смеса, односно $\frac{5}{3}l$ од целата смеса.

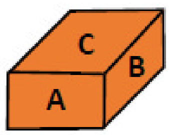
25. Ѕидарот Марко има две идентични цигли. Тој ги наредил на три различ-ни начини поврзувајќи ги истите ѕидови. Плоштините на трите добиени квадари се дадени цртежот десно. Определи ја плоштината на една цигла?



A) 36 B) 48 C) 52 D) 54 E) 60

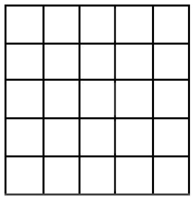
Решение. D). Плоштините на трите различни ѕида на циглата да ги означиме со A, B, C (цртеж десно). Тогаш

$$4A + 2B + 4C = 96,$$
$$2A + 4B + 4C = 102,$$
$$4A + 4B + 2C = 72.$$



Ако ги собереме горните равенства, добиваме $10(A+B+C)=270$, односно $2(A+B+C)=54$.

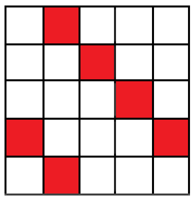
26. Кој е најмалиот број квадратчиња кои треба да се обојат во квадрат со димензија 5×5 така да било кој правоаголник со димензија 1×4 или 4×1 кој во квадратот покрива четири цели квадратчиња содржи барем едно обоено квадратче?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. **B).** Од условот на задачата следува дека во секој ред и во секоја колона мора да имаме обоено барем едно квадратче. Тоа значи дека треба да имаме пет или повеќе обоени квадратчиња.

Нека имаме 5 обоени квадратчиња. Да го разгледаме редот за кој обоеното квадратче е во првата колона. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е првиот ред. Тогаш во првиот ред нема да има друго обоено квадратче, бидејќи во спротивно ќе имаме ред без обоено квадратче и во него ќе може да се постави правоаголник 1×4 кој не покрива обоено квадратче. Сега е јасно дека во првиот ред може да се постави павоагокник 1×4 кој не покрива обиено квадратче. Значи, треба да обоиме повеќе од 5 квадратчиња. На цртежот десно е дадено боење на 6 квадратчиња кое го задоволува условот на задачата.



27. Горјан ги прашал Зоран и Петар кој ден е денес. Зоран секогаш лаже во понеделник, вторник и среда, а Петар секогаш лаже во четврток, петок и сабота. Зоран рекол: „Вчера беше еден од деновите кога јас лажам“. Истиот одговор го дал и Петар. Кој ден е денес?

A) четврток B) петок C) сабота D) недела E) понеделник

Решение. А). Ако денес е ден кога Зоран говори вистина, тогаш денес е четврток, бидејќи тоа е единствениот ден во кој по деновите во кои лаже, тој говори вистина.

Ако денес е ден кога Зоран лаже, тогаш вчера тој говорел вистина, па затоа денес мора да е понеделник бидејќи тоа е единствениот ден во кој по деновите во кои говори вистина, тој лаже.

Значи, по изјавата на Зоран Горјан знае дека денес е понеделник или четврток.

На потполно ист начин од изјавата на Петар следува дека денес е четврток или недела.

Бидејќи четврток е единствен ден кој е можен и во двата случаја заклучуваме дека денес е четврток.

28. На правата се означени неколку точки. Андреј на таа права меѓу секои две соседни означени точки означил по една точка. Оваа постапка ја повторил уште три пати. На крајот пребројал дека се означени 225 точки. Колку точки биле означени на почетокот?

А) 10 В) 12 С) 15 D) 16 Е) 25

Решение. С). Нека на почетокот биле означени a точки. Во долната табела е дадено колку точки се означуваат во секој чекор и колку вкупно означени точки има по секој чекор.

	Број точки на почетокот	Дополнително означени точки	Вкупен број на точки
I чекор	a	$a-1$	$2a-1$
II чекор	$2a-1$	$2a-2$	$4a-3$
III чекор	$4a-3$	$4a-4$	$8a-7$
IV чекор	$8a-7$	$8a-8$	$16a-15$

Значи, $16a-15=225$, од каде добиваме $a=15$.

29. Во седум резервати живеат вкупно 2022 кенгури и определен број коали. Во секој резерват бројот на кенгурите е еднаков на вкупниот број коали во сите преостанати резервати. Колку вкупно коали живеат во овие седум резервати?

A) 288 B) 337 C) 576 D) 674 E) 2022

Решение. B). Со $x_i, i=1,2,...,7$ да ги означиме броевите на кенгурите во седумте резервати, а со $y_i, i=1,2,...,7$ да ги означиме броевите на коалите во седумте резервати. Тогаш

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7,\\
x_2 &= y_1+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7,\\
x_3 &= y_1+y_2+y_4+y_5+y_6+y_7,\\
x_4 &= y_1+y_2+y_3+y_5+y_6+y_7,\\
x_5 &= y_1+y_2+y_3+y_4+y_6+y_7,\\
x_6 &= y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_7,\\
x_7 &= y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6.
\end{aligned}$$

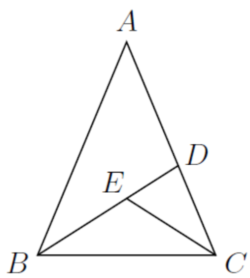
Ако ги собереме горните равенства, добиваме

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=6(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7),$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned}
&6(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7)=2022,\\
&y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7=337.
\end{aligned}$$

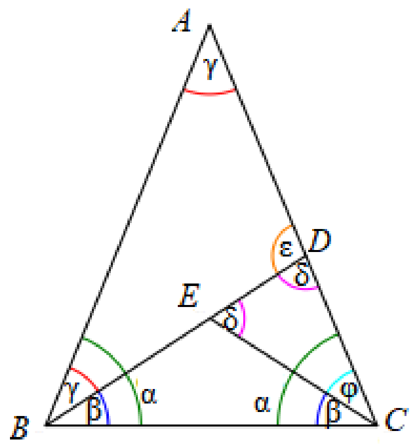
30. Рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AB}=\overline{AC}$ е поделен на три рамнокраки триаголници како на цртежот така што $\overline{AD}=\overline{DB}, \overline{CE}=\overline{CD}, \overline{BE}=\overline{EC}$. Определи ја мерката на $\measuredangle BAC$.



A) 24° B) 28° C) 30° D) 35° E) 36°

Решение. E). При ознаки како на цртежот десно имаме $\alpha=\beta+\gamma$, $\alpha=\beta+\varphi$, па затоа $\gamma=\varphi$. Понатаму,

$$\varepsilon = 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 2\varphi, \quad \delta = \frac{180^\circ - \varphi}{2},$$



па со замена во $\varepsilon + \delta = 180^\circ$ добиваме

$$180^\circ - 2\varphi + \frac{180^\circ - \varphi}{2} = 180^\circ,$$

од каде наоѓаме $\varphi = 36^\circ$.

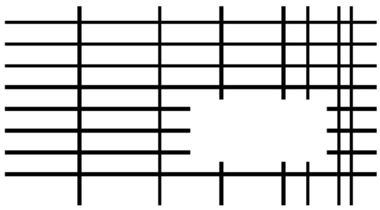
Kadett (осмо и деветто одделение) 2023

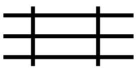
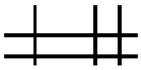
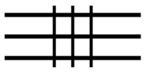
Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

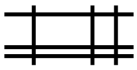
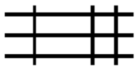
Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

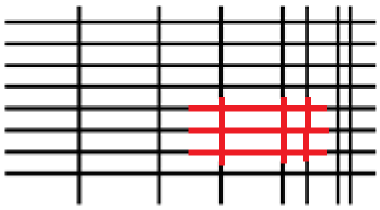
1. На цртежот десно е шрикажано множество хоризонтални и вертикални прави од кои недостасува еден дел. Кој дел недостасува?



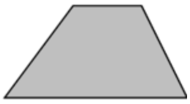
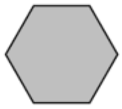
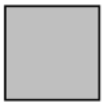
A)  B)  C) 

D)  E) 

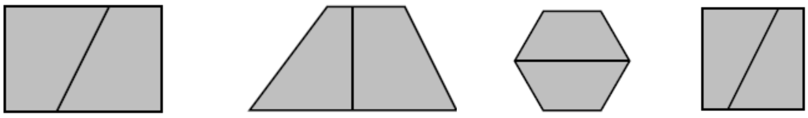
Решение. **E).** Во делот кој недостасува имаме три хоризонтални и три вертикални линии, па затоа деловите A) и B) отпаѓаат. Понатаму, меѓу хоризонталните линии двете растојанија се еднакви, па затоа делот D) отпаѓа. Меѓу вертикалните линии растојанијата не се еднакви, па затоа делот C) отпаѓа. Останува делот E) кој целосно се вклопува на местото на кое недостасува делот од фигурата (цртеж десно).



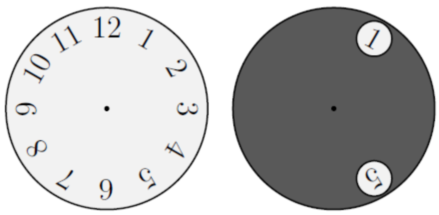
2. Која од дадените фигури не може да се подели на два трпеза со едно повлекување на права линија?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **A).** Два трапези вкупно имаат 8 агли. Триаголникот има 3 агли, па бидејќи со повлекување на една права која го сече може да се добијат 3 (минува низ теме и сече страна) или 4 (сече две страни) нови агли, не е можно истиот да се подели на два трапези. Останатите фигури може да се поделат на два трапези (види ги долните цртежи).



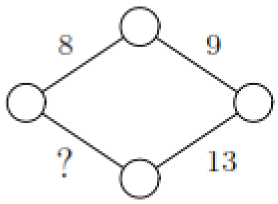
3. Преку часовникот е поставен сив круг, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа сивиот круг е заротиран околу неговиот центар така што по ротацијата во едниот отвор се појавил бројот 8. Кои два броја може да се појават во другиот отвор?



A) 4 или 12 B) 1 или 5 C) 1 или 4 D) 7 или 11 E) 5 или 12

Решение. **A).** Разликата меѓу времињата кои се појавуваат на цртежот е $5-1=4$. При секоја ротација оваа разлика не се менува, па затоа во празните места може да се појават броевите $8-4=4$ или $8+4=12$.

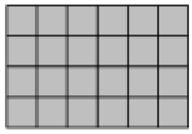
4. Ацо сака во секој круг во темињата на ромбот да запише по еден број така да збирот на броевите во два круга кои се на иста страна да биде еднаков на бројот кој е запишан на таа страна на ромбот. Кој број треб а да е на местото на прашалниот знак?

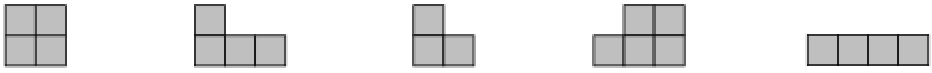


A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Решение. B). Збирот на броевите 8 и 13 е еднаков на збирот на броевите запишани во сите четири кругови, а бројот 9 е еднаков на збирот на броевите во темињата кои се на спротивната страна од страната на која е прашалниот знак. Значи, на местото на прашлниот знак треба да е бројот $8+13-9=12$.

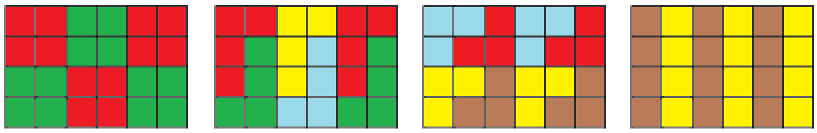
5. Табла 4×6 треба да се покрие со идентични плочки. Со кој ви од дадените четири вида плочки тоа не може да се направи?





A) B) C) D) E)

Решение. D). Покривањата со плочките A), B), C) и E) се прикажани на долните цртежи.



Целата табла има 24 квадратчиња, а фигурата D) има 5 квадратчиња. Сега, бидејќи 5 не е делител на 24, заклучуваме дека таблата не може да се покрие со фигурата D).

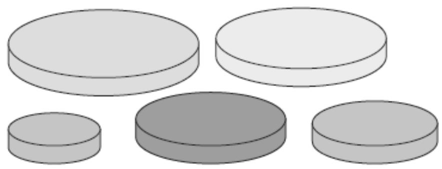
6. Филип има 150 монети. Кога ги фрлил на маса, 40% од монетите покажуваат грб, а 60% покажуваат писмо. Колку монети кои покажуваат писмо треба Филип да заврти за да еднаков број монети покажуваат писмо и грб?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Решение. B). *Прв начин*. Бидејќи $60-40=20\%$ повеќе од монетите покажуваат писмо, за да се изедначи бројот на писмата и грбовите треба да превртиме $20:2=10\%$ од монетите. Значи, треба да превртиме $\frac{150 \cdot 10}{100}=15$ монети.

Втор начин. Имаме $\frac{150 \cdot 40}{100}=60$ грбови и $\frac{150 \cdot 60}{100}=90$ писма. Значи, има $90-60=30$ писма повеќе, па затоа треба да превртиме $30:2=15$ писма.

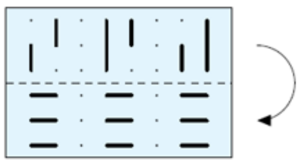
7. Андреј има пет дискови со различни дијаметри. Тој решил да направи кула со помош на три дискови така што секој диск во кулата ќе има помал дијаметар од дискот кој е под него. На колку начини може Андреј да ја направи кулата?

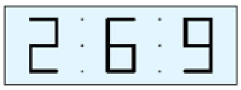


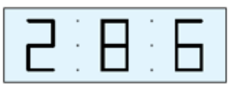
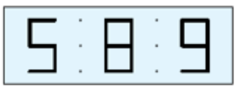
A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15

Решение. **D).** Три дискови Андреј може да избере така што ќе отстрани два од петте диска. Изборот на двата диска кои ќе ги отстрани може да го направи на $\frac{5 \cdot 4}{2}=10$ начини. Сега за секој избор со преостанатите три диска кулата може да ја постави на единствен начин. Значи, Андреј може да направи 10 различни кули.

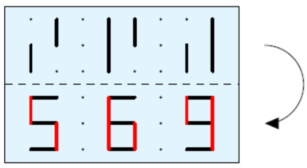
8. Матео има проѕирна хартија, на која се нацртани некои линии. Што ќе види Матео ако хартијата ја превитка по испрекинатата линија?



A)  B)  C) 

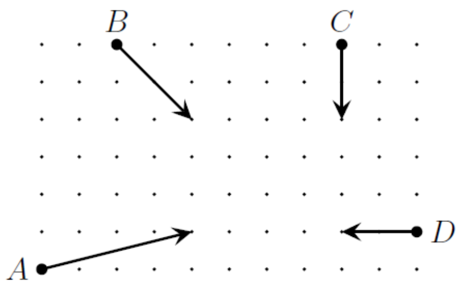
D)  E) 

Решение. **C).** При превиткувањето на хартијата секоја горна линија се пресликува во линија



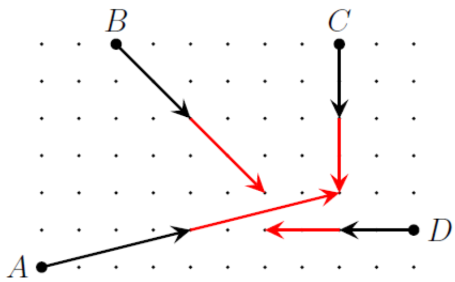
која е симетрична во однос на испрекинатата права како оска на симетрија (цртеж горе деснодесно).

9. Дијаграмот на цртежот десно ги покажува почетните положби, правците и насоките на движења и должините за кои четири автомобили A, B, C, D се поместуваат за пет секунди. Ако автомобилите продолжат да се движат во истите правци и насоки и со истите големини на брзини, кои два автомобили ќе се судрат?



A) A и B B) A и C C) A и D D) B и C E) C и D

Решение. B). Во следните 5 секунди, автомобилите ќе се поместат за исто растојание во истите насоки, односно за истите вектори. Положбите на автомобилите се дадени на цртежот десно. Значи, ќе се судрат автомобилите A и C.



10. Во табелата десно Горјан ги запишал броевите од 1 до 8 така што збирот на броевите запишани во полињата на секој од двата реда е еднаков и збирот на броевите запишани во полињата на секоја од четирите колони е еднаков. Кој број е запишан во сивото поле?

	4		(сиво)
3		8	

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. E). Збирот на запишаните броеви е

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

Според тоа, збирот на броевите запишани во секој ред е $36:2=18$, а збирот на броевите запи-шани во секоја колона е $36:4=9$. Значи, вторите броеви во првата, втората и третата колона соодветно се 6, 5 и 1. Сега, бидејќи $6+4+1=11$ во сивото поле е запишан бројот $18-11=7$. Пополнетата табела е прикажана на цртежот десно.

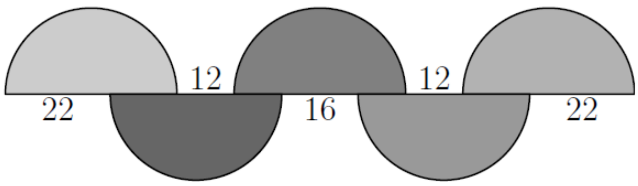
6	4	1	7
3	5	8	2

11. Матео запишал три природни броја во растечки редослед и еднаквите цифри ги заменил со еднакви симболи, а различните цифри со различни симболи. Тој добил □◊◊, ♡△△, ♡△□. Како изгледа следниот број по овие три броја?

A) ♡♡◊ B) □♡□ C) ♡△◊ D) ♡◊□ E) ♡△♡

Решение. E). Првите два броја се со различни почетни симболи, па затоа на срцето соодветствува цифра која е поголема за еден од цифрата која соодветствува на квадратчето. Понатаму, на ромбот соодветствува цифрата 9, па затоа на триаголничето соодветствува цифрата 0. Сега е јасно дека на квадратчето соодветствува цифрата 1. Значи, броевите се 199, 200 и 201. Следниот број е 202 и по замена на цифрите со симболи добиваме ♡△♡.

12. На цртежот се прикажани пет складни полукружници и се означени должините на некои отсечки. Колку е радиусот на овие полукруж-ници?



A) 12 B) 16 C) 18 D) 12 E) 22

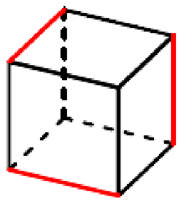
Решение. C). Ако со r го означиме радиусот на полукружниците, тогаш

$$
\begin{aligned}
&2r+12+2r+12+2r=22+2r+16+2r+22\\
&6r+24=4r+60,\\
&2r=36,\\
&r=18.
\end{aligned}
$$

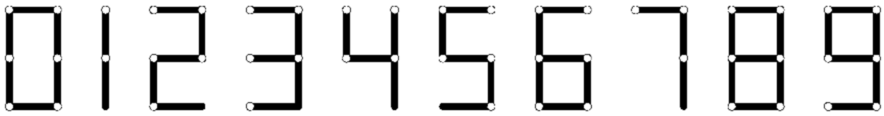
13. Некои рабови на коцка треба да се обојат во црвена боја така што на секој ѕид на коцката има најмалку еден црвен раб. Кој е најмалиот можен број рабови кои треба да се обојат со црвена боја?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Еден раб припаѓа на два ѕида, па ако има два обоени раба, тогаш тие се заеднички за најмногу 4 ѕидови. Значи, два раба не се доволни. На цртежот десно е покажано дека целта може да се постигне со три раба и тоа е најмалиот можен број рабови.



14. Со помош на кибритени чкорчиња може да се запишат цифрите како што е прикажано на долниот цртеж:



Колку различни природни броеви може да се запишат на таков начин ако се употребат точно 6 чкорчиња?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. C). Во долната табела е даден бројот на чкорчињата потребни за составување на секоја од цифрите:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Чкорчиња	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

Бидејќи ниту една цифра не може да се направи со едно чкорче, а вкупно користиме 6 чкорчиња, ги имаме следниве можности:

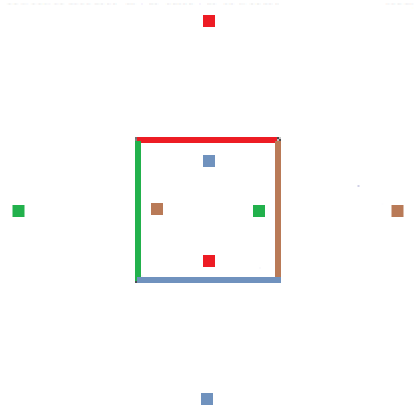
$$6 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2\,.$$

Со две чкорчиња може да се состави цифрата 1, со три цифрата 7, со четири цифрата 4 и со шест цифрите 6 и 9. Значи, можеме да ги составиме следниве броеви: 6, 9, 14, 41, 77 и 111.

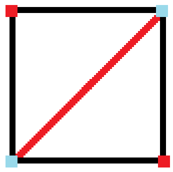
15. Даден е квадрат со должина на страна $1\,cm$. Колку точки има во рамнината кои се оддалечени точно $1\,cm$ од две темиња на овој квадрат?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Решение. E). Да разгледаме две соседни темиња на квадратот. Секоја точка која е оддалечена $1\,cm$ од две такви темиња , заедно со нив определува темиња на рамностран триаголник со должина на страна $1\,cm$. Бидејќи над секоја страна може да се конструираат два такви триаголници, вкупниот број на такви точки е $4 \cdot 2 = 8$.



Сега да земеме две несоседни темиња на квадратот, т.е. крајни точки на негова дијагонала. Секоја точка која е оддалечена $1\,cm$ од две такви темиња заедно со нив определува темиња на рамнокрак правоаголен триаголник чие трето теме е теме на квадратот. Бидејќи над секоја дијагонала има два такви триаголника, вкупниот број на такви точки е $2 \cdot 2 = 4$ и тоа всушност се темињата на квадратот.

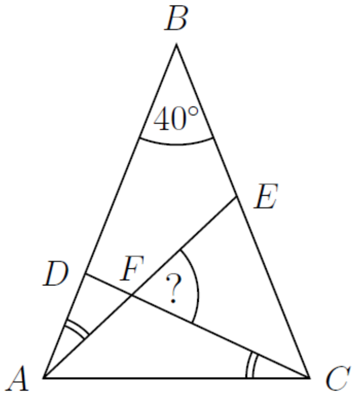


Значи, имаме $8 + 4 = 12$ точки со саканото својство.

16. Триаголникот е рамнокрак ABC со основа AC и $\measuredangle ABC = 40^\circ$. На краците AB и CB се земени точки D и E, такви што $\measuredangle EAB = \measuredangle DCA$. Ако F е пресекот на AE и CD, определи ја мерката на $\measuredangle CFE$.

A) 55° B) 60° C) 65°

D) 70° E) 75°



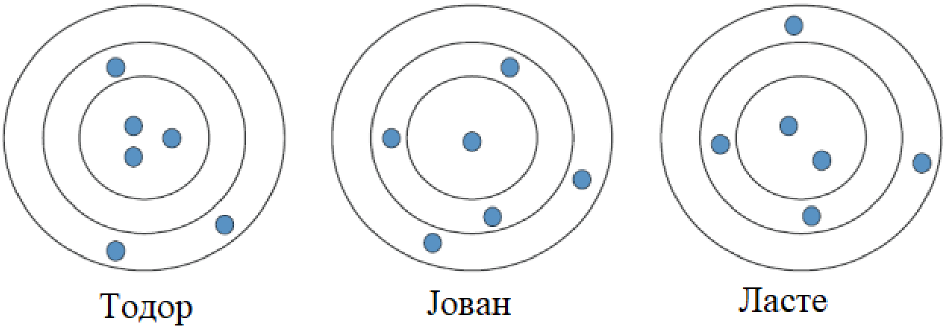
Решение. D). Аглите при основата на триаголникот се

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CAB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ .$$

Понатаму, $\measuredangle CFE$ е надворешен за триаголникот ACF, па затоа од

$$\measuredangle CFE = \measuredangle CAF + \measuredangle ACF = \measuredangle CAF + \measuredangle FAD = \measuredangle CAD = 70^\circ .$$

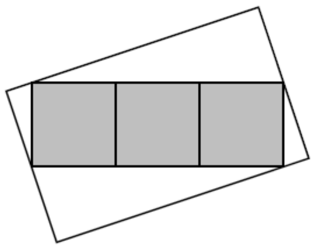
17. Тодор, Јован и Ласте со стрелички гаѓале мета. Нивните погодоци се прикажани на долните цртежи. Тодор освоил 46, а Јован освоил 34 чпоени. Колку поени освоил Ласте?



A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

Решение. D). Тодор и Јован заедно четири пати погодиле во кругот, четири пати во првиот и четири пати во вториот прстен. Тие заедно освоиле $46+34=80$ поени. Ласте, во кругот, првиот и вториот прстен погодил по два пати, па затоа тој освоил двојно помалку поени од поените кои заедно ги освоиле Тодор и Јован заедно. Значи, Ласте освоил $80:2=40$ поени.

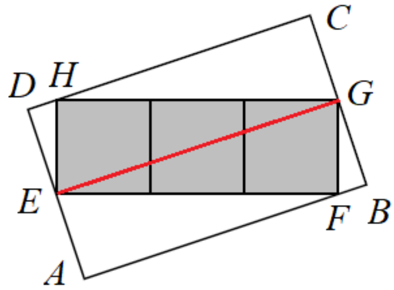
18. Правоаголник составен од три сиви квадрати, секој со плоштина $25\,cm^2$, се наоѓа во бел правоаголник како што е прикажано на цртежот десно. Две темиња на сивиот правоаголник се средини на пократките страни на белиот правоаголник, а другите две темиња припаѓаат на другите две страни на белиот правоаголник.



Колку е плоштината на белиот правоаголник изразена во сантиметри квадратни?

A) 125 B) 136 C) 149 D) 150 E) 172

Решение. D). При ознаки на цртежот десно точките E и G се средини на страните BC и AD на правоаголникот $ABCD$, па затоа четириаголниците $ABGE$ и $EGCD$ се правоаголници. Триаголникот EGH има иста основа и соодветна висина со правоагол-никот $EGCD$, па затоа $P_{EGCD} = 2P_{EGH}$. Аналогно, $P_{EGAB} = 2P_{EGF}$. Конечно,

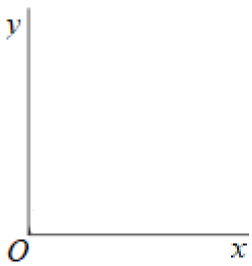


$$P_{ABCD} = P_{EGCD} + P_{EGBA} = 2P_{EGH} + 2P_{EGF}в$$
$$= 2P_{EFGH} = 2 \cdot 3 \cdot 25\, cm^2 = 150\, cm^2.$$

19. Андреј нацртал прав агол. Коку најмалку полуправи треба Андреј да повлече во правиот агол (види цртеж десно), за да за било кој од аглите $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$, $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ може да се изберат две полушрави со агол меѓу нив еднаков на тој агол?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Нека е даден правиот агол $\measuredangle xOy$. Ако повлечиме полуправи Oa и Ob, тогаш ги добиваме аглите $\measuredangle xOa, \measuredangle aOy, \measuredangle xOb, \measuredangle bOy, \measuredangle aOb$ и затоа не е доволно да повлечем,е две полуправи. Но, ако повлечеме три полуправи такви да



$$\measuredangle xOa = 10^\circ, \measuredangle xOb = 20^\circ, \measuredangle xOc = 60^\circ,$$

тогаш лесно се гледа дека се исполнети условите на задачата.

20. Бројот 2023 е збир на 2023 последователни цели броеви. Колку е збирот на цифрите на најголемиот од тие броеви?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

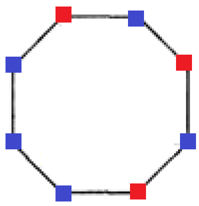
Решение. A). Меѓу последователните цели броеви мора да има и негативни, бидејќи збир на 2023 последователни позитивни цели броеви е поголем од 2023.

Од $2023 = 2 \cdot 1011 + 1$ следува дека од -1011 до 1011 има 2023 броеви, кај кои средниот број е 0, па затоа и нивниот збир е 0. Сега, од -1010 до 1012 има 2023 броеви, чиј збир е 2023 бидејќи меѓу нив се броевите 1011 и 1012 за кои нема спротивни броеви. Најголем е бројот 1012 и збирот на неговите цифри е 4.

21. Неколку момчиња и девојчиња седнале околу тркалезна маса. Има три девојчиња и никои две девојчиња не седат едно до друго. Ако има точно три момчиња до кои седи момче, колку вкупно момчиња седат околу масата?

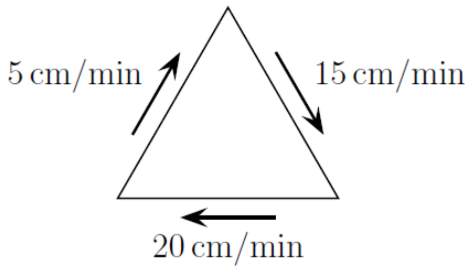
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. B). Бидејќи има три девојчиња и две девојчиња не седат едно до друго, околу масата има три момчиња кои се меѓу девојчињата. Сега, ако седи уште едно момче, тогаш ќе имаме две момчиња до кои седи момче. Но, ние треба да имаме три момчиња до кои седи момче. Затоа околу масата треба да седи уште едно момче и тоа не треба да е до некои од двете момчиња до кои не седи момче. Имено, во тој случај ќе имаме 4 момчиња до кои седи момче.



Значи, треба да имаме 3 момчиња едно до друго. Бараниот распоред е прикажан на цртежот десно (со црвени квадратчиња се означени девојчињата, а со сини момчињата).

22. Мравка се движи долж страните на рамностран триаголник. Просечните брзини со кои се движи по страните на триаголникот се $5\,cm/\min$, $15\,cm/\min$ и $20\,cm/\min$.



Која е средната брзина изразена во $cm/\min$ со која мравката прави една цела обиколка на триаголникот?

A) $\frac{34}{5}$ B) $\frac{80}{11}$ C) $\frac{180}{19}$ D) 15 E) $\frac{40}{3}$

Решение. C). Нека должината на страната на триаголникот е a. Еден сантиметар на првата страна таа поминува за $\frac{1}{5}\min$, на втората за $\frac{1}{15}\min$ и на третата a $\frac{1}{20}\min$. За да го обиколи триаголникот на мравката и се потребни

$$\frac{a}{5}+\frac{a}{15}+\frac{a}{20}=\frac{12a+4a+3a}{60}=\frac{19}{60}a\min.$$

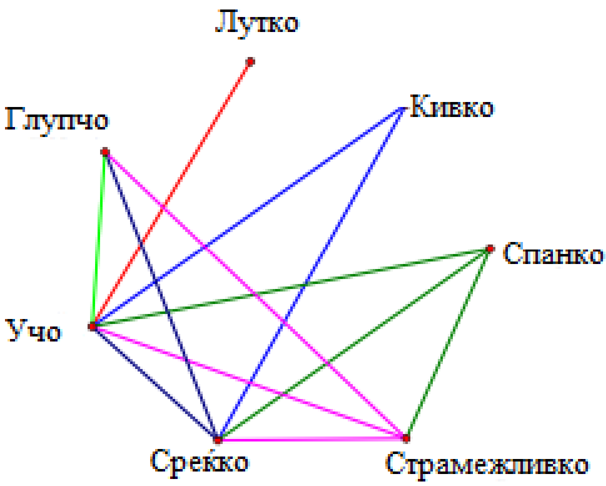
Вкупната должина на патот е $3a\,cm$, што значи дека просечната брзина ќе биде $\frac{3a}{\frac{19}{60}a}=\frac{180}{19}\,cm/\min$.

23. Снежана организирала турнир во шах во кој секое џуџе одиграло една партија со секое од преостанатите џуџиња. Во понеделник Лутко одиграл една партија, Кивко две, Спанко три, Стрaмежливко 4, Среќ-ко пет и Учо шест партии. Колку партии во понеделникот одиграл Глупчо?

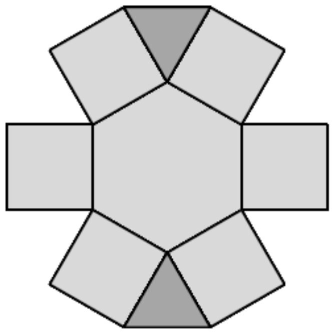
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Да ги прикажеме графички одиграните партии во понеделник. Тргнуваме од Учо и ги поврзуваме останатите шест џуџиња. Со тоа Лутко е поврзан. Сега одиме со Среќко кој го повр-зуваме со преостанатите четири џуџиња. Со тоа Кивко е поврзан.

Потоа одиме со Срамежливко кој го поврзуваме со преостанатите две џуџиња. Со тоа Спанко е поврзан и се нацртани сите врски дадени во условот на задачата. Значи, Глупо ги одиграл партиите со Учо, Среќко и Срамежливко, т.е. одиграл 3 партии.



24. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од два триаголника, шест квадрати и еден шестаголник. Филип сака да ги запише броевите од 1 до 9, во секој многуаголник по еден број, така што производот на два соседни броја не е поголем од 15. Броевите се соседни ако лежат во многуаголници кои имаат заедничка страна. На колку начини тоа може да го направи?



A) 12 B) 8 C) 32 D) 24 E) 16

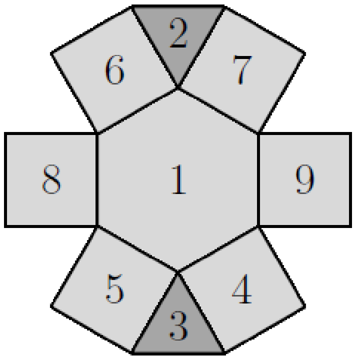
Решение. E). Броевите 8 и 9 мора да се запишани во полиња со најмногу еден сосед и тој сосед мора да е бројот 1. Затоа броевите 8 и 9 мора да се во квадратните полиња кои се соседни само со шестаголникот и во шестаголникот мора да е бројот 1. Ова може да се направи на два начина.

Понатаму, броевите 6 и 7 не може да се во триаголниците. Бидејќи овие броеви можеме да ги помножиме најмногу со 2, во едниот триаголник мора да е бројот 2 и негови соседи да се броевите 6 и 7. Сега, за бројот 2 имаме две можности и за секоја од нив две можнос-ти за запишување на броевите 6 и 7. Значи, имаме четири можности.

Останува да ги запишеме броевите 3, 4 и 5. Јасно, бројот 3 мора да е во преостанатиот триаголник, а 4 и 5 треба да се негови соседи. Значи имаме 2 можости.

Конечно, бројот на распоредите на броевите е $2\cdot4\cdot2=16$.

Еден распоред на броевите е прикажан на цртежот десно.

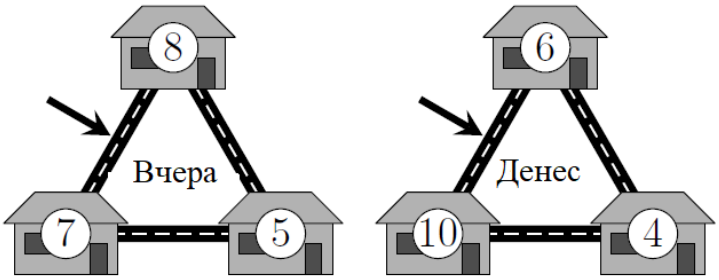


25. Горјан стои во ред во кој бројот на луѓето е содржател на бројот 3. Тој забележал дека пред него и зад него има еднаков број луѓе. Во редот ги видел и своите двајца пријатели, двајцата стојат зад него. Едниот пријател е на 19-то место, а другиот е на 28-то место. На кое место е Горјан?

A) 14. B) 15. C) 16. D) 17. E) 18.

Решение. D). Бидејќи пред Горјан и зад Горјан има по n луѓе тој е на $(n+1)-$место и во редот има $2n+1$ луѓе. Затоа $n+1<19$ и $28<2n+1$. Последното значи дека $n\in\{14,15,16,17\}$. Значи, $2n+1\in\{29,31,33,35\}$. Но, бројот на луѓето е содржател на бројот 3, па затоа во редот има 33 луѓе и Горјан е 17-ти во редот.

26. Неколку глувци живе-ат во три соседни ку-ќи. Сношти секој од нив ја напуштил ку-ќата во која живее и се преселил во една од соседните куќи, секогаш движејќи се по најкраткиот пат. Броевите на



цртежот ги покажуваат броевите на глувците во секоја куќа вчера и денес. Колку глувци го користеле патот означен со стрелката?

А) 9 В) 11 С) 12 D) 16 Е) 19

Решение. **В).** *Прв начин*. Во куќата во која вчера имало 5 глувци сношти дошле 4 глувци. Тие стигнале од куќите кои се поврзани со означениот пат. Бидејќи глувците се движат по најкраткиот пат, овие 4 глувци не го користеле најкраткиот пат. Но, во двете куќи кои се поврзани со најкраткиот пат има $8+7=15$ глувци и како 4 не го користеле најкраткиот пат, добиваме дека $15-4=11$ го користеле најкраткиот пат.

Втор начин. Ако a глувци од куќата со 7 глувци го користеле означениот пат, тогаш $7-a$ не го користеле означениот пат. Ако b глувци од куќата со 8 глувци го користеле означениот пат, тогаш $8-b$ глувци не го користеле означениот пат. Затоа $7-a+8-b=4$, од каде добиваме $a+b=11$.

27. Андреј го добил бројот 1015 како збир на броеви запишани само со цифрата 7 (цртеж десно). Тој сака да го добие бројот 2023 како збир на броеви запишани само со цифрата 7, но притоа цифрата 7 да ја употреби точно 19 пати. Колку пати ќе биде употребен бројот 77?

$$\begin{array}{r} 777 \\ 77 \\ +\quad 77 \\ 77 \\ 7 \\ \hline 1015 \end{array}$$

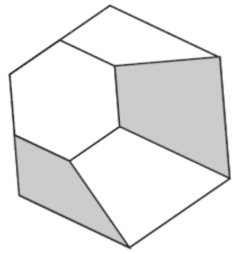
А) 2 В) 3 С) 4 D) 5 Е) 6

Решение. **Е).** Имаме

$$\begin{aligned} 2023 &= 1015+1008 \\ &= 1015+1015-7 \\ &= 777+77+77+77+7+777+77+77+77+7-7 \\ &= 777+777+77+77+77+77+77+77+7 \end{aligned}$$

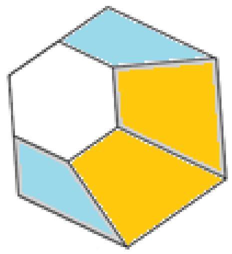
што значи дека бројот 77 ќе биде употребен шест пати.

28. Правилен шестаголник е поделен на четири четириаголници и еден помал правилен шестаголник (цртеж десно). Плоштините на осенчениот дел и малиот четириаголник се однесуваат како $4:3$. Колку е односот на плоштините на малиот и големиот шестаголник?

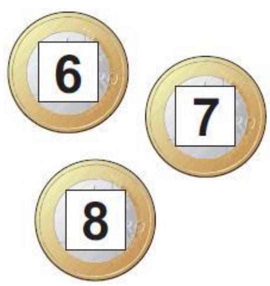


A) $3:11$ B) $1:3$ C) $2:3$ D) $3:4$ E) $3:5$

Решение. A). Бидејќи шестаголникот е правилен, имаме два пара складни четириаголници, кои на цртежот десно се обоени со иста боја. Според тоа, осенчениот дел (сивата површина) од условот на задачата е еднаков на половина од вкупната површина на овие четириаголници. Значи, $P_o = \frac{P_g - P_m}{2}$, од каде добиваме $\frac{P_o}{P_m} = \frac{\frac{P_g}{P_m} - 1}{2}$, па затоа $\frac{4}{3} = \frac{\frac{P_g}{P_m} - 1}{2}$, односно $\frac{8}{3} = \frac{P_g}{P_m} - 1$. Значи, $\frac{P_g}{P_m} = \frac{11}{3}$, т.е. $\frac{P_m}{P_g} = \frac{3}{11}$.



29. На 6 ливчиња Матео напишал 6 последователни броја. Тој ги залепил ливчињата на двете страни на три монети и истовремено ги фрлил трите монети на масата. При првото фрлање на масата се гледале броевите 6, 7 и 8. Матео овие броеви ги обоил во црвено. При второто фрлање збирот на броевите кои се гледале бил 23, а при третото бил 17. Колку е збирот на броевите кои не биле обоени во црвено?



A) 18 B) 19 C) 23 D) 24 E) 30

Решение. А). Бидејќи при второто фрлање збирот на броевите кои се гледаат е 23, а $6+7+8=21$ мора да има број поголем од 8, т.е. меѓу запишаните броеви сигурно е бројот 9.

Сега, ако и бројот 10 е меѓу запишаните броеви, тогаш ги имаме броевите 6, 7, 8, 9, 10, па шестиот број може да е 5 или 11. Јасно, како меѓу броевите 5, 6, 7, 8, 9, 10, така и меѓу броевите 6, 7, 8, 9, 10,11 не постојат три броја чиј збир е 17. Значи, меѓу запишаните броеви не е бројот 10, па шесте последователни броеви се 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Притоа, имаме $6+8+9=23$ и $4+5+8=17$. Според тоа, не се обоени во црвено броевите 4, 5 и 9 и нивниот збир е $4+5+9=18$.

30. Една ракометна екипа редоследно постигнала 24, 17 и 25 голови во седмото, осмото и деветтото коло на првенството. Просечниот број постигнати голови во првите девет кола е поголем од просечниот број голови постигнати во првите шест кола. Просечниот број голови постигнати во првите десет кола е поголем од 22. Кој е најмалиот можен број постигнати голови во десеттото коло?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Решение. C). Нека екипата во првите шест кола постигнала a,b,c, d,e,f голови и во десетото коло постигнала x голови. Тогаш

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25}{9}>\frac{a+b+c+d+e+f}{6},$$
$$132>a+b+c+d+e+f.$$

Сега, бидејќи просечниот број голови во првите десет кола е поголем од 22 добиваме дека

$$\frac{132+24+17+24+x}{10}>\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+x}{10}>22,$$
$$198+x>220,$$
$$x>22.$$

Значи, во десетото коло тимот постигнал повеќе од 22 голови.

Ако тимот постигнал 23 гола, тогаш треба да важи

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+23}{10}>22,$$

$$a+b+c+d+e+f>220-89=131,$$

Сега

$$132>a+b+c+d+e+f>131,$$

што не е можно бидејќи $a+b+c+d+e+f$ е природен број.

Ако тимот постигнал 24 голови, тогаш

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+24}{10}>22,$$

$$a+b+c+d+e+f>220-90=130.$$

Сега,

$$132>a+b+c+d+e+f>130,$$

па затоа во првите шест кола тимот постигнал 131 гол, во седмото, осмото, деветтото и десетото коло постигнал соодветно 24, 17, 25 и 24 гола, при што важи

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25}{9}=\frac{197}{9}>\frac{131}{6}=\frac{a+b+c+d+e+f}{6},$$

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+24}{10}=\frac{221}{10}>22.$$

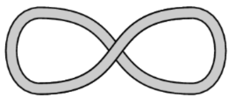
Kadett (осмо и деветто одделение) 2024

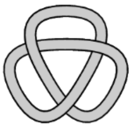
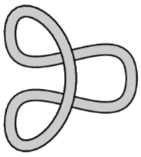
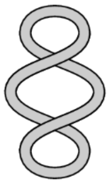
Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Кое од долните јажиња не може да се добие без сечењето на јажето кое е прикажано на цртежот десно?



A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. B). Ако горниот дел на дадeното јаже го превртиме нагоре, заклучуваме дека јажето е во форма на прстен.

Ако надворешниот дел на јажето A) го превртиме нагоре, а потоа два пати долниот дел го завртиме во лево добиваме прстен.

Ако горниот дел на јажето C) го превртиме нагоре, а потоа десниот дел го повлечеме во десно добиваме прстен.

Ако горнот дел на јажето D) го превртиме налево добиваме прстен.

Ако долниот дел на јажето E) го превртиме надесно, а горниот дел налево добиваме прстен.

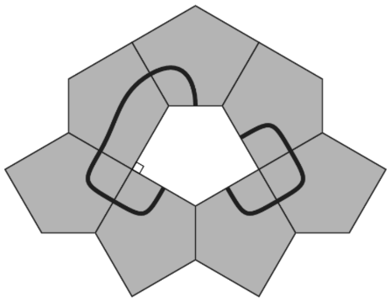
Само кај јажето B) имаме јазол, односно два прстена кои поминуваат еден во друг и не може без сечење да се доведат во форма на еден прстен.

2. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{20\cdot 24}{2\cdot 0+2\cdot 4}$.

A) 12 B) 30 C) 48 D) 60 E) 120

Решение. D). Имаме: $\frac{20\cdot 24}{2\cdot 0+2\cdot 4}=\frac{20\cdot 3\cdot 8}{8}=60$.

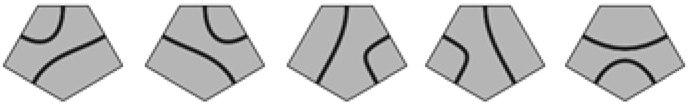
3. Фигурата прикажана на цртежот десно е формирана од еднакви петаголници. Која плочка треба да се стави на празното место за да се добијат две затворени линии?



A)  B)  C) 

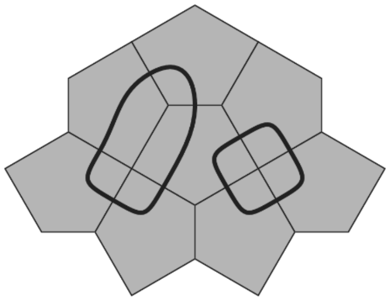
D)  E) 

Решение. C). Петаголникот кој недостасува е ротиран за 180° во однос на понудените петаголници. Затоа истите ќе ги ротираме за 180°

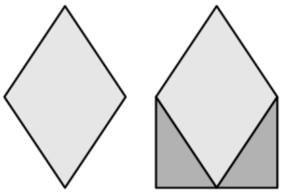


A) B) C) D) E)

Сега е јасно дека тоа е петаголникот C), (цртеж десно).

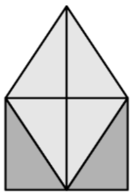


4. На левиот цртеж е даден ромб. За колку проценти се зголемила плоштината кога на ромбот му се доцртани два правоагол и триаголници, како што е прикажано на десниот цртеж?



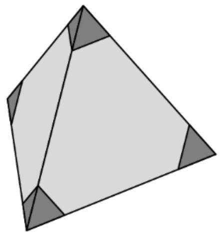
A) 20% B) 25% C) 30% D) 40% E) 50%

Решение. E). Ако на ромбот прикажан на десниот цртеж ги повлечеме дијагоналите, тие го делат на 4 складни триаголници, кои се складни со доцртани триаголници. Значи,



од 4 станале 6 триаголници, па затоа површината се зголемила за $(\frac{6}{4}-1)\cdot 100\% = 50\%$.

5. Пабло од секое теме на правилен тетраедар отсекол по еден дел како што е прикажано на цртежот десно. Колку темиња има телото кое го добил?



A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 15

Решение. **D).** При сечењето наместо едно теме се добиваат три темиња. Значи, бројот на темињата се зголемува три пати, па така добиеното тело ќе има $3\cdot 4 = 12$ темиња.

6. Располагаме со три жетони на кои се запишани броевите 1, 5 и 11. Колку различни четирицифрени броеви може да формираме, ако ги поставиме еден до друг жетоните?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. **B).** Жетонот 5 можеме да го поставиме лево, десно и на средина. Во првите два случаја имаме по еден четирицифрен број и тоа: 5111 и 1115, а во третиот случај имаме два четирицифрени броја и тоа: 1511 и 1151. Значи, вкупно имаме 4 броја.

7. Во сад со овошје има јаболка, грозје, цреши, јагоди и банани. Ана сака јаболка. Петар сака јаболка, цреши, јагоди и банани. Лена сака грозје, цреши, јагоди и банани. Доротеј сака јаболки, грозје и цреши. Елица сака јаболки и цреши. Овошјето го поделиле така што секој добил различен вид овошје и тоа што го сака. Кој ги добил црешите?

A) Ана B) Петар C) Лена D) Доротеј E) Елица

Решение. Е). Ако секој го добил овошјето кое го сака, тогаш Ана добила јаболка. Сега, Елица сака јаболка и цреши, па како јаболката се кај Ана, заклучуваме дека Елица добила цреши. Понатаму, Доротеј добил грозје, а Петар и Лена добиле јагоди и банани во некој редослед.

8. Според упатството во лифтот истовремено најмногу може да се возат или 12 возрасни луѓе или 20 деца. Колку најмнигу деца може заедно да се возат со 9 возрасни луѓе?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. В). Бидејќи $1-\frac{9}{12}=\frac{1}{4}$, заедно со 9 возрасни луѓе во лифтот може да има $\frac{1}{4}$ од максимално дозволениот број деца, односно $\frac{1}{4}\cdot 20=5$ деца.

9. Во квадратна табела се запишани четири различни природни броја. Броевите се покриени, но производот на броевите во секој ред и секоја колона е запишан покрај табелата. Колку е збирот на четирите броја?

		6
		8
4	12	

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Решение. С). Во горното лево квадратче треба да запишеме заеднички делител на 4 и 6, што значи еден од броевите 1 или 2. Ако ставиме 2, тогаш и во долното лево квадратче пак е бројот 2, што противречи на фактот дека броевите треба да се различни. Значи, во горното лево квадратче е бројот 1, а под него е

1	6	6
4	2	8
4	12	

бројот 4. Сега лесно се добива дека во втората колона горе е бројот 6, а под него бројот 2. Конечно, бараниот збир е $1+4+6+2=13$.

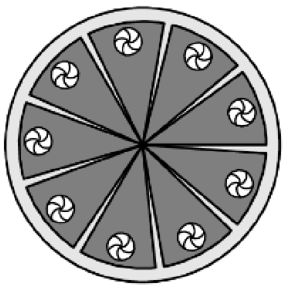
10. Четири колички во супермеркет, ставени една во друга, имаат должина $108\,cm$, а 10 колички имаат должина $168\,cm$. Колку сантиметри е долга една количка?

А) 60 В) 68 С) 78 D) 88 Е) 98

Решение. **С).** Должината на четири колички ставени во низа е еднаква на должината на една количка и три растојанија меѓу почетоците на рачките на количките. Должината на 10 колички ставени во низа е еднаква на должината на една количка и девет растојанија меѓу почетоците на рачките на количките. Значи, должината на шест растојанија меѓу почетоците на рачките на количките е еднаква на $168-108=60\,cm$. Според тоа, должината на едно растојание е еднаква на $60:6=10\,cm$.

Конечно, должината на количката е $108-3\cdot 10=78\,cm$.

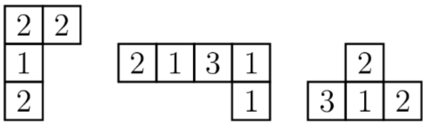
11. Софија испекла торта и ја поделила на десет еднакви парчиња. Изела едно парче, а преостанатите рамномерно ги распоредила како што е прикажано на цртежот десно. Колку е мерката на аголот меѓу две соседни парчиња торта?



А) 5° В) 4° С) 3° D) 2° Е) 1°

Решение. **В).** Централниот агол на секој исечок (секое парче) е еднаков на $\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$. Бидејќи имаме девет еднакви празнини, мерката на аголот меѓу две соседни парчиња е $36^\circ:9=4^\circ$.

12. Филип може да состави квадрат со помош на трите дела прикажани на цртежот десно и еден дел кој недостасува. Кој е тој дел ако збирот на броевите во секој ред и секоја колона е еднаков.

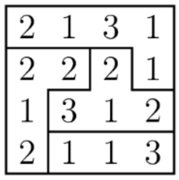


A) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}$ B) $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}$ C) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ D) $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$ E) $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}$

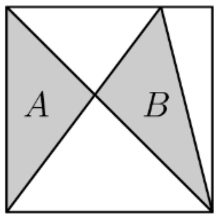
Решение. **A).** Четирите дела од кои треба да се состави квадратот имаат $4+5+4+3=16$ квадратчиња. Според тоа, квадратот е со димензија 4×4. Еден од дадените делови има четири квадратчиња во еден ред и збирот на броевите во овој ред е $2+1+3+1=7$. Значи, збирот на сите броеви во квадратот треба да е $4\cdot 7=28$. Збирот на броевите во трите дела е еднаков на

$$(2+2+1+2)+(2+1+3+1+1)+(2+3+1+2)=7+8+8=23.$$

Значи, збирот на броевите во делот кој треба да се употреби е $28-23=5$. Од дадените броеви само делот A) има збир на броевите 5. Составениот квадрат е прикажан на цртежот десно.



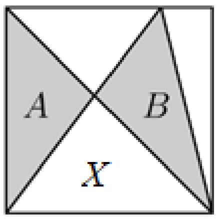
13. Квадрат со должина на страна $10\,m$ со три отсечки е поделен како на цртежот десно. Ако површините на сивите делови се A и B, колку е разликата $A-B$?



10 m

A) $0\,m^2$ B) $1\,m^2$ C) $2\,m^2$ D) $5\,m^2$ E) $10\,m^2$

Решение. **A).** Триаголниците составени од еден сив триаголник и триаголникот со плоштина X имаат еднакви основи и еднакви висини. Оттука следува дека тие имаат еднакви плоштини. Според тоа,



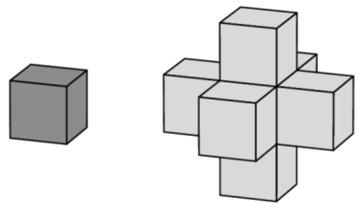
$$A-B=A+X-(B+X)=0\,cm^2.$$

14. Пингвинот Пинги секој ден оди во риболов и уловува по 12 риби за своите две пингвинчиња. Секој ден на пингвинчето кое прво ќе дојде до него му дава 7 риби, а на другото пингвинче му дава 5 риби. Во последните неколку дена едно од пингвинчињата изело 44 риби. Колку риби изело другото пингвинче?

A) 34 B) 40 C) 46 D) 52 E) 58

Решение. D). Нека првото пингвинче изело x дена по 5 и y дена по 7 риби. Тогаш $5x+7y=44$. Во множеството природни броеви единствено решение на последната равенка е $x=6, y=2$. Значи, второто пингвинче изело 6 дена по 7 риби и 2 дена по 5 риби, што значи изело $6\cdot7+2\cdot5=52$ риби.

15. Пабло има голем број идентични коцки од кои го направил телото прикажано на цртежот десно така што на секој ѕид на една коцка залепил уште по една коцка. Добиеното тело сака да го прошири на ист начин така што на секој ѕид ќе залепи по една нова коцка. Колку коцки дополнително ќе залепи Пабло?



A) 18 B) 16 C) 14 D) 12 E) 10

Решение. A). Пабло треба да залепи коцки на $6\cdot5=30$ ѕидови. Притоа една коцка може да се залепи на две коцки чии ѕидови имаат заеднички раб. Такви ѕидови се по 8 на секое ниво, што вкупно е $8+8+8=24$. Но, коцката која се лепи покрива 2 ѕида, па затоа ни се потребни $24:2=12$ коцки. Преостанатите коцки ги лепиме на оние ѕидови кои немаат заеднички рабови со другите коцки, а тоа се 6 ѕида. Значи, вкупно на Пабло му се потребни $12+6=18$ коцки.

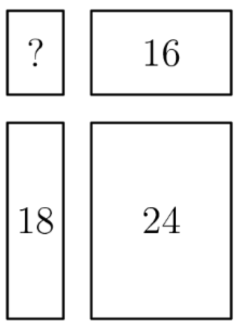
16. Кенгурот Скокалко скока на нагорнина, а потоа назад по истиот пат. Секој скок на удолнина е три пати подолг од скокот на нагорнина. Неговите скокови на нагорнина се со должина $1\,m$. Скокалко вкупно скокнал 2024 пати. Колку метри поминал на тој начин?

A) 506 B) 1012 C) 2024 D) 3036 E) 4048

Решение. D). Нека Скокалко на надолнина направил a скокови. Бидејќи скокот на надолнина е три пати подолг од скокот на нагорни-на, тој на нагорнина направил $3a$ скокови. Значи, $a+3a=2024$, од каде добиваме $a=506$. Значи, Скокалко вкупно поминал

$$506\cdot 3+3\cdot 506\cdot 1=3036\,m.$$

17. Матео исекол голем правоаголник и добил четири помали правоаголници. Периметрите на трите правоаголници се 16, 18 и 24, како што е прикажано на цртежот десно. Колку е периметарот на најмалиот правоаголник?



A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Решение. B). Во збирот на периметрите на најголемиот и најмалиот правоаголник учествуваат сите страни на двата средни правоаголници и обратно. Ако со A го означиме периметарот на најмалиот правоаголник, тогаш $A+24=18+16$, па затоа $A=10$.

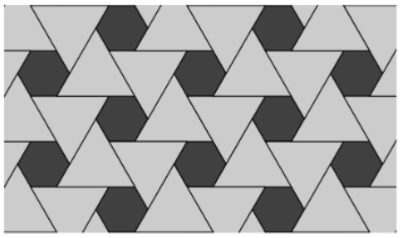
18. Во вкупната маса на свежи печурки 80% е вода. Од друга страна, во вкупната маса на суви печурки 20% е вода. За колку проценти се намалува масата на печурките по нивното сушење?

A) 60% B) 70% C) 75% D) 80% E) 85%

Решение. C). Нека масата на свежите печурки е a. Тогаш имаме $0{,}8a$ вода и $0{,}2a$ сува материја. Ако по сушењето масата е c, тогаш имаме

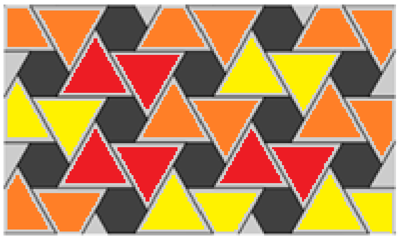
$0,8c$ сува материја и $0,2c$ вода. Пред и по сушењето сувата материја има иста маса, па затоа $0,2a = 0,8c$, од каде добиваме $c = 0,25a$. Според тоа, при сушењето масата на печурките се намалува за $a - c = a - 0,25a = 0,75a$, односно за 75%.

19. На цртежот десно е прикажан дел од под, покриен со мозаик од складни шестаголни и складни триаголни плочки. Ако за мозаикот се употребени 3000 шестаголни плочки, распоредени во 50 редови, колку триаголни плочки се приближно употребени?



A) 9000 B) 6000 C) 3000 D) 1500 E) 1000

Решение. B). Забележуваме дека ако одиме по дијагонала, тогаш долу и десно од секоја шестаголна плочка има по две триаголни плочки, при што на тој начин триаголните плочки се скоро сите пребројани. Значи, приближно се употребени двојно повеќе триаголни плочки, односно приблиќно 6000 триаголни плочки.



20. Девет карти се означени со броевите од 1 до 9 и се ставени на масата со броевите надолу. Марко, Вито, Коста и Зоран зеле секој по две карти. Збирот на броевите на картите на Марко е 6, разликата на броевите на картите на Вито е 5, производот на броевите на картите на Коста е 18 и еден од броевите на картите на Зоран е двапати поголем од другиот број. Кој број останал на масата?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. E). Картите на Марко може да бидат 1 и 5, или 2 и 4.

Ако картите на Марко се 2 и 4, тогаш бидејќи $18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ картите на Коста мора да се 3 и 6. Но, тогаш Зоран не може да има карти кај кои бројот на еднанта едната е двапати поголем од бројот на другата другата, па затоа овој случај не е можен.

Значи, картите на Марко се 1 и 5. Картите на Коста може да се 2 и 9, односно 3 и 6. Ако картите на Коста се 2 и 9, тогаш картите на Вито мора да се 3 и 8. Но, тогаш Зоран не може да има карти кај кои една-та е двапати поголема од другата, па затоа овој случај не е можен.

Значи, картите на Марко се 1 и 5, а картите на Коста се 3 и 6. Сега картите на Вито може да се 2 и 7, односно 4 и 9. Ако картите на Вито се 4 и 9, тогаш Зоран не може да има карти кај кои едната е двапати поголема од другата, па затоа овој случај не е можен.

Значи, картите на Марко се 1 и 5, картите на Коста се 3 и 6, картите на Вито се 2 и 7, па затоа картите на Зоран се 4 и 8.

Конечно, на масата останале картата со број 9.

21. Цифрите од 0 до 9 може да се запишат со помош на хоризонтални и вертикални линии како што е прикажано на долниот цртеж.

Филип избрал три различни цифри. Неговите цифри вкупно имаат 5 хоризонтални и 10 вертикални линии. Колку е збирот на неговите цифри?

A) 9 B) 10 C) 14 D) 18 E) 19

Решение. A). Секоја цифра има 0, 1, 2 или 3 хоризонтални линии. Значи 5 хоризонтални линии во три цифри можеме да добиеме на еден од следниве три начина:

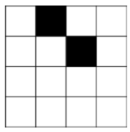
$$5 = 2 + 2 + 1, \quad 5 = 3 + 1 + 1, \quad 5 = 3 + 2 + 0.$$

Првиот случај не е можен, бидејќи само цифрата 0 има две хоризонтални линии, а избрани се три различни цифри.

Вториот случај не е можен бидејќи само цифрите 4 и 7 имаат по една хоризонтална линија, па како заедно имаат 5 вертикални линии третата цифра треба да има 5 вертикални линии, а најголемиот број вертикални линии е 4.

Останува третиот случај. Единствена цифра без хоризонтални линии е 1 и таа има 2 вертикални линии. Значи, другите две цифри треба да имаат по 4 вертикални линии. Единствени такви цифри се 0 и 8 и тие имаат 2 и 3 хоризонтални линии, соодветно. Збирот на трите броја е $0+1+8=9$.

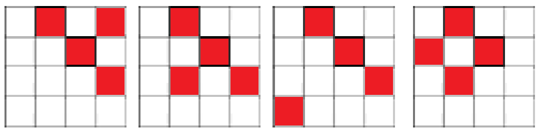
22. Ана сака да обои уште два квадрати на фигурата прикажана на цртежот десно така што таа ќе биде осносиметрична и ќе има точно една оска на симетрија. На колу начини може тоа да го направи?

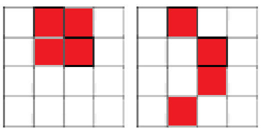


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. E). Квадратот има четири оски на симетрија.

Ако оската на симетрија на новата фигура е некоја од дијагоналите на квадратот тогаш имаме четири боења на уште два квадрати, кои се прикажани на цртежите десно.

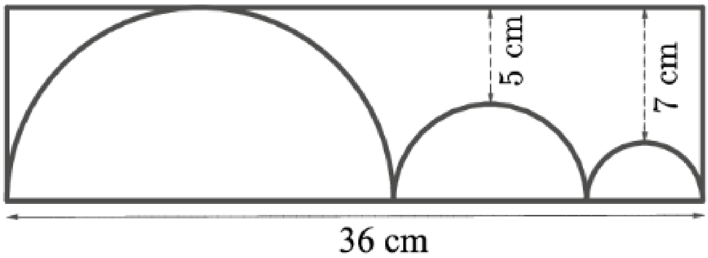




Ако оската на симетрија е паралелна со страните на квадратот, тогаш имаме две боења на уште два квадрати, кои се прикажани на цртежите лево.

23. На цртежот се прикажани три полукружници сместени во правоаголник чија подолга страна е $36\,cm$. Растојанијата од најмалата и сред-

ната полукружница до спротивната страна се $7\,cm$ и $5\,cm$, соодветно. Колку е периметарот на правоаголникот?



A) $82\,cm$ B) $92\,cm$ C) $96\,cm$ D) $108\,cm$ E) $120\,cm$

Решение. **B).** Нека a е должината на пократката страна на правоаголникот. Тогаш радиусите на полукружниците се $a, a-5, a-7$. Подолгата страна е еднаква на збирот на дијаметрите на полукружниците, па затоа

$$2a+2(a-5)+2(a-7)=36,$$

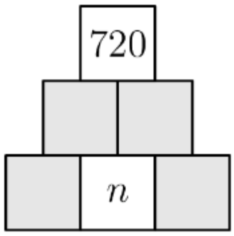
од каде добиваме $a=10\,cm$. Конечно, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2(10+36)=92\,cm$.

24. Група од 50 деца седат во круг. Фрлаат топка и секој кој ќе ја добие топката истата ја фрла на шестото дете од себе во насока на движењето на стрелките на часовникот. Андреј ја фати топката 100 пати. Колку деца за тоа време не ја фатиле топката ниту еднаш.

A) 0 B) 8 C) 10 D) 25 E) 40

Решение. **D).** Нека децата во насока на движењето на стрелките на часовникот ги нумерираме со броевите од 1 до 50 и нека топката е кај првото дете. Тогаш во првиот круг топката била кај децата со редни броеви: 1, 7, 13, 19, ..., 43, 49, односно кај 9 деца. Детето 49 ја додало топката на детето 5, па сега топката била кај децата: 5, 11, 17, ..., 41, 47, односно кај 8 деца. Детето 47 ја додало топката кај детето 3, па сега топката била кај децата: 3, 9, 15, ..., 39, 45, односно кај 8 деца. Детето 45 ја додало топката кај детето 1, па сега постапката се повторува. Значи, топката ја фатиле $9+8+8=25$ деца, а воопшто не била кај $50-25=25$ деца.

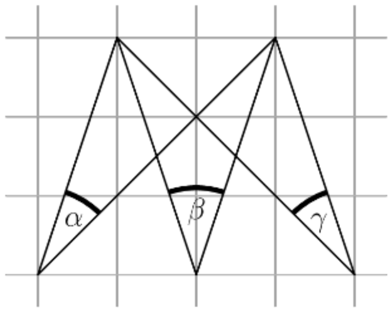
25. Горјан сака да го доврши дијаграмот така што секој почнувајќи од вториот ред секој квадрат го содржи производот на броевите кои се одма во квадратите под него. Колку различни вредности може да има бројот n?



A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Решение. **D).** Нека a и b се броевите кои недостасуваат во првиот ред. Тогаш na и nb се броевите во вториот ред, па затоа $abn^2=720$. Сега бидејќи $720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$, бројот n^2 може да биде 1, 4, 9, 16, 36, 144. Значи, сите можни вредности на бројот n се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, т.е. n може да прими најмногу 6 вредности.

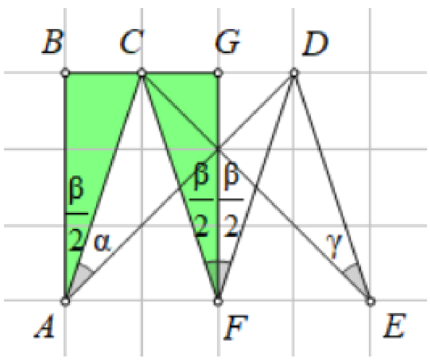
26. Во квадратна мрежа се означени три аг-ли α,β,γ, како што е прикажано на цр-тежот десно. Колку е збирот $\alpha+\beta+\gamma$?



A) 60° B) 70° C) 75°

D) 90° E) 120°

Решение. **D).** При ознаки како на цртежот десно триаголниците CGF и CBA се складни, како правоаголни триаголници со еднакви катети. Затоа



$$\measuredangle CBA=\measuredangle GFC=\frac{\beta}{2}.$$

Понатаму, $\measuredangle DAB=45^\circ$, бидејќи AD е дијагонала на квадрат.

Значи, $\alpha+\frac{\beta}{2}=\measuredangle DAB=45^\circ$.

Аналогно се докажува дека $\gamma+\frac{\beta}{2}=45^\circ$. Конечно, $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

27. Марија продава кокошкини и паткини јајца. Јајцата се наредени во кутии со по: 4, 6, 12, 13, 22 и 29 јајца. Нејзиниот прв купувач ги купил сите јајца од една кутија. Марија забележала дека и останале два пати повеќе кокошкини од паткини јајца. Колку јајца купил првиот купувач?

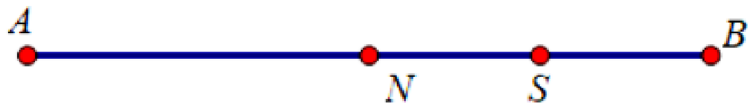
A) 4 B) 12 C) 13 D) 22 E) 29

Решение. **E).** Марија вкупно имала $4+6+12+13+22+29=86$ јајца. На Марија и останале два пати повеќе кокошкини од паткини јајца, па затоа бројот на јајцата кои и останале е делив со 3. Понатаму, $86=3\cdot 28+2$, што значи дека бројот на јајцата кои ги продала при делење со 3 дава остаток 2. Единствен таков број е 29. Значи, првиот купувач купил 29 јајца.

28. Ана вози од точката A до точката B, а потоа одма се враќа во точката A. Мими вози од точката B до точката A, а потоа одма се враќа во B. Патуваат по ист пат, почнуваат во исто време и возат со постојани брзини. Брзината на Ана е трипати поголема од брзината на Мими. Првиот пат се сретнале 15 минути од тргнувањето. По колку минути од тргнувањето ќе се сретнат вторпат?

A) 20 min B) 25 min C) 30 min D) 35 min E) 45 min

Решение. **C).** Нека v_A и v_M се брзините на Ана и Мими. Да претпоставиме дека првиот пат се сретнале во точката S. Од $v_A=3v_M$, следува $\overline{AS}=3\overline{BS}$. Секое девојче своето растојание го поминало за 15 min

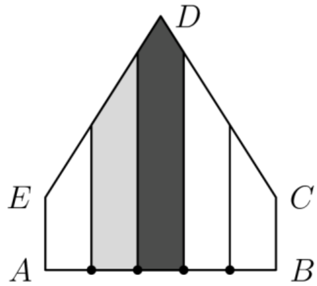


Бидејќи $\frac{v_A}{v_M} > 2$, втората средба ќе се случи пред Мими да стигне во точката A. Тоа место да го означиме со N. Меѓу двете среќавања Ана поминува растојание $2\overline{BS}+\overline{NS}$, а Мими растојание $\overline{NS}$. Затоа $2\overline{BS}+\overline{NS}=3\overline{NS}$, од каде добиваме $\overline{BS}=\overline{NS}$. Тоа значи дека од почетокот до средбата Мими поминала растојание $\overline{BS}+\overline{NS}=2\overline{BS}$, за што и се потребни $2\cdot 15\text{ min}=30\text{ min}$.

29. Во петаголникот $ABCDE$ важи

$$\measuredangle A=\measuredangle B=90^\circ,\ \overline{AE}=\overline{BC} \text{ и } \overline{ED}=\overline{DC}.$$

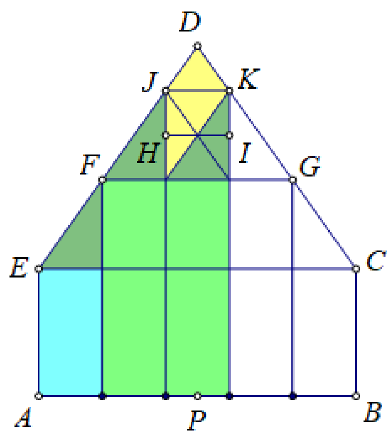
Четири точки ја делат отсечката AB на пет еднакви делови. Во овие точки се нацртани нормали на AB, како на цртежот десно. Црниот дел на петаголникот има плоштина $13\,cm^2$, а сивиот дел има плоштина $10\,cm^2$.



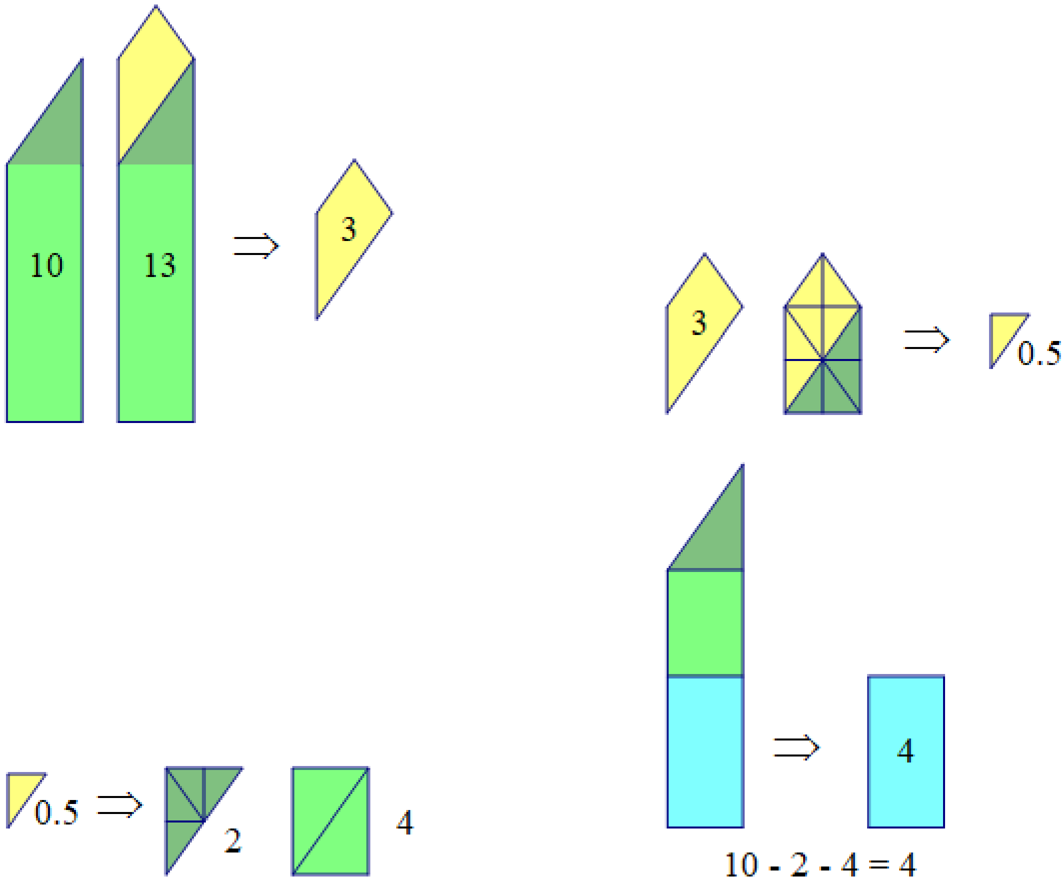
Колку е плоштината на дадениот петаголник изразена во cm^2.

A) 45　　B) 47　　C) 49　　D) 58　　E) 60

Решение. **A).** Бидејќи $\measuredangle A=\measuredangle B=90^\circ$ и $\overline{AE}=\overline{BC}$ четириаголникот $ABCE$ е правоаголник. Ако P е средината на отсечката AB, тогаш петаголникот $ABCDE$ е осносиметричен во однос на правата DP. Да ги нацртаме отсечките FG, HI и JK и да забележиме дека истите се паралелни



на AB. Да ги разгледаме плоштините на добиените фигури на горниот цртеж. Имаме:



Конечно, плоштината на дадениот петаголник е еднаква на

$$2\cdot(4+2)+2\cdot10+13=45\,cm^2.$$

30. Во касата на пиратите вкупно има 30 златни, сребрени и бронзени монети. За да провери дали се лојални, капетанот Флинт побарал од пиратите да ги пребројат монетите во касата независно еден од друг и ги запишал резултатите од нивните броења, кои се прикажани во табелата. На местата на кои е прашалниот знак, броевите биле зачкртани и не се гледаат. Само еден од пиратите точно ги пребројал монетите, а останатите тројца соопштиле по-

	Златни	Сребрени	бронзени
Том	?	9	11
Пит	**7**	**11**	**12**
Цим	10	?	10
Цо	9	10	?

грешни броеви во сите три одговори. Кој пират точно ги пребројал монетите?

A) Том B) Пит C) Џим D) Џо

E) не може да се определи

Решение. **B).** Ако Том точно ги пребројал монетите, тогаш тој соопштил дека има 10 златни монети, што значи дека и Џим точно ги пребројал златните монети, што е противречност. Ако Џим точно ги пребројал монетите, тогаш тој соопштил дека има 10 сребрени монети, што значи дека и Џо точно ги пребројал сребрените монети, што е противречност. Ако Џо точно ги пребро-јал монетите, тој соопштил дека има 11 бронзени монети, што значи дека и Том точно ги пребројал бронзените монети, што е противречност. Значи, останува Пит точно да ги пребројал монетите, па тој соопштил дека има 11 сребрени монети. Тогаш табелата изгледа како што е прикажано на цртежот горе десно, и тогаш немаме противречност.

Kadett (осмо и деветто одделение) 2025

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

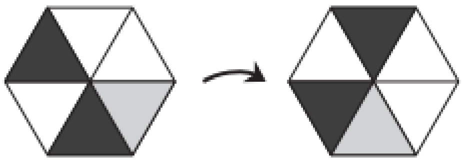
1. Ева има четири цифри направени од дрво, како што е прикажано на цртежот десно. Со нивна помош таа го запишала бројот 2025.

Кој е најголемиот број што може да го запише Ева со овие цифри, ако е дозволено цифрите да може да ги преместуваат, вртат и превртуваат.

A) 2502 B) 5202 C) 5220 D) 5502 E) 5520

Решение. **C).** Само при вртење и превртување на цифрата 0 повторно се добива цифра и тоа цифрата 0. Значи, најголемиот број што може да го добие Ева е бројот кој се составува со разместување на цифрите и тоа е бројот 5220.

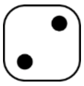
2. Правилен шестаголник последователно за еден ист агол се врти во насока на движење на стрелките на часовникот. На цртежот десно е прикажан резултатот од првото завртување на шестаголникот. Кој од дадените броеви покажува број на завртувања, по кои шестаголникот ќе се најде во почетната положба?



A) 17 B) 28 C) 39 D) 40 E) 54

Решение. **E).** За да шестаголникот се најде во почетната положба треба сивиот триаголник да се најде во почетната положба. Сивиот триаголник во почетната положба се наоѓа по секои шест завртувања. Значи, вкупниот број завртувања мора да е делив со 6, па бараниот број е 54.

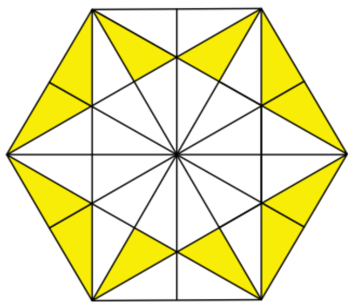
3. Сандра фрлила три коцки за играње и збирот на броевите кои паднале бил 8. На сите три коцки паднале различни броеви. Кој број не може да паднал на ниту една од трите коцки на Сандра?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **E).** Бројот 8 не може да се добие како збир на три различни природни броја од кои едниот е 6, бидејќи тогаш најмалиот можен збир е $6+1+2=9>8$. Значи, сигурно не паднал бројот 6. Секој од преостанатите пет броја може да паднал, бидејќи

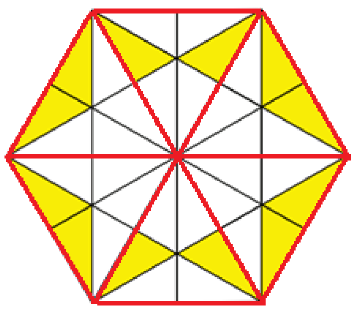
$$1+2+5=8, \quad 1+3+4=8.$$

4. Правилниот шестаголник прикажан на цртежот е поделен на складни триагол-ници. Колкав дел од неговата плоштина е обоен?



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Решение. **D).** Ако центарот на шестаголникот го поврземе со темињата, добиваме шест сладни рамнострани триаголници. Секој од нив е поделен на шест делови, при што два дела се обоени со жолта боја. Значи, во секој од шесте триаголници е обоена



$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ од неговата плоштина, па затоа во целиот шестаголник е обоена $\frac{1}{3}$ од неговата плоштина.

5. Во овоштарник со површина 30 ари, засадени се јаболки, праски и кајсии. Плоштините на овоштарникот со јаболки, праски и кајсии се однесуваат како $7:3:2$. За колку површината под праски е поголема од површината под кајсии?

A) 10 ари B) 12,5 ари C) 7,5 ари D) 5 ари E) 2,5 ари

Решение. E). Според условот на задачите површините под јаболки, праски и касии се еднакви на $7a, 3a, 2a$. Сега од $7a+3a+2a=30$ добиваме $a=2{,}5$. Значи, површината под праски од површината под кајсии е поголема за $3a-2a=a=2{,}5$ ари.

6. Даниел има 5 години, а неговиот брат е 6 години постар од него. По колку години двајцата заедно ќе имаат 30 години?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 15

Решение. C). Братот на Даниел има $5+6=11$ години. Значи, двајцата заедно имаат $5+11=16$ години. За да заедно имаат 30 години, потребно е двајцата заедно да се постари за $30-16=14$ години, што значи дека секој треба да е постар $14:2=7$ години. Конечно, по 7 години заедно ќе имаат 30 години.

7. Андреј сака да ги запише сите броеви 2, 0, 2 и 5 во квадратчињата на цртежот десно, по еден број во секое квадратче. Кој е најмалиот резултат што може да го добие Андреј?

$$\square - \square + \square - \square$$

A) -7 B) -6 C) -5 D) -4 E) -3

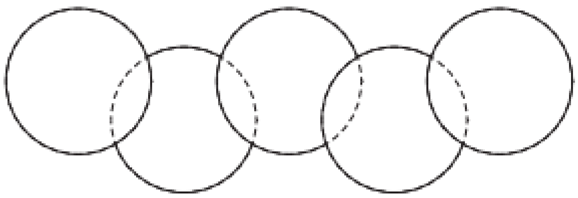
Решение. C). Најмалиот резултат се добива ако броевите кои се одземаат се најголемите можни броеви. Тоа се броевите 5 и 2, при што се добива $2-2+0-5=-5$.

8. Во една соба се наоѓа определен број луѓе кои или секогаш ја зборуваат вистината или секогаш лажат. Бројот на луѓето кои ја зборуваат вистината е за десет поголем од бројот на луето кои лажат. На сите им поставено прашањето: „*Дали зборуваш вистина*?“ и сите одговориле. Вкупно 20 луѓе одговориле: „*Да*“. Колку лажливци има во собата?

A) 0 B) 5 C) 15 D) 20 E) 25

Решение. B). Ако човекот не е лажливец тој одговара со Да, а ако е лажливец тој исто така одговара со Да. Значи, во собата има 20 луѓе. Бидејќи има 10 повеќе вистинољупци од лажливци заклучуаме дека во собата има 5 лажливци и 15 вистинољупци.

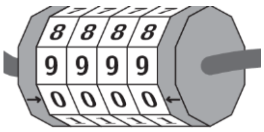
9. Секој од петте круга прикажани на цртежот десно има плоштина $8\,m^2$. Плоштината на секој заеднички дел е еднаква на $1\,m^2$. Колкава m^2 е плоштината на целата фигура?



A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

Решение. C). Плоштината на целата фигура се добива кога од збирот на плоштините на петте кругови го одземеме збирот на плоштините на четирите делови кои се преклопуваат. Значи, плоштината на целата фигура е еднаква на $5\cdot 8-4\cdot 1=36\,m^2$.

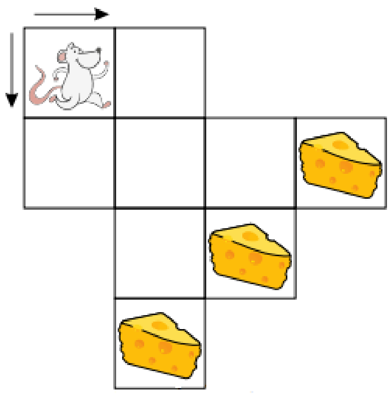
10. Шифрата за отворање на бравата на велосипедот е 0000. Но, ако некој ја погледне отворената брава од горе ќе види 8888. Кога Филип ја погледнал отворената брава на својот братучед Андреј, тој видел шифра 2815. Која е шифрата за отворање на бравата на велосипедот на Андреј, ако се знае дека бравата се заклучува на истиот начин како во примерот?



A) 4037 B) 4693 C) 0639 D) 0693 E) 9603

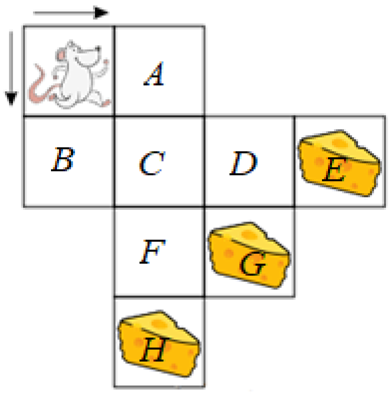
Решение. A). Кога отворената брава ќе се погледне одгоре, се гледа шифра кај која секоја цифра е за две позиции наназад од соодветната цифра на шифрата која ја отвора бравата. Тоа значи дека секоја цифра на шифрата Филип треба да ја зголеми за 2, односно секоја позиција да ја помести за две места нагоре. Значи, шифрата е 4037.

11. Глушецот Глувчо решил да земе сирење, при што тој може да поминува од поле во поле само вертикално или хоризонтално. Тој не смее повторно да стапне во поле во кое еднаш веќе бил. На колку различни начини Глувчо може да стигне до парче сирење?



A) 3 B) 5 C) 8 D) 10 E) 11

Решение. C). Полињата во кои може да стапне Глувчо да ги означиме како на цртежот десно. Тогаш можни патишта за тој да земе сирење се:



$ACDE,\ ACDG,\ ACFG,\ ACFH,$
$BCDE,\ BCDG,\ BCFG,\ BCFH.$

Значи, Глувчо може на 8 начини да стигне до парче сирење.

12. Даден е изразот $\frac{2}{5}+\frac{22}{55}+\frac{222}{555}+...+\frac{222...2}{555...5}$ во кој бројот на цифрите во броителот и именителот на секој собирок е еднаков, а во секој следен собирок бројот на цифрите во броителот и именителот се зголемува за 1 во однос на претходниот собирок. Нека a е најмалиот број собирци во дадениот израз за кој вредноста на изразот е поголема или еднаква на 100. Колку е a?

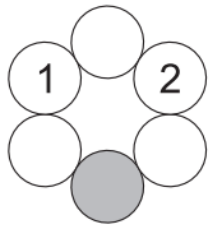
A) 200 B) 250 C) 500 D) 1000 E) 2025

Решение. B). Ако a е бројот на собирците, тогаш

$$\frac{2}{5}+\frac{22}{55}+\frac{222}{555}+...+\frac{222...2}{555...5}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{11}+\frac{2}{5}\cdot\frac{111}{111}+...+\frac{2}{5}\cdot\frac{111...1}{111...1}$$
$$=\frac{2}{5}a\geq 100$$

од каде добиваме $a\geq\frac{5}{2}\cdot 100=250$.

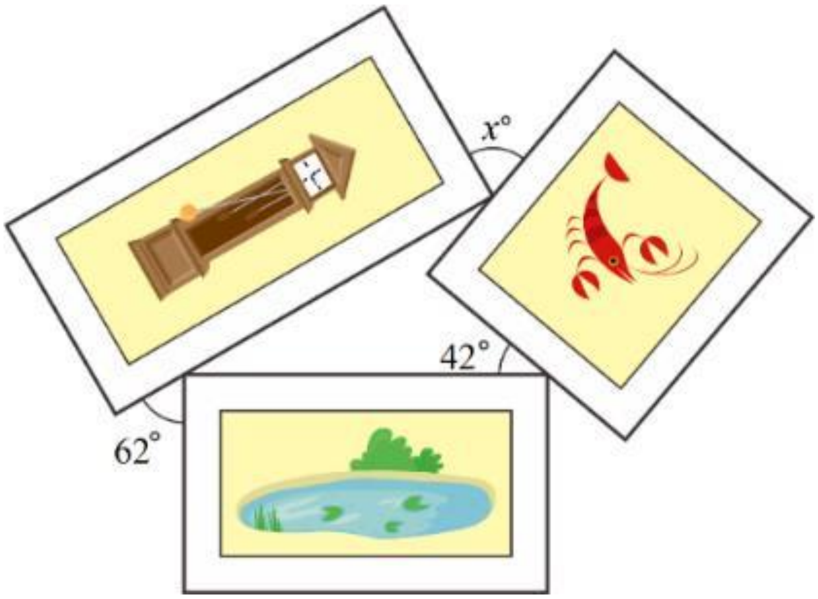
13. Во секое кругче од фигурата прикажана на цртежот десно треба да се запише по еден број, така што секој број е еднаков на збирот на двата броја кои се запишани во соседни кругчиња. Кој број треба да се запише во сивото кругче?



A) 2 B) –1 C) –2 D) –3 E) –5

Решение. D). Во кругчето меѓу броевите 1 и 2 треба да се запише бројот $1+2=3$. Сега ако одејќи во насока на движењето на стрелката на часовникот во кругчето по бројот 2 е запишан бројот a, тогаш $3+a=2$, па затоа $a=2-3=-1$. Значи, ако во сивото кругче е запишан бројот b, тогаш $2+b=-1$, што значи $b=-1-2=-3$.

14. Два од аглите, кои се зафатени од три правоаголни картички се 42° и 62°. Колку степени има аголот означен со x?



A) 64° B) 70° C) 72° D) 76° E) 62°

Решение. **D).** Картички формираат четириаголник, чиј збир на агли е еднаков на 360°. Конкавниот агол е еднаков на 270°, едниот остар агол е 42°, а другиот остар агол е еднаков на $180^\circ - 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$. Значи, третиот остар агол е еднаков на $360^\circ - 270^\circ - 28^\circ - 42^\circ = 20^\circ$. Конечно, $x = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

15. Десната штоперица покажува колку минути и секунди поминале од моментот кога Васко почнал со својот тренинг, а левата покажува уште колку минути и секунди треба да тренира. Во даден момент двете штоперици ќе покажуваат исто време. Кое е тоа време?

A) 17:50 B) 18:00 C) 18:12 D) 18:15 E) 18:20

Решение. **D).** Вкупното времетраење на тренингот е:

$$14\min 58s + 21\min 32s = 35\min 90s = 36\min 30s.$$

Двете штоперици ќе покажуваат исто време во моментот кога Васко завршил половина од тренингот. Значи, во тој момент штоперициите ќе покажуваат $36\min 30s : 2 = 18\min 15s = 18:15$.

16. Пополни ги правоаголниците со различни прости броеви помали од 20, така што дропката A ќе има најголема можна целобројна вредност.

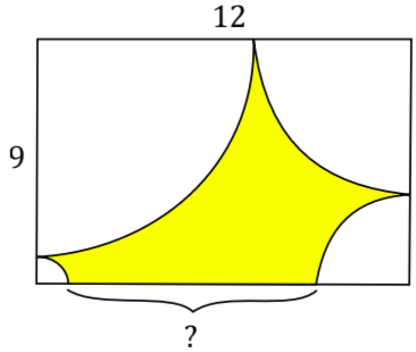
$$A=\frac{\square+\square+\square+\square+\square+\square+\square}{\square}$$

Која е таа вредност?

A) 20 B) 14 C) 10 D) 8 E) 6

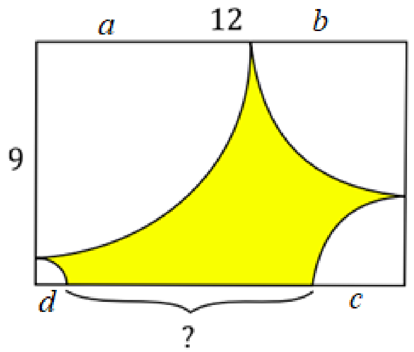
Решение. **C).** Прости броеви помали од 20 се: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19, т.е. имаме осум прости броеви помали од 20. Бидејќи во правоаголниците треба да запишеме осум различни прости броеви помали од 20, заклучуваме дека треба да ги запишеме сите прости броеви помали од 20. Нивниот збир е $s=77$. Ако во именителот е запишан бројот a, тогаш збирот на броевите во броителот е $77-a$. За да дропката е цел број потребно е $a\,|\,77-a$, од каде следува $a\,|\,77$. Значи, $a=7$ или $a=11$ и најголемата можна вредност на дропката се добива за $a=7$ и таа е еднаква на $\frac{77-7}{7}=10$.

17. Во темињата на правоаголник со димензии $12\,cm\times 9\,cm$ се исечени четири четвртинки кругови, како на цртежот десно. Колкава е дол-жината на отсеч-ката означена со прашалниот знак?



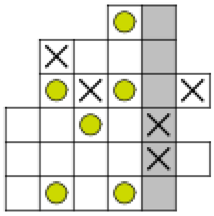
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. **D).** Нека бараната должина е x. Тогаш при ознаки како на цртежот десно имаме:



$$x = 12-(c+d) = 12-(9-a+9-b)$$
$$= 12-18+(a+b) = 12-18+12 = 6\,cm.$$

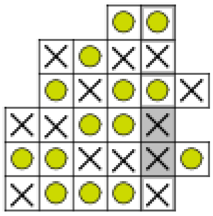
18. Горјан сака во секое поле на фигурата прикажана на цртежот десно да запише еден од симболите ✕ или ●. Притоа симболите сака да ги распореди така што во ниту еден ред, колона или дијагонала нема да има последователно поставени четири исти симболи. По полнувањето на фигурата колку и какви симболи ќе има во сивата колона?



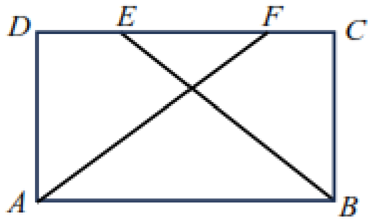
A) три ✕ и три ● B) четири ✕ и два ● C) два ✕ и четири ●

D) еден ✕ и пет ● E) пет ✕ и еден ●

Решение. **B).** Ако се земе предвид условот на задачата и првичниот распоред на знаците во дијагоналата од горе лево кон долу десно, како и распоредот на знаците во четвртата колона лесно се добива бараното пополнување на фигурата (цртеж десно). Значи, сивата колона има четири ✕ и два ●.



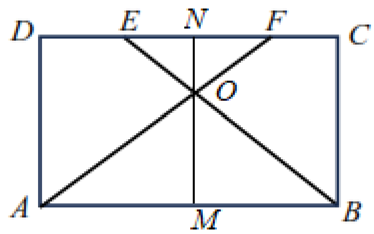
19. Во правоаголникот $ABCD$ точките E и F се избрани на страната CD, така што $\measuredangle ABE = \measuredangle DFA = 45^\circ$ и $\overline{AB} + \overline{EF} = 20\,cm$. Колкава е должината на страната BC?



A) $4\,cm$ B) $6\,cm$ C) $8\,cm$

D) $10\,cm$ E) $12\,cm$

Решение. **D).** Низ пресечната точка O на отсечките AF и BE повлекуваме нормала на AB, која страните AB и CD ги сече во точките M и N, соодветно. Тогаш $\overline{MN} = \overline{BC}$. Понатаму, триаголниците ABO и EFO се рамнокраки правоаголни, па затоа $\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{EF}$.



Конечно, $\overline{BC}=\overline{MN}=\overline{MO}+\overline{ON}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{EF})=\frac{1}{2}\cdot 20=10\,cm$.

20. Ако a е позитивен број кој е решение на равенката $125^a=5^{a^3}$, тогаш:

A) $a=5$ B) $a=3$ C) $a=5\sqrt{2}$ D) $a=3\sqrt{5}$ E) $a=\sqrt{3}$

Решение. **E).** Од $125^a=5^{a^3}$ следува $(5^3)^a=5^{a^3}$, т.е. $5^{3a}=5^{a^3}$. Сега, од својствата на степените следува $3a=a^3$ и како a е позитивен број добиваме $a^2=3$, односно $a=\sqrt{3}$.

21. Јована помножила некои три различни прости броеви и го добила бројот a. Даниела исто така помножила три различни прости броеви и го добила бројот c. Кој од понудените броеви може да биде производот на броевите a и c?

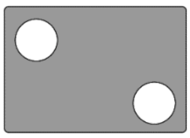
A) 180 B) 450 C) 1800 D) 2100 E) 3500

Решение. **E).** Во разложувањето на прости множители на производот на двата броја мора да има шест прости броја, при што не смее да има три исти прости броја. Сега, од

$$180=2^2\cdot 3^2\cdot 5,\quad 450=2\cdot 3^2\cdot 5^2,\quad 1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2,$$
$$2100=2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7,\quad 3500=2^2\cdot 5^3\cdot 7$$

следува дека од понудените броеви единствено бројот 2100 може да биде производ на броевите a и c.

22. За време на фудбалскиот натпревар Павле 17 пати шутирал кон противничкиот гол. Притоа 60% од шутевите во првото полувреме биле во голот, а во второто полувреме во голот биле 75% од шутевите. Колку пати во второто полувреме Павле точно шутирал во противничкиот гол?



A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Решение. B). Нека Павле во првото полувреме кон противничкиот гол упатил x шутеви, а во второто полувреме упатил y шутеви. Тогаш $x+y=17$ и $\frac{3}{5}x=n, \frac{3}{4}y=m, m,n\in\mathbb{N}$. Оттука добиваме $x=\frac{5}{3}n$, $y=\frac{4}{3}m$, па затоа $3|m$ и $3|n$, т.е. $n=3k, m=3p, k,p\in\mathbb{N}$ односно $x=5k, y=4p, k,p\in\mathbb{N}$. Со замена во равенката $x+y=17$ добиваме $5k+4p=17$, $k,p\in\mathbb{N}$. Лесно се добива дека во множеството $\mathbb{N}$ единствено решение на последната равенка е $k=1, p=3$. Според тоа, $x=5, y=12$ и затоа $n=\frac{3}{5}\cdot5=3, m=\frac{3}{4}\cdot12=9$. Конечно, Павле во првото полувреме кон противничкиот гол точно шутирал 3 пати, а во второто полувреме точно шутирал 9 пати.

23. Симон живее на $1\,km$ од училиштето. Ако оди пешки, тој се движи со $4\,km/h$, а ако се движи со велосипед тој се движи со брзина $15\,km/h$. Наутро Симон секогаш тргнува на училиште во 8:00. Ако оди пешки, тој пристигнува 5 минути пред почетокот на часовите. Колку минути пред почетокот на часовите ќе пристигне Симон кога оди со велосипед?

A) 11 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Решение. E). Симон до училиштето пешки стасува за

$$\frac{1}{4}\,h=0,25\,h=0,25\cdot60=15\,\text{min},$$

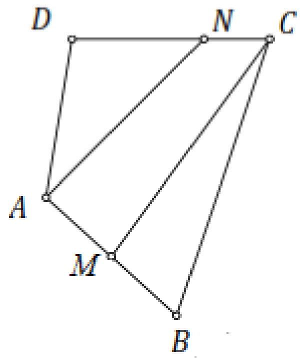
а со велосипед стасува за

$$\frac{1}{15}\,h=\frac{1}{15}\cdot60\,\text{min}=4\,\text{min},$$

односно $15-4=11$ минути побрзо.

Бидејќи кога оди пешки стасува 5 минути пред почетокот на часовите, тој кога оди со велосипед ќе стасува $5+11=16$ минути пред почетокот на часовите.

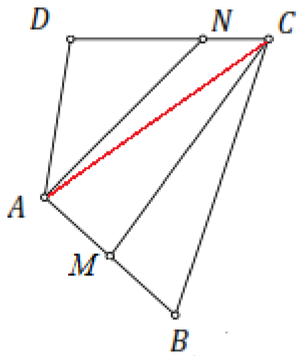
24. Дадени се четириаголник $ABCD$ и точки M и N на страните AB и CD такви што $\overline{AM}=\overline{MB}$ и $\overline{DN}=2\overline{NC}$. Колку е плоштината на четириаголникот $ABCD$ ако



$$P_{AND}=6\,cm^2 \text{ и } P_{MBC}=2\,cm^2.$$

A) $13\,cm^2$ B) $14\,cm^2$ C) $15\,cm^2$ D) $16\,cm^2$ E) $17\,cm^2$

Решение. **A).** Да ја повлечеме дијагоналата AC. Тогаш



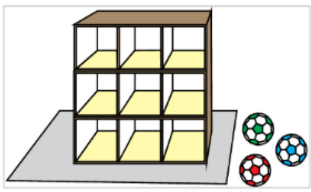
$$P_{ANC}=\tfrac{1}{2}P_{AND}=3\,cm^2 \text{ и}$$

$$P_{MAC}=P_{MBC}=2\,cm^2,$$

(Зошто?). Според тоа,

$$P_{ABCD}=P_{AND}+P_{ANC}+P_{AMC}+P_{BMC}=13\,cm^2.$$

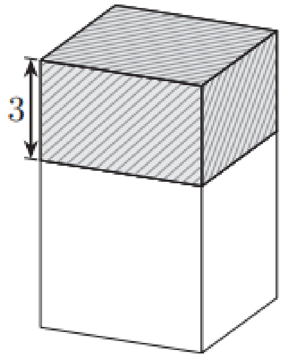
25. Филип има три различни топки и полица која има три реда со по три шкавчиња (цртеж десно). Тој сака топките да ги стави во шкавчињата на полицата така што трите топки ќе се во шкавчиња на три различни реда. На колку начини тоа може да го направи?



A) 9 B) 27 C) 81 D) 162 E) 216

Решение. **D).** Без ограничување на општоста можеме да земеме дека топките се црвена (Ц), зелена (З) и сина (С). Распоредувањето на топките во редовите на полицата гледајќи одгоре надолу може да се направи на шест начини и тоа: ЦЗС, ЦСЗ, ЗЦС, ЗСЦ, СЗЦ и СЦЗ. Понатаму, за секој од овие распореди секоја од трите топки може да се стави во 3 шкавчиња, па затоа за секој распоред на топките по редови имаме $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ можни распореди во шкавчињата. Конечно, Матео топките може да ги распореди на $6 \cdot 27 = 162$ начини.

26. Кога висината на квадарот ќе се намали за $3\,cm$, тогаш неговата плоштина се намалува за $60\,cm^2$. Ако притоа добиеното тело е коцка, колку е волуменот на почетниот квадар?



A) $75\,cm^3$ B) $125\,cm^3$ C) $150\,cm^3$

D) $200\,cm^3$ E) $320\,cm^3$

Решение. D). Бидејќи добиеното тело е коцка, основата на квадарот е квадрат. Нека должината на страната на квадратот е a. Тогаш плоштината на квадарот се намалува за $4 \cdot 3a = 12a$, па затоа $12a = 60$ односно $a = 5\,cm$. Значи, должините на рабовите на квадарот се $5\,cm$, $5\,cm$ и $8\,cm$. Конечно, волумен е еднаков на $5 \cdot 5 \cdot 8 = 200\,cm^3$.

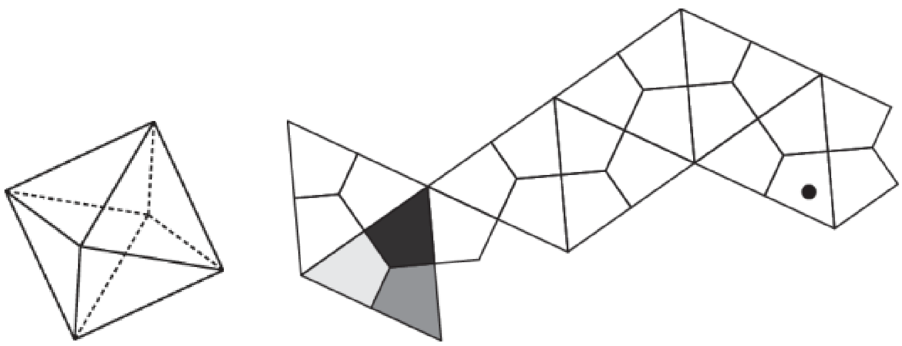
27. Четири цвета редоследно имаат 8, 9, 10 и 11 венечни ливчиња. Во еден потез Матео може да скине по едно ливче од точно три различни цвета. Кој е најмалиот потребен број потези на Матео после кои на сите четири цвета е има еднаков број ливчиња?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. C). Бидеји најголемата разлика во бројот на ливчињата на цветовите е $11 - 8 = 3$, а бројот на ливчињата во еден чекор на било кој цвет може да се намали само за 1, добиваме дека Матео целта не може да ја постигне со помалку од 3 чекори. Нека Матео направил a чекори, по кои на секое ливче останале по c ливчиња. Бидејќи во секој чекор вкупниот број на ливчиња се намалува за 3 и имаме 4 цветови важи $4c + 3a = 38$. Од последната равенка следува дека a е парен број, т.е. дека $a=2b$. Ако замениме во горната равенка и поделиме со 2 ја добиваме равенката $2c+3b=19$, од каде следува дека b е непарен број. За $b=1$ добиваме $a=2$, што противречи на тоа дека бројот на чекорите мора да е поголем или еднаков на 3. За $b=3$, добиваме $c=5$ што значи дека Матео целта може да ја постигне со $a=2\cdot 3=6$ чекори и притоа на секој цвет ќе останат по $c=5$ ливчиња. Во долната табела е прикажано како Матео може да ја постигне саканата цел.

	Чекор I	Чекор II	Чекор III	Чекор IV	Чекор V	Чекор VI
8	8	8	7	7	6	5
9	8	7	7	6	5	5
10	9	8	7	6	6	5
11	10	9	8	7	6	5

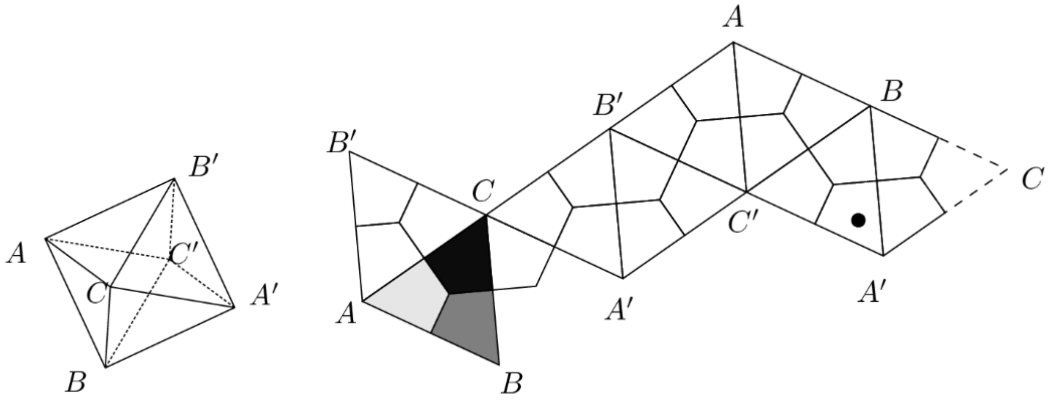
28. На цртежот долу лево е прикажан октаедар, а на цртежот долу десно е дадена мрежата на октаедарот. Секој ѕид на октаедарот е поделен на три скаладни дела. Октаедарот е обоен со три бои: црна, темно сива и светло сива така што деловите кои имаат заедничко теме и деловите кои се наоѓаат во спротивни темиња се обоени со иста боја. Со која боја може да е обоен делот од мрежата во кој се наоѓа точката?



A) само со црна B) само со темно сива C) само со светло сива

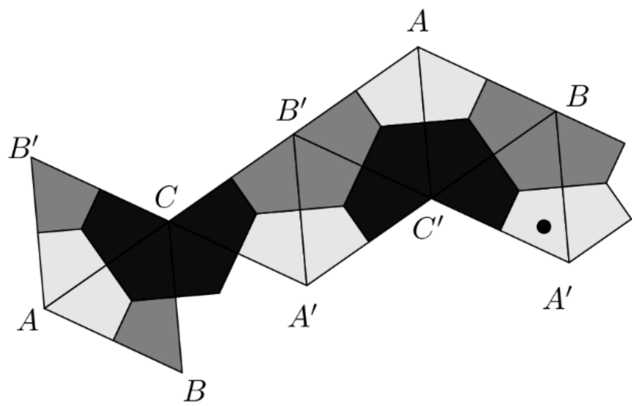
D) и со црна и со темно сива E) и со црна и со светло сива

Решение. C). Да го означиме октаедарот како на цртежот долу лево. Тогаш лесно се добива дека темињата на мражата се означени како на долниот цртеж десно.



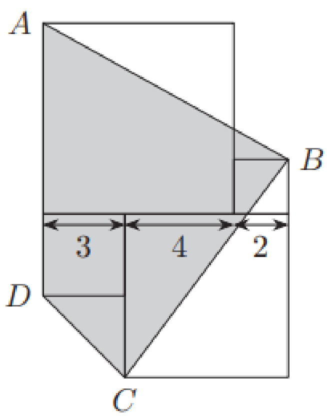
Бидејќи делот во кој е точката излегува од темето A', а темето A' е спротивно со темето A од кое излегува делот обоен светло сиво, заклучуваме дека единствена можност е делот во кој е точката да е обоен светло сиво.

Боењето на целата мрежа е дадено на цртежот десно. Притоа бидејќи B и B' се спротивни темиња деловите кои излегуваат од нив се темно сиви, а бидејќи C и C' се спротивни темиња деловите кои излегуваат од нив се црни.

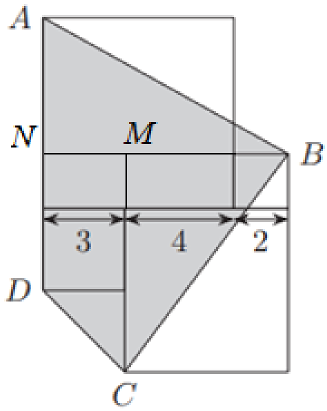


29. На цртежот се прикажани четири квадрати со должини на страни 2, 3, $2+4=6$ и $3+4=7$. Колкава е плоштината на четириаголникот $ABCD$?

A) 54 B) 60 C) 66 D) 72 E) 80



Решение. C). При ознаки како на долниот цртеж последователно добиваме



$$P_{ABN}=\frac{\overline{AN}\cdot\overline{BN}}{2}=\frac{9\cdot 5}{2}=\frac{45}{2},$$
$$P_{BCM}=\frac{\overline{BM}\cdot\overline{CM}}{2}=\frac{8\cdot 6}{2}=24,$$
$$P_{CDNM}=\frac{(\overline{ND}+\overline{MC})\cdot\overline{NM}}{2}=\frac{(5+8)\cdot 3}{2}=\frac{39}{2},$$
$$P_{ABCD}=P_{CDNM}+P_{BCM}+P_{ABN}$$
$$=\frac{39}{2}+24+\frac{45}{2}=66.$$

30. Софија истовремено фрлила три стандардни коцки за играње. Колку различни резултати може да добие? Под резултат од фрлање се подразбираат три броја кои се еднакви на броевите на точките на горните страни на коцките без разлика на нивниот распоред.

A) 36 B) 56 C) 72 D) 120 E) 216

Решение. B). Можни се следниве случаи:

- на сите три коцки падна еден ист број и тогаш имаме 6 резултати,
- на една коцка паднал еден број, а на другите две коцки паднале два исти броја и тогаш имаме $6\cdot 5=30$ резултати,
- на сите три коцки паднале различни броеви и тогаш имаме $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$ резултати.

Конечно, вкупниот број различни резултати е $6+30+20=56$.