Општински натпревар 2021

I година

Избери еден од понудените одговори или внеси цел ненегативен број (без мерна единица).

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1АБ. При делење на природниот број x со 8 се добива остаток 3. Колку изнесува остатокот при делење на $3x$ со 8?

Одговор. 1

Решение. Бројот е $x=8k+3$, каде k е природен број. Тогаш,

$$3x=3(8k+3)=24k+9=8(3k+1)+1,$$

од каде следи дека при делење на $3x$ со 8 се добива остаток 1.

2АБ. Која е првата цифра на најмалиот природен број чиј збир на цифри е 2021?

Одговор. 5

Решение. Од $2021=224\cdot 9+5$, имаме дека најмалиот природен број со збир на цифри 2021 е 599...9 со 224 деветки. Значи, првата цифра е 5.

3АБ. Кој е татко на синот на таткото на таткото на Александар?

А) братот на Александар

Б) братучедот на Александар

В) таткото на Александар

Г) чичкото на Александар

Д) дедото на Александар

Одговор. Д

Решение. Синот на таткото на таткото на Александар е чичкото на Александар. Неговиот татко е дедото на Александар.

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4АБ. Во полиција ги испрашуваат Атанас, Бранко и Владо. Само еден од нив ја зборува вистината и само еден од нив е крадецот.

Атанас рекол: „Јас не сум крадецот.“

Бранко рекол: „Атанас е крадецот.“

Владо рекол: „Јас не сум крадецот.“

Кој е крадецот?

А) Атанас

Б) Бранко

В) Владо

Г) Атанас и Владо

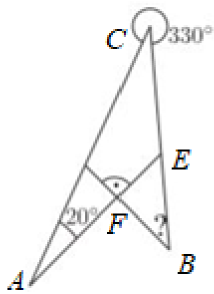
Д) Ниеден од тројцата

Одговор: В

Решение. Ако Бранко ја зборува вистината, а Атанас и Владо лажат, тогаш од тоа што го кажал Бранко, заклучуваме дка Атанас е крадецот, но во тој случај и Владо би ја зборувал вистината, а претпоставивме дека Владо лаже. Значи, не може Бранко дaја зборува вистината, а Атанас и Владо да лажат.

Ако Владо ја зборува вистината, а Атанас и Бранко лажат, тогаш од тоа што Атанас лаже, заклучуваме дека Атанас е крадецот, но во тој случај Бранко би ја зборувал вистината, а претпоставивме дека Бранко лаже. Значи, не може Владо да ја зборува вистината, а Атанас и Бранко да лажат. Останува, Атанас да ја зборува вистината, а Бранко и Владо да лажат. Тогаш од тоа што Владо лаже, заклучуваме дека Владо е крадецот, и тоа е во ред, бидејќи навистина во тој случај Атанас ја зборува висината, а Бранко лаже.

5АБ. Колку степени изнесува аголот означен со прашалник на сликата горе десно?



Одговор. 40°

Решение. Од цртежот, внатрешниот агол

$$\measuredangle ACB = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ .$$

Од триаголникот *AEC*, имаме дека

$$\measuredangle AEC = 180^\circ - 20^\circ - 30^\circ = 130^\circ .$$

Од цртежот $\measuredangle EFB = 90^\circ$, па како $\measuredangle AEC$ е надворешен агол за триаголникот *EFB*, добиваме дека $\measuredangle EBF = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$.

6АБ. Кои од следните искази се точни:

p : „$x = 1$ е решение на равенката $x = x^2$.“

q : „$x = 3$ не е решение на неравенката $x + 2 > 5$.“

r : „$x = 1$ не е решение на равенката $x + 1 = 2$.“

s : „$x = -3$ е решение на равенката $x - \frac{x}{3} = 2$.“

А) Само p и q.

Б) Само p и r.

В) Само p.

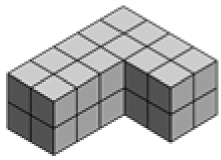
Г) Само p, q и r.

Д) Само r и s.

Одговор. А

Решение. Со непосредна проверка се добива дека исказите p и q се точни, а исказите r и s не се точни.

7АБ. Плоштината на една мала коцка е $1,5\,dm^2$. На цртежот е дадено тело составено од 28 такви мали коцки. Колку cm^2 е плоштината на телото?

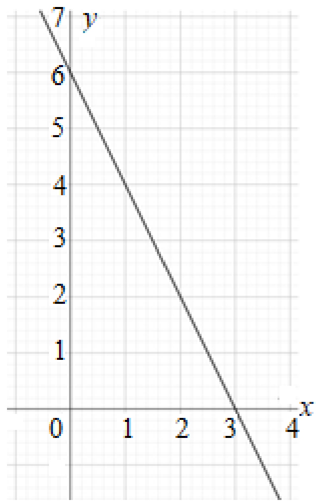


Одговор. 1600

Решение. Нека a е работ на малата коцка. Тогаш, $6a^2 = 1,5\,dm^2$, од каде $a = 0,5\,dm^2 = 5\,cm^2$. Плоштината на телото е $64a^2 = 64 \cdot 25 = 1600\,cm^2$.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8АБ. Даден е график на линеарна функција. Кои од следните искази се точни:



p: „Графикот на функцијата минува низ точката $A(-2,10)$.“

q: „Графикот на функцијата минува низ точката $B(1,1)$.“

r: „Графикот на функцијата е паралелен со графикот на функцијата $y = 2x - 3$.“

s: „Графикот на функцијата е паралелен со графикот на функцијата $y = -2x + 3$.“

А) Само p, q и s.

Б) Само s.

В) Само p и r.

Г) Само p и s.

Д) Ниеден од исказите.

Одговор: Г

Решение. На цртежот е даден графикот на функцијата $y=-2x+6$. Графикот на дадената функција минува низ точката $A(-2,10)$ затоа што $10=-2\cdot(-2)+6$, а не минува низ $B(1,1)$, затоа што $1\neq-2\cdot1+6$. Графикот на дадената функција е паралелен со графикот на функцијата $y=-2x+3$, бидејќи имаат еднакви коефициенти на правец.

9АБ. Ако симболите ♥ и ▼ претставуваат различни природни броеви помали од 20 и за нив важи ♥ × ♥ × ♥ = ▼, колку е ▼ × ▼ ?

Одговор. 64

Решение: Ако ♥ $=1$ следува ▼ = ♥ × ♥ × ♥ $=1$, што не е можно бидејќи ♥ и ▼ претставуваат различни природни броеви.

Ако ♥ $=2$ следува ▼ = ♥ × ♥ × ♥ $=8$, е решение бидејќи ♥ и ▼ се различни и помали од 20, па во тој случај ▼ × ▼ $=64$.

Ако ♥ ≥ 3 следува ▼ = ♥ × ♥ × ♥ ≥ 27, не е решение бидејќи ♥ и ▼ се помали од 20.

10АБ. Во еден супермаркет има два реда наредени колички една во друга (како на сликата). Во едниот ред има десет колички и редот е долг $2{,}9\,m$, а во вториот ред има дваесет колички и редот е долг $4{,}9\,m$. Колку dm е долга една количка?

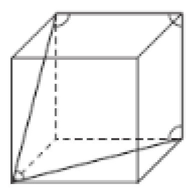
Одговор. 11

Решение. Нека x е делот од количката кој влегува во друга количка кога количките се спакувани, а y е делот од количката кој не влегува. Тогаш, $x+10y=2{,}9$ и $x+20y=4{,}9$. Решение на овој систем е $x=0{,}9$ и $y=0{,}2$, односно една количка е долга $x+y=1{,}1\,m=11\,dm$.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

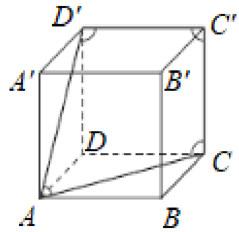
11АБ. На цртежот е прикажана коцка во која се означени четири агли. Колку степени е збирот на означените агли?

Одговор. 330



Решение. Јасно, $\measuredangle CC'D=90^\circ$ е дека, како еден од внатрешните агли во квадратот $DCC'D'$, а од $C'D'\perp ADD'A'$ и $C'C\perp ABCD$, следува

$$\measuredangle AD'C' = \measuredangle ACC' = 90^\circ .$$



Потоа, од тоа што триаголникот ACD' е рамностран (сите негови страни се дијагонали на страните на коцката), следи дека $\measuredangle CAD' = 60^\circ$. Значи, збирот на означените агли е $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 330^\circ$.

12АБ. Тројца пеачи пеат една композиција составена од три идентични строфи. Секој пеач ја пее композицијата четири пати и престанува. Прв почнува првиот пеач, вториот пеач почнува кога првиот ја почнува втората строфа, а третиот пеач почнува кога првиот пеач ја почнува третата строфа. Нека $\frac{a}{b}$ е нескратлива дропка која го означува делот од вкупното време на настапот во кое сите три пејачи заедно пејат. Колку изнесува вредноста на изразот $(a^2 - 2a) - (b^2 - 10b)$?

Одговор. 36

Решение. Настапот трае вкупно колку времето за 14 строфи, при што пеачите заедно пеат 10 строфи. Значи, $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ од времето на вкупниот настап, пејачите пејат заедно, па $a = 5, b = 7$. Тогаш,

$$(a^2 - 2a) - (b^2 - 10b) = (5^2 - 2 \cdot 5) - (7^2 - 10 \cdot 7) = 36 .$$

13АБ. Должината на страната AB во триаголникот ABC е 29 cm. Должините на отсечките, од темињата A и B до тежиштето T се 20 cm и 21 cm, соодветно. Колку cm^2 е плоштината на триаголникот ABC?

Одговор. 630

Решение. Триаголникот ABC има плоштина која што е три пати поголема од онаа на триаголникот ABT. Плоштината на триаголникот ABT може да се пресмета со Херонова формула, а може и да се констатира дека должините на трите страни формираат Питагорина тројка на броеви, бидејќи $20^2 + 21^2 = 29^2$, па затоа $P_{ABT} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210\, cm^2$. Тогаш, $P_{ABC} = 630\, cm^2$.

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени.

14А. Одреди го збирот на природните броеви кои се решенија на неравенката $|2x - 5| + 3x \le 4x - 1$.

Одговор. 9

Решение. Прво, ја решаваме равенката во множеството на реални броеви. На интервалот $[\frac{5}{2},+\infty)$ неравенката преминува во $2x-5+3x\leq 4x-1$, односно $x\leq 4$. Тогаш, решението е секој реален број од интервалот $[\frac{5}{2},4]$. На интервалот $(-\infty,\frac{5}{2})$ неравенката преминува во $5-2x+3x\leq 4x-1$ односно $x\geq 2$ Тогаш, решение ќе биде секој реален број од интервалот $[2,\frac{5}{2})$. Конечно, решенија ќе бидат сите реални броеви на интервалот $[2,4]$. Збирот на природните броеви од интервалот $[2,4]$ е $2+3+4=9$.

14Б. Нека (x,y) е решение на системот

$$\begin{cases} x-4y=8 \\ 3x-2y+6=0 \end{cases}$$

Пресметај ја апсолутната вредност на изразот $(x+y)^2-(x-y)^2$.

Одговор. 48

Решение. Решение на дадениот систем е $(x,y)=(-4,-3)$, од каде $(x+y)^2-(x-y)^2=48$.

15А. Еден бокал, во облик на цилиндар со висина од $48\,cm$ и дијаметар на отворот од $2{,}8\,dm$ е полн со вода. Колку чаши со вода може целосно да се наполнат со водата од бокалот, ако чашите се цилиндрични со висина $2{,}2\,dm$ и дијаметар на отворот од $8\,cm$?

Одговор. 26

Решение. Волуменот на бокалот е

$$V=\pi r^2 H=14^2\cdot 48\pi=9408\pi\ cm^3,$$

а волумен на една чаша е

$$V'=\pi r^2 H=4^2\cdot 22\pi=352\pi\ cm^3.$$

Од $V=26V'+256\pi$, значи дека со водата од бокалот може целосно да се наполнат 26 чаши.

15Б. Волуменот на една коцка е еднаков на волуменот на еден квадар со димензии $4\,dm$, $10\,dm$ и 0,2 m. Колку cm^2 е плоштината на коцката?

Одговор. 2400

Решение. Волуменот на квадарот е $40 \cdot 10 \cdot 20 = 8000\,cm^3$, од каде работ на коцката е $20cm$, па плоштината на коцката е $6 \cdot 20^2 = 2400\,cm^2$. .

16А. Одреди го бројот на елементи на множеството $(A \cap B) \setminus C,$ каде што $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 6 > 0\},\ \ B = \{x \in \mathbb{R} \mid 24 - x \geq |x|\}$ и C е множеството од сите цели броеви, деливи со бројот 3.

Одговор. 6

Решение. Множеството A е $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, ...\}$. За $x \geq 0$ неравенката $24 - x \geq |x|$ се сведува на $x < 12$ односно истата ја задоволуваат сите броеви од интервалот $[0,12]$. За $x < 0$ добиваме $24 \geq 0$ што е точно за секој број од овој интервал, па затоа решенија на неравенката $24 - x \geq |x|$ се броевите од интервалот $(-\infty, 12]$, односно $B = (-\infty, 12]$. Тогаш, $A \cap B = \{4, 5, 6, ..., 12\}$. Ако ги извадиме броевите од ова множество, кои се деливи со 3, добиваме дека $(A \cap B) \setminus C = \{4, 5, 7, 8, 10, 11\}$. Во последното множество има 6 елементи.

16Б. Доведи го изразот

$$\frac{\frac{1}{3}-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})-\frac{1}{3})+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$$

до нескратлива дропка од облик $\frac{a}{b}$. Колку изнесува збирот $a + b$?

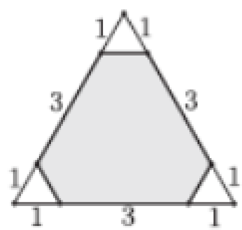
Одговор. 23

Решение:

$$\frac{\frac{1}{3}-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})-\frac{1}{3})+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})+\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{8}{15}$$

Значи, $a = 8, b = 15$, па $a + b = 23$.

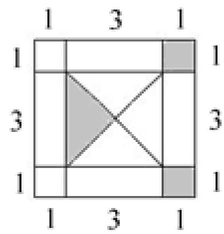
17А. Колку проценти од големиот триаголник се обоени?



Одговор. 88

Решение. Страната на еден мал триаголник и страната на големиот триаголник се однесуваат како $1:5$, па нивните плоштини се однесуваат како $1:25$. Значи, збирот на плоштините на сите три мали триаголници е $\frac{3}{25}$ од плоштината на големиот триаголник, односно обоениот дел е $1-\frac{3}{25}=\frac{22}{25}=88\%$ од плоштината на големиот триаголник.

17Б. Колку проценти од големиот квадрат не се обоени?



Одговорот внеси го без знакот за процент.

Одговор. 83

Решение. Плоштината на еден мал квадртат со страна 1 е $\frac{1}{25}$ од плоштината на големиот квадрат. Плоштината на квадратот со страна 3 е $\frac{9}{25}$ од плоштината на големиот квадрат, па плоштината на осенчаниот триаголник е $\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{25}=\frac{9}{100}$ од плоштината на големиот квадрат. Значи, осенчаниот дел е $\frac{9}{100}+2\cdot\frac{1}{25}=\frac{17}{100}$ од плоштината на големиот квадрат, а делот кој не е осенчан е $1-\frac{17}{100}=\frac{83}{100}=83\%$ од плоштината на големиот квадрат.

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

18А. Колку треба да изнесува коефициентот A во алгебарскиот рационален израз $\frac{Ax}{x-1}-\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$ за да вредноста на алгебарскиот израз не зависи од вредноста на променливата x?

Одговор. 2

Решение. Имаме

$$\frac{A}{x-1}-\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{Ax(x^2+x+1)-(3x^2+2x+1)+(x+1)(x-1)}{x^3-1}$$
$$=\frac{A(x^3-1)+(A-2)(x^2+x+1)}{x^3-1}=A+\frac{(A-2)(x^2+x+1)}{x^3-1}$$

За да вредноста на изразот не зависи од вредноста на променливата x, треба $A=2$.

18Б. Професорката по математика решила да ги награди 5-те најдобри ученици на полугодишниот тест. Донела кутија со крем банани. Ученикот А зел половина од крем бананите во кутијата и половина крем банана. Ученикот Б земал половина од останатите крем банани во кутијата и уште половина крем бананче. Истото го направиле и учениците В, Г и Д редоследно. Откако ученикот Д зал крем банани на овој начин, кутијата останала празна. Колку крем банани имало во неа?

Одговор. 31

Решение. Нека во кутјата имало x крем банани. Ученикот А зел $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ крем банани. Во кутијата останале $x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$ крем банани. Тогаш, ученикот Б зел $\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$ крем банани. Во кутијата останале $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$ крем банани, па ученикот В земал $\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$ крем банани. Слично, ученикот Г зел $\frac{x+1}{16}$, а ученикот Д земал $\frac{x+1}{32}$ крем банани. Бидејќи ништо не останало во кутијата, ја добиваме следната равенка $x=\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+1}{8}+\frac{x+1}{16}+\frac{x+1}{32}$, од каде $x=31$.

19АБ. Напишана е низата непарни природни броеви 135791113151719... Која цифра се наоѓа на 2021-вото место?

Одговор. 7

Решение. Едноцифрени непарни броеви се 5, двоцифрени непарни броеви се $(99-9):2=45$, трицифрени непарни броеви се $(999-99):2=450$ Вкупно цифри кои се употребени за едноцифрените, двоцифрените и трицифрените непарни броеви се $5+2\cdot 45+3\cdot 450=1445$. Сега, ја бараме цифрата која се наоѓа на $2021-1445=576$ - тото место во низата четирицифрени непарни броеви. Бидејќи $576:4=144$, тоа е последната цифра од 144-тиот четирицифрен непарен број. Бидејќи, од 1001 до 1199 има 50 непарни броеви, од 1201 до 1299 има уште 50 непарни броеви и од 1301 до 1387 има уште 44 непарни броеви, значи 1387 е 144-тиот четирицифрен непарен број. Последна цифра на 1387 е цифрата 7, и таа е 2021-вата цифра во низата непарни природни броеви.

20АБ. Во 2023 година, Мина ќе има онолку години колку што изнесува збирот на цифрите на годината на нејзиното раѓање. Знаејќи дека Мина е родена во овој век, најди ја годината на нејзино раѓање.

Одговор. 2015

Решение. Нека Мина е родена во $\overline{20xy}$. Тогаш, во 2023 Мина ќе има $2+0+x+y=x+y+2$ години, па затоа $2023-\overline{20xy}=x+y+2$. Оттука следува $11x+2y=21$. Бидејќи x е цифра и $11x<21$, следува дека $x=0$ или

$x=1$. Ако $x=0$, тогаш $2y=21$, па нема решение. Ако $x=1$, тогаш $11+2y=21$ и добиваме $y=5$. Значи годината на раѓање на Мина е 2015.

II година

Се избира еден од понудените одговори.

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени

1АБ. Камелија го исклучила нејзиниот компјутер во петок во 17:00 часот. До тој момент компјутерот работел точно 100 часови. Кога Камелија го вклучила компјутерот?

А понеделник 13:00 часот

Б понеделник 15:00 часот

В понеделник 17:00 часот

Г вторник 15:00 часот

Д друго време

Одговор. А

Решение. Треба да се врати station наназад времето од 100 поминати часови почнувајќи од петок 17:00 часот. Од $100=24\cdot 4+4$ следува дека треба да се пресмета 4 дена и 4 часа пред петок 17:00 часот. Значи тоа е понеделник во 13:00 часот.

2АБ. Цифрата на единиците на бројот $(125^{2021}+1)^{2021}$ е?

А 5 **Б** 1 **В** 0 **Г** 6 **Д** друга цифра

Одговор. Г

Решение. Степен на број што завршува на 5 е број што завршува на 5. Затоа бројот $125^{2021}+1$ завршува на 6, а тогаш степенот $(125^{2021}+1)^{2021}$ завршува на 6, бидејќи степен на број што завршува на 6 е број што завршува на 6.

3АБ. Какви корени има квадратна равенка ако за нив важи $x_1+x_2=88$ и $x_1x_2=2021$?

А два реални позитивни

Б два реални негативни

В еден позитивен и еден негативен реален

Г еден реален

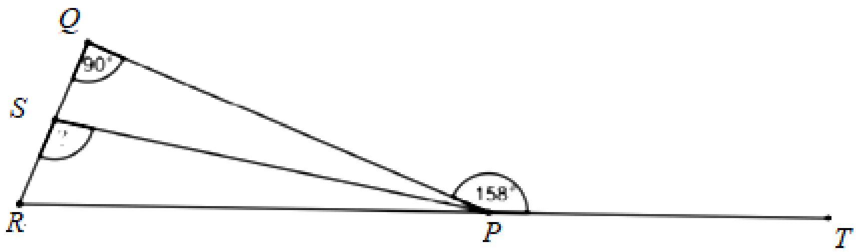
Д два комплексни

Одговор. Д

Решение. $D=88^2-4\cdot 2021=7744-8084=-340$, па равенката нема реални решенија т.е. има комплексни решенија.

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени

4АБ. На цртежот $\measuredangle PQR=90^0$, $\measuredangle QPT=158°$ и $\measuredangle RPS=\measuredangle QPS$. Колку е $\measuredangle PSR$?



А 101° **Б** 79° **В** 90° **Г** 81° **Д** 158°

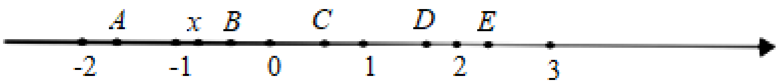
Одговор. А

Решение. Аголот $\measuredangle QPR=180^\circ-158^\circ=22^\circ$, од условот на задачата имаме $\measuredangle RPS=\measuredangle QPS$.

Значи $\measuredangle QPS=11^\circ$, следува $\measuredangle PSQ=180^\circ-90^\circ-11^\circ=79^\circ$.

Конечно, $\measuredangle PSR=180^\circ-79^\circ=101^\circ$.

5АБ. На реалната права се означени броевите A,x,B,C,D и E, како на цртежот. Кој од означените броеви A,x,B,C,D и E на реалната права е најблиску до вредноста на x^2?



А A **Б** B **В** C **Г** D **Д** E

Одговор. В

Решение. За секој реален број различен од нула x важи $x^2>0$. Од $-1<x<0$ следува $x^2<(-1)^2=1$ значи $0<x^2<1$. Па од дадените броеви само C е меѓу 0 и 1.

6АБ. Колку нули на крајот има во записот на бројот што е еднаков на производот на 20^{50} и 50^{20}?

А 50 **Б** 20 **В** 90 **Г** 70 **Д** нема ниедна

Одговор. В

Решение. Имаме

$$20^{50}50^{20}=2^{50}10^{50}5^{20}10^{20}=2^{30}10^{20}10^{70}=2^{30}10^{90}$$

и овој број има 90 нули.

7АБ. За колку природни броеви n важат неравенствата $\frac{1}{n+1}<0,2021$ и $0,2021<\frac{1}{n}$?

А 0 **Б** 1 **В** 2 **Г** 4 **Д** 2021

Одговор. Б

Решение. Од $\frac{1}{n+1}<0,2021$ и $0,2021<\frac{1}{n}$ следува $\frac{1}{0,2021}-1<n<\frac{1}{0,2021}$ и оттука следува дека само еден природен број го задоволува дадениот систем линеарни неравенки.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени

8АБ. Ако симболите ♥ и ▼ претставуваат различни природни броеви помали од 20 и за нив важи ♥ × ♥ × ♥ = ▼, колку изнесува ▼ × ▼?

А 1 **Б** 4 **В** 8 **Г** 16 **Д** 64

Одговор. Д

Решение. Ако ♥ = 1, тогаш ▼ = ♥ × ♥ × ♥ = 1, што не е можно бидејќи ♥ и ▼ претставуваат различни природни броеви.

Ако ♥ = 2 следува ▼ = ♥ × ♥ × ♥ = 8, е решение бидејќи ♥ и ▼ се различни и помали од 20, па во тој случај ▼ × ▼ = 64.

Ако ♥ ≥ 3 следува ▼ = ♥ × ♥ × ♥ ≥ 27, не е решение бидејќи ♥ и ▼ се помали од 20.

9АБ. Нека збирот на трицифрените броеви $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ е 1000, при што ниту една од цифрите a, b, c, d, e, f не е нула.

Колку е збирот $a+b+c+d+e+f$?

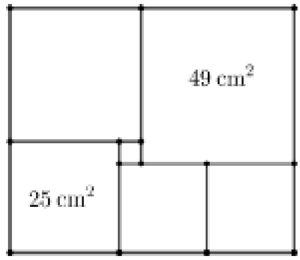
А 10 **Б** 20 **В** 28 **Г** 30 **Д** 30

Одговор. В

Решение. Бидејќи ниедна од цифрите не е нула, следува дека $c+f=10$. Тогаш $1+b+e=10$ и слично, $1+a+d=10$. Затоа,

$$a+b+c+d+e+f=10+10-1+10-1=28.$$

10АБ. Правоаголникот на цртежот е поделен на 6 квадрати. Плоштините на два од квадратите се дадени на цртежот. Колкава е плоштината на дадениот правоаголник?



А 74cm^2 **Б** 100cm^2 **В** 121cm^2

Г 143cm^2 **Д** 153cm^2

Решение. Г

Решение. Јасно, страната на квадратот со плоштина 25cm^2 е 5cm, а на тој со плоштина 49cm^2 е 7cm. Нека страната на еднаквите квадрати е x и страната на најмалиот квадрат е y. Тогаш, $2x-y=7$ и $x+y=5$. Оттука, ако ги собереме двете равенки, следува $3x=12$ т.е. $x=4\text{cm}$, па тогаш $y=1\text{cm}$. За страните на правоаголникот добиваме $5+2\cdot4=13\text{cm}$ и $4+7=11\text{cm}$. Неговата плоштина е $11\cdot13=143\text{cm}^2$.

Во следните задачи се внесува бројна вредност без единица мерка.
Следните три задачи се бодуваат со 5 поени

11АБ. Ако $f(x)=ax+b$ и $f(f(f(x)))=8x+21$, колку е $a+b$?

Одговор. 5

Решение. Од

$$8x+21=f(f(f(x)))=f(f(ax+b))=f(a(ax+b)+b)$$
$$=a(a(ax+b)+b))+b=a^3x+a^2b+ab+b$$

имаме $a^3=8$ и $a^2b+ab+b=21$. Добиваме $a=2, b=3$ па е $a+b=5$.

12АБ. Ако системот

$$\begin{cases} \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=8 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{q}=38 \end{cases}$$

има решение $(x,y)=(2,4)$, колку е $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$?

Одговор. 32

Решение. Ако се соберат двете равенки и се замени дека $(x,y)=(2,4)$ е решение, се добива $\frac{2}{p}+\frac{2}{3}=46$, па $\frac{1}{p}=23-\frac{1}{3}=\frac{68}{3}$. Тогаш, ако замениме во една од равенките, на пример во втората, добиваме $\frac{4}{q}=38-\frac{2}{3}=\frac{112}{3}$ и оттука $\frac{1}{q}=\frac{28}{3}$. Тогаш, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{68}{3}+\frac{28}{3}=32$.

13АБ. Откако ќе се помножат полиномите $3+6x+x^2$ и $1+mx+m^2x^2$ се добива полином во кој коефициентот пред x^2 е 1. Најди ја апсолутната вредност на збирот на сите можни вредности на m.

Одговор. 2

Решение. Коефициентот пред x^2, откако ќе се изврши зададеното множење е $3m^2+6m+1$, па добиваме $3m^2+6m+1=1$, т.е. $m^2+2m=0$ и оттука следува дека $m=0$ или $m=-2$. Тогаш, $|-2+0|=2$.

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени

14АБ. Во 2023 година, Мина ќе има онолку години колку што изнесува збирот на цифрите на годината на нејзиното раѓање. Знаејќи дека Мина е родена во овој век, најди ја годината на нејзино раѓање.

Одговор. 2015

Решение. Нека Мина е родена во $\overline{20xy}$. Тогаш, во 2023 Мина ќе има $2+0+x+y=x+y+2$ години, па затоа $2023-\overline{20xy}=x+y+2$. Оттука следува $11x+2y=21$. Бидејќи x е цифра и $11x<21$, следува дека $x=0$ или $x=1$. Ако $x=0$, тогаш $2y=21$, па нема решение. Ако $x=1$, тогаш $11+2y=21$ и добиваме $y=5$. Значи годината на раѓање на Мина е 2015.

15А. За комплексниот број z со имагинарен дел 12 и природниот број n важи $\frac{z-n}{z+2n}=2i$. Колку е реалниот дел на комплексниот број $z+2n$?

Одговор. 6

Решение. Нека $z=a+12i$. Тогаш, $\frac{a+12i-n}{a+12i+2n}=2i$, па

$$a-n+12i=-24+2(a+2n)i.$$

Од еднаквоста на комплексните броеви, следува

$$\begin{cases} a-n=-24 \\ 2a+4n=12. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $a=-14, n=10$. Тогаш, $z+2n=6+12i$, па неговиот реален дел е 6.

15Б. Ако двата корени на равенката $x^2-85x+c=0$ се прости броеви, која е вредноста на сумата на цифрите на c?

Одговор. 13

Решение. Бидејќи $x_1+x_2=85$, едниот корен треба да биде парен а другиот непарен број, а тоа е само во случај кога едниот корен е 2 а другиот 83. Значи, $c=x_1x_2=2\cdot 83=166$ па збирот на неговите цифри е 13.

16А. Нека за некои агли x и y важи

$$\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{2}a, \\ \cos^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2}a^2. \end{cases}$$

Најди ги сите вредности на a.

Одговор. 1

Решение. Ако ги собереме двете равенки добиваме $\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}a^2=2$, т.е. $a^2+3a-4=0$. Решенија на квадратната равенка се 1 и -4. Со проверка, добиваме дека само 1 го задоволува условот во задачата.

16Б. Најди го најмалиот цел број x што ја задоволува неравенката

$$20\tfrac{4}{15}x-25\tfrac{7}{18}>42\tfrac{11}{18}+2\tfrac{4}{15}x .$$

Одговор. 5

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со

$$\begin{aligned} &20\tfrac{4}{15}x-2\tfrac{4}{15}x>42\tfrac{11}{18}+25\tfrac{7}{18}, \\ &17x>68, \\ &x>4. \end{aligned}$$

Најмалиот цел број што ја задоволува неравенката е 5.

17А. Ако $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0, abc\neq 0$, најди ја вредноста на $\frac{(a+b+c)^3}{abc}$.

Одговор. 27

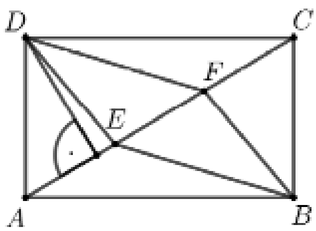
Решение. Од $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$, следува

$$a+3\sqrt[3]{a}^2\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}^2+b=-c,$$
$$a+b+c=-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}),$$
$$a+b+c=-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$$
$$a+b+c=3\sqrt[3]{abc},$$
$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}=3^3=27.$$

17Б. Нека е даден правоаголник *ABCD* така што $\overline{AB}=5, \overline{BC}=3$. Дијагоналата *AC* е поделена со точките *E* и *F* на три еднакви делови (*E* е поблиска до *A*, а *F* до *C*). Пресметај ја плоштината на четириаголникот *BFDE*.

Одговор. 5

Решение. Триаголниците *AED, EFD* и *FCD* имаат еднакви страни и иста висина, па имаат еднакви плоштини. Таа плоштина е $\frac{1}{3}$ од плоштината на триаголникот *ACD*, т.е. $\frac{1}{6}$ од плоштината на правоаголникот *ABCD*. Значи, плоштината на четириаголникот *BFDE* е $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ од плоштината на правоаголникот *ABCD*, т.е. на $\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 3=5$.



Следните три задачи се бодуваат со 7 поени

18АБ. Нека $a+2b+c\leq 50$ и $a=13b$, каде $a,b,c\in\mathbb{N}$. За колку тројки (a,b,c) важат двата услови?

Одговор. 60

Решение. Од $a+2b+c\leq 50$ и $a=13b$, следува $15b+c\leq 50$ и бидејќи b е природен број имаме $b=1,2,3$.

Ако $b=1$, тогаш $a=13$ и $c\leq 35$, па тројки $(13,1,c)$ има 35.

Ако $b=2$, тогаш $a=26$ и $c\leq 20$, па тројки $(26,2,c)$ има 20.

Ако $b=3$, тогаш $a=39$ и $c\leq 5$, па тројки $(39,3,c)$ има 5.

Значи, вкупниот број на тројките (a,b,c) за кои важат двата услови е 60.

19А. Која е најголемата целобројна вредност на параметарот k, за која равенката $(k+3)x^2+2kx+k-2=0$ има два различни негативни реални корени.

Одговор. 5

Решение. За да равенката има два различни реални корени треба дискриминантата да е позитивна т.е. $4k^2-4(k+3)(k-2)=-4k+24>0$, па $k<6$. Бидејќи двата корени треба да бидат негативни, следува дека нивниот производ е позитивен, па според Виетовите врски важи $\frac{k-2}{k+3}>0$ и оттука $k>2$ или $k<-3$. Значи, $k\in(-\infty,-3)\cup(2,6)$, па најголемата целобројна вредност на параметарот k со бараното својство е 5.

19Б. Реши го системот

$$\begin{cases}\frac{y-2}{x-1}+1=2(y-2),\\ \frac{2}{x-1}-\frac{1}{y-2}=1.\end{cases}$$

Колку е $x+y$?

Одговор. 5

Решение. Јасно, $x\neq 1, y\neq 2$. Дадениот систем е еквивалентен со

$$\begin{cases}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2,\\ \frac{2}{x-1}-\frac{1}{y-2}=1.\end{cases}$$

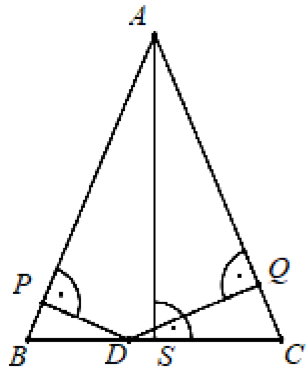
Од последниот систем наоѓаме $\frac{1}{x-1}=1,\ \frac{1}{y-2}=1$, односно $x=2, y=3$, па е $x+y=5$.

20А. Триаголникот ABC е рамнокрак со основа $\overline{BC}=65\,cm$. Нека D е точка од основата BC и нека DP и DQ се нормали спуштени кон краците AB и AC, соодветно, при што P и Q лежат на краците и $\overline{DP}=24\,cm$ и $\overline{DQ}=36\,cm$. Колку е плоштината на триаголникот ABC изразена во cm^2?

Одговор. 2535

Решение. Триаголниците PBD и QCD се правоаголни и аглите во темињата B и C им се еднакви, па затоа тие се слични. Затоа, имаме $\frac{\overline{PD}}{\overline{QD}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$, т.е. $\overline{BD}=\frac{24}{36}\overline{CD}=\frac{2}{3}\overline{CD}$. Но, $\overline{BD}+\overline{CD}=65$, па е $(1+\frac{2}{3})\overline{CD}=65$ т.е. $\overline{CD}=39\,cm$.

Од правоголниот триаголник QCD следува $\overline{QC}^2=\overline{DC}^2-\overline{DQ}^2=39^2-36^2=225$ и добиваме $\overline{QC}=15\,cm$. Нека AS е висината во триаголникот ABC спуштена кон основата. Тогаш, поради еднаквост на аглите, триаголниците QCD и SCA се слични и следува $\frac{\overline{DQ}}{\overline{QC}}=\frac{\overline{AS}}{\overline{SC}}$, а оттука имаме $\overline{AS}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{QC}}\overline{SC}=\frac{36\cdot\frac{65}{2}}{15}=78\,cm$. Плоштината на триаголникот ABC е $\frac{65\cdot 78}{2}=2535\,cm^2$.



20Б. Нека $ABCD$ е квадрат со страна $a=63\,cm$. Точките E, F, G, H се на страните AB, BC, CD, DA соодветно. E ја дели страната AB во однос 1:2, F ја дели страната BC во однос 2:3, G ја дели страната CD во однос 3:4 и H ја дели страната DA во однос 4:5. Колкава е плоштината на четириаголникот $EFGH$ изразена во cm^2?

Одговор. 2058

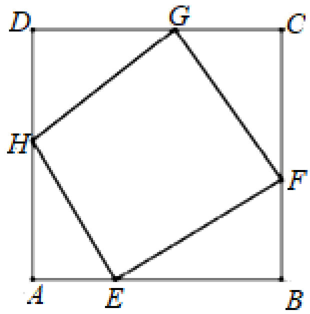
Решение. Според условот на задачата имаме

$\overline{AE}=\frac{1}{3}\cdot 63=21\,cm$, $\overline{EB}=\frac{2}{3}\cdot 63=42\,cm$,

$\overline{BF}=\frac{2}{5}\cdot 63=25{,}2\,cm$, $\overline{FC}=\frac{3}{5}\cdot 63=37{,}8\,cm$,

$\overline{CG}=\frac{3}{7}\cdot 63=27\,cm$, $\overline{GD}=\frac{4}{7}\cdot 63=36\,cm$,

$\overline{DH}=\frac{4}{9}\cdot 63=28\,cm$, $\overline{HA}=\frac{5}{9}\cdot 63=35\,cm$



Тогаш,

$$P_{EFGH}=63^2-\frac{21\cdot 35}{2}-\frac{42\cdot 25{,}2}{2}-\frac{37{,}8\cdot 27}{2}-\frac{38\cdot 28}{2}=2058\,cm^2.$$

III година

Изберете еден од понудените одговори.

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1АБ. Кој од изразите има позитивна вредност?

А) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$ Б) $\log_2\frac{1}{2}$ В) $\sqrt{(-6)^2}$ Г) $-16^{\frac{1}{4}}$ Д) 0

Одговор. В

2АБ. Во еден аквариум има 200 риби од кои 2% се сини, а останатите се жолти. Колку жолти риби треба да додадеме во аквариумот така да 1% од рибите да се сини?

А) 100 Б) 104 В) 200 Г) 204 Д) 196

Одговор. В

Решение. Според условите на задачата на аквариум има 4 сини и 196 жолти риби. Од тоа што 4 е 1% на 400 риби, треба да се додадат уште 200 жолти риби.

3АБ. Ако на производот на три последователни непарни броеви го додадеме двојниот збир на броевите и го одземеме кубот на средниот по големина број ќе се добие бројот -48. Колкав е збирот на тие броеви?

А) 1 Б) 23 В) 30 Г) 32 Д) друг одговор

Одговор. Д

Решение. Имаме

$$(2k-1)(2k+1)(2k+3)+2((2k-1)+(2k+1)+(2k+3))-(2k+1)^3=-48$$

По средувањето, $8k=24$, односно $k=3$. Бараните непарни броеви се 5, 7 и 9, а нивниот збир е 21.

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4АБ. Одреди ја апсолутната вредност на збирот на сите целобројни вредности на променливата x за кои важи $\frac{1}{9}<(\frac{1}{3})^x<27$.

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) -2

Одговор. В

Решение. Имаме $(\frac{1}{3})^2<(\frac{1}{3})^x<3^3=(\frac{1}{3})^{-3}$. Функцијата $y=(\frac{1}{3})^x$ е опаѓачка функција, па за аргументот важи $-3<x<2$. Цели броеви на овој интервал се $-2,-1,0,1$ а нивниот збир е -2.

5АБ. Ако $2^x=5$ и $10^y=1024$, да се пресмета $(x+1)\cdot y$.

А) 0 Б) 2 В) 5 Г) 6 Д) 10

Одговор. Д

Решение. Од

$$2^{10}=1024=10^y=2^y\cdot 5^y=2^y\cdot(2^x)^y=2^y\cdot 2^{xy}=2^{(x+1)y}$$

следува $(x+1)\cdot y=10.$

6АБ. Нека $f(x)=ax^2+bx+c$ е квадратна функција со теме во точката $(1,1)$ и која минува низ точката $(-1,-3)$. Кое од следните тврдења мора да е точно?

А) $a>0$ Б) $a<0$ В) $b=0$ Г) $c=0$ Д) $D=0$

Одговор. Б

Решение. Од условите на задачата функцијата има максимум и затоа $a<0$.

7АБ. Последната цифра на бројот $3+3^2+3^3+...+3^{2021}$ е:

А) 1 Б) 3 В) 7 Г) 9 Д) 5

Одговор. Б

Решение. Имаме $3+3^2+3^3+3^4=120$. Тогаш

$$A=3+3^2+3^3+...+3^{2021}$$
$$=(3+3^2+3^3+3^4)+3^4(3+3^2+3^3+3^4)+...+3^{2016}(3+3^2+3^3+3^4)+3^{2021}$$
$$=120\cdot(1+3^4+...+3^{2016})+(3^4)^{505}\cdot 3.$$

Од тоа што 3^4 завршува со 1, дадениот број завршува со 3.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8АБ. Два триаголника се слични. Страните на првиот триаголник се 3, 4 и 5. Најголемата страна на нему сличниот триаголник е 10. Плоштината на вториот триаголник е:

А) 24 Б) 3 В) 48 Г) 12 Д) 6

Одговор. А

Решение. Коефициентот на сличност е 2. Страните на вториот триаголник се 6, 8 и 10. Двата триаголници се правоаголни (важи Питагорова теорема). Плоштината на вториот триаголник е $\frac{6\cdot 8}{2}=24$.

9АБ. Колку осумцифрени броеви можат да се составaт само со цифрите 1, 3, 5 така што секои две соседни цифри се разликуваат за 2?

А) 8! Б) 30 В) 16 Г) 32 Д) 20

Одговор. Г

Решение. Според условите на задачата, ако се фиксира една од цифрите 1 или 5, следната цифра мора да е 3. Ако пак се фиксираме во цифрата 5, тогаш следната цифра може да е или 1 или 3. Според тоа, независно дали бројот почнува со 1, 3 или 5, во секој случај имаме по 2^3 броеви, или вкупно 24 броеви.

10АБ. Одреди го производот на сите реални броеви a за кои параболата $f(x)=2x^2+ax+5x+7$ ја допира $x-$ оската.

А) 23 Б) -31 В) 10 Г) -10 Д) 1

Одговор. Б

Решение. За параболата да ја допира $x-$ оската, потребно е да има двоен корен, а тоа се постигнува кога дискриминантата на квадратната равенка $2x^2+ax+5x+7=0$ е еднаква на нула. Тогаш $D=(a-5)^2-48=0$, односно $a^2-10a-23=0$. Равенката има две решенија и според Виетовите правила нивниот производ е $a_1 \cdot a_2=-23$.

Во следните задачи внесете го решението без единица мерка.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

11АБ. Дадени се броевите 0, 4, 10, -3 и 1. Одреди го збирот на оние броеви од зададените кои може да се вредности на функцијата $f(x)=x^2-2x+5$?

Одговор. 14

Решение. Множеството вредности на функцијата е $[4,\infty)$. Тогаш бараниот збир е 14.

12АБ. Ако $\alpha=30^\circ$, вредноста на изразот $A=\frac{\cos\alpha-\cos(\alpha+15^\circ)}{\cos 2\alpha}$ се добива во облик $a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$. Пресметај ја вредноста a^2+b^2.

Одговор. **2**

Решение. Имаме $A=\frac{\cos 30^\circ-\cos 45^\circ}{\cos 60^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Затоа $a^3+b^3=0$.

13А. Пресметај ја вредноста на изразот $3A$, ако

$$A=\frac{3\sin x\cdot\cos x}{9\sin^2 x-\cos^2 x} \text{ и } \operatorname{tg} x=\frac{2}{3}.$$

Одговор. 2

Решение. Трансформираме во облик

$$A=\frac{3\sin x\cdot\cos x}{9\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{3\frac{\sin x}{\cos x}}{9\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1}=\frac{2}{3}.$$

Сега $3A=2$

13Б. Плоштината на еден правоаголник е 60 квадратни единици. Да се најде должината на дијагоналата на правоаголникот ако се знае дека едната страна е за 7 подолга од другата.

Одговор. 13

Решение. Имаме $x(x+7)=60\Rightarrow x=5.$ Страните се 5 и 12 и според Питагоровата теорема дијагоналата е 13.

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени.

14А. Решенијата на равенката $27\cdot x^{\log_{27}x}=\sqrt[3]{x^{10}}$ се во облик $x=3^p$, за p природен број. Која е најголемата вредност на p која се јавува како степен на тројката во решенијата на равенката.

Одговор. 9

Решение. За $x>0,$ ќе ја логаритмираме равенката со основа 3. Користејќи ги својствата на логаритми добиваме:

$$\log_3(27\cdot x^{\log_{27}x})=\log_3(x^{\frac{10}{3}})$$

$$\log_3 3^3+\log_3(x^{\log_{27}x})=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$3+\log_{27}x\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$3+\frac{1}{\log_x 3^3}\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$3+\frac{1}{3\log_x 3}\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$3+\frac{1}{3}\log_3 x\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$9+(\log_3 x)^2=10\cdot\log_3 x$$

$$(\log_3 x)^2-10\cdot\log_3 x+9=0$$

Решенијата на последната квадратна равенка по $\log_3 x$ се $\log_3 x = 1$ и $\log_3 x = 9$, односно $x = 3$ и $x = 3^9$.

14Б. Внеси го квадратот на бројот x кој е решение на равенката

$$5^{x-2} \cdot 8^{\frac{4x-12}{3}} = 20^{6-x}.$$

Одговор. 16

Решение. Имаме

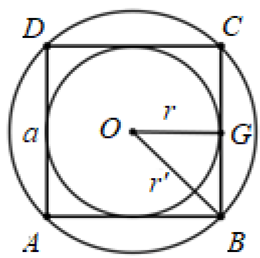
$$5^{x-2} \cdot 8^{\frac{4x-12}{3}} = 20^{6-x},$$
$$5^{x-2} \cdot 2^{4x-12} = 5^{6-x} \cdot 2^{2(6-x)},$$
$$5^{2x-8} = 2^{24-6x},$$
$$(\tfrac{25}{64})^{x-4} = 1,$$
$$x = 4,$$
$$x^2 = 16.$$

15А. Да се пресмета односот $P':P$, ако P' и P се соодветните плоштини на опишаниот и впишаниот круг на даден квадрат.

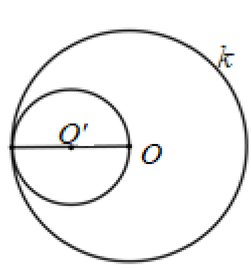
Одговор. 2

Решение. Нека a е страната на квадратот, тогаш $r' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $r = \frac{a}{2}$ се радиусите на опишаниот односно впишаниот круг. Тогаш:

$$P':P = \frac{a^2}{2}\pi : \frac{a^2}{4}\pi = 2.$$



15Б. Дадени се две кружници како на цртежот. Помалиот круг има плоштина 4. Колку е плоштината на поголемиот круг?



Одговор. 16

Решение: Ако r е радиусот на помалиот круг, тогаш радиусот на k е $2r$. Од тоа што плоштината на првиот круг е 4 следува $r^2 = \frac{4}{\pi}$. Тогаш плоштината на k е: $P = R^2\pi = (2r)^2\pi = 4 \cdot \pi \cdot \pi = 16$.

16А.17Б. Должините на катетите на правоаголен триаголник се 9 и 12. Ако r и R се радиусот на впишаната и на опишаната кружница соодветно, тогаш збирот $r+R$ се добива во облик на нескратлива дропка $\frac{a}{b}$. Пресметај ја разликата $a-b$.

Одговор. **19**

Решение. Имаме

$$P=\frac{9\cdot12}{2}=54,\quad c=\sqrt{81+144}=15,\quad P=r\cdot s,\ s=\frac{9+12+15}{2}=18.$$

Тогаш $r=3$. Од $P=\frac{abc}{4R}$, добиваме $R=\frac{abc}{4P}=\frac{9\cdot12\cdot15}{4\cdot54}=\frac{15}{2}$. Имаме

$$\frac{a}{b}=r+R=3+\frac{15}{2}=\frac{21}{2}\ \text{ и }\ a-b=21-2=19.$$

16Б. Две цевки заедно полнат базен за 6 часа. Ако само од првата цевка се наполнат $\frac{3}{5}$ од базенот, а потоа базенот се дополнува само од втората цевка, тогаш се потребни 12 часа за целосно да се наполни. Колку време и е потребно на цевката која побрзо самостојно го полни базенот сама да го наполни?

Одговор. **10**

Решение. Нека цевките самостојно го полнат базенот за x односно за y часови. Тогаш за еден час, првата ќе наполни $\frac{1}{x}$, а втората $\frac{1}{y}$ од базенот. Според условите на задачата се добива системот

$$\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1,\\ \frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12\end{cases}$$

чии решенија се $(x,y)=(12,12)$ или $(x,y)=(10,15)$. Тогаш, најбрзата цевка сама ја полни базенот за 10 часа.

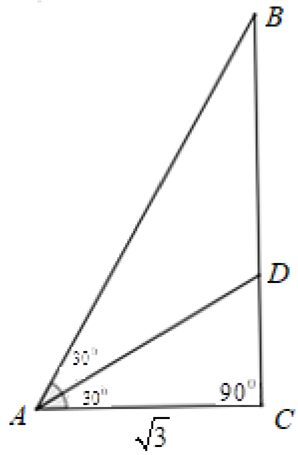
17А. Нека $a_0=1, a_{n+1}=a_n+5^{a_n}, n\in\mathbb{N}$. Колку е остатокот при делење на a_{2021} со 4?

Одговор. 2

Решение. Бројот 5^{a_n} завршува со 25 за секој $n\in\mathbb{N}$ поголем од 1. Затоа остатокот на a_{n+1} секогаш ќе биде за еден поголем од остатокот на a_n, т.е. се формира циклус од 1, 2, 3, 0. Од тоа што $2022=4\cdot505+2$, бројот a_{2021} при делење со 4 има остаток 2.

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

18АБ. Даден е правоаголен триаголник ABC како на цртежот. Одреди ја должината $\overline{BD}$.



Одговор. 2

Решение. Од условите на задачата имаме $\measuredangle ABC = 30^\circ$, и затоа $\overline{AD} = \overline{BD}$. Од тоа што триаголникот ACD аглите се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ следува дека $\overline{AD} = 2\overline{CD}$. Конечно, со примена на питагоровата теорема во триаголникот ACD се добива $\overline{AD} = \overline{BD} = 2$.

19АБ. Колку е вредноста на изразот

$$A = (\log_2 5 + \log_4 25 + \log_8 125 + \ldots + \log_{2^n} 5^n) \cdot \log_5 \sqrt[n]{16}\,.$$

Одговор. **4**

Решение. Важи $\log_{2^n} 5^n = \log_2 5$, па добиваме

$$A = (\log_2 5 + \log_4 25 + \log_8 125 + \ldots + \log_{2^n} 5^n) \cdot \log_5 \sqrt[n]{16}$$

$$= n \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 \sqrt[n]{16} = n \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 2^{\frac{4}{n}} = n \cdot \log_2 5 \cdot \frac{4}{n} \cdot \log_5 2 = 4$$

20А. Да се најде вредноста $5\sin x \sin y$ ако

$$\begin{cases} 2^{\sin x} : 2^{\cos y} = 1 \\ 4^{\sin^2 x} \cdot 4^{\cos^2 y} = 16 \end{cases}.$$

Одговор. 5

Решение. Имаме

$$\begin{cases} 2^{\sin x} : 2^{\cos y} = 1 \\ 4^{\sin^2 x} \cdot 4^{\cos^2 y} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin x - \cos y} = 2^0 \\ 4^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x - 2\sin x \cos y + \cos^2 y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \sin x \cos y = 1.$$

20Б. Да се определи вредноста на $\cos(x-y)$ ако се знае дека

$$\sin x + \sin y = \sqrt{3} \text{ и } \cos x + \cos y = 1.$$

Одговор. 1

Решение. Од $\sin x+\sin y=\sqrt{3}$ и $\cos x+\cos y=1$ следува

$$\begin{aligned}2\cos(x-y)&=2\cos x\cos y+2\sin x\sin y\\&=\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 y+\sin^2 y+2\cos x\cos y+2\sin x\sin y-2\\&=(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2-2\\&=\sqrt{3}^2+1^2-2=2\end{aligned}$$

т.е. $\cos(x-y)=1$.

IV година

Изберете еден од понудените одговори.

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1АБ. Ако $x+y=4$ и $x^3+y^3=28$, колку е xy ?

А. -2 Б. 3 В. $\frac{9}{2}$ Г. 7 Д. 9

Одговор. Б

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)\\&4^3=28+3\cdot 4xy,\\&xy=3.\end{aligned}$$

2АБ. Во низата дадена подолу, најди го вториот број во шестата група:

(1), (2,4), (8,16,32), ...

А. 2^{14} Б. 2^{15} В. 2^{16} Г. 2^{17} Д. 2^{18}

Одговор. В

Решение. Запишаните броеви се последователните степени на бројот 2. Првите пет групи имаат $1+2+3+4+5=15$ членови, па затоа вториот член на шестата група е седумнаесеттиот по ред степе на бројот 2, односно тоа е бројот 2^{16}.

3АБ. Марија измислила низа од броеви согласно следното правило: секој нареден член е 7 пати поголем од збирот на цифрите на претходниот. Првите три члена кои ги напишала се: 13, 28, 70. Кој е стотиот член на оваа низа?

А. 13 Б. 28 В. 49 Г. 70 Д. 91

Одговор. В

Решение. Првите осум членови на низата се 13, 18, 70, 49, 91, 70, 49, 91. Според тоа, почнувајќи од третиот член низата е периодична со период три. Значи, $a_{99} = a_3, a_{100} = a_4 = 49$.

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4АБ. Во Земјата на змејовите секој змеј има барем 3 глави. Змејовите што имаат парен број глави секогаш зборуваат вистина, а оние со непарен број глави секогаш лажат. Ја прашале една група од четири змеја, колку вкупно глави имаат? Тие одговориле поединечно: 13, 15, 16 и 20. Кој од следниве броеви е можен вкупен број на глави на змејови кои лажат во оваа четворочлена група?

А. 7 Б. 10 В. 14 Г. 16 Д. 20

Одговор. В

Решение. Змејовите кажале четири различни броја, од каде заклучуваме дека или еден ја кажал вистината или сите четворица лажат. Ако еден ја зборува вистината, тогаш тој има парен број глави, а тројцата други имаат непарен број глави. Тоа, значи дека бројот на главите на змејовите е непарен и е поголем или еднаков на $3 \cdot 3 + 4 = 13$. Бидејќи ниту еден од понудените одговори не го задоволува овој услов заклучуваме дека сите четири змеја лажат. Значи, нивниот вкупен број години е парен број и е поголем или еднаков на $4 \cdot 3 = 12$. Понатаму, броевите 16 и 20 отпаѓаат бидејќи се кажани од два змеја кој лажат, па останува можниот вкупен број глави да е 14.

5АБ. Ако $\frac{\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^y}}{\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^y}} = 2021$, колку е $\frac{e^x}{e^y}$?

А. $\ln\frac{1011}{1010}$ Б. $\ln\frac{1010}{1011}$ В. $\frac{1}{2020}-\frac{1}{2022}$ Г. $\frac{1011}{1010}$ Д. $\frac{1010}{1011}$

Одговор. Д

Решение. Од условот добиваме

$$\frac{e^y}{e^x}+1 = 2021\left(\frac{e^y}{e^x}-1\right),$$

$$\frac{e^y}{e^x} = \frac{2022}{2020},$$

$$\frac{e^x}{e^y} = \frac{1010}{1011}.$$

6АБ. Нека $f_1(x)=\frac{x}{x+1}$ и $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$, за $n=1,2,3,\ \dots$. Со кој од следниве изрази е претставена функцијата $f_n(n)$?

А. $\frac{1-n^2}{1+n^2}$ Б. $\frac{1}{1+n^2}$ В. $\frac{n^n}{(1+n)^n}$ Г. $\frac{n}{1+n^2}$ Д. $\frac{1}{1+n}$

Одговор. Г

Решение. Имаме

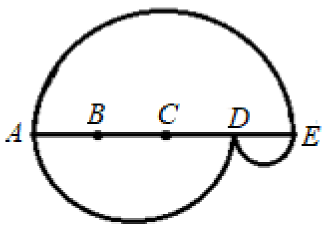
$f_1(n)=\frac{n}{n+1}$,

$f_2(n)=f_1(f_1(n))=f_1(\frac{n}{n+1})=\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1}+1}=\frac{n}{2n+1}$ и

$f_3(n)=f_1(f_2(n))=f_1(\frac{n}{2n+1})=\frac{\frac{n}{2n+1}}{\frac{n}{2n+1}+1}=\frac{n}{3n+1}$.

Со математичка индукција лесно се докажува дека $f_k(n)=\frac{n}{kn+1}$, па затоа $f_n(n)=\frac{n}{1+n^2}$.

7АБ. На цртежот, отсечката AE е поделена на четири еднакви делови. Конструирани се полукружници со дијаметри AE, AD и DE како на сликата, при што се формираат два пата помеѓу точките A и E. Колкав е соодносот на должи-ните на горниот и долниот пат?



А. 1:1 Б. 1:2 В. 2:1

Г. 2:3 Д. 3:2

Одговор. А

Решение. Имаме, $L_{AE}=\pi\frac{\overline{AE}}{2}=\pi\frac{\overline{AD}+\overline{DE}}{2}=\pi\frac{\overline{AD}}{2}+\pi\frac{\overline{DE}}{2}=L_{AD}+L_{DE}$, па затоа е соодносот на должините на горниот и долниот пат е 1:1.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8АБ. Едно множество се состои од броеви од облик $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$, каде a и b се ненулти реални броеви. Множеството од сите вакви броеви е:

А. $\{-3,-1,1,3\}$ Б. $\{-3,-1,3\}$ В. $\{-1,3\}$

Г. $\{1,3\}$ Д. сите реални броеви

Одговор. В

Решение. Ако a и b се позитивни броеви, тогаш $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=3$. Ако a и b се со различни знаци, тогаш $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1$. Ако a и b се негативни знаци, тогаш $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1$.

9АБ. Ако $(\frac{1}{4})^a=\frac{1}{5}$, $(\frac{1}{5})^b=\frac{1}{6}$, $(\frac{1}{6})^c=\frac{1}{7}$, $(\frac{1}{7})^d=\frac{1}{8}$, пресметај го производот $abcd$.

А. $\frac{3}{2}$ Б. $\frac{4}{3}$ В. $\frac{7}{10}$ Г. $\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}$ Д. $\frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8}$

Одговор. А

Решение. Имаме

$$\frac{1}{8}=(\frac{1}{7})^d=(\frac{1}{6})^{cd}=(\frac{1}{5})^{bcd}=(\frac{1}{4})^{abcd},$$

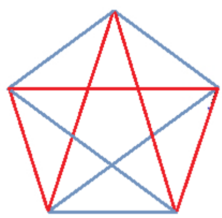
па затоа $2^{-3}=2^{-2abcd}$ од каде $3=2abcd$ т.е. $abcd=\frac{3}{2}$.

10АБ. Кој е најмалиот број на луѓе, избрани на случаен начин, кој може да гарантира дека 3 од нив се познаваат или 3 од нив не се познаваат меѓусебно?

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) 7

Одговор. Г

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на боењето во две бои на страните и дијагоналите на правилен многуаголник. Притоа, луѓето ќе бидат темињата, а отсечка обоена црвено ќе означува познанство, додека отсечка обоена сино ќе означува дека двајцата не се познаваат. Јасно, ако имаме триаголник чии страни се обоени во иста боја, тогаш или сите тројца се познаваат или сите тројца не се познаваат, а во спротивно немаме тројца кои се познаваат или тројца кои не се познаваат.



Боењето на правилен петаголник прикажано на цртежот десно докажува дека треба да избереме повеќе од 5 луѓе.

Нека избереме 6 луѓе, т.е. да земеме правилен шестаголник. Бидејќи едно теме се поврзува со пет други темиња, од принципот на Дирихле следува дека од него излегуваат најмалку три отсечки кои се обоени со иста боја, да кажеме црвена. Сега, ако триаголникот чии темиња се вторите крајните точки на овие отсечки има црвена страна, тогаш тврдењето е докажано, бидејќи таа страна со другите две првично обоени отсечки формира еднобоен триаголник. Во спротивно неговте страни ќе бидат сини и повторно имаме еднобоен триаголник, со што тврдењето е докажано.

Во следните задачи внесете го одговорот без единица мерка.
Следните 3 задачи се бодуваат со 5 поени.

11А.12Б. Ако точката $M(a,b)$ лежи на правата $2x+y-6=0$ и е еднакво оддалечена од точките $A(3,5)$ и $B(2,6)$, колку е $a+b$?

Одговор. 5

Решение. Од условот на задачата следува $b=6-2a$ и $b=a+3$. Решението на $a=1$, $b=4$, што значи $a+b=5$.

11Б. Нека a,b,c се реални броеви за кои важи $a+b+c=0$. Колку е вредноста на изразот $a^3+b^3+c^3-3abc$?

Одговор. 0

Решение. Имаме $c=-(a+b)$, па затоа

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b) \\ &= a^3+b^3-a^3-b^3-3ab(a+b)+3ab(a+b)=0. \end{aligned}$$

12А.13Б. Нека p е веројатноста број на сучаен начин од множеството $\{1,2,....,100\}$ да е делив со 2 но да не е делив со 3. Пресметај $50p$.

Одговор. 17

Решение. Во множеството $\{1,2,....,100\}$ има 50 броеи кои се деливи со 2 и 16 брови кои се деливи со 6. Значи, има $50-16=34$ броеви кои се деливи со 2, но не се деливи со 3. Според тоа, $p=\frac{34}{100}=\frac{17}{50}$, од каде добиваме $50p=17$.

13А.14Б. Реалниот број $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ може да се изрази во облик $a+b\sqrt{3}$ каде што a и b се цели броеви и a е позитивен. Колку е $a+b$?

Одговор. 3

Решение. Имаме

$$\sqrt{19-8\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3},$$
$$19-8\sqrt{3}=a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2,$$
$$a^2+3b^2=19,\ 2ab=-8.$$

Втората равенка има три решенија за кои a е пчозитивен цел број: $a=2,\ b=-2$, $a=1,\ b=-4$ и $a=4,\ b=-1$. Од овие решенија, само третото ја задоволува првата равенка. Имаме, $a+b=4-1=3$.

Следните 3 задачи се бодуваат со 6 поени.

14А. Нека a,b,c се реални броеви и нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција зададена со формулата $f(x)=ax^5+bx^3+c\sin x-1$. Ако $f(-2021)=-2021$, пресметај $f(2021)$.

Одговор. 2019

Решение. Бидејќи $(-x)^5=-x^5$, $(-x)^3=-x^3$ и $\sin(-x)=-\sin(x)$ добиваме

$$f(-2021)=-2021^5a-2021^3b-c\sin(2021)-1.$$

Отука следува

$$f(2021)=2021^5a+2021^3b+c\sin(2021)-1=-f(-2021)-2=2019.$$

15А.17Б. Одреди го најмалиот природен број n така што $\frac{12!}{n}$ е квадрат на природен број.

Одговор. 231

Решение. Имаме

$$12!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12=(2^{10}\cdot3^4\cdot5^2)\cdot3\cdot7\cdot11.$$

Најмалиот n за кој $\frac{12!}{n}$ е квадрат на природен број е $3\cdot7\cdot11=231$.

15Б. Пресметај

$$\frac{\binom{2021}{0}+\binom{2021}{1}+\ldots+\binom{2021}{2021}}{\binom{2020}{0}+\binom{2020}{1}+\ldots+\binom{2020}{2020}}$$

Одговор 2.

Решение. Имаме

$$\frac{\binom{2021}{0}+\binom{2021}{1}+\ldots+\binom{2021}{2021}}{\binom{2020}{0}+\binom{2020}{1}+\ldots+\binom{2020}{2020}}=\frac{2^{2021}}{2^{2020}}=2\,.$$

16А.18Б. Збирот на првите n членови на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ изнесува n^2+3n+4. Колку е збирот $a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{21}$?

Одговор. 264

Решение. Нека $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Бидејќи $a_n=S_n-S_{n-1}$ добиваме

$$a_n=n^2+3n+4-(n-1)^2-3(n-1)-4=2n+2.$$

Оттука пресметуваме

$$a_1+a_3+\ldots+a_{21}=2(2+4+6+\ldots+22)=4(1+2+\ldots+11)=\tfrac{4\cdot 11\cdot 12}{2}=264.$$

16Б. За колку тројки природни броеви (a,b,c) каде $a\geq b\geq c\geq 1$ е исполнето неравенството

$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}=1?$$

Одговор. 3

Решение. Јасно, $c\geq 2$. Ако $c=2$, тогаш лесно се добива дека единствени такви тројки се $(4,4,2)$ и $(6,3,2)$. Ако $c=3$, тогаш единствена таква тројка е $(3,3,3)$. Ако $c\geq 4$, тогаш $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{3}{c}=\frac{3}{4}<1$. Значи, постојат тгри тројки со саканите својства.

17А.19Б. Колкав е најголемиот можен број на пресечни точки помеѓу дијагоналите на конвексен 14 -аголник?

Одговор. 1001

Решение. Секоја пресечна точка на две дијагонали е определена со точно 4 темиња на конвескниот 14-аголник. Оттука следува дека најголемиот можен број пресечни точки на дијагоналите на конвексен 14-аголник е еднаков на $\binom{14}{4}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1001$.

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

18А. Колку е коефициентот пред x^9 во полиномот

$$P(x)=(x+2)(x+2^2)(x+2^3)\cdots(x+2^{10})\,.$$

Одговор. 2046

Решение. Водечкиот член на дадениот полином е $a_{10}=1$ и неговите нукли се $-2,-2^2,-2^3,...,-2^{10}$. Сега од Виетовите формули следува дека коефициентот пред x^9 во овој полином е

$$a_9=-(-2-2^2-2^3-...-2^{10})=2(1+2+2^2+2^3+...+2^9)=2\cdot(2^{10}-1)=2046.$$

19А. Колку изнесува должината на интервалот во кој се наоѓаат вредностите на изразот $A(x)=4\sin x-3\cos x$?

Одговор. 10

Решение. Бидејќи $(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$ постои a така што $\cos a=\frac{4}{5}, \sin a=\frac{3}{5}$. Имаме

$$4\sin x-3\cos x=5\cdot(\tfrac{4}{5}\sin x-\tfrac{3}{5}\cos x)=5(\sin x\cos a-\cos x\sin a)=5\sin(x-a).$$

Последното значи дека најмалата можна вредност на дадениот израз е $A(x)\in[-5,5]$, па затоа должината на интервалот е 10.

20А. Колку изнесува коефициентот на правец на тангентата на кружницата $x^2+y^2+8x-4y+19=0$, која е повлечена во точката од кружницата која е најблиску до координатниот почеток?

Одговор. 2

Решение. Центарот на кружницата е $O'(-4,2)$. Правата која минува низ координатниот почеток и центарот на кружницата има коефициент на правец $k=\frac{2-0}{-4-0}=-\frac{1}{2}$. Тангентата во точката која е најблиска до координатниот почеток е нормална на оваа права, па затоа нејзиниот коефициент на правец е $k'=-\frac{1}{k}=2$.

20Б. Ја разгледуваме низата $0,1,3,6,10,15,21,...$ во која разликата меѓу соседните два члена се зголемува за 1. Збирот на првите 30 членови на оваа низа изнесува:

Одговор. 4495

Решение. Имаме

$$a_2 - a_1 = 1,$$
$$a_3 - a_2 = 2,$$
$$a_4 - a_3 = 3,$$
$$..................$$
$$a_k - a_{k-1} = k-1,$$

па ако ги собереме овие равенства добиваме

$$a_k - a_1 = 1+2+3+...+(k-1) = \frac{k(k-1)}{2} \text{, т.е. } a_k = \frac{k(k-1)}{2} .$$

Според тоа,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{1}{2}(1\cdot(1-1) + 2\cdot(2-1) + 3\cdot(3-1) + ... + n(n-1))$$
$$= \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 - (1+2+3+...+n))$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

Значи, $S_{30} = \frac{30\cdot31\cdot29}{6} = 4495$.