

Општински натпревар 2016

I година

1АБ. Одреди ја вредноста на $x + \frac{1}{x}$ за $x = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$.

Решение. Имаме

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} + \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5}{1-5} = \frac{12}{-4} = -3.$$

2А. Докажи дека бројот $2^{10} + 5^{12}$ е сложен.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 2^{10} + 5^{12} &= (2^5)^2 + (5^6)^2 = (2^5)^2 + (5^6)^2 + 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 - 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 \\ &= (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 \cdot 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - (10^3)^2 \\ &= (2^5 + 5^6 + 10^3)(2^5 + 5^6 - 10^3) \end{aligned}$$

Секој од множителите е поголем од 1, па значи $2^{10} + 5^{12}$ е сложен број.

2Б. Учениците од една паралелка во која има помалку од 40 ученици, во текот на 8 месеци, собрале 55304 денари за екскурзија. Колку ученици биле во паралелката и по колку денари внесувал секој од нив месечно, ако тие износи биле еднакви?

Решение. Нека во паралелката имало x ученици. Ако секој од нив месечно внесувал по y денари, тогаш за 8 месеци ќе внесе $8y$ денари или $8xy = 55304$, $xy = 6913$. Но, $6913 = 1 \cdot 6913 = 31 \cdot 223$, па заклучуваме дека $x = 31$, $y = 223$, т.е. во паралелката имало 31 ученик и секој од нив внесувал по 223 денари.

3А. Голема коцка е составена од 64 единечни бели коцки и истата е обое-на со црвена боја. Колку единечни коцки имаат само еден црвен сид, колку имаат два црвени сида, колку имаат три црвени сида и колку единечни коцки немаат ниту еден црвен сид?

Решение. Коцката има 8 темиња и коцките кои се наоѓаат на нив имаат по 3 црвени сида. Големата коцка има 12 рабови и на секој раб има по 2 коцки кои не се во темињата. Овие коцки имаат по два црвени сида, што значи дека големата коцка има $12 \cdot 2 = 24$ единечни коцки со по два црвени сида. На секој сид на коцката има по 4 коцки кои до сега не ги броевме и

овие коцки имаат по еден црвени сид, што значи дека $6 \cdot 4 = 24$ единечни коцки кои имаат по еден црвен сид. Конечно, во внатрешноста на го емата коцка има $64 - 8 - 24 - 24 = 8$ единелни коцки кои немаат црвен сид.

3Б. За да се сосида сид висок $1,5 m$ и дебел $40 cm$ потрошени се 3000 цигли. Се знае дека за $1 m^3$ сид се потребни 100 цигли. Колку е долг сидот?

Решение. Сидот има форма на квадар и неговиот волумен е $V = abc$ каде $a = 1,5 m$, $b = 40 cm = 0,4 m$, а должината c е непозната. Тогаш, ако се знае дека за $1 m^3$ сид се потребни 100 цигли, имаме

$$100 \cdot 1,5 \cdot 0,4 \cdot c = 3000$$

$$60c = 3000$$

$$c = 50 m.$$

4А. Даден е паралелограм $ABCD$. Во рамнината на паралелограмот над страните AB , BC , CD и DA се конструирани квадрати кои лежат надвор од квадратот. Центарот (пресекот на дијагоналите) на паралелограмот, средината на било која негова страна и центарот на квадратот конструиран над таа страна се темиња на триаголник.

а) Докажи дека вака добиените четири триаголници се складни.

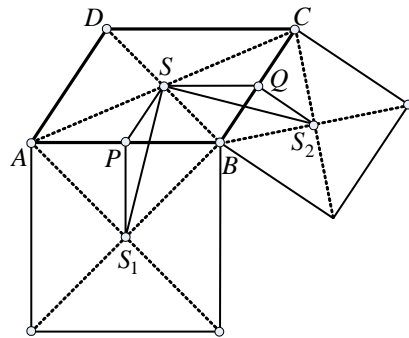
б) Докажи дека четириаголникот чии темиња се центрите на конструираниите квадрати е квадрат.

Решение. а) Нека S е центар на паралелограмот $ABCD$ (пресек на дијагоналите), а P и Q се средини на неговите страни AB и BC соодветно. Нека S_1 и S_2 се центри на квадратите конструирани над страните AB и BC . Од условот на задачата

$$\overline{SQ} = \overline{PB} = \overline{PS_1}, \quad \overline{SP} = \overline{QB} = \overline{QS_2} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \angle SPS_1 &= \angle SPB + \angle BPS_1 \\ &= \angle SQB + \angle BQS_2 . \\ &= \angle SQS_2 . \end{aligned}$$

Според тоа, $\triangle SPS_1 \cong \triangle SQS_2$, односно триаголниците $\triangle SPS_1$ и $\triangle SQS_2$ се складни. Сега, лесно следува дека било кои два од разгледуваните четири триаголници се складни.



б) Бидејќи триаголниците $\triangle SPS_1$ и $\triangle QS_2$ се складни, добиваме дека $\overline{SS_1} = \overline{SS_2}$. Од друга страна

$$\begin{aligned} \sphericalangle S_1SS_2 &= \sphericalangle PSQ - \sphericalangle PSS_1 - \sphericalangle QSS_2 = \sphericalangle PSQ - \sphericalangle PSS_1 - \sphericalangle PS_1S \\ &= \sphericalangle PSQ - (\pi - \sphericalangle SPS_1) = \sphericalangle ADC - (\pi - (\frac{\pi}{2} + \sphericalangle SPB)) \\ &= \sphericalangle ADC - (\frac{\pi}{2} - \sphericalangle DAB) = \sphericalangle ADC + \sphericalangle DAB - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Значи $SS_1 \perp SS_2$. Потполно аналогно се докажува дека $\overline{SS_3} = \overline{SS_4} = \overline{SS_1}$ и $SS_2 \perp SS_3$. Значи, S_1S_3 и S_2S_4 се дијагонали на четириаголникот кои се преполовуваат и се заемно нормални. Според тоа $S_1S_2S_3S_4$ е квадрат.

II година

1A. Пресметај $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^3}{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^4}{a^3}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^{10}}{b^{14}}}$, ако $a = \sqrt{10}$, $b = 2$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^3}{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^4}{a^3}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^{10}}{b^{14}}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2 b^3}{b^3 a^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^5 b^4}{b^4 a^3}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^{10}}{b^{14}}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^{10}}{b^{14}}} \\ &= 12\sqrt{\frac{a^6}{b^6}} \cdot 12\sqrt{\frac{b^8}{a^4}} \cdot 12\sqrt{a^4} \cdot 12\sqrt{\frac{a^{10}}{b^{14}}} \\ &= 12\sqrt{\frac{a^6 \cdot b^8 \cdot a^4 \cdot a^{10}}{b^6 \cdot a^4 \cdot b^{14}}} \\ &= 12\sqrt{\frac{a^{16}}{b^{12}}} = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{2}. \end{aligned}$$

1B. Ако за решенијата на равенката $-2x^2 + 6x + k - 1 = 0$, $k < 0$, важи $1 + x_1^2 x_2^2 = \frac{5}{2} x_1 x_2$, определи го параметарот k .

Решение. Од Виетовите формули следува $x_1 x_2 = -\frac{k-1}{2}$. Ако замениме во

даденото равенство, добиваме $1 + \frac{(k-1)^2}{4} = -\frac{5}{2} \frac{k-1}{2}$. Оттука,

$$(k-1)^2 + 5(k-1) + 4 = 0,$$

односно $k^2 + 3k = 0$ и бараното решение е $k = -3$.

2АБ. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $\frac{5}{a} = b + c$, $\frac{10}{b} = c + a$ и $\frac{13}{c} = a + b$. Определи го производот abc , а потоа и вредностите на a, b и c .

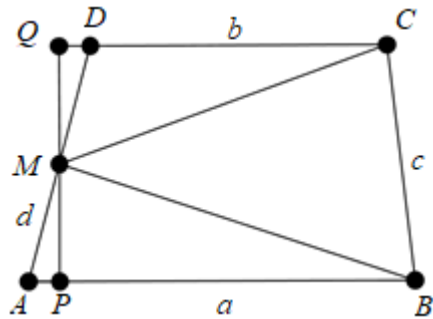
Решение. Дадените равенки можеме да ги запишеме во облик

$$\begin{cases} ab + ac = 5 \\ ab + bc = 10 \\ ac + bc = 13 \end{cases}$$

Сега, ако трите равенки ги собереме добиваме $2(ab + bc + ca) = 28$, односно $ab + bc + ca = 14$. Ако од последната равенка ја одземеме секоја од равенките на системот посебно, добиваме $bc = 9, ac = 4, ab = 1$, од каде со множење добиваме дека $(abc)^2 = 36$, т.е. $abc = 6$. Сега лесно се гледа дека $a = \frac{2}{3}, b = \frac{3}{2}, c = 6$.

3А. Ако точката M е средина на кракот AD на трапезот $ABCD$, докажи дека плоштината на триаголникот MBC е половина од плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Ако h е висината на трапезот $ABCD$, тогаш триаголниците ABM и CDM имаат еднакви висини кои изнесуваат $\frac{h}{2}$ (ако од M спуштиме нормала кон AB , т.е. кон CD , која ги сече AB и CD во P и Q , соодветно, тогаш правоаголните триаголници APM и DQM имаат два еднакви агли и еднаква хипотенуза, па се складни и оттука $\overline{MP} = \overline{MQ} = \frac{h}{2}$).



За збирот на плоштините на триаголниците ABM и CDM имаме:

$\frac{a \frac{h}{2}}{2} + \frac{b \frac{h}{2}}{2} = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{P}{2}$, па затоа плоштината на триаголникот MBC е половина од плоштината на трапезот $ABCD$.

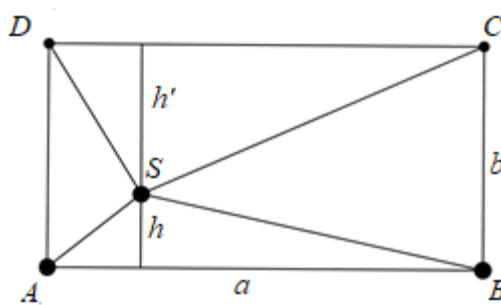
3Б. Точката S лежи во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците ABS и CDS е еднаков на збирот на плоштините на триаголниците BCS и DAS .

Решение. Збирот на плоштините на триаголниците ABS и CDS изнесува

$$P_1 + P_2 = \frac{ah}{2} + \frac{ah'}{2} = \frac{a(h+h')}{2}.$$

Бидејќи $h + h' = b$, добиваме дека $P_1 + P_2 = \frac{ab}{2}$. Тогаш и збирот на триаголниците BCS и DAS

е $\frac{ab}{2}$, бидејќи плоштината на правоаголникот е ab .



4АБ. Да се реши равенката $x^2 + (\frac{x}{x-1})^2 = 8$, во множеството реални броеви.

Решение. Ако ја прошириме равенката со додавање на $2x \frac{x}{x-1}$ истата го добива обликот

$$x^2 + 2x \frac{x}{x-1} + (\frac{x}{x-1})^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0, \text{ т.е. } (x + \frac{x}{x-1})^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0$$

и оттука $(\frac{x^2}{x-1})^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0$. Воведеме смена $\frac{x^2}{x-1} = t$ и ја добиваме равенката $t^2 - 2t - 8 = 0$. Нејзини решенија се $t_1 = 4$ и $t_2 = -2$, па според тоа ги добиваме равенките $x^2 - 4x + 4 = 0$ и $x^2 + 2x - 2 = 0$. Првата од нив има двојно решение $x_{1/2} = 2$, а решенија на втората се $x_{3/4} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Значи решенија на почетната равенка се $2, -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}$.

III година

1А. Докажи го идентитетот: $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}.$$

1Б. Реши ја тригонометриската равенка $8^{\sin x} = 2\sqrt{3} \cos x$.

Решение. а) Равенката можеме да ја напишеме од облик

$$2^{3 \sin x} = 2\sqrt{3} \cos x.$$

Тогаш $3\sin x = \sqrt{3}\cos x$, односно $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Значи решенија на равенка се $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ каде што k цел број.

2А. Нека $x, y \in (0, 1)$ се такви што за $a > 0, a \neq 1$ важи равенството $\log_x a + \log_y a = 4\log_{xy} a$. Докажи дека $x = y$.

Решение. Последователно добиваме:

$$\begin{aligned}\log_x a + \log_y a &= 4\log_{xy} a, \\ \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a y} &= \frac{4}{\log_a x + \log_a y}, \\ (\log_a x + \log_a y)\left(\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a y}\right) &= 4, \\ \frac{\log_a y}{\log_a x} + \frac{\log_a x}{\log_a y} &= 2, \\ \log_a^2 y + \log_a^2 x &= 2\log_a x \cdot \log_a y, \\ (\log_a x - \log_a y)^2 &= 0, \\ \log_a x &= \log_a y, \\ x &= y.\end{aligned}$$

ЗАБ. Нека a, b, c се попарно различни реални броеви. Докажи дека барем две од равенките

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b) &= x-c \\ (x-b)(x-c) &= x-a \\ (x-c)(x-a) &= x-b\end{aligned}$$

имаат реални решенија.

Решение. *Прв начин.* Ќе ги разгледаме квадратните функции

$$\begin{aligned}f_1(x) &= (x-a)(x-b) - (x-c) \\ f_2(x) &= (x-b)(x-c) - (x-a) \\ f_3(x) &= (x-c)(x-a) - (x-b).\end{aligned}$$

Нека тврдењето на задачата не е точно. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ немаат реални корени. Но тогаш, бидејќи водечките коефициенти им се еднакви на 1, добиваме дека $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Од свјствата на реални броеви имаме $f_1(x) + f_2(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Од друга страна

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= (x-a)(x-b) - (x-c) + (x-b)(x-c) - (x-a) \\ &= (x-b)[(x-a) + (x-c)] - [(x-a) + (x-c)] \\ &= [2x - (a+c)](x-b-1) \end{aligned}$$

има реални корени $x_1 = b+1$ и $x_2 = \frac{a+c}{2}$. Значи, не важи $f_1(x_1) > 0$ и $f_2(x_1) > 0$, односно $f_1(x_2) > 0$ и $f_2(x_2) > 0$. Заради добиената контрадикција, постојат два полиноми, односно имаме две равенки кои имаат реален корен.

Втор начин. Како и во претходното решение ќе претпоставиме дека, на пример, дека $f_2(x)$ и $f_3(x)$ немаат реални решенија. Тогаш нивните дискриминанти се негативни, т.е.

$$(b+c+1)^2 - 4(bc+a) < 0, \text{ т.е. } (b+c+1)^2 < 4(bc+a)$$

$$(c+a+1)^2 - 4(ca+b) < 0, \text{ т.е. } (c+a+1)^2 < 4(ca+b)$$

Овие неравенства ќе ги запишеме во облик

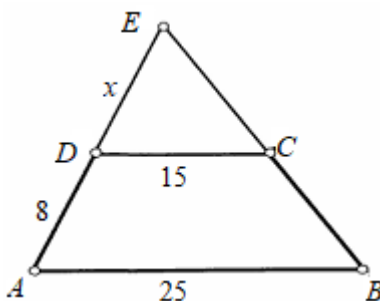
$$(b-c-1)^2 < 4a-4b$$

$$(c-a+1)^2 < 4b-4a.$$

Броевите од десната страна се позитивни, а нивниот збир е еднаков на нула, што не е можно. Заради добиената контрадикција, добиваме дека барем две од дадените равенки имаат реални решенија.

4АБ. Основите на еден трапез се $a = 25, b = 15$, еден од краците е $c = 8$. Определи го периметарот и плоштината на трапезот ако збирот на аглите на поголемата основа е 90° .

Решение. Нека $\overline{AD} = c = 8, \overline{DE} = x$, каде E е пресекот на краците на трапезот. Од сличноста $\triangle ABE \approx \triangle DCE$ следува дека $\frac{25}{15} = \frac{8+x}{x}$, од каде добиваме $x = 12$. Според условот на задачата важи $\angle AEB = 90^\circ$. Значи, $\triangle DCE$ е правоаголен, па од Питагоровата теорема добиваме $\overline{CE} = 9$. Исто така $\triangle ABE$ е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува $\overline{BE} = 15$. Според тоа $\overline{BC} = 6$. Конечно, периметарот на трапезот е $L = 54$, а плоштината е $P = P_{ABE} - P_{DCE} = \frac{20 \cdot 15}{2} - \frac{12 \cdot 9}{2} = 150 - 54 = 96$.



IV година

1A. Одреди го коефициентот пред x^8 во развиениот облик на полиномот $(1+x^2-x^3)^9$.

Решение. Заради $(1+x^2-x^3)^9 = ((x^2-x^3)+1)^9$ со користење на биномната формула, за $k-1$ -от член добиваме $\binom{9}{k} \cdot 1^{9-k} (x^2-x^3)^k$. Ја користиме уште еднаш биномната формула, па за $r-1$ -от член во развојот на $\binom{9}{k} 1^{9-k} (x^2-x^3)^k$ добиваме $\binom{9}{k} \binom{k}{r} (-x^3)^r (x^2)^{k-r} = \binom{9}{k} \binom{k}{r} (-1)^r x^{r+2k}$. Сега, заради $0 \leq k \leq 10$, $0 \leq r \leq k$ и $r+2k=8$ добиваме дека $k \leq 4$, па решенија на равенката $r+2k=8$ се $r=0, k=4$; $r=2, k=3$. Значи, бараниот коефициент е $\binom{9}{4} \binom{4}{0} (-1)^0 + \binom{9}{3} \binom{3}{2} (-1)^2 = 126 + 252 = 378$.

1Б. Производот на третиот и четвртиот член во развојот на биномот $(x+x^{\lg x})^5$ е еднаков на 10000000. Определи го x .

Решение. Третиот член развојот на биномот е $\binom{5}{2} x^2 x^{3 \lg x} = 10 x^{2+3 \lg x}$, а четвртиот е $\binom{5}{3} x^3 x^{2 \lg x} = 10 x^{3+2 \lg x}$, па нивниот производ е $10^2 x^{5+5 \lg x}$. Тогаш имаме $10^2 x^{5+5 \lg x} = 10^7$ и оттука $x^{5+5 \lg x} = 10^5$. Логаритмирајќи го последново, добиваме $5(1+\lg x) \lg x = 5$, т.е. $(1+\lg x) \lg x = 1$. Ако $t = \lg x$ добиваме $t^2 + t - 1 = 0$. Решенија се $t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $t_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, па $x_1 = 10^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ и $x_2 = 10^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

2A. Осум броеви a, ar, ar^2, \dots, ar^7 формираат геометриска прогресија. Нивниот збир е 21 и збирот на нивните реципрочни вредности е 7. Колку е нивниот производ?

Решение. Од условот на задачата имаме дека $a + ar + ar^2 + \dots + ar^7 = 21$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \dots + \frac{1}{ar^7} = 7$. Ако во последното равенство двете страни ги помножиме со $a^2 r^7$ добиваме, $ar^7 + ar^6 + ar^5 + \dots + ar + a = 7a^2 r^7$, па затоа $21 = 7a^2 r^7$, од каде $a^2 r^7 = 3$. Оттука, производот на осумте броеви кои формираат геометриска прогресија е $a^8 r^{28} = (a^2 r^7)^4 = 3^4 = 81$.

2Б. Ако вториот, третиот и шестиот член на една аритметичка прогресија формираат геометричка прогресија, определи го количникот на геометричката прогресија.

Решение. Кај аритметичката прогресија со прв член a_1 и разлика d важи $a_6 = a_3 + 3d = a_3 + 3(a_3 - a_2)$, т.е. $a_6 - a_3 = 3(a_3 - a_2)$. Нека ставиме $a_2 = a$, $a_3 = ar$ и $a_6 = ar^2$. Имајќи предвид дека тие се дел од аритметичка прогресија (вториот, третиот и шестиот член од таа прогресија) ја добиваме равенката $ar^2 - ar = 3(ar - a)$. Со средување добиваме $a(r-1)(r-3) = 0$ и од условот на задачата $a \neq 0$. Тогаш, $r = 1$ и $r = 3$.

3АБ. Определи ги вредностите на параметарот p за кои равенката $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$ има четири реални корени кои се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Дадената равенка е биквадратна. Да забележиме дека ако бројот x_1 е решение на равенката $x^4 + ax^2 + b = 0$, тогаш и $-x_1$ е решение на истата. Ако равенката $x^4 + ax^2 + b = 0$ има четири реални решенија, тогаш тие се $-x_1 < -x_2 < x_2 < x_1$, каде $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

Бидејќи во нашата равенка решенијата формираат аритметичка прогресија, следува дека разликата на таа прогресија е $2x_2$ (разликата меѓу вториот и третиот член). Нека $d = 2x_2$. Тогаш решенијата се $-\frac{3}{2}d, -\frac{d}{2}, \frac{d}{2}, \frac{3}{2}d$. Да воведеме смена $t = x^2$. Тогаш ја добиваме равенката $t^2 - (3p+2)t + p^2 = 0$ и решенија на оваа равенка се $t_1 = \frac{1}{4}d^2$ и $t_2 = \frac{9}{4}d^2$, па од виетовите формули имаме $\frac{1}{4}d^2 + \frac{9}{4}d^2 = 3p+2$ и $\frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{9}{4}d^2 = p^2$, т.е. $\frac{5}{2}d^2 = 3p+2$ и $\frac{9}{16}d^4 = p^2$. Од последната равенка добиваме дека $\frac{3}{4}d^2 = |p|$ и заменувајќи во $\frac{5}{2}d^2 = 3p+2$ добиваме $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} |p| = 3p+2$, т.е. $10|p| = 9p+6$. Оттука, ако $p > 0$ добиваме $10p = 9p+6$, т.е. $p = 6$, а ако $p < 0$ следува $-10p = 9p+6$, т.е. $p = -\frac{6}{19}$. Значи, има две вредности за p и тие се 6 и $-\frac{6}{19}$.

4АБ. Најди ја најмалата вредност на изразот $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}$, ако x, y, z се ненегативни реални броеви такви што $x + y + z = 2013$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1} &\geq \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \\
 &= 3 + (\sqrt{2x+1} - 1) + (\sqrt{2y+1} - 1) + (\sqrt{2z+1} - 1) \\
 &= 3 + \frac{2x+1-1}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{2y+1-1}{\sqrt{2y+1}+1} + \frac{2z+1-1}{\sqrt{2z+1}+1} \\
 &= 3 + \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{2y}{\sqrt{2y+1}+1} + \frac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}.
 \end{aligned}$$

Бидејќи броевите се ненегативни важи

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x+1} + 1 &\leq \sqrt{2x+2y+2z+1} + 1, \\
 \sqrt{2y+1} + 1 &\leq \sqrt{2x+2y+2z+1} + 1, \\
 \sqrt{2z+1} + 1 &\leq \sqrt{2x+2y+2z+1} + 1,
 \end{aligned}$$

па добиваме дека

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1} &\geq 3 + \frac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1} = 3 + \frac{2 \cdot 2013}{\sqrt{2 \cdot 2013+1}+1} \\
 &= 3 + \frac{4026}{\sqrt{4027}+1} = 3 + \frac{4026(\sqrt{4027}-1)}{(\sqrt{4027}+1)(\sqrt{4027}-1)} \\
 &= 3 + \frac{4026(\sqrt{4027}-1)}{4026} = 2 + \sqrt{4027}.
 \end{aligned}$$

Знак за равенство во последното неравенство важи за $x = 2013$, $y = 0$, $z = 0$,

па добиваме дека најмала вредност на дадениот израз е $2 + \sqrt{4027}$.