

Ристо Малчески
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 25
(збирка задачи за IV и V одделение)

Скопје, 2021

Одговорен уредник
д-р Алекса Малчески

Рецензенти
д-р Катерина Аневска
д-р Методи Главче

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Пресметувања и бројни ребуси	
I.1. Пресметувања	7
I.2. Бројни ребуси	11
I.3. Равенки и неравенства	12
II Текстуални задачи	
II.1. Броеви и цифри	14
II.2. Купуваме и пресметуваме пари	17
II.3. Времето е важно	25
II.4. Задачи со мерни броеви	30
II.5. Разни задачи	33
III Геометрија	41
IV Логика и комбинаторика	
IV.1. Венови дијаграми	48
IV.2. Логички главоболки	49
IV.3. Дополнуваме што недостасува	56
IV.3. Занимливи броења	58
Решенија на задачите	
I Пресметувања и бројни ребуси	
I.1. Пресметувања	62
I.2. Бројни ребуси	70
I.3. Равенки и неравенства	73
II Текстуални задачи	
II.1. Броеви и цифри	78

II.2. Купуваме и пресметуваме пари	85
II.3. Времето е важно	105
II.4. Задачи со мерни броеви	116
II.5. Разни задачи	124
III Геометрија	140
IV Логика и комбинаторика	
IV.1. Венови дијаграми	159
IV.2. Логички главоболки	160
IV.3. Дополнуваме што недостасува	178
IV.3. Занимливи броења	183
Литература	193

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 25* е наменета за талентираните ученици по математика од четврто и петто одделение и истата е на извесен начин дополнување на книгите *Математички талент 1, 2, 13, 14, 19 и 22*. Меѓутоа, сметаме дека таа ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 322 решени задачи во која во четири одделни дела се обработени аритметички, текстуални, логички, комбинаторни и геометриски задачи, приспособени за учениците на возраст од осум до десет години.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Тоа значи дека изборот на задачите е направен со цел развој на квалитетите на мислењето, како и усвојување на методите на решавање задачи, што треба да биде примарна цел на наставата по математика. Притоа, задачите не се систематизирани според сте-

пенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, текстуалните задачи се поделени во пет дела, и тоа: *Броеви и цифри*, *Купуваме и пресметуваме пари*, *Задачи со мерни броеви*, *Времето е важно* и *Разни задачи*, а истото се однесува и на разработката на аритметичките, логичките и комбинаторните задачи.

Рецензентите, д-р Катерина Аневска и д-р Методи Главче, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2021 г.

Авторите

I ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Определи го збирот на броевите со кои се запишува датата 1 ноември 2021 година.
2. Пресметај ја вредноста на изразот:
 - а) $201 + 21 + 2 \cdot 1 - 20 : 10$,
 - б) $2010 + 20 \cdot 10 - 10 : 1$,
 - в) $1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5$.
3. Пресметај ја вредноста на изразот:
 - а) $201 - 3 + 20 - 13$,
 - б) $201 - 3 + 20 + 13$,
 - в) $201 + 3 + 20 \cdot 13$,
 - г) $20 \cdot 13 - 201 + 3$.
4. Пресметај ја вредноста на изразот:
 - а) $20 - 15 + 20 \cdot 15 + 20 + 15$,
 - б) $20 \cdot 15 - 210 : 5 + 210 \cdot 5$.
5. Пресметај:
 - а) $18 \cdot 19 - 20 + 19$,
 - б) $20 \cdot 19 - 19 + 18$,
 - в) $19 \cdot 19 - 20 \cdot 18$.
6. Пресметај:
 - а) $2010 - 20 \cdot 10 + 20 : 10$,
 - б) $2011 - 20 \cdot 11 - 201 : 1$,
 - в) $2012 - 20 \cdot 12 - 201 \cdot 2$.

7. Пресметај:

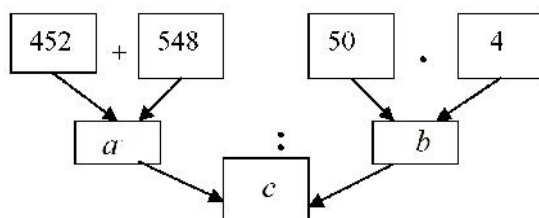
а) $(7002 - 2007) : 3 + (7002 + 2007) : 9$,

б) $505 + 358 - (50 + 121) : 9$.

8. Пресметај :

$(2018 + 2019 + 2021 + 2022) : 5 - (2008 + 2009 + 2011 + 2012) : 10$.

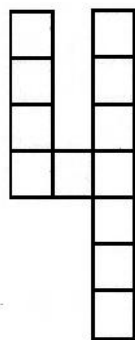
9. Кои броеви треба да се запишат на местата на a, b и c во шемата, за да пресметувањата се точни:



10. Горјан ги определил остатоците од делењето на бројот 43 со бројот 3, на бројот 52 со бројот 5 и на бројот 55 со бројот 7. Потоа ги помножил добиените остатоци. Кој број го добил Горјан?

11. Определи го осмиот член на низата броеви: 1, 3, 7, 15, 31, ...

12. Дванаесет квадратчиња се наредени во форма на буквата Ч (цртеж десно). За две квадратчиња велиме дека се соседни ако имаат заедничко теме. Во секое квадратче е запишан бројот на квадратчињата кои му се соседни. Определи го збирот на сите запишани броеви.

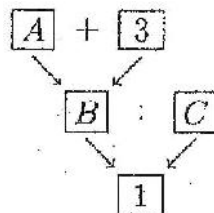


13. Филип направил компјутерска програма за трансформирање на броеви. Ако се внесе парен број p , тогаш програмата го дели бројот p со 2, а ако се внесе непарен број p , тогаш програмата го множи со 3 и додава 1. Во двата случаи програмата го печати добиениот број. Филип прво го внесол бројот 9 и го добил бро-

јот a , потоа го внесол бројот a и го добил бројот b , потоа го внесол бројот b и го добил бројот c , потоа го внесол бројот c и го добил бројот d и на крајот го внесол бројот d и го добил бројот e . Подреди ги броевите a, b, c, d, e по големина почнувајќи од најмалиот.

14. Искористи ги податоците дадени во шемата на цртежот десно и пресметај ја вредноста на изразот

$$(A + 3) : C.$$



15. Ако c е природен број, тогаш со c^+ го означуваме следбеникот на бројот c , а со c^- го означуваме претходникот на бројот c . Пресметај

$$4^+ + 7^+ - 3^-.$$

16. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$IX \cdot IV + XI \cdot VI.$$

17. За секои два броја a и b воведуваме операција $\oplus$ со равенството $a \oplus b = a \cdot a + b \cdot b$. На пример, $2 \oplus 3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13$. Подреди ги по големина броевите резултатите од пресметувањата:

$$3 \oplus 2, 5 \oplus 1, 3 \oplus 4, 2 \oplus 5, 1 \oplus 6.$$

18. Определуваме операции $\oplus$ и $\otimes$ на следниот начин:

$$a \oplus b = a \cdot b + a \text{ и } a \otimes b = a \cdot b - b.$$

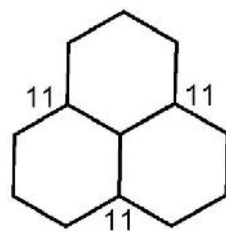
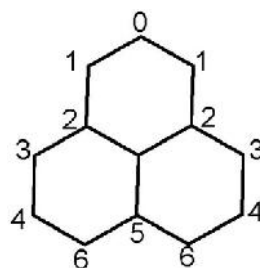
На пример, $2 \oplus 3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ и $3 \otimes 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Пресметај:

$$((1 \oplus 7) \otimes (7 \oplus 1)) \oplus (1 \otimes 7).$$

19. Определи го збирот на сите цифри со кои се запишани сите природни броеви од 1 до 99.

20. Пабло има осум исти кутии и во секоја кутија има различен парен број бонбони, барем 2, но не повеќе од 16. Колку бонбони има Пабло?
21. Горјан има 7 кутии. Во првата кутија има едно топче, во втората кутија има 2 топчиња. Во секоја следна кутија има толку топчиња колку што има во сите кутии пред неа. Колку топчиња има во седмата кутија?
22. Во ковачницата за пари има 625 златни плочки. Од секоја златна плочка се кова по една монета, а отпадокот кој се добива при ковање на 5 монети се топи и од него се добива една златна плочка. Кој е најголемиот број монети што може да се исковаат од расположливите 625 златни плочки?

23. Филип составил фигура од три шестаголници и во секое теме запишал број (цртеж десно). Притоа тој запишал број и во темето кое е заедничко за сите три шестаголници, но не се знае кој број. Потоа, Филип ги зголемил броевите запишани во темињата на едниот шестаголник за еден ист број, па ги зголемил броевите запишани во темињата на вториот шестаголник за еден ист број (можно е за истиот број) и на крајот ги зголемил броевите запишани во темињата на третиот шестаголник за еден ист број. На крајот, Филип ги запишал само броевите во трите темиња како на цртежот десно. За колку се зголемил бројот запишан во полето кое е заедничко за сите три шестаголници (централно теме)?



24. Кошаркарските екипи „Водно“ и „Китка“ меѓу себе играле четири натпревари, во кои „Водно“ постигнал 32, 33, 56, 61 и 66 коша. Во два натпревари „Водно“ постигнале трипати повеќе ко-

ша од „Китка“, а во други два натпревари „Водно“ постигнал двапати повеќе коша од „Китка“. Еден натпревар „Водно“ загубил со 4 коша. Колку коша постигнала екипата „Китка“ во петте натпревари?

25. Андреј го собрал најмалиот трицифрен број кој не е делив со 4 со најголемиот трицифрен број кој е делив со 4. Кој број го добил Андреј?

1.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

26. Замени ги истите букви со исти цифри, а различните букви со различни цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$3 + A + D + A + C + A = Y \cdot P \cdot A$$

27. Нека A, B и C се различни цифри такви што $A \cdot B + C = 31$. Определи ја најголемата можна вредност на $A - B + C$.

28. Определи го збирот на цифрите кои треба да се на местата на буквите a, b и c во бројниот ребус прикажан на цртежот десно.

$$\begin{array}{r} 5 \ a \ 7 \\ + \ b \ 2 \ c \\ \hline 8 \ 7 \ 5 \end{array}$$

29. Во ребусот

$$\overline{SMT} + \overline{SMT} = \overline{URA}$$

на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Реша го дадениот ребус, ако $\overline{SMT}$ е најголемиот можен број.

30. Кој е бројот $\overline{ABГД}$ ако неговите пет цифри се определени со бројниот ребус:

$$\begin{array}{r} AB + 8 = 3B \\ \hline \overline{\Gamma Д} + \overline{B} = \overline{\Gamma В} \\ \hline \overline{\Gamma В} + 3 = \overline{АД} \end{array}$$

31. Даден е бројниот ребус:

$$\overline{ТРИ} + \overline{ТРИ} = \overline{ШЕСТ},$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Кои цифри може да стојат на местото на буквата T ?

32. Горјан помножил два броја и го шифрирал добиеното равенство во вид: МАКСИМУМ. За секој од знаците „множење“ и „еднакво“ и за секоја цифра тој употребил по една буква, различните знаци и цифри со различни букви, а еднаквите цифри со еднакви букви. Кое равенство може да го шифрирал Горјан? Најди барем две решенија на задачата.

I.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

33. Определи го X од шемата:

$$3 \xrightarrow{\times 7} \square \xrightarrow{-X} \square \xrightarrow{:2} 8$$

34. Определи ги броевите A и B така што пресметувањата во

$$\boxed{A} \xrightarrow{-3} \boxed{B} \xrightarrow{\times 2} \boxed{34}$$

шемата ќе бидат точни.

35. Во равенството $3+3+\dots+3=2022$ сите собирци се еднакви на 3. Определи го бројот на собирците во ова равенство?
36. Ако во равенството $9+9+\dots+9=2007$ сите собирци се еднакви на 9, колку собирци има на левата страна?
37. Реши ја равенката:

$$(1+4+27):32=(9+x):25.$$
38. Реши ја равенката:

$$3636 : 4 - x = 196 \cdot 4.$$

39. Нека a е решение на равенката

$$27 : (9 : (3a - 8)) = 3.$$

Ако

$$A = 125 - 25 : 5 + (84 + 84 + 84) : 3 \text{ и } B = A : a + 13 \cdot 13 - 39 \cdot 5,$$

пресметај $C = A - B : a$.

40. Десно е прикажана таблица за множење на броевите a, b, c, f, g, h . Некои производи се запишани. Кој производ треба да се запише на местото на прашалникот?

$\cdot$	a	b	c
f		15	18
g	56		42
h	?	45	

41. Кои броеви треба да се запишат на местата на знаците $\blacklozenge$ и $\heartsuit$ за да се точни равенствата:

$$\blacklozenge + \blacklozenge + \heartsuit = 13,$$

$$\blacklozenge + \blacklozenge = \heartsuit + 1.$$

42. Четири сока чинат колку три колачи, три лимонади чинат колку два колачи, три мали пици чинат колку два сока, две банички чинат колку три колачи. Кој од овие производи е најскап?

43. Нека

$$A = (496 \cdot 7 - 495 \cdot 5) + 2010 : (99 - 97) + 18,$$

$$B = (463 + 464) : (96 \cdot 4 - 375) + (3 \cdot 898 - 2 \cdot 898) : (11 - 5 \cdot 2)$$

и C е решението на равенката

$$237 + 874 + 126 + 363 + 2C = 21 + 349 + 1555 + 1251 + 445 + C.$$

Подреди ги броевите A, B и C по големина, почнувајќи од најмалиот.

II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Филип од бројот 29185643 пречкртал четири цифри и го добил најголемиот можен четирицифрен број. Кој број го добил Филип?
2. Еден до друг во низа се запишани последователно непарните броеви помали од 30. Филип избришал неколку цифри, по што останале шест цифри и кога ги запишал една до друга во истиот редослед го добил најголемиот можен шестцифрен број. Кој број го добил Филип?
3. Горјан ги запишал броевите: 8462, 1246, 3874, 4683 и 4874. Потоа му рекол на Андреј од запишаните броеви да избере парен број, кој е запишан со различни цифри, чија цифра на стотките е два пати поголема од цифрата на единиците и цифрата на десетките е поголема од цифрата на илјадитите. Кој број треба да го избере Андреј?
4. Горјан ги запишал броевите 216, 426, 633, 831 и 138, а потоа ги пречкртал сите броеви, освен броевите чиј збир на цифрите на десетките и единиците е двапати поголем од цифрата на стотките. Кои броеви не се пречкртани?
5. Два броја се поголеми од 30 и нивната разлика е 123. Поголемиот број го зголемуваме за 30, а помалиот го намалуваме за 30. Пресметај ја разликата на добиените броеви.
6. Определи го збирот на најголемиот трицифрен број кој е делив

со 2 и најмалиот трицифрен број кој не е делив со 2.

7. Замислив еден број, го помножив со 2 и од добиениот број одзедов 7. Го добив бројот 45. Кој број ќе го добиев, ако прво одземев 7, а потоа помножев со 2?
8. Замислив еден број, го помножив со 2 и на резултатот додадов 7, по што го добив бројот 45. Колку е збирот на цифрите на бројот кој го замислив?
9. Во театарска сала има 26 редови со по 24 столици во секој ред. Местата се нумерирани, така што од првиот ред се почнува со местото 1 и местата се означуваат редоследно. Во кој ред е местото со број 375 и кое место е тоа по ред?
10. Збирот на три последователни броеви е 15. Кои се тие броеви?
11. Горјан на Андреј и Пабло им кажал еден број. Андреј од бројот одзел 6 и го помножил со 6, а Пабло одзел 11 и го помножил со 11. Двајцата добиле ист резултат. Кој број им го кажал Горјан?
12. Куќите на една улица се нумерирани на вообичаениот начин: од едната страна на улицата се куќите со непарните броеви 1, 3, 5, ..., а од другата страна куќите со парните броеви, при што наспроти $N^{\circ}1$ е $N^{\circ}2$, наспроти $N^{\circ}3$ е $N^{\circ}4$ итн. Андреј тргнал на прошетка од почеток на улицата и тој пребројал 10 цифри 2 во броевите од „непарната“ страна на улицата. До која куќа со сигурност стигнал Андреј за време на прошетката?
13. Мојата куќа има број 17. Колку куќи има од нашата страна на улицата меѓу мојата и последната куќа, која има број 135, ако не ја бројам ниту мојата ниту последната куќа?
14. Во нашата улица од едната страна се куќите со броевите 1, 3, 5 итн. Наспроти $N^{\circ}1$ од другата страна на улицата е $N^{\circ}2$, наспро-

ти $N^{\circ}3$ е $N^{\circ}4$ итн. Мојата куќа е со број 17 и до неа ги гледам броевите на спротивната куќа, двете куќи пред неа и двете куќи по неа. Определи го збирот на броевите на куќите кои ги гледам.

15. Од едната страна на улицата куќите се нумерирани со броевите 1, 3, 5, 7, ..., при што се искористени 800 цифри. Кој е најголемиот број со кој е нумерирана куќа на таа страна на улицата?
16. Определи ги сите броеви кои се помали од 10 и истовремено се збир на три последователни броја и се збир на два последователни броја.
17. Бројот A е двоцифрен, а бројот B е запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Определи го бројот A , ако $A + B = 55$ и $A - B$ се едноцифрени броеви.
18. Андреј, Пабло и Филип замислиле еден ист двоцифрен број. Андреј го помножил со 3, на добиениот резултат додал 3, добиениот број го поделил до 3, од количникот одзел 3 и го добил бројот a . Пабло, на замислениот број му додал 3, добиениот резултат го помножил со 3, од производот одзел 3, разликата ја поделил со 3 и го добил бројот b . Филип од замислениот број одзел 3, резултатот го помножил со 3, на производот додал 3, збирот го поделил со 3 и го добил бројот c . Подреди ги по големина броевите a, b и c , почнувајќи од најмалиот.
19. Определи го збирот на цифрите на најмалиот природен број чиј производ на цифри е поголем од 500.
20. Определи го производот на цифрите на најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 23.
21. Броевите на страниците на една книга, од која е скинат еден лист, се запишани со вкупно 2009 цифри. Колку листови има сега книгата? (Секој лист, освен можда последниот има две страници.)

II.2. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

22. Андреј го замолил Горјан од бурекџилицата да му купи кифла и сок, при што му дал пари точно колку што чинеле кифлата и сокот. Но, во бурекџилицата немало ниту кифла, ниту сок, па затоа Горјан купил баничка која била 5 денари поскапа и јогурт кој бил 10 денари поефтин. Како Андреј и Горјан ја израмниле сметката?
23. Земјоделецот Марко решил да произведува компири. Тој за семето платил 20 евра, за орање на земјата платил 52 евра, за заштитни средства платил 54 евра и за користење на системот за наводнување платил 34 евра. Од продажбата на компирите Марко добил 998 евра. Колку пари заработил Марко?
24. Градинарот Марко под еден пластеник произвел 500 килограми домати. Притоа потрошил 350 денари за семе, 330 денари за заштитни средства, 1000 денари за обработка на почвата и 1200 денари за наводнување. Колку пари заработил Марко, ако килограм домати продавал по 55 денари?
25. Колку пари платил Пабло за списание од 2 евра и 35 евроценти и пенкало од 1 евро и 86 евроценти?
26. Горјан, Андреј и Пабло заедно имале 94 евра. Сите тројца си купиле по една иста книга. Потоа Андреј имал 21 евро, Горјан имал 26 евра и Пабло имал 32 евра. Колку пари имало секое дете на почетокот?
27. Од посетата за еден месец во летото во еден аквапарк заработиле 103363 евра. Влезот за возрасен е 25 евра, а за дете е 12 евра. Ако близнаци го посетуваат аквапаркот, тогаш за едниот влезот е бесплатен. Тој месец 2635 возрасни го посетиле аквапаркот. Колку луѓе го посетиле аквапаркот, ако имало пет парови близнаци?

28. Горјан купил 4 пакетчиња бонбони, а Пабло и Андреј купиле по 3 пакетчиња бонбони. Тројцата го сретнале Филип и четворицата подеднакво ги поделиле сите бонбони, при што се договориле дека ќе си ги поделат правилно и трошоците. Тие пресметале дека Филип треба да им даде на другите тројца 120 денари.
- а) Колку чинело едно пакетче бонбони?
- б) Колку пари треба да добие Горјан, а по колку треба да добијат Пабло и Андреј?
29. Лилјана имала 1000 денари. Таа купила 3 исти колачи и 7 исти сокчиња, по што и вратиле 482 денари. Еден колач чини 119 денари. Колку чини едно сокче ?
30. Едно училиште купило 15 таблети и 9 лаптопа. Цената на еден таблет е 424 евра, а на еден лаптоп е три пати поголема. Колку пари се платени повеќе за лаптопите отколку за таблетите?
31. Мобилен телефон чини 360 евра. Клиент го купил на отплата од мобилен оператор, со што се зголемила цената на телефонот. Согласно склучениот договор телефонот треба да се плати на еднакви месечни рати од по 30 евра, при што за секој месец користење клиентот плаќа по 6 евра. Ако ратите се плаќаат на крајот од месецот, колку пари го чинел клиентот избраниот телефон?
32. Цената на еден автомобил е 27500 евра. Алекса автомобилот го купил на деветмесечен кредит при што месечно плаќал по 3360 евра. Колку Алекса платил повеќе од цената на автомобилот?
33. Иван на 1.1.2020 година на отплата на 24 рати купил компјутер кој чинел 48000 денари. Тој месечно отплаќал по 2000 денари, а на почетокот на секоја година за неотплатените пари плаќал на домест (камата) по 70 денари на секои 1000 денари. Колку вкупно пари вкупно треба да плати Иван за компјутерот?

34. За градбата и опремување на викендицата семејството Јакопетревски потрошило: 2500 евра за изработка на планот и добивање дозвола за градба, 6250 евра за градежни работи, 5990 евра за занатски работи и 4300 евра за опремување на викендицата. Половината од потебните пари семејството ги имало заштедено, а за другата половина од банката зело заем за што за целиот период на отплата на заемот платило надомест (камата) еднаква на петтина од земената сума пари. Колку евра вратило на банката семејството Јакопетрески?
35. Јован Јакопетрески купил нов стан, по што му останале 2000 евра. Јован решил да го уреди станот, но се покажало дека му недостасуваат пари, па затоа зел едногодишен заем во висина од 2000 евра за кој платил еднократна камата. Со парите од заштедата и заемот купил гарнитура за дневна совба и маса со шест столници за што вкупно платил 2290 евра, фрижидер и машина за садови за 450 евра, машина за перење алишта и машина за сушење алишта за 550 евра, кујнски шпорет за 155 евра и мебел за кујна за 530 евра. По набавката се покажало дека парите кои му останале биле колку четвртина од каматата за заемот. Пресметај ја каматата за заемот.
36. Андреј купил 40 топчиња за 60 евра, а Горјан купил 120 исти такви топчиња. Колку пари платил Горјан?
37. Филип од баба му добил 20 евра. Тој отишол во слаткарница и купил два колачи од по 1 евро и 50 евроценти и еден сок од 2 евра. Колку пари му останале на Филип?
38. Еден кроасан чини 1 евро и 50 евроценти. Горјан купил 7 кроасани и на продавачот му дал банкнота од 20 евра. Колку пари му вратил продавачот на Горјан?
39. Цените на фармерките и кошулите во една продавница за алишта се соодветно 20 евра и 12 евра. На денот „Црн петок“ соп-

ственикот на продавницата ги намалил цените на артиклите за една четвртина од постојните цени. Пабло го искористил намалувањето и купил по еден пар фармерки и по една кошула за него и неговиот братучед Андреј. Колку пари заштедил Пабло од сумата која би ја платил ако купувал по цени пред намалувањето?

40. Во училишниот ресторант еден цеден сок од портокал чини 75 денари, а еден витамински сок чини 32 денари. Ресторантот има промоција при што за едновременно купување цеден сок од портокал и витамински сок се плаќаат 100 денари. Пабло сака да купи 5 сока од цеден портокал и 3 витамински сока. Колку најмалку треба да плати Пабло?
41. Калина на 22.02.2020 година пребројала дека во штедната касата има 18500 денари. Таа решила од следниот ден секој ден во касата да штеди по 20 денари. Колку пари имала Калина на 20.12.2020 година, ако и на 20.12 таа ставила 20 денари во штедната каса?
42. Горјан собира поштенски марки. Тој на една од страните на албумот ставил марки од по 1 ден., по 2 ден. и по 5 ден. Горјан забележал дека вредноста на марките на таа страна од албумот е 64 денари и дека од секој вид има еднаков број марки. Колку марки вкупно има на оваа страна од албумот?
43. Во книжарница може да се купат 3 тетратки, 2 моливи и 1 пенкало за вкупно 296 денари, а 6 тетратки, 4 моливи и 1 пенкало за вкупно 522 денари. Колку чини еден молив ако 4 тетратки се поскапи од 2 пенкала за 100 денари?
44. На почетокот на работниот ден продавачот во една бурекарница не ги пребројал парите во касата, кои останале од претходниот ден. Тој до 8 часот продал само 7 пити и тогаш констатирал дека во касата има 20 евра. До 11 часот биле продадени

уште 8 банички по 1 евро и вкупно 17 пити. Сега во касата имало 48 евра. Колку евра имало во касата пред почетокот на работниот ден?

45. Сума од 450 денари е платена со монети од 5 и 10 денари. Монетите од 5 денари се четири пати повеќе од монетите од 10 денари. Колку монети од секој вид се употребени за плаќање на оваа сума?
46. Андреј купил чоколадо и колач. Тој забележал дека чоколадото е пет пати поскапо од колачот и дека колачот е 92 денари поефтин од чоколадото. Колку пари чини чоколадото, а колку колачот?
47. Сечењето на еден железен профил на две парчиња чини 15 денари. Колку денари чини сечењето на истиот тој профил на 10 парчиња?
48. Андреј во продавница вратил 5 празни шишиња и за секое шише добил по 24 денари. Тој сака да купи колач кој чини 200 денари. Колку пари треба да доплати Андреј?
49. Кога Џо одел во казино, тој ги удвојувал парите со кои влегувал во казиното. Пред да го пушти во казиното вратарот секој пат му земал по 20 долари. Колку долари имал Џо пред првата посета на казиното, ако откако третиот пат влегол во казиното забележал дека тој нема пари?
50. Во едно училиште купиле ракометни и фудбалски топки по цена 7 евра за ракометна и 10 евра за фудбалска топка. Вкупно се потрошени 165 евра. Колку фудбалски, а колку ракометни топки се купени, ако се купени помалку фудбалски од ракометни топки?
51. Градинарот Марко на пазар однесол каранфили кои ги продавал

по цена од 70 денари за еден каранфил. Првиот купувач купил половина од каранфилите и уште еден каранфил. Вториот купувач купил половина од преостанатите каранфили и уште еден каранфил и третиот купувач купил половина од преостанатите каранфили и уште еден каранфил, по што Марко ги продал сите каранфили. Колку пари заработил Марко?

52. Ако Андреј купи 5 исти лижавчиња, му преостануваат 10 денари. За да купи 7 исти такви лижавчиња, му недостасуваат 22 денари. Определи ја цената на едно лижавче? Колку пари има Андреј?
53. За „Денот на книгата“ ученици од четврто и петто одделение купиле по една „Збирка задачи за IV и V одделение“, користејќи ја промотивната цена на книгата. Во споредба со редовната цена на книгата учениците од IV одделение добиле вкупен попуст од 81 денар, а учениците од V одделение добиле вкупен попуст од 72 денари. Книгата ја купиле 9 ученици од четврто одделение. Колку ученици од петто одделение ја купиле книгата?
54. Превоз со траект чини 900 денари за автомобил со возач, плус 200 денари за секој дополнителен патник. Вкупно плативме 1500 денари. Колку мина бевме во автомобилот?
55. Три круши чинат колку две јаболка. Колку чинат девет круши ако три јаболка чинат 60 денари?
56. Купив два сока од по 35 денари и една кифла од 25 денари. На продавачот му дадов банкнота од 100 денари. Колку пари треба да ми врати продавачот?
57. Пабло има банкнота од 1000 денари и со неа купил 4 чоколади и 3 колачи, по што продавачот му вратил 553 денари. Едно чоколадо чини 99 денари. Колку пари чини еден колач?

58. Горјан има банкнота од 500 денари и со неа купил две кутии колачи од по 89 денари за една кутија и девет еднакви сока. Продавачот му вратил 34 денари. Колку пари чини еден сок?
59. Филип купил 15 чоколади за 500 денари: неколку млечни по 40 денари за едно чоколадо и неколку овошни по 30 денари за едно чоколадо. Колку чоколади купил Филип од секој вид?
60. Компанија за своите вработени купила вкупно 62 таблети и телефони, за што потрошила 6690 евра. Ако еден таблет чини 135 евра, а еден телефон чини 87 евра, колку таблети и колку телефони купила компанијата?
61. Два молива и пет тетратки чинат 1100 денари, а осум моливи и две тетратки чинат 800 денари. Колку чини еден молив и една тетратка?
62. Сопственик на модна конфекција започнал производство на нов модел на летни машки костуми. Во производството на еден костум тој вложил ленено платно за 1560 денари и дополнителен материјал (постава, петлици, конци и друг материјал) со три пати помала вредност. Потоа пресметал дека вредноста на трудот за шиеењето на еден костум е 100 денари пониска од вредноста на дополнителниот материјал за него. По која цена треба конфекцијата да продава еден костум, ако сопственикот сака заработувачката од продажбата на 75 костуми да биде 151500 денари?
63. За опремување на екипата во фудбал (мал фудбал) едно училиште купило 11 пара патики и 13 дресови, за кои вкупно платило 1420 евра. Колку пари чини еден пар патики, а колку еден дрес, ако 5 пара патики и 6 дресови заедно чинат 650 евра?
64. Шест тетратки и три моливи чинат колку пет тетратки и 12 моливи. Колку моливи чинат колку што чинат две тетратки?

65. На пазарот 2 круши чинат колку 3 јаболки, 2 јаболки чинат колку 3 портокали. Колку јаболки чинат 4 круши и 9 портокали?
66. Племето Итромани не знае што се тоа пари, па своите пазарни односи ги регулира со размена на стоки. Така, советот на племето ги утврдил следниве соодноси:
две тикви ↔ три јајца, пет јајца ↔ седум јаболки.
Итроманот Ацо почнал бизнис со 210 јаболки. Колку тикви може да добие за нив?
67. Горјан, Андреј и Пабло береле јаболка во блиската овошна градина и секој од нив заработил определена сума пари. Тие решиле заработените пари да ги поделат на три еднакви дела, но наместо да го пресметаат збирот и да го поделат на 3, тие постапиле на следниот сложен начин: Горјан на другите двајца има дал по 3 евра, Андреј на другите двајца им дал по 5 евра и Пабло на другите двајца им дал по 7 евра. Ако пред поделбата Андреј имал 19 евра, колку пари имале Горјан и Пабло пред поделбата?
68. Пабло си купил неколку бонбони по 8 денари и неколку чоколатца по 11 денари. Тој потрошил точно 100 денари. Колку бонбони и чоколатца купил Пабло?
69. За денот на книгата во училиштето на Пабло купиле книги со кои ги наградиле победниците на одделните натпревари. Имало два вида книги, од 9 евра и од 7 евра. Колку книги биле купени, ако за нивната набавка се потрошени 62 евра?
70. Пабло, Горјан и Андреј влегле во книжарница. Пабло купил едно хемиско, еден молив и една гума. Андреј купил две хемиски и една гума, а Горјан купил два молива и три гуми. Се покажало дека Горјан потрошил 80 евроценти повеќе пари од Андреј, а Андреј и Пабло потрошиле исти суми пари. Една гума е 10 евроценти поскапа од еден молив.
а) Колку пари потрошил Горјан?

б) Ако Пабло располага со монети од 50 евроценти, 20 евроценти, 5 евроценти и 1 евроцент, но со нив не може да плати без кусур, колку најмногу пари може да има Пабло?

71. Еден расипан автомат за кафе ги извршува само следниве три операции:

- 1) за монета од 1 евро се добиваат едно кафе и две монети од по 20 евроценти,
- 2) за монета од 20 евроценти се добиваат едно кафе и монета од 50 евроценти,
- 3) за монета од 50 евроценти се добиваат едно кафе и монета од 1 евро.

Филип на почетокот има само една монета од 1 евро и од автоматот купил 4 кафиња.

а) Која е најголемата можна сума која Филип може да ја има по купувањето на кафињата?

б) Која е најмалата можна сума која Филип може да ја има по купувањето на кафињата?

II.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

72. Товарен воз треба да се состави од две локомотиви, 17 товарни вагони и 15 цистерни. На почетокот сите локомотиви, вагони и цистерни се одделени. Ако едно закачување трае 2 минути, колку минути се потребни за составување на композицијата?

73. Горјан ги искачува скалите, прескокнувајќи по едно стапало во секунда (гази на секое второ стапало). Површините меѓу катовите ги сметаме за стапала, а за да на секој кат дојде од едните до другите скали на Горјан му се потребни 5 секунди. За колку секунди Горјан ќе се качи од првиот до шестиот кат, ако скалите меѓу секои два ката имаат по 20 стапала?

74. За 1 минута Марија окопува 2 борчиња, а Симона окопува 3

борчиња. Симона работела 5 минути повеќе и двете заедно окопале 95 борчиња. Колку минути работело секое девојче?

75. Во четврто одделение во едно училиште има 121 ученик. Денес во 8 часот наутро четвртоодделенката Сања за 15 минути на три свои соученици им раскажала интересна сторија. Одма потоа секој од тројцата соученици за 15 минути сторијата ја раскажал на други три соученици. Секој од деветте ученици во следните 15 минути ја раскажал сторијата на други три соученици итн. Во колку часот секој ученик од четврто одделение ја знаел сторијата, ако секој ја слушал само по еднаш?
76. Според мерењето на времето на племето Итромани, еден нивен час од нашиот час е пократок за 15 наши минути. Колку нивни часови трае деноноќието на племето Итромани?
77. Колку часови трае едно земско деноноќие на племето Итромани, ако еден нивен час е за 20 наши минути пократок од еден наш час?
78. Горјан заспал во 10 часот и 15 минути вечерта, а се разбудил во 6 часот и 40 минути следното утро. Колку време спиеел Горјан?
79. Возот од Загреб за Скопје патува $7\text{ h }30\text{ min}$ и во Скопје пристигнал во 5:45 часот. Во колку часот возот тргнал од Загреб?
80. Во училиштето на Филип еден час трае 45 минути, а одморите меѓу часовите траат 7 минути. Филип денес има пет часа. Часовите на Филип започнуваат во 7:30 часот. Во колку часот Филип завршува со настава?
81. Денес, решавајќи задачи, за напреварот по математика Марија се подготвуваше 1 час и 45 минути и со решавањето задачи заврши во 11:03 часот. Во колку часот таа започна да решава задачи?

82. Андреј домашната по математика ја пишувал 1 час и 25 минути и истата ја завршил во 11 часот и 5 минути. Во колку часот Андреј почнал да ја пишува домашната?
83. Автобус тргнал од Белград петнаесет минути пред шест часот и во Солун пристигнал попладне десет минути пред три часот. Колку време патувал овој автобус?
84. Филмот „Леси се враќа дома“ без реклами трае 137 минути. Филмот почнал да се прикажува на телевизија од 11:30 часот, при што додека филмот се прикажувал имало 5 реклами, секоја од по 7 минути. Во колку часот завршило прикажувањето на филмот?
85. Ивана секој ден патува од дома до училиште 25 минути. Таа денес има 5 часа по 40 минути, 3 одмори од по 10 минути и еден одмор од 20 минути. По часовите таа 35 минути била на играорна секција. Дома се вратила во 13 часот и 20 минути. Во колку часот Ивана тргнала на училиште?
86. На натпревар по математика Филип решавал 20 задачи. Секоја задача ја решавал за 3 минути и меѓу секои две задачи правел пауза од 1 минута. Во колку часот Филип ја предал тетратката со одговорите, ако започнал да ги решава задачите точно во 11:00 часот и не се задржувал по завршувањето со решавање на последната задача?
87. Пред еден месец Филип решавал задачи по 2 часа на ден, при што секоја задача ја решавал 3 минути и 20 секунди. Сега тој успева секоја задача да ја реши за 2 минути и 30 секунди и секој ден решава еднаков број задачи како и пред еден месец. Определи го времето за кое сега Филип ги решава задачите.
88. Селанката Лидија има три кокошки. Едната кокошка неси едно јајце секој ден, другата неси едно јајце преку еден ден, а третата

неси едно јајце преку два дена. Колку јајца снесле кокошките на Лидија во текот на месец јуни, ако на 1 јуни сите три кокошки снесле јајца?

89. Збирот на годините на Пабло, Андреј и Филип е 28. Колкав бил тој збир пред пет години, ако сите тројца веќе биле родени?
90. Збирот на годините на Иван и Павле е 15. Збирот на годините на Иван и Кате е 19. Следната година збирот на годините на Павле и Кате ќе биде 22. Определи ги годините на трите деца?
91. Петра е два пати помлада од нејзиниот брат, кој е 20 години помлад од нивната мајка. Братот на Петра има 14 години. Определи го збирот на годините на Петра, нејзиниот брат и нивната мајка?
92. Горјан е пет пати постар од неговиот брат Андреј. Разликата на нивните години е 12. По колку години Горјан ќе биде двапати постар од Андреј?
93. Едно семејство се состои од татко, мајка и дете. Денес збирот на нивните години е 49, а пред 3 години бил 41. Колку години има таткото денес, ако мајката е 21 година постара од детето?
94. Збирот на годините на таткото, мајката и двете деца е 100. По-старото дете се родило кога таткото имал 26 години, а помалото кога мајката имала 26 години. Определи го збирот на годините на децата.
95. Мајката на Павел сега има 30 години, а нејзините три сина имат 1, 3 и 5 години. По 12 години, збирот на годините на мајката и таткото на Павел ќе биде два пати поголем од збирот на годините на трите момчиња. Колку години има сега таткото на Павел?

96. Збирот на годините на членовите на едно семејство пред 4 години бил 49. Тие се сите живи и здрави и сега збирот на нивните години е 62. Колку ќе биде збирот на годините на семејството по 4 години, ако пак се сите живи и здрави и в година им се роди уште едно дете?
97. Фаница научила колку години има учителката Ирена и ѝ кажала на Костадинка. Костадинка ѝ била лута на учителката, па на Мирјана ѝ кажала дека учителката има два пати повеќе години. Мирјана не ѝ поверувала на Костадинка, па од око намалила 10 години и на Билјана ѝ ја кажала својата верзија. Дома Билјана кажала дека учителката има 38 години, намалувајќи го по свое за 8 бројот на годините кој ѝ го кажала Костадинка. Колку години има учителката Ирена, според информацијата пренесена од Фаница?
98. Весна може да заврши една работа за 30 минути. Петар истата работа ја завршува за 40 минути, а Ирена истата работа ја завршува за 24 минути. Кое е најмалото време за кое тројцата може да ја завршат работата, ако ја поделат работата на соодветен начин?
99. Катерина е родена во понеделник на 24 март. Никола е роден истата година на 28 мај. Во кој ден од седмицата е роден Никола?
100. На 1 ноември 2009 година телевизискиот канал МеМаОл почнал да ја прикажува серијата „Солзи радосници“, секој ден по две епизоди. Во 2009 епизода главната хероина плаче од радост, бидејќи освоила златен медал на Меѓународната олимпијада по математика. На кој датум гледачите ја гледале оваа епизода?
101. Во два последователни месеци има 8 вторници и 8 саботи. На кој датум паднала првата среда од првиот месец?
102. Од домот до училиште Климе има два премини со семафори со

зелено и црвено светло. Од првиот до вториот премин Климе оди 2 минути. Климе знае дека на секој семафор зеленото и црвеното светло светат еднакво време и тоа 2 минути. Од домот до првиот премин тој оди 10 минути и од вториот премин до училиште оди 10 минути. Секој премин Климе го минува за 5 секунди. Едно утро Климе од дома излегол во 8:00 часот и увидел дека на секој семафор едновременно гори зелено светло. Во колку часот тој ќе стаса на училиште ако не го нарушува правилото?

II.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

103. Од лента со должина $5\text{ dm } 5\text{ cm } 8\text{ mm}$ прво е отсечено парче со должина 2 dm , потоа парче со должина 14 cm и на крајот парче со должина 52 mm . Колкава е должината на пресотанатата лента?
104. Ацо е 5 cm понизок од Бојан, а Бојан е 8 cm повисок од Васил. Колку сантиметри е висок Ацо, ако Васил е висок 133 cm ?
105. Андреј е 2 cm понизок од Пабло и е 3 cm повисок од Филип, кој е висок $1\text{ m } 38\text{ cm}$. Колку е висок Пабло?
106. На патот Скопје-Прилеп-Битола-Охрид автобусот вкупно изминал 246 km . Од Скопје до Битола автобусот изминал 176 km , а од Прилеп до Охрид изминал 111 km . Колку километри автобусот изминал од Прилеп до Битола?
107. На права алеја во паркот се поставени клупи со должина 2 метри. Пет клупи се поставени на 30 метри. Колку метри се потребни за да се постават 25 клупи?
108. На семафор еден зад друг застанале два автобуси и неколку автомобили. Секој автобус е долг 12 m , а секој автомобил е долг

3 m. Растојанието меѓу секои две превозни средства е 1 m. Колоната е долга 37 m. Колку автомобили има во колоната?

109. Дедо Марко за прихрана со сено еден зад друг во колона ги наредил животните: коњ, овен, коњ, овен итн. Секој коњ зафаќа 3 m, а секој овен зафаќа 1 m. Во колоната има 15 животни. Колку е долга колоната?

110. Андреј се враќа од училиште со брзина од 1 метар во секунда. Кога се наоѓал на 280 метри до домот, кучето Лиса му се затрчало во пресрет со брзина 3 метри во секунда. На колку метри од домот ќе се сретнат Андреј и кучето Лиса?

111. Пабло во базен долг 50 m препливал растојание од 100 m за 110 секунди, а во базен долг 25 m истото растојание го препливал за 2 минути. Колку време му е потребно на Пабло за 100 m да преплива во базен долг 100 m? Секое дејствие Пабло ги прави со една иста брзина, а различните дејствија со различни брзини.

112. Турист за 9 дена одејќи со една иста брзина поминал 120 km. Првата половина од патот ја поминал за 3 дена, при што пешачел по 4 часа на ден. По колку часа на ден пешачел туристот во втората половина од патот, ако е познато дека тој секој ден пешачел ист број часови?

113. Шест јајца имаат маса 300 g. Колкава е масата на 40 јајца?
(Сите јајца имаат еднаква маса.)

114. Со помош на три ваги се измерени неколку метални топки. Резултатите од мерењата се прикажани на долните цртежи. Ако топките со една иста боја имаат еднаква маса, колкава е масата на една црна топка?



115. Фунта и унца се англиски мерки за маса. Масата на една фунта е 16 унци. Масата на три унци бонбони е 84 грама. Колку грама е масата на две фунти компири?
116. Кошница со едно јаболко во неа има маса 340 g , кошница со 4 јаболки во неа има маса 580 g , а кошница со 3 јаболки и 2 круши во неа има маса 670 g . Колкава е масата на една круша?
Сите јаболки имаат еднакви маси и сите круши имаат еднакви маси.
117. Кошница со 1 јаболко во неа има маса 360 g , кошница со 6 јаболки има маса 710 g , а кошница со 2 јаболки и 3 круши има маса 700 g . Колкава е масата на една круша? (Сите јаболки имаат еднакви маси, сите круши имаат еднакви маси.)
118. Во 39 полни канистери има 600 литри вода. Канистерите се од 15 и од 16 литри. Колку канистери биле од 15 литри?
119. На 1 ноември попладне прасето на дедо Стојан тежи 80 kg . Колку килограми ќе тежи прасето на дедо Стојан на 20 јануари следната година, ако на секои 24 часа неговата тежина се зголемува за 1 kg ?
120. Учениците од едно одделение се вклучиле во акција за собирање на стара хартија за рециклирање. Дванаесет ученици донеле по 6 kg хартија, а преостанатите 14 ученици донеле по 7 kg хартија. Колку дрва спасиле учениците, ако рециклирањето на 1105 kg хартија спасува 13 дрва?
121. Во една продавница имало неколку вреќи со вкупно 144 kg бадеми. Во текот на месец јуни од секоја вреќа биле продадени по 6 kg бадеми. На крајот на месецот се покажало дека вкупното количество бадеми се намалило четири пати, а половина од вре-

ките биле празни. Во текот на месец јули од секоја од преостанатите вреќи биле продадени уште по 2 kg бадеми. Колку килограми бадеми биле продадени во текот на двата месеци?

122. Во продавницата на млекарата „Мариовски чобан“ 250 g сирење чини 2 евра помалку, отколку половина килограм сирење од истиот вид, а 1 kg кашкавал чини 12 евра повеќе отколку 250 g грама кашкавал од истиот вид. Стојан купил 12 kg сирење и 5 kg кашкавал. Колку пари му вратиле на Стојан, ако тој за купената стока на продавачот му дал 2 банкноти од по 100 евра?

123. Дедо Стојан произвел 1 t и 60 kg компири и сакал да ги стави во вреќи кои собираат 40 kg и 50 kg компири. Кој е најмалиот број вреќи кои може да ги искористи дедо Стојан?

II.5. РАЗНИ ЗАДАЧИ

124. На куќата на Павле застанале неколку врапчиња. По две минути 5 од врапчињата одлетале, а по уште две минути три врапчиња слетале на куќата и сега имало вкупно 12 врапчиња. Колку врапчиња биле на почетокот?

125. Бојан, Павле и Александар се гаѓале со снежни топки. Бојан фрлил 20 топки, Павле фрлил 14 и Александар фрлил 8 топки. Познато е дека Павле промашил со сите 14 топки. Александар фрлал топка само како одговор кога ќе бил погоден со некоја топка, а Бојан погодил со половина од топките кои ги фрлил. Колку топки го погодиле Павле?

126. Андреј, Горјан и Пабло вкупно изеле 9 кифлички. Андреј и Горјан заедно изеле 6 кифлички, а Пабло и Горјан заедно изеле 5 кифлички. Кое дете изело најмногу кифлички?

127. На почетната постојка на еден автобус се качиле возачот и 7 патници. На втората постојка се симнале 5 патници и се качиле 12 луѓе, меѓу кои и 3 контролори. На следната постојка се симнале контролорите и уште еден патник, а се качил само Горјан. Колку луѓе имало тогаш во автобусот?
128. На почетната постојка на еден автобус се качиле возачот и 25 патници. На втората постојка се симнале 7, а се качиле 12 луѓе меѓу кои пет пожарникари. На следната постојка слегле пожарникарите и уште еден патник, а се качиле три патници. Колку луѓе имало потоа во автобусот?
129. Ана и Кристина заедно набрале 18 јаболки. Ако Кристина и даде на Ана три од своите јаболки, тогаш таа ќе има две јаболки помалку од Ана. Колку јаболки набрало секое девојче?
130. Иван и Петар заедно уловиле 16 риби, Иван и Марко заедно уловиле 17 риби, а Петар и Марко заедно уловиле 19 риби. Колку риби уловило секое дете?
131. Иван и Марко се другари. Бабата на Иван бојадисала 19 јајца, едно јајце зачувала за себе, а преостанатите подеднакво ги поделила на своите шест внуци. Бабата на Марко бојадисала 27 јајца, три јајца зачувала за себе, а преостанатите јајца подеднакво ги поделила на своите осум внуци. Кој добил повеќе јајца, Иван или Марко?
132. Матеј во текот на една седмица требало да реши 121 задачи. Тој од понеделник до петок секој ден решавал по 15 задачи, а во саботата решил 20 задачи. Колку задачи му останале да реши во неделата?
133. Марија одгледува цвеќе. Таа на пазар однела определен број букети за продавање. Марија ги продала букетите во три дена. Првиот ден таа продала половина од сите букети и уште 2 букета,

вториот ден продала половина од остатокот и уште 3 букети, а третиот ден ги продала половината од новиот остаток и последниот букет. Определи го бројот на букетите кои Марија ги однела на пазар.

134. На една плажа има пет тушеви. Меѓу секои два туша има по 25 лежалки. Колку лежалки има на плажата?

135. На болниот мачор Дивко ветеринарот препишал да се дадат следниве лекови: првите три дена по 2 таблети од видот А и по една таблета од видот Б, следните шест дена по 1 таблета од видот А и по 1 таблета од видот Б, па следните 5 дена по 2 таблети од видот Б. Колку таблети се потребни за лечењето на Дивко?

136. Лилјана и Мирјана решавале задачи. Секој ден Лилјана решава по 3 задачи, а за истото време Мирјана решава по четири задачи. Коку задачи решило секое девојче, ако двете заедно решиле 112 задачи?

137. Марија има 16 гердани со по 9 бисери на секој од нив. Колку гердани со по 12 бисери на секој од нив може да направи Марија од овие бисери?

138. Маја има 18 гердани со по 8 бисери. Таа ги растурила герданите и составила гердани со по 9 бисери. Колку гердани составиле Маја?

139. Марија има 12 гердани со по 24 бисери во секој гердан. Таа ги однижала бисерите и од нив направила нови гердани со по 16 бисери. Колку такви гердани направила Марија?

140. Дедо Стојан има кокошки и кози, вкупно 8. Клуновите на животните се 6 пати помалку од нозете. Колку крила имаат животните на дедо Стојан?

- 141.Трговец располага со складишта за чување стока. Тој планира да купи определен број палети со стока и подеднакво да ги распредели во сите свои складишта. Сакајќи да има најмалку трошоци за превоз на палетите, трговецот пресметал дека ако искористи 8 складишта помалку од складиштата со кои располага, тогаш во секој склад кој ќе го користи ќе треба да стави уште по 16 палети стока. Исто така, пресметал дека ако купи помалку 60 палети со стока, тогаш во секое складиште ќе распредели по 5 палети помалку. Колку палети планирал трговецот да купи на почетокот?
- 142.Две верверички заедно имаат 44 ореви. Секоја од нив изела по 6 ореви, по што поголемата верверичка имала три пати повеќе ореви од помалата. Колку ореви имала секоја верверичка на почетокот?
- 143.На еден тест со 20 прашања за точен одговор се даваат 7 бодови, за грешен одговор не се добиваат бодови и за неодговорено прашање се добиваат 3 бодови. Колку бодови освоила Анета на тестот, ако таа одговорила само 11 прашања, од кои на 6 дала точен одговор?
- 144.Фудбалска екипа изиграла 31 натпревар, при што во 7 од нив играла нерешено и одвоила 64 бодови. Колку натпревари загубила оваа екипа? (Во фудбалот за победа се добиваат 3 бодови, за нерешен резултат се добива 1 бод и за пораз не се добиваат бодови.)
- 145.Горјан, Андреј и Пабло заедно имале 30 топчиња. Горјан му дал на Андреј 4 топчиња, Андреј му дал на Пабло 2 топчиња и на крајот Пабло му дал на Горјан 3 топчиња, по што сите тројца имале еднаков број топчиња. Колку топчиња имало секое дете на почетокот?
- 146.Сметајќи од ист ден (момент), 5 кокошки можат да снесат 60 јај-

ца за 21 ден. За колку дена, сметајќи од ист ден (момент), 6 кокошки можат да снесат 72 јајца?

147. Скалите од приземје до првиот кат имаат 20 стапала, а скалите меѓу секои два погорни ката имаат по 18 стапала. Меѓу кои два ката е Филип, кој тргнал од приземје и искачил 80 стапала?

148. Кога влегол на час учителот забележал дека на клупите вкупно има 39 тетратки. Пред 8 ученици имало по три тетратки, пред 5 имало по една тетратка, а пред преостанатите ученици имало по 2 тетратки. Колку ученици биле присутни на часот?

149. Тројца пријатели заедно имаат 24 чоколадни бонбони. Секој има онолку бонбони колку што имал години пред три години. Најмладиот си оставил половина од бонбоните, а преостанатите бонбони ги поделил на пријателите на два еднакви дела. Потоа средниот по возраст си оставил половина од бонбоните, а преостанатите бонбони ги поделил на пријателите на два еднакви дела. На крајот истото го направил и најстариот, по што сите тројца имале еднаков број бонбони. Колку години има секој од пријателите?

150. Петар во новата тетратка го опишал неговиот излет на планината Кораб, на кој бил заедно со својата другарка Весна. Во текстот тој неколку пати го искористил зборот „опасност“. Учителката му кажала дека зборот се пишува „опасност“ и го натерала неколку пати правилно да го запише зборот за да го запамети. Зборовите „опасност“ и „опасност“ во тетратката на Петар биле запишани 23 пати, а буквата „т“ била употребена 31 пат. Колку пати Петар го запишал зборот „опасност“?

151. Група од пет момчиња и едно девојче требало заедно да решат 120 задачи. Секое момче решило по 6 задачи помалку од девојчето. Колку задачи решило секое дете?

152. За новогодишните празници Андреј и Пабло имаат исто домашно по математика. Андреј решил 37 задачи, а Пабло решил 9 задачи. На Пабло му останува да реши пет пати повеќе задачи отколку на Андреј. Од колку задачи се состои домашната?
153. Сашо заедно со 24 ученици бил на кроз. Ако половината од учениците кои биле побрзи од Сашо, се пласирале по него, тогаш натпреварувачите кои се поспори од Сашо, ќе бидат три пати повеќе од натпреварувачите кои се побрзи од Сашо. На кое место се пласирал Сашо?
154. Андреј предвидел еднаков број бонбони за себе и своите три пријатели. Меѓутоа, Бојан изел 3 бонбони повеќе од предвиденото, Васил изел 2 бонбони повеќе од предвиденото и Горјан изел 2 бонбони повеќе од Васил. Така за Андреј не останале бонбони. Колку бонбони биле на почетокот?
155. Пабло, Горјан и Андреј заедно имале 33 топчиња. Горјан имал едно топче повеќе од Андреј, кој имал два пати помалку топчиња од Пабло. Колку топчиња имало секое дете?
156. Четири мачки вкупно фатиле 11 глувци. Секоја мачка фатила различен број глувци. Колку глувци фатила секоја мачка?
157. За 3 дена 6 орли фаќаат 72 желки. Колку желки ќе фатат 2 орли за 12 дена? (Секој орел за исто време фаќа еднаков број желки.)
158. На еден натпревар Ана, Елена и Јана заедно освоиле 41 поен. Поените на Ана се два пати помалку од поените на Елена и се за 5 поени помалку од поените на Јана. Колку поени освоило секое девојче?
159. Учениците од четврто одделение на едно училиште биле во различни времиња на три екскурзии, при што некои ученици биле на екскурзија повеќе од еднаш. На првата екскурзија биле A , на

втората B и на третата C ученици. Бројот на учениците кои биле точно на една екскурзија е еднаков на бројот на учениците кои биле точно на две екскурзии и е еднаков на бројот на учениците кои биле на трите екскурзии. Определи го бројот на учениците кои биле на трите екскурзии, ако

$$A = (1005 : 5) \cdot 7 + (12003 - 7359) : 8 - 1890 ,$$

$$B = (1 + 2 + 3 + \dots + 22 + 23) : 4 \text{ и}$$

$$C = 2019 \cdot 23 + 1991 \cdot 13 - 1988 \cdot 13 - 2018 \cdot 23 + 4 .$$

160. Иван, Дамјан и Павле имаат определен број топчиња. Дамјан има два пати повеќе топчиња од Иван, а Павле има повеќе топчиња од Иван. Тројцата му дале еднаков број од своите топчиња на Костадин, кој пред тоа немал топчиња. Така Иван веќе немал топчиња. Потоа Дамјан на Иван му дал пет пати помалку од топчињата кои му преостанале, а Павле му дал определен број топчиња на Иван, по што Иван, Дамјан и Павел имале по 12 топчиња. Колку топчиња имал секој на почетокот и колку топчиња добил Костадин?

161. Три другарки Ана, Бојана и Олгица заедно имаат 19 чоколади. Секое девојче има различен непарен број чоколади. Бојана има најмногу, а Ана има најмалку чоколади. Ана и Олгица заедно имаат повеќе чоколади од Бојана. Колку чоколади има секое девојче?

162. На еден математички натпревар бројот на секоја задача соодветствува на поените кои се добиваат доколку задачата е точно решена. На пример, за задачата 4 се добиваат 4 поени, за задачата 2 се добиваат 2 поени итн., а за нецелосен или грешен одговор не се добиваат поени. На натпреварот може да се освојат најмногу 21 поен. Анета освоила 13 поени. Колку задачи точно решила Анета?

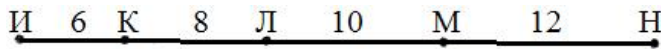
163. Павел, Васил и Никола нацртале 24 цртежи. Павел нацртал два пати повеќе цртежи од Никола, а Васил нацртал помалку црте-

жи од Павел, но повеќе од Никола. Колку цртежи нацртало секое дете?

164. Во една просторија неколку луѓе седат на триножни и четириножни столчиња. Вкупниот број нозе и ногалки е 26. Колку мина има во собата ако сите столчиња се зафатени и на секое столче седи по еден човек?

III ГЕОМЕТРИЈА

1. На права се означени точките A, B, C, D во овој редослед и важи $\overline{AD} = 2 \text{ dm } 20 \text{ mm}$, $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ и $\overline{CD} = 60 \text{ mm}$. Определи го растојанието меѓу средините на отсечките AD и BC .
2. На една права се нанесени 10 точки при што растојанието меѓу секои две соседни точки е 1 cm . На друга права исто така се нанесени 10 точки, при што растојанието меѓу првите две точки е 1 cm , а секое следно растојание меѓу две соседни точки е поголемо за 5 mm од претходното. Колку пати растојанието меѓу првата и последната точка од првата права е помалко од растојанието меѓу првата и последната точка од втората права?
3. Селата И, К, Л, М и Н се наоѓаат на еден пат, како што е прикажано на цртежот. Дадени се растојанијата меѓу секои две соседни села.



На патот треба да се постави бензиска станица. На колку километри од селото И треба да е бензинската станица, за да збирот на растојанијата од секое од селата до бензинската станица биде најмал?

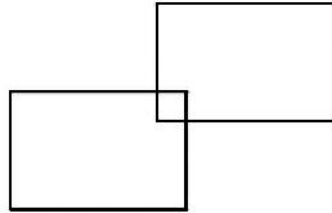
4. Меѓу куќите на Волчко и Меца живеат Зајко, Лиса и Ежко. На куќата на Волчко се напишани растојанијата во метри од неговата куќа до куќите на Зајко, Лиса и Ежко. На куќата на Меца се напишани растојанијата во метри од нејзината куќа до куќите на Зајко, Лиса и Ежко. За роденденот Зајко посакал од Волчко и Меца да му подарат вкупно толку моркови, колку што метри е растојанието од куќата на Волчко до куќата на Меца. На просла-

вата Волчко рекол: „Јас не знам колкаво е растојанието од мојата куќа до куќата на Меца и затоа ги собрав растојанијата од мојата куќа до куќите на Зајко, Лиса и Ежко, го поделив добиениот збир на 2 и ти носам 420 моркови“. Меца рекла: „И јас направив исто, но со растојанијата од мојата куќа до куќите на Зајко, Лиса и Ежко, па ти носам 531 морков“. Определи го растојанието меѓу куќите на Волчко и Меца.

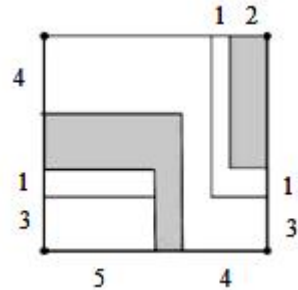
5. Должините на страните на еден триаголник се три последователни непарни броеви, а должината на најмалата страна е еднаква на 3 cm . Определи го периметарот на овој триаголник.
6. Квадрат со страна 16 cm , со помош на хоризонтални и вертикални отсечки е поделен на 16 помали квадрати. За колку сантиметри е поголем збирот на отсечките со кои е извршена поделбата од периметарот на квадратот?
7. Квадрат има должина на страна 25 dm , а должината на страната на рамностран триаголник е 2 m . Определи ја разликата на нивните периметри.
8. Периметарот на разностран триаголник е еднаков на периметарот на квадрат со страна 9 cm . Должините на страните на триаголникот се последователни парни броеви. Кои се тие броеви?
9. Должините на страните на два рамнострани триаголници соодветно се еднакви на 4 cm и 8 cm . Определи ја плоштината на квадратот чиј периметар е еднаков на збирот на периметрите на двата триаголника.
10. Периметарот на еден разностран триаголник е еднаков на периметарот на квадрат со должина на страна 15 cm . Во низата броеви, кои се делат со 5, должините на страните на триаголникот се на три последователни места. Определи ги должините на

страните на овој триаголник.

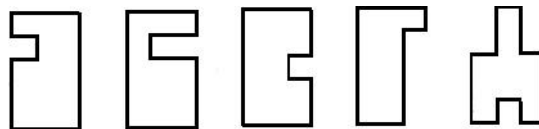
11. Два еднакви правоаголника имаат заеднички дел квадрат (цртеж десно). Страната на квадратот е шест пати пократка од големата страна на правоаголникот, а помалата страна на правоаголникот е четири пати подолга од страната на квадратот. Периметарот на добиената фигура е еднаков на 108 cm . Определи ја плоштината на квадратот.



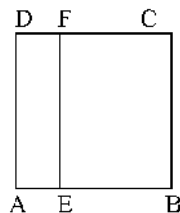
12. Периметарот на еден квадрат е еднаков на најголемиот трицифрен број запишан со различни парни цифри. Определи ја плоштината на овој квадрат.
13. Правоаголна градина со должина 11 m и ширина 5 m е заградена со жичана ограда. Определи ја плоштината на квадратната градина која може да биде заградена со истата ограда. (Оградата треба цела да се искористи.) Која градина има поголема плоштина, правоаголната или квадратната, и за колку?



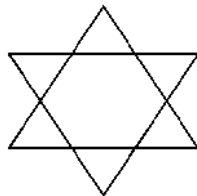
14. На цртежот десно е прикажан квадрат со должина на страна 10 cm . Определи го збирот на периметрите на сивите делови.
15. Фигурите прикажани на долните цртежи имаат еднакви висини и еднакви ширини. Која фигура има најмал периметар?



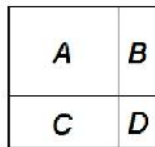
16. Периметарот на квадратот $ABCD$ прикажан на цртежот десно е еднаков на 16 cm , а периметарот на правоаголникот $Aefd$ е еднаков на 10 cm . Определи го периметарот на правоаголникот $EBCF$.



17. Периметарот на централниот шестаголник на цртежот десно е еднаков 18 cm , а шесте мали триаголници над него се рамнострани триаголници. Определи го периметарот на вака добиената шесткрака ѕвезда.



18. Периметарот на еден квадрат е еднаков на 1 dm . Колку милиметри квадратни е плоштината на овој квадрат?
19. Квадрат со дожина на страна 10 cm е разделен на четири правоаголници A, B, C и D . Плоштините на правоаголниците A, B, C се:



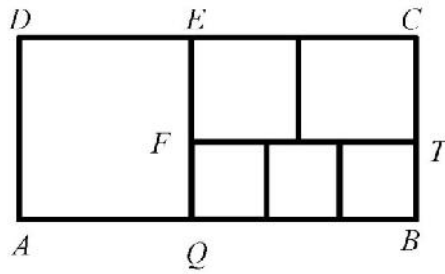
$$P_A = 42\text{ cm}^2, P_B = 18\text{ cm}^2, P_C = 28\text{ cm}^2,$$

соодветно. Определи ја плоштината на правоаголникот D .

20. Правоаголник со плоштина 252 cm^2 е добиен со составување на седум еднакви квадрати. Определи го периметарот на овој правоаголник.
21. Правоаголник со периметар 96 cm е составен од седум еднакви квадрати. Колкава е плоштината на овој правоаголник?
22. Подот на една соба е во форма на квадрат и е покриен со квадратни плочки, наредени шаховски: бела, црна, бела, црна итн. Бројот на црните плочки е 40. Колку бели плочки се употребени?

23. Горјан треба да ги поплочи подот и сидовите на купатило со должина 3 m , ширина 270 cm и висина 240 cm , кое има врата со димензии 210 cm и 90 cm и нема прозорци. Тој сака поплочувањето да го направи со квадратни плочки со страна 30 cm . Колку плочки му се потребни на Горјан? Ако еден во пакет има 11 плочки, колку пакети треба да купи Горјан?

24. Правоаголникот $ABCD$ се состои од шест квадрати, при што трите мали се еднакви, како и двата средни (цртеж десно).

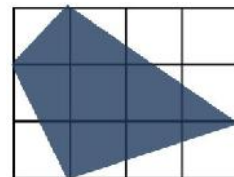


- а) Ако плоштината на правоаголникот $QBTF$ е еднаква на 12 cm^2 , определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

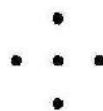
- б) Ако плоштината на квадратот $AQED$ е еднаква на 100 cm^2 , определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

25. Должината на страната на квадрат изразена во cm е природен број, а плоштината му е 1 cm^2 поголема од плоштината на правоаголник чии должини на страни изразени во cm се едноцифрени непарни броеви. Периметарот на рамностран триаголник е еднаков на збирот на периметрите на квадратот и правоаголникот, а должината на неговата страна изразена во сантиметри е природен број. Определи ја должината на страната на рамностраниот триаголник.

26. Фигурата прикажана на цртежот десно претставува сребрен лист поделен на 12 квадратчиња. Секое квадратче тежи по 10 грама. Колку грама тежи затемнетиот дел на фигурата?



27. Определи го бројот на триаголниците чии темиња се точките прикажани на цртежот десно.



28. Определи го бројот на квадратите чии темиња се точките прикажани на цртежот десно (точките во секој ред и во секоја колона се наоѓаат на еднакво растојание).



29. Во колку правоаголници на цртежот десно го има знакот ♡?



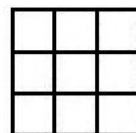
30. Колку правоаголници на фигурата прикажана на цртежот десно имаат ♡?



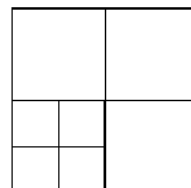
31. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно и кои имаат само по една ѕвездичка.



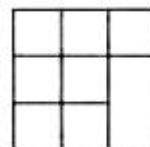
32. Определи го бројот на квадратите кои ги содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



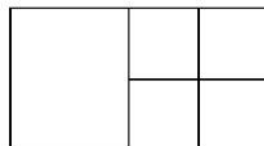
33. Колку квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



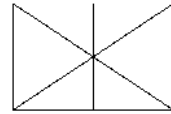
34. Определи го бројот на квадратите кои ги содржи фигурата прикажана на цртежот десно.



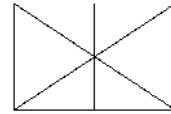
35. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани во фигурата која е прикажана на цртежот десно. (Квадратот е правоаголник.)



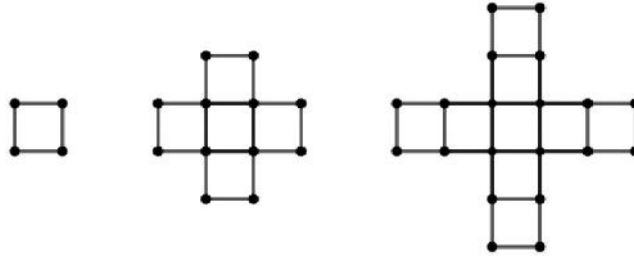
36. Колку правоаголни триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



37. Колку триаголници содржи фигурата која е прикажана на цртежот десно?



38. Горјан реди фигури од кибритени чкорчиња во следната форма:



Фигура 1

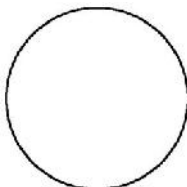
Фигура 2

Фигура 3

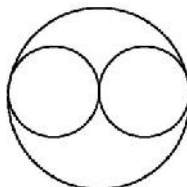
...

- Колку квадратчиња има во фигурата со реден број 2019?
- Колку кибритени чкорчиња се потребни за фигурата со реден број 2019?
- Должината на едно кибритено чкорче е 5 cm . Определи го периметарот на фигурата со реден број 2019.

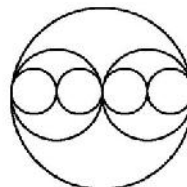
39. На колку делови глобусот е поделен од екваторот и два меридијани?
40. На колку делови е поделен глобусот со две паралели и три меридијани?
41. Откриј го правилото според кое се добива секоја од фигурите во низата прикажана на долните цртежи. Ако низата фигури се продолжи така што се запазува тоа правило, од колку кружници ќе се состои шестата фигура?



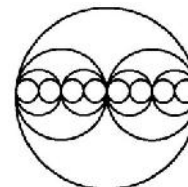
Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ

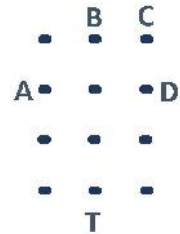
Секоја задача од овој дел се решава со помош на Венов дијаграм, за што пресметикте се дадени во решенијата на задачите. Нацртај ги дијаграмите.

1. Во спортската секција има десет ученици и секој од нив игра или тенис или пинг-понг. Четири од овие ученици играат и пинг-понг и тенис. Седум од десетте ученици играат пинг-понг. Колку деца играат тенис?
2. Во стационарот за животни има 10 мачки. Од нив 4 не сакаат риба, 5 не сакаат кренвишли, 2 не сакаат ниту риба ниту кренвишли. Колку мачки сакаат и риба и кренвишли?
3. Во училиштето на Горјан има 60 учители. Од нив кафе сакаат 39, чај сакаат 28, а 16 сакаат и чај и кафе. Колку учители во училиштето на Горјан не сакаат ниту кафе, ниту чај?
4. Во училиштето на Иван има 50 ученици во четврто одделение. Од нив 20 тренираат фудбал, 22 тренираат пливање, а 16 не тренираат ниту фудбал, ниту пливање. Колку ученици од четврто одделение тренираат и фудбал и пливање?
5. Секој од 27-те ученици во едно одделение во текот на летото ќе оди на езеро или на планина. На езеро ќе одат 13 деца, а на планина ќе одат 18 деца. Колку деца ќе одат и на езеро и на планина?

6. Во одделението на Филип има 21 ученик. Од нив 12 ученици не сакаат чај, 8 не сакаат млеко, а 5 сакаат и чај и млеко. Колку ученици во одделението на Филип не сакаат ниту чај ниту млеко?

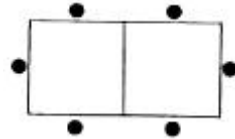
IV.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

7. За цртежот десно стрелката ја означува насоката, а бројот до неа го означува бројот на чекорите во таа насока, при што чекор е растојанието до најблиската точка во покажаната насока. На пример, ако A помине пат $(\rightarrow 2)(\uparrow 1)$ тогаш таа ќе се најде во C . Во која точка ќе се најде турист T откако ќе го помине патот

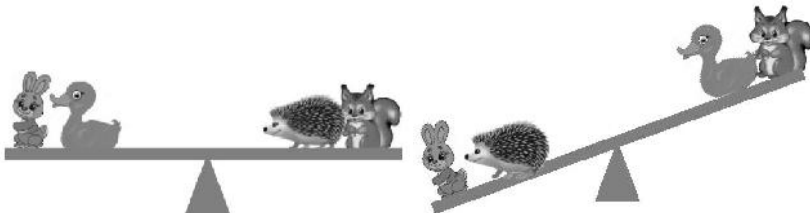


$$(\uparrow 2)(\leftarrow 1)(\downarrow 1)(\rightarrow 2)(\uparrow 2).$$

8. Во ресторан околу една квадратна маса седат 4 луѓе. На цртежот десно е показано како 6 луѓе се седнати околу 2 споени маси. Определи го најмалиот број такви маси што треба да се нареди во еден ред за да може да седне група од 12 луѓе.



9. Зајачето и пајчето имаат иста маса како ежето и верверичката. Зајачето и ежето имаат поголема маса од пајчето и верверичката. Кој има поголема маса, зајачето или верверичката?



10. Во продавницата има само пет чинии, од кои две се исти. Кои

чини се исти:



11. Околу тркалезна маса има седум столчиња на кои се на седумте цуџиња. Тие седнале на столчињата така што точно n цуџиња седнале на своите столчиња. Дали n може да биде еднаков на:
а) три, б) четири, в) пет, г) шест.
12. Илија, Марко и Павле се родени на 19 ноември, 27 ноември и 3 декември, соодветно. Тие решиле заедно да го слават роденденот во оној ден кога збирот на деновите меѓу родендените и денот на прослава ќе биде најмал. Кој е тој ден?
13. Девет девојчиња и петнаесет момчиња се поделиле во групи по тројца. Во секоја група има $\bar{y}$ момче и девојче. Во колку групи момчињата се повеќе од девојчињата?
14. Ана, Билјана, Вања, Галија и Донка седнале во слаткарница околу тркалезна маса. Ана не била до Билјана, Галија била до Донка, а Билјана не била до Галија. Кои девојчиња биле од двете страни на Вања?
15. Иван, Никола, Стефан и Павле имале различен број топчиња. Павле имал 1 топче, а другите тројца имале 2, 3 и 4 топчиња. Момчињата седнале на четирите страни на квадратна маса. Павле седнал лево од Никола, Иван седнал десно од момчето кое што имало 4 топчиња. Стефан седнал наспроти Никола и тој нема 3 топчиња. Колку топчиња има Иван?
16. На 4 гранки на едно дрво има 13 врапчиња. Што може со сигурност да се тврди?
а) На секоја гранка има барем по 3 врапчиња.

- б) Постои гранка на која има барем 4 врапчиња.
- в) Нема гранка на која има 5 врапчиња.
- г) Има гранка со само 1 врапче.
- д) На една гранка има 4 врапчиња, а на преостанатите три има по 3 врапчиња.

17. Во училницата било скршено стакло. Горјан го испитувал случајот и заклучил дека стаклото било скршено од еден од учениците: Ацо, Бојан и Васил. Ацо кажал дека Бојан го скршил стаклото. Бојан и Васил нешто објасниле, но Горјан ги заборавил деталите. Сепак, Горјан дознал дека тој што му ја кажал вистината го скршил стаклото. Кој го скришил стаклото?
18. Четворица пријатели договараат средба. Секој предложил место и ден: на фитнес во недела, во слаткарница во петок, на фудбал во недела и во слаткарница во сабота. Компромис бил постигнат, така што точно по едно од барањата на секој е задоволено. Кога и каде е средбата?
19. Во ред еден до друг се наредени 2014 луѓе, секој од кои е или лажливец (кој секогаш лаже) или витез (кој секогаш ја говори вистината). Секој тврди: „Лево од мене има повеќе лажливци отколку десно.“ Колку лажливци има во редот?
20. Фрлив три коцки за играње и на трите паднаа три различни броја точки. Од збирот на два од броевите го одзедов третиот и го добив бројот 10. Кои броеви точки паднаа на коцките?
21. Три деца играат домино. Секое дете зело по една домино плочка од сетот и ги дало следниве три искази:
- 1) На моето домино збирот на точките 4.
 - 2) На моето домино има половинка без точки.
 - 3) На моето домино има еднаков број точки на секоја половинка.
- Кои домино плочки биле земен од сетот, ако сите деца два пати кажала вистина, а еднаш излагале?

22. Симон и Бојан се подготвуваат за натпревар по математика. Бојан го прашал Симон колку задачи решил. Симон му одговорил со шифра: „Решив $43 + 57 = 207$ задачи.“ и му кажал на Бојан дека секоја цифра е зголемена или намалена за 1. Колку задачи решил Симон?
23. Сашо, Коле, Маја и Олгица живеат во петкатна зграда на различни катови. При една средба пред зградата, Сашо рече: „Ја живеам над сите останати.“, а Маја на тоа додаде „Јас сум во средината.“ Потоа, Коле се надоврза: „Живеам над Маја и под Олгица“, на што Олгица додаде: „Коле излага. Меѓу мене и Коле има кат на кој никој од нас не живее.“
Се покажало дека тие што живеат на непарните катови излагале, а тие на парните говореле вистина. Кој на кој кат живее?
24. Двете паралелки 4^a и 4^b заедно имаат 48 ученици. За патрониот празник учениците од 4^a се построиле во 6 реда по 4 ученици. Бројот на редовите во 4^b е за 5 поголем од бројот на учениците во секој ред. Во колку редови се построиле учениците од 4^b одделение?
25. Мартин се почесто плаќа со кредитната картичка. Секоја картичка има пин-код кој е четирицифрен број. Колку можности има за пин-кодот на картичката на Мартин, ако четирите цифри на пин-кодот се различни, збирот на цифрите е еднаков на 8 и двоцифрениот број од првите две цифри (во истиот редослед) е еднаков на производот на другите две цифри?



резултатите во трите натпревари.

27. Во кутија има 3 црвени, 4 сини и 4 зелени топчиња. Кој е најмалиот број топчиња што треба да го извадime без да гледаме, за да сме сигурни дека сме извадиле топчиња од сите бои?
28. Катерина има 5 исти пара бели патики и 5 исти пара сини патики. Колку патики треба да извади без да гледа, за да е сигурна дека меѓу нив има пар патики, лева и десна, од една иста боја?
29. Во една торба има бели, зелени и црвени топчиња. Бели и црвени вкупно има 29, црвени и зелени вкупно има 32, зелени и бели вкупно има 35. Кој е најмалиот број топчиња што треба без да се гледа да се извадат од кутијата за да сме сигурни дак сме извадиле топчиња со две различни бои?
30. Во една кутија има неспарени чорапи од 3 пара зелени, 2 пара црвени и 5 пара сини чорапи, кои се разликуваат само по боја. Кој е најмалиот број чорапи кои, без гледање, треба да ги извадиме за да сме сигурни дека сме извадиле пар еднобојни чорапи?
31. Вера во торбата има 3 зелени, 2 сини, 5 црвени и 2 кафеави моливи. Определи го најмалиот број моливи кои што Вера без да гледа треба да ги извади од торбата за да биде сигурна дека меѓу нив ќе има црвен молив.
32. Во една кутија има 16 црвени, 18 бели и 19 сини топчиња. Кој е најмалиот број топчиња што треба го земеме без да гледаме за да сме сигурни дека сме зеле:
 - а) барем едно сино топче,
 - б) барем по едно топче од секоја боја?
33. Околу базенот има дваесет и пет деца. Ако избереме било кои четири деца, тогаш барем едно од нив знае да плива. Кој е најго-

лемиот можен број деца околу базенот, кои не знаат да пливаат?

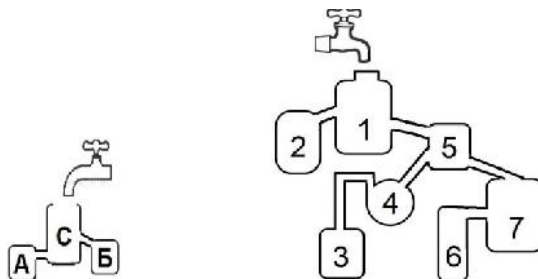
34. На бреговите на една многу кривулеста река живеат Марко (М), Ратко (Р) и Кирил (К). Алиса добила карта на дел од областа во која живеат децата.



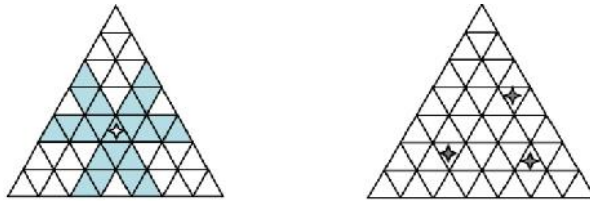
Дали таа може да определи кои деца живеат на еден брег, а кои живеат на различен брег? Ако одговорот е позитивен покажи кои деца живеат на еден брег.

(Реката е непрекината линија, која самата себе не се сече и нема гранки, но не е познато како таа тече. Во областа нема други водотеци.)

35. Ако од чешмата се полни системот садови кој е прикажан на цртежот лево, прво ќе се наполни садот А. Кој сад прв ќе се наполни ако од чешмата се полни системот садови кој е прикажан на цртежот десно? (Воздухот не пречи во полнењето на садите.)



36. Музејот во волшебниот град Оз е поделен на триаголни сали. Волшебен фенер поставен во една сала ги осветлува сите сали кои се наоѓаат во три правци (цртеж лево). Ако било која сала е осветлена од три страни, таа станува невидлива. Три фенери се поставени како на цртежот десно. Кои сали се невидливи?



37. Градскиот парк во градот Оз е во форма на рамностран триаголник и е поделен на триаголни сектори (цртеж лево). Ако во било кој сектор ставиме фенер, тогаш тој ќе ги осветлува алеите во три насоки, како што е прикажано на цртежот десно.



Осветли го целиот парк со само три фенери.

38. За да се изигра една игра на автоматот потребно е истовремено да се стави по 1 монета во три кругови кои се темиња на триаголник кој го содржи централниот круг. Во секој круг се наоѓаат броевите на монетите кои се ставени во тој круг (екранот на средниот круг е скршен и броевите не се гледаат). Горјан почнал да игра кога во круговите биле броевите прикажани на левиот цртеж, а со играње завршил кога во круговите биле броевите прикажани на цртежот десно. Колку пати играл Горјан?



39. Скакулец се движи по скала со повеќе од 30 стапала, така што во еден скок прескокнува или 3 стапала нагоре или 4 стапала надолу. На пример, ако се наоѓа на 10-тото стапало тој со еден скок може да дојде на 14-тото стапало или на 5-тото стапало. Скакулецот се наоѓа на првото стапало. Кој е најмалиот можен број скокови со кои тој може да дојде на 20-тото стапало?

40. Правоаголник долг 14 cm и широк 1 cm е поделен на 14 квадратни клетки 1×1 . Во центарот на најлевата клетка се наоѓа болва B . Првиот скок на B е 1 cm и таа доаѓа во центарот на соседната клетка. Секој следен скок се зголемува за 1 cm и B скока во центарот на некоја клетка од кутијата. Кој е најмалиот број скокови кои и се потребни на B за да дојде до центарот на најдесната клетка?
41. На патот од дома до училиштето Климе има три премини на улица со семафори. Од првиот до вториот семафор Климе оди за 2 минути и од вториот до третиот семафор исто така оди за 2 минути, при што улиците ги минува за 5 секунди. Климе знае дека на секој семафор жолто свети 1 минута, а зелено и црвено светат подеднакво време. На првиот семафор зелено и црвено светат по 1 минута, на вториот светат по 2 минути и на третиот светат по 3 минути. Климе знае дека во 8:00 часот на сите три семафори едновременно светнува зелено светло. Во колку часот Климе треба да дојде пред првиот премин, за да стаса на училиште без да се задржува на премините?
42. Од 23 на изглед еднакви монети една монета е неисправна и е потешка од преостанатите. Покажи како на вага без тегови со само три мерења може да се најде неисправната монета.

IV.3. ДОПОЛНУВАМЕ ШТО НЕДОСТАСУВА

43. Горјан пополнува 4×4 табела со броевите 1, 2, 3 и 4, при што во секое поле запишува по еден ред, но така што во секој ред и секоја колона запишаните броеви се различни. Дел од броевите Горјан веќе ги запишал. Помогни му на Горјан да ја пополни табелата.

1	2	3	4
2			1
3			
4			

44. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно треба да се запише по една од буквите А, Б, В или Г, така што во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали се запишани различни букви. Која буква треба да се запише на местото на прашалникот?

А			
		Б	
			?
Г			

45. Пабло во табела 4×4 ги запишувал броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, секоја колона и во секој аголен 2×2 квадрат треба да запише различни броеви. Некои броеви се веќе запишани (цртеж десно). Помогни му на Пабло да ги пополни празните полиња во табелата.

4			
	2		
			1
1		4	

46. Филип во табела 4×4 ги запишувал броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, секоја колона и во секој аголен 2×2 квадрат треба да запише различни броеви. Некои броеви се веќе запишани (цртеж десно). Помогни му на Филип да ги пополни празните полиња во табелата.

3		2	
4			
	1		3

47. Во секое поле во фигурата на цртежот десно треба да се запише по еден од броевите 1, 2, 3 или 4, така што во секој ред, во секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии се запишани сите четири броја. Пресметај го збирот на броевите запишани на дијагоналата која ги поврзува горниот лев и долниот десен агол.

1			
		2	
	3		

48. Во секое поле во 5×5 табелата прикажана на цртежот десно треба да се запише по еден од броевите 1, 2, 3, 4 или 5, еден број во едно поле, така што во секој ред, секоја колона и секоја фигура ограничена со подебели линии се запишани различни броеви. Некои броеви се веќе запишани.

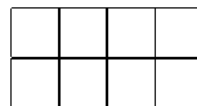
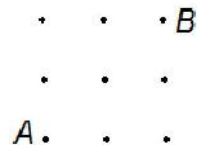
2	3			
	4	5		
				3

Дополни ја табелата.

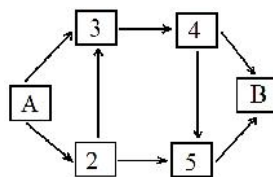
IV.4. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

49. Колку минути меѓу 10:00 и 11:45 на дисплејот на дигиталниот часовник барем еднаш се наоѓа цифрата 3?
50. Колку минути во периодот од 9:00 до 10:00 часот на дисплејот на дигиталниот часовник има барем две еднакви цифри?
51. Природните броеви од 1 до 2013 се запишани во низа еден по друг:
- 123456789101112131415...20122013.
- Колку пати е запишана цифрата 2?
52. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се помали од 321 и во чиј запис барем една цифра е 1.
53. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани со една цифра 2, една цифра 9 и две цифри 0.
54. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои се запишуваат само со парни цифри.
55. На тастатурата на дигитронот на Марко работат само типките со броевите 0, 1, 2 и 8. Колку различни двоцифрени броеви може да запише Марко?
56. Определи го збирот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3.
57. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

58. Определи го бројот на броевите чиј збир на цифри е 7, а производот на цифри е 9.
59. Определи го бројот на броевите кои се запишуваат со различни непарни цифри и збирот на цифрите им е 17.
60. Определи го бројот на природните броеви кои се меѓу 1878 и 2010 и се запишуваат со помош на четири различни цифри?
61. Определи го бројот на непарните двоцифрени броеви кои не завршуваат на цифрата 5.
62. Располагаме со доволно монети од 1, 2 и 5 денари. На колку различни начини во продавница може да се плати сума од 7 денари, без притоа продавачот да враќа пари?
63. Телевизорот на Ана има 72 програми. Во моментот тој е вклучен на 18-та програма. Ана сака да ја гледа десеттата програма. Колку смени се потребни, ако програмите се менуваат по ред во растечки редослед на броевите, без да се прескокнува?
64. Во шемата прикажана на цртежот десно е дозволено од една точка да се премине во точка која и е соседна по хоризонтала, вертикала или дијагонала. На колку различни начини во три чекори може да се стигне од точката A во точката B ?
65. Филип живее во населба во која улиците се како на цртежот десно. По колку различни најкратки патишта тој може да стигне од горниот лев до долниот десен агол, движејќи се само по улиците?



66. На колку начини во шемата која е прикажана на цртежот десно може да се стигне од полето А до полето В, ако се движиме само во насоките кои ги покажуваат стрелките?



67. На цртежот десно е дадена шема со осум полиња. Во горното лево поле се наоѓа мува (М), а во долното десно поле се наоѓа торта (Т). Од дадено поле мувата може да премине во полето под него, во полето десно од него или во дијагоналното-десно долно поле од него. На колку различни начини мувата може да стигне до тортата?

М			
			Т

68. На цртежот десно е дадена шема со осум полиња. Во горното лево поле се наоѓа мува (М), а во долното десно поле се наоѓа торта (Т). Од дадено поле мувата може да премине во полето под него, во полето десно од него или во дијагоналното-десно горно поле од него. На колку различни начини мувата може да стигне до тортата?

М			
			Т

69. Јазикот на племето Бау-бау се состои само од зборови запишани со три различни букви, кои почнуваат со буквата „б“ и во секој збор задолжително учествува буквата „у“. Во секој збор задолжително се појавува и секоја од следниве букви: „р“, „и“, „а“, „е“, „о“. Колку зборови има јазикот на племето Бау-бау?

70. Андреј решил да обои две полиња во табелата прикажана на цртежот десно. Тој боењето сака да го направи така што едното го бои се зелена боја, другото се црвена боја и обоените полиња не се соседни. На колку начини Андреј може да ја обои табелата?

--	--	--	--

71. Анета простира крпа, пар бели чорапи и пар зелени чорапи. На

колку различни начини таа може да ги простри алиштата, без притоа да става еден до друг чорапи од една иста боја?

72. Од еден бел, еден црвен и два розови бисери е направен гердан. На колку различни начин може да се направи герданот? (Два гердана се сметаа за еднакви ако едниот може да се добие од другиот со вртење или превртување.)
73. Треба да направам гердан од четири бисери. Секој од нив е бел, син или лилјаков, при што од секоја боја мора да има барем по еден бисер. На колку различни начини може да се направи герданот? (Два гердана се сметаа за еднакви ако едниот може да се добие од другиот со вртење или превртување.)
74. Од бел, лилјаков, син и 2 розеви бисери е направен гердан. На колку различни начин може да се направи герданот? (Два гердана се сметаа за еднакви ако едниот може да се добие од другиот со вртење или превртување.)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Определи го збирот на броевите со кои се запишува датата 1 ноември 2021 година.

Решение. Датата 1 ноември 2021 година се запишува со броевите 1, 11 и 2021. Според тоа, бараниот збир е

$$1 + 11 + 2021 = 2033.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $201 + 21 + 2 \cdot 1 - 20 : 10$,

б) $2010 + 20 \cdot 10 - 10 : 1$,

в) $1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5$.

Решение. а) Имаме:

$$201 + 21 + 2 \cdot 1 - 20 : 10 = 201 + 21 + 2 - 2 = 201 + 21 = 222.$$

б) Имаме:

$$2010 + 20 \cdot 10 - 10 : 1 = 2010 + 200 - 10 = 2210 - 10 = 2200.$$

в) Имаме:

$$1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 8 + 14 + 18 + 20 = 60.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $201 - 3 + 20 - 13$,

б) $201 - 3 + 20 + 13$,

в) $201 + 3 + 20 \cdot 13$,

г) $20 \cdot 13 - 201 + 3$.

Решение. а) Имаме:

$$201 - 3 + 20 - 13 = 198 + 7 = 205.$$

б) Имаме:

$$201 - 3 + 20 + 13 = 198 + 33 = 231.$$

в) Имаме:

$$201 + 3 + 20 \cdot 13 = 204 + 260 = 464.$$

г) Имаме:

$$20 \cdot 13 - 201 + 3 = 260 - 201 + 3 = 59 + 3 = 62.$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $20 - 15 + 20 \cdot 15 + 20 + 15$,

б) $20 \cdot 15 - 210 : 5 + 210 \cdot 5$.

Решение. а) Имаме:

$$20 - 15 + 20 \cdot 15 + 20 + 15 = 5 + 300 + 35 = 340.$$

б) Имаме:

$$20 \cdot 15 - 210 : 5 + 210 \cdot 5 = 300 - 42 + 1050 = 1308.$$

5. Пресметај:

а) $18 \cdot 19 - 20 + 19$,

б) $20 \cdot 19 - 19 + 18$,

в) $19 \cdot 19 - 20 \cdot 18$.

Решение. а) Имаме:

$$18 \cdot 19 - 20 + 19 = 342 - 20 + 19 = 322 + 19 = 341.$$

б) Имаме:

$$20 \cdot 19 - 19 + 18 = 380 - 19 + 18 = 361 + 18 = 379.$$

в) Имаме:

$$19 \cdot 19 - 20 \cdot 18 = 361 - 360 = 1.$$

6. Пресметај:

а) $2010 - 20 \cdot 10 + 20 : 10$,

б) $2011 - 20 \cdot 11 - 201 : 1$,

в) $2012 - 20 \cdot 12 - 201 \cdot 2$.

Решение. а) Имаме:

$$2010 - 20 \cdot 10 + 20 : 10 = 2010 - 200 + 2 = 1810 - 2 = 1808.$$

б) Имаме:

$$2011 - 20 \cdot 11 - 201 : 1 = 2011 - 220 - 201 = 1791 - 201 = 1590.$$

в) Имаме:

$$2012 - 20 \cdot 12 - 201 \cdot 2 = 2012 - 240 - 402 = 1772 - 402 = 1370.$$

7. Пресметај:

а) $(7002 - 2007) : 3 + (7002 + 2007) : 9$,

б) $505 + 358 - (50 + 121) : 9$.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} (7002 - 2007) : 3 + (7002 + 2007) : 9 &= 4995 + 9009 : 9 \\ &= 4995 + 1001 = 5996. \end{aligned}$$

б) Имаме

$$\begin{aligned} 505 + 358 - (50 + 121) : 9 &= 563 - 171 : 9 \\ &= 563 - 19 = 544. \end{aligned}$$

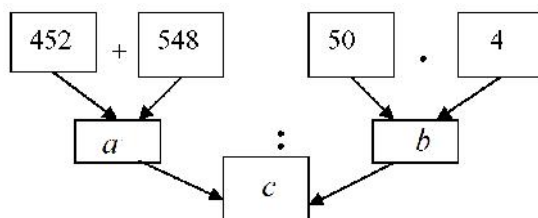
8. Пресметај :

$$(2018 + 2019 + 2021 + 2022) : 5 - (2008 + 2009 + 2011 + 2012) : 10.$$

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} (2018 + 2019 + 2021 + 2022) : 5 - (2008 + 2009 + 2011 + 2012) : 10 &= \\ &= 8080 : 5 - 8040 : 10 \\ &= 1616 - 804 \\ &= 812. \end{aligned}$$

9. Кои броеви треба да се запишат на местата на a, b и c во шемата, за да пресметувањата се точни:



Решение. Имаме,

$$a = 452 + 548 = 1000 \text{ и } b = 50 \cdot 4 = 200,$$

па затоа

$$c = a : b = 1000 : 200 = 5.$$

10. Горјан ги определил остатоците од делењето на бројот 43 со бројот 3, на бројот 52 со бројот 5 и на бројот 55 со бројот 7. Потоа ги помножил добиените остатоци. Кој број го добил Горјан?

Решение. Имаме:

$$43 = 3 \cdot 14 + 1,$$

$$52 = 5 \cdot 10 + 2,$$

$$55 = 7 \cdot 7 + 6.$$

Според тоа, Горјан ги помножил броевите 1, 2 и 6, по што го добил бројот $1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$.

11. Определи го осмиот член на низата броеви: 1, 3, 7, 15, 31, ...

Решение. Забележуваме дека:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1,$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1,$$

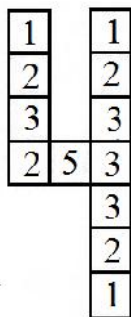
$$15 = 2 \cdot 7 + 1,$$

$$31 = 2 \cdot 15 + 1,$$

што значи дека со множење на последниот определен член на низата со 2 и додавање на 1 се добива следниот член на низата. Значи:

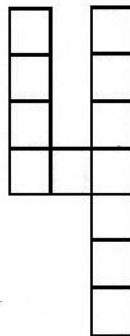
- шестиот член на низата е $2 \cdot 31 + 1 = 63$,
- седмиот член е $2 \cdot 63 + 1 = 127$ и
- осмиот член е $2 \cdot 127 + 1 = 255$.

12. Дванаесет квадратчиња се наредени во форма на буквата Ч (цртеж десно). За две квадратчиња велиме дека се соседни ако имаат заедничко теме. Во секое квадратче е запишан бројот на квадратчињата кои му се соседни. Определи го збирот на сите запишани броеви.



Решение. Броевите кои, според даденото пртавило, треба да се запишат во дванаесетте квадратчиња од кои е составена буквата Ч се прикажани на цртежот лево. Нивниот збир е

$$1 + 2 + 3 + 2 + 5 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 28.$$



13. Филип направил компјутерска програма за трансформирање на

броеви. Ако се внесе парен број p , тогаш програмата го дели бројот p со 2, а ако се внесе непарен број p , тогаш програмата го множи со 3 и додава 1. Во двата случаи програмата го печати добиениот број. Филип прво го внесол бројот 9 и го добил бројот a , потоа го внесол бројот a и го добил бројот b , потоа го внесол бројот b и го добил бројот c , потоа го внесол бројот c и го добил бројот d и на крајот го внесол бројот d и го добил бројот e . Подреди ги броевите a, b, c, d, e по големина почнувајќи од најмалиот.

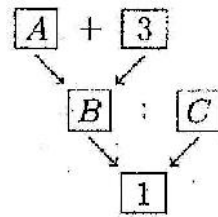
Решение. Бројот 9 е непарен, па затоа $a = 3 \cdot 9 + 1 = 28$. Бројот 28 е парен, па затоа $b = 28 : 2 = 14$. Бројот 14 е парен, па затоа $c = 14 : 2 = 7$. Бројот 7 е непарен, па затоа $d = 3 \cdot 7 + 1 = 22$. Бројот 22 е парен, па затоа $e = 22 : 2 = 11$. Според тоа, $c < e < b < d < a$.

14. Искористи ги податоците дадени во шемата на цртежот десно и пресметај ја вредноста на изразот

$$(A+3):C.$$

Решение. Од $A+3=B$ и $B:C=1$ следува

$$(A+3):C = B:C = 1.$$



15. Ако c е природен број, тогаш со c^+ го означуваме следбеникот на бројот c , а со c^- го означуваме претходникот на бројот c . Пресметај

$$4^+ + 7^+ - 3^-.$$

Решение. Имаме:

$$4^+ + 7^+ - 3^- = (4+1) + (7+1) - (3-1) = 5 + 8 - 2 = 11.$$

16. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$IX \cdot IV + XI \cdot VI.$$

Решение. Имаме:

$$IX \cdot IV + XI \cdot VI = XXXVI + LXVI = CII.$$

Навистина, $9 \cdot 4 + 11 \cdot 6 = 36 + 66 = 102$.

17. За секои два броја a и b воведуваме операција $\oplus$ со равенството $a \oplus b = a \cdot a + b \cdot b$. На пример, $2 \oplus 3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13$. Подреди ги по големина броевите резултатите од пресметувањата:

$$3 \oplus 2, 5 \oplus 1, 3 \oplus 4, 2 \oplus 5, 1 \oplus 6.$$

Решение. Имаме:

$$3 \oplus 2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 9 + 4 = 13,$$

$$5 \oplus 1 = 5 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 25 + 1 = 26,$$

$$3 \oplus 4 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25,$$

$$2 \oplus 5 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 4 + 25 = 29,$$

$$1 \oplus 6 = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 6 = 1 + 36 = 37.$$

Според тоа,

$$3 \oplus 2 < 3 \oplus 4 < 5 \oplus 1 < 2 \oplus 5 < 1 \oplus 6.$$

18. Оптределуваме операции $\oplus$ и $\otimes$ на следниот начин:

$$a \oplus b = a \cdot b + a \text{ и } a \otimes b = a \cdot b - b.$$

На пример, $2 \oplus 3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ и $3 \otimes 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Пресметај:

$$((1 \oplus 7) \otimes (7 \oplus 1)) \oplus (1 \otimes 7).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} ((1 \oplus 7) \otimes (7 \oplus 1)) \oplus (1 \otimes 7) &= ((1 \cdot 7 + 1) \otimes (7 \cdot 1 + 7)) \oplus (1 \cdot 7 - 7) \\ &= (8 \otimes 14) \oplus 0 = (8 \cdot 14 - 14) \oplus 0 \\ &= 98 \oplus 0 = 98 \cdot 0 + 98 = 98. \end{aligned}$$

19. Определи го збирот на сите цифри со кои се запишани сите природни броеви од 1 до 99.

Решение. Во секоја од десетте десетки цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се јавуваат како цифри на единиците. Затоа, збирот на цифрите на единиците на сите природни броеви од 1 до 99 е еднаков на

$$10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 450.$$

Понатаму, од 10 до 19 цифрата 1 се јавува десет пати како цифра на десетките, од 20 до 29 цифрата 2 се јавува десет пати како цифра на десетките итн. од 90 до 99 цифрата 9 се јавува десет пати како цифра на десетките. Затоа, збирот на цифрите на де-

сетките на сите природни броеви од 1 до 99 е еднаков на $10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 7 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 9 = 450$. Конечно, збирот на сите цифри со кои се запишани сите природни броеви од 1 до 99 е еднаков на $450 + 450 = 900$.

20. Пабло има осум исти кутии и во секоја кутија има различен парен број бонбони, барем 2, но не повеќе од 16. Колку бонбони има Пабло?

Решение. Парни броеви поголеми или еднакви на 2, а помали или еднакви на 16 се: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 и 16. Значи, имаме осум такви броеви и како имаме осум кутии во кои има различен број бонбони, заклучуваме дека во кутиите бројот на бонбоните е во некој редослед: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 и 16. Значи, Пабло има:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72 \text{ бонбони.}$$

21. Горјан има 7 кутии. Во првата кутија има едно топче, во втората кутија има 2 топчиња. Во секоја следна кутија има толку топчиња колку што има во сите кутии пред неа. Колку топчиња има во седмата кутија?

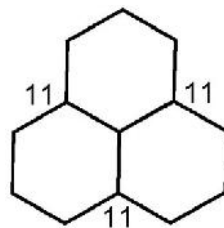
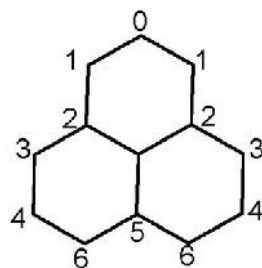
Решение. Во третата кутија има $1 + 2 = 3$ топчиња, во четвртата има $1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 2 \cdot 3 = 6$ топчиња итн. понатаму во секоја кутија има два пати повеќе топчиња отколку во кутијата пред неа. Значи, во петтата кутија има $2 \cdot 6 = 12$ топчиња, во шестата кутија има $2 \cdot 12 = 24$ топчиња и во седмата кутија има $2 \cdot 24 = 48$ топчиња.

22. Во ковачницата за пари има 625 златни плочки. Од секоја златна плочка се кова по една монета, а отпадокот кој се добива при ковање на 5 монети се топи и од него се добива една златна плочка. Кој е најголемиот број монети што може да се исковаат од расположливите 625 златни плочки?

Решение. Од расположливите 625 плочки прво ќе исковаме 625 монети, а од отпадокот кој се добива при ковањето ќе направиме нови $625 : 5 = 125$ златни плочки. Сега од овие 125 златни плочки ќе исковаме 125 монети, а од отпадокот кој се добива при

ковањето ќе направиме $125:5=25$ нови златни плочки. Од нив ќе исковаме 25 монети и од отпадокот ќе направиме $25:5=5$ нови златни плочки. Сега ќе исковаме 5 монети и ќе добиеме 1 нова златка плочка, од која на крајот ќе исковаме 1 монета. Според тоа, најмногу може да исковаме $625+125+25+5+1=781$ монета.

23. Филип составил фигура од три шестаголници и во секое теме запишал број (цртеж десно). Притоа тој запишал број и во темето кое е заедничко за сите три шестаголници, но не се знае кој број. Потоа, Филип ги зголемил броевите запишани во темињата на едниот шестаголник за еден ист број, па ги зголемил броевите запишани во темињата на вториот шестаголник за еден ист број (можно е за истиот број) и на крајот ги зголемил броевите запишани во темињата на третиот шестаголник за еден ист број. На крајот, Филип ги запишал само броевите во трите темиња како на цртежот десно. За колку се зголемил бројот запишан во полето кое е заедничко за сите три шестаголници (централно теме)?



Решение. При зголемување на броевите во темињата на било кој шестаголник, се зголемуваат броевите во двете заеднички темиња на соседниот шестаголник. Притоа, ако во некој шестаголник броевите се зголемени за m , тогаш во централното теме бројот е зголемен за m , а збирот на броевите во двете соседни темиња е зголемен за $2m$. Значи, збирот на броевите во трите соседни темиња на централното поле се зголемува двојно во однос на бројот запишан во централното поле. Збирот на броевите во трите полиња е поголем за $(11-2)+(11-2)+(11-5)=24$, што значи дека бројот во централното поле се зголемил за $24:2=12$.

24. Кошаркарските екипи „Водно“ и „Китка“ меѓу себе играле че-

тири натпревари, во кои „Водно“ постигнал 32, 33, 56, 61 и 66 коша. Во два навревари „Водно“ постигнале трипати повеќе коша од „Китка“, а во други два натпревари „Водно“ постигнал двапати повеќе коша од „Китка“. Еден натпревар „Водно“ загубил со 4 коша. Колку коша постигнала екипата „Китка“ во петте натпревари?

Решение. Од петте броја со кои се дадени кошевите кои ги постигнала екипата „Водно“ деливи со 3 се 33 и 66. Според тоа, кога екипата „Водно“ постигнал 33 и 66 коша, екипата „Китка“ постигнала $33:3=11$ и $66:3=22$ коша. Од преостанатите три натпревари на два треба бројот на постигнатите кошеви да е делив со 2 и тоа се броевите 32 и 56. Во овој случај екипата „Китка“ постигнала $32:2=16$ и $56:2=28$ коша. Конечно, екипата „Китка“ победила со 4 коша разлика кога екипата „Водно“ постигнала 61 кош. Значи, во овој натпревар тие постигнале $61+4=65$ коша. Значи, екипата „Китка“ во петте натпревари постигнала $11+22+16+28+65=142$ коша.

25. Андреј го собрал најмалиот трицифрен број кој не е делив со 4 со најголемиот трицифрен број кој е делив со 4. Кој број го добил Андреј?

Решение. Најмалиот трицифрен број кој не е делив со 4 е бројот 101, а најголемиот трицифрен број кој е делив со 4 е бројот 996. Имаме, $996+101=1097$, што значи дека Андреј го добил бројот 1097.

1.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

26. Замени ги истите букви со исти цифри, а различните букви со различни цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$3+A+D+A+U+A = U \cdot P \cdot A$$

Решение. Задачата има повеќе решенија. На пример:

$$6+1+5+1+0+1=2 \cdot 7 \cdot 1,$$

$$5+2+3+2+0+2=1 \cdot 7 \cdot 2.$$

Обиди се да најдеш и други решенија на задачата.

27. Нека A, B и C се различни цифри такви што $A \cdot B + C = 31$. Определи ја најголемата можна вредност на $A - B + C$.

Решение. Бидејќи $31 \geq 31 - C \geq 22$, бројот $A \cdot B$ е број меѓу 22 и 31 и е производ на два различни едноцифрени броја. Такви производи се: $24 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, $27 = 3 \cdot 9$, $28 = 4 \cdot 7$ и $30 = 5 \cdot 6$. Притоа, за бројот C ги добиваме вредностите 7, 4, 3 и 1, соодветно. Најголемата можна вредност на $A - B + C$ е 12 и истата се добива за $A = 8, B = 3, C = 7$.

28. Определи го збирот на цифрите кои треба да се на местата на буквите a, b и c во бројниот ребус прикажан на цртежот десно.

$$\begin{array}{r} 5 \ a \ 7 \\ + \ b \ 2 \ c \\ \hline 8 \ 7 \ 5 \end{array}$$

Решение. Збирот на бројот 7 со едноцифрениот број c има цифра на единици 5 ако и само ако $c = 8$. Сега добиваме дека збирот $a + 1 + 2 = a + 3$, каде a е едноцифрен број има цифра на единици 7, па затоа $a = 4$. Конечно, од $b + 5 = 8$ наоѓаме $b = 3$. Значи, $a + b + c = 4 + 3 + 8 = 15$.

29. Во ребусот

$$\overline{SMT} + \overline{SMT} = \overline{URA}$$

на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Реши го дадениот ребус, ако $\overline{SMT}$ е најголемиот можен број.

Решение. Јасно, $S \leq 4$, бидејќи во спротивно збирот на левата страна ќе биде четирицифрен број, а на десната страна имаме трицифрен број. Ако $S = 4$, тогаш најголемата можна вредност за M е 8. Имено, ако $M = 9$, тогаш $U = 9$, што противречи на условот дека на различните букви соодветствуваат различни цифри. Досега имаме, $\overline{48T} + \overline{48T} = \overline{9RA}$. Јасно, $T = 6$, бидејќи ако $T = 7$, тогаш добиваме $\overline{487} + \overline{487} = \overline{974}$, што повторно противречи условот дека на различните букви соодветствуваат различ-

ни цифри. Конечно, бараното решение е

$$\overline{486} + \overline{486} = \overline{972}.$$

30. Кој е бројот $\overline{ABVGД}$ ако неговите пет цифри се определени со бројниот ребус:

$$\overline{AB} + 8 = \overline{3B}$$

$$\overline{ГД} + \overline{B} = \overline{ГВ}$$

$$\overline{ГБ} + 3 = \overline{АД}$$

Решение. Имаме, $8 - B = 3$, т.е. $B = 5$. Понатаму, од $\overline{AB} + 8 = \overline{3B}$ следува $\overline{AB} + 8 = 35$, т.е. $\overline{AB} = 27$, т.е. $A = 2$ и $B = 7$. Сега, $\overline{3B} - \overline{ГВ} = \overline{АД}$ следува $35 - \overline{Г5} = 20$, т.е. $Д = 0$ и $Г = 1$. Навистина, од

$$\overline{AB} + \overline{ГД} = 27 + 10 = 37 = \overline{ГБ} \quad \text{и} \quad \overline{ГБ} + 3 = 17 + 3 = 20 = \overline{АД}.$$

Значи, $\overline{ABVGД} = 27510$.

31. Даден е бројниот ребус:

$$\overline{ТРИ} + \overline{ТРИ} = \overline{ШЕСТ},$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Кои цифри може да стојат на местото на буквата T ?

Решение. Бидејќи T е цифрата на единиците на збир на два еднакви едноцифрени броја, таа мора да е парна цифра, т.е. T е некоја од цифрите 0, 2, 4, 6 или 8. Но T е цифра на стотките на трицифрен број, па затоа $T \neq 0$. Понатаму, збир на два еднакви трицифрени броја е четирицифрен број ако и само ако цифрата на стотките на трицифрените броеви е поголема или еднаква на 5, што значи T е 6 или 8. Навистина, две решенија на ребусот се:

$$643 + 643 = 1286 \quad \text{и} \quad 854 + 854 = 1708.$$

На читателот за вежба му препорачуваме да ги определи преостанатите решенија на овој броен ребус.

32. Горјан помножил два броја и го шифрирал добиеното равенство во вид: МАКСИМУМ. За секој од знаците „множење“ и „еднакво“ и за секоја цифра тој употребил по една буква, различните знаци и цифри со различни букви, а еднаквите цифри со еднакви букви. Кое равенство може да го шифрирал Горјан? Најди барем две решенија на задачата.

Решение. Бидејќи две букви се за знаците $\cdot$ и $=$, остануваат шест букви за цифрите, односно за броевите. Бидејќи производот на два двоцифрени броја е трицифрен или четирицифрен број, заклучуваме дека множителите се едноцифрен и двоцифрен број, а производот е трицифрен број. Значи, равенството е од видот $\overline{MA} \cdot C = \overline{MUM}$ или од видот $M \cdot \overline{KC} = \overline{MUM}$. Второто равенство не е можно, бидејќи $\overline{MUM} = M \cdot \overline{KC} < \overline{M00}$. Значи, равенството е од видот $\overline{MA} \cdot C = \overline{MUM}$.

Понатаму, за $M = 2$ равенството го добива видот $\overline{2A} \cdot C = \overline{2U2}$, па затоа мора да е $C = 9$. Сега, лесно добиваме дека едно решение на задачата е $28 \cdot 9 = 252$. За $M = 3$ равенството го добива видот $\overline{3A} \cdot C = \overline{3U3}$, па затоа мора да е $C = 9$. Сега, добиваме $\overline{3A} \cdot 9 = \overline{3U3}$, од каде следува $A = 7$, но ова не е решение бидејќи $37 \cdot 9 = 333$, т.е. производот не е од видот $\overline{MUM}$. За $M = 4$ равенството го добива видот $\overline{4A} \cdot C = \overline{4U4}$, па затоа мора да е $C = 9$. Сега, лесно добиваме дека $46 \cdot 9 = 414$ е друго решение на задачата. На читателот за вежба му оставаме да провери дали задачата има решение кога $M = 1, 5, 6, 7, 8$ или 9 .

1.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

33. Определи го X од шемата:

$$3 \xrightarrow{\times 7} \square \xrightarrow{-X} \square \xrightarrow{:2} 8$$

Решение. Во празното лево квадратче треба да е запишан бројот $3 \cdot 7 = 21$, а во празното десно квадратче треба да е запишан бро-

јот $2 \cdot 8 = 16$. Според тоа, $21 - X = 16$, од каде добиваме $x = 5$.

34. Определи ги броевите A и B така што пресметувањата во

$$\boxed{A} \xrightarrow{-3} \boxed{B} \xrightarrow{\times 2} \boxed{34}$$

шемата ќе бидат точни.

Решение. Имаме $2B = 34$, од каде добиваме $B = 34 : 2 = 17$. Понатаму, $A - 3 = B = 17$, па затоа $A = 17 + 3 = 20$.

35. Во равенството $3 + 3 + \dots + 3 = 2022$ сите собирци се еднакви на 3. Определи го бројот на собирците во ова равенство?

Решение. Имаме, $2022 : 3 = 674$, што значи дека во даденото равенство имаме 674 собирци.

36. Ако во равенството $9 + 9 + \dots + 9 = 2007$ сите собирци се еднакви на 9, колку собирци има на левата страна?

Решение. Ако на левата страна има x собирци, тогаш важи $9x = 2007$, па затоа $x = 2007 : 9 = 223$. Значи, бројот на собирцие на левата страна е 227.

37. Реши ја равенката: $(1 + 4 + 27) : 32 = (9 + x) : 25$.

Решение. Имаме:

$$(1 + 4 + 27) : 32 = (9 + x) : 25,$$

$$32 : 32 = (9 + x) : 25,$$

$$(9 + x) : 25 = 1,$$

$$9 + x = 25 \cdot 1,$$

$$x = 25 - 9 = 16.$$

38. Реши ја равенката: $3636 : 4 - x = 196 \cdot 4$.

Решение. Имаме:

$$3636 : 4 - x = 196 \cdot 4,$$

$$909 - x = 784,$$

$$x = 909 - 784,$$

$$x = 125.$$

39. Нека a е решение на равенката

$$27 : (9 : (3a - 8)) = 3.$$

Ако

$$A = 125 - 25 : 5 + (84 + 84 + 84) : 3 \text{ и } B = A : a + 13 \cdot 13 - 39 \cdot 5,$$

пресметај $C = A - B : a$.

Решение. Имаме:

$$27 : (9 : (3a - 8)) = 3,$$

$$9 : (3a - 8) = 9$$

$$3a - 8 = 1,$$

$$3a = 9,$$

$$a = 3,$$

и

$$A = 125 - 25 : 5 + (84 + 84 + 84) : 3$$

$$= 125 - 5 + 84 \cdot 3 : 3$$

$$= 120 + 84$$

$$= 204,$$

$$B = A : a + 13 \cdot 13 - 39 \cdot 5$$

$$= 204 : 3 + 13 \cdot 13 - 39 \cdot 5$$

$$= 68 + 169 - 195$$

$$= 237 - 195$$

$$= 42,$$

па затоа

$$C = A - B : a = 204 - 42 : 3 = 204 - 14 = 190.$$

40. Десно е прикажана таблица за множење на броевите a, b, c, f, g, h . Некои производи се запишани. Кој производ треба да се запише на местото на прашалникот?

$\cdot$	a	b	c
f		15	18
g	56		42
h	?	45	

Решение. Од $15 \neq 18$ следува дека $f \neq 1$. Бидејќи $15 = 3 \cdot 5$ и $18 = 3 \cdot 6$,

заклучуваме дека 3 е единствен заеднички делител на 15 и 18

различен од 1, па затоа $f = 3$. Од $bf = 15$, следува $3b = 15$, па затоа $b = 5$. Сега, $bh = 45$ добиваме $5h = 45$, што значи $h = 9$. Понатаму, од $cf = 18$ следува $3c = 18$, т.е. $c = 6$, па од $cg = 42$ следува $6g = 42$, т.е. $g = 7$. Но, $ag = 56$, па затоа $7a = 56$, односно $a = 8$. Конечно, на местото на прашалникот треба да се запише производот $ah = 8 \cdot 9 = 72$.

41. Кои броеви треба да се запишат на местата на знаците $\diamond$ и $\heartsuit$ за да се точни равенствата:

$$\diamond + \diamond + \heartsuit = 13,$$

$$\diamond + \diamond = \heartsuit + 1.$$

Решение. *Прв начин.* Јасно ниту еден од бараните броеви не е 0. Збир на два еднакви броја е парен број, па заради второто равенство на местото на $\heartsuit$ мора да е непарен број, кој заради првото равенство е помал од 13.

Ако $\heartsuit = 11$, тогаш од второто равенство добиваме $\diamond = 6$, но тогаш не е исполнето првото равенство.

Ако $\heartsuit = 9$, тогаш од второто равенство добиваме $\diamond = 5$, но тогаш не е исполнето првото равенство.

Ако $\heartsuit = 7$, тогаш од второто равенство добиваме $\diamond = 4$, но тогаш не е исполнето првото равенство.

Ако $\heartsuit = 5$, тогаш од второто равенство добиваме $\diamond = 3$ и е исполнето првото равенство.

Ако $\heartsuit = 3$, тогаш од второто равенство добиваме $\diamond = 2$, но тогаш не е исполнето првото равенство.

Ако $\heartsuit = 1$, тогаш од второто равенство добиваме $\diamond = 1$, но тогаш не е исполнето првото равенство.

Конечно, решение на задачата е $\heartsuit = 5$ и $\diamond = 3$.

Втор начин. Од второто равенство добиваме $\heartsuit = \diamond + \diamond - 1$. Сега, заменуваме во првото равенство и добиваме $\diamond + \diamond + \diamond + \diamond - 1 = 13$. Значи, $\diamond + \diamond + \diamond + \diamond = 12$, т.е. $4 \cdot \diamond = 12$, па затоа $\diamond = 12 : 4 = 3$. Конечно, $\heartsuit = \diamond + \diamond - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$.

42. Четири сока чинат колку три колачи, три лимонади чинат колку

два колачи, три мали пици чинат колку два сока, две банички чинат колку три колачи. Кој од овие производи е најскап?

Решение. Јасно, поефтин е оној производ од кој за иста сума пари можеме да купиме повеќе парчиња. Ако со почетните букви на имињата на производите (латинична азбука) ги означиме нивните цени, тогаш од условот на задачата добиваме: $s < k$, $l < k$, $m < s$ и $k < b$. Затоа, $m < s < k < b$ и $l < k < b$, што значи дека најскапа е баничката.

43. Нека

$$A = (496 \cdot 7 - 495 \cdot 5) + 2010 : (99 - 97) + 18,$$

$$B = (463 + 464) : (96 \cdot 4 - 375) + (3 \cdot 898 - 2 \cdot 898) : (11 - 5 \cdot 2)$$

и C е решението на равенката

$$237 + 874 + 126 + 363 + 2C = 21 + 349 + 1555 + 1251 + 445 + C.$$

Подреди ги броевите A , B и C по големина, почнувајќи од најмалиот.

Решение. Имаме:

$$A = (496 \cdot 7 - 495 \cdot 5) + 2010 : (99 - 97) + 18$$

$$= (495 \cdot 7 + 5 - 495 \cdot 5) + 2010 : 2 + 18$$

$$= 997 + 1005 + 18 = 2020,$$

$$B = (463 + 464) : (96 \cdot 4 - 375) + (3 \cdot 898 - 2 \cdot 898) : (11 - 5 \cdot 2)$$

$$= 927 : 9 + 898 : 1 = 1001$$

и

$$237 + 874 + 126 + 363 + 2C = 21 + 349 + 1555 + 1251 + 445 + C$$

$$(237 + 363) + (874 + 126) + 2C = (1555 + 445) + (1251 + 349) + 21 + C$$

$$600 + 1000 + 2C = 2000 + 1600 + 21 + C$$

$$2C + 1600 = C + 1600 + 2021$$

$$C = 2021.$$

Но, $1001 < 2020 < 2021$, па затоа $B < A < C$.

II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Филип од бројот 29185643 пречкртал четири цифри и го добил најголемиот можен четирицифрен број. Кој број го добил Филип?

Решение. За да го добиеме најголемиот можен четирицифрен број треба од лево кон десно да пречкртаме четири цифри, при што ги оставаме најголемите можни цифри. Така прво ја пречкртуваме цифрата 2 и ни преостанува бројот 9185643. Следна цифра која ја пречкртуваме е 1 и ни преостанува бројот 985643. Јасно, третата и четвртата цифра кои ги пречкртуваме се 5 и 3 и ни преостанува бројот 9864. Конечно, Филип го добил бројот 9864.

2. Еден до друг во низа се запишани последователно непарните броеви помали од 30. Филип избришал неколку цифри, по што останале шест цифри и кога ги запишал една до друга во истиот редослед го добил најголемиот можен шестцифрен број. Кој број го добил Филип?

Решение. За да се добие најголемиот можен шестцифрен број потребно потребно е одејќи од лево кон десно да ги оставаме најголемите можни цифри. Непарните броеви помали од 30 запишани еден до друг се: 1357911131517192123252729. Прво ги бришеме цифрите 1, 3, 5 и 7, по што добиваме:

911131517192123252729.

Сега, цифрата 9 останува и ги бришеме цифрите 1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7 и 1, по што преостанува:

992123252729.

Треба да ни преостанат шест цифри, па затоа не смееме да бришеме до цифрата 7, туку ги бришеме цифрите 2, 1, 2, 3 и 2, по што добиваме: 9952729, па како треба да избришеме уште една цифра, тоа е првата цифра 2 и го добиваме бројот 995729.

3. Горјан ги запишал броевите: 8462, 1246, 3874, 4683 и 4874. Потоа му рекол на Андреј од запишаните броеви да избере парен број, кој е запишан со различни цифри, чија цифра на стотките е два пати поголема од цифрата на единиците и цифрата на десетките е поголема од цифрата на илјадитите. Кој број треба да го избере Андреј?

Решение. Од запишаните пет броја парни се: 8462, 1246, 3874 и 4874. Меѓу овие четири броја со различни цифри се запишани броевите: 8462, 1246 и 3874. Од овие три цифрата на десетките е поголема од цифрата на илјадитите кај броевите: 1246 и 3874. Конечно, од овие два броја цифрата на стотките е два пати поголема од цифрата на единиците кај бројот 3874. Значи, Андреј треба да го избере бројот 3874.

4. Горјан ги запишал броевите 216, 426, 633, 831 и 138, а потоа ги пречкртал сите броеви, освен броевите чиј збир на цифрите на десетките и единиците е двапати поголем од цифрата на стотките. Кои броеви не се пречкртани?

Решение. Имаме:

- а) $6 + 1 = 7 \neq 2 \cdot 2$, па затоа бројот 216 е пречкртан,
 - б) $6 + 2 = 8 = 2 \cdot 4$, па затоа бројот 426 не е пречкртан,
 - в) $3 + 3 = 6 \neq 2 \cdot 6$, па затоа бројот 633 е пречкртан,
 - г) $3 + 1 = 4 \neq 2 \cdot 8$, па затоа бројот 831 е пречкртан,
 - д) $8 + 3 = 11 \neq 2 \cdot 1$, па затоа бројот 138 е пречкртан.
- Значи, само бројот 426 не е пречкртан.

5. Два броја се поголеми од 30 и нивната разлика е 123. Поголемиот број го зголемуваме за 30, а помалиот го намалуваме за 30. Пресметај ја разликата на добиените броеви.

Решение. Ако поголемиот број го зголемиме за 30, а помалиот го намалиме за 30, тогаш разликата се зголемува за $30 + 30 = 60$. Значи, разликата на добиените броеви ќе биде $123 + 60 = 183$.

6. Определи го збирот на најголемиот трицифрен број кој е делив со 2 и најмалиот трицифрен број кој не е делив со 2.

Решение. Најголемиот трицифрен број кој е делив со 2 е бројот 998, а најмалиот трицифрен број кој не е делив со 2 е бројот 101. Според тоа, бараниот збир е еднаков на $998 + 101 = 1099$.

7. Замислив еден број, го помножив со 2 и од добиениот број одзедов 7. Го добив бројот 45. Кој број ќе го добиев, ако прво одземев 7, а потоа помножев со 2?

Решение. Пред да одземам 7, го добив бројот $45 + 7 = 52$. Значи, бројот кој го замислив е $52 : 2 = 26$. Ако прво одземев 7, а потоа помножев со 2 ќе го добиев бројот $(26 - 7) \cdot 2 = 19 \cdot 2 = 38$.

8. Замислив еден број, го помножив со 2 и на резултатот додадов 7, по што го добив бројот 45. Колку е збирот на цифрите на бројот кој го замислив?

Решение. Бројот што го замислив е $(45 - 7) : 2 = 38 : 2 = 19$. Збирот на неговите цифри е $1 + 9 = 10$.

9. Во театарска сала има 26 редови со по 24 столици во секој ред. Местата се нумерирани, така што од првиот ред се почнува со местото 1 и местата се означуваат редоследно. Во кој ред е местото со број 375 и кое место е тоа по ред?

Решение. Имаме, $375 = 15 \cdot 24 + 15$. Според тоа, од првото до 375-тото место имаме 15 полни редови и уште 15 места. Значи 375-тото место е во 16-тиот ред и тоа е 15-тото место во овој ред.

10. Збирот на три последователни броеви е 15. Кои се тие броеви?

Решение. Ако најмалиот број го означиме со x , тогаш средниот број е $x + 1$, а најголемиот е $x + 2$. Значи, $x + (x + 1) + (x + 2) = 15$, од каде добиваме $3x + 3 = 15$, т.е. $x = 4$. Значи, бараните броеви се 4, 5 и 6.

11. Горјан на Андреј и Пабло им кажал еден број. Андреј од бројот одзел 6 и го помножил со 6, а Пабло одзел 11 и го помножил со 11. Двајцата добиле ист резултат. Кој број им го кажал Горјан?

Решение. Нека Горјан го кажал бројот x . Андреј добил $6(x - 6)$, а Пабло добил $11(x - 11)$. Според тоа,

$$6(x - 6) = 11(x - 11),$$

$$6x - 36 = 11x - 121,$$

$$11x - 6x = 121 - 36,$$

$$5x = 85,$$

$$x = 17.$$

Значи, Горјан го кажал бројот 17.

12. Куќите на една улица се нумерирани на вообичаениот начин: од едната страна на улицата се куќите со непарните броеви 1, 3, 5, ..., а од другата страна куќите со парните броеви, при што наспроти $N^{\circ}1$ е $N^{\circ}2$, наспроти $N^{\circ}3$ е $N^{\circ}4$ итн. Андреј тргнал на прошетка од почеток на улицата и тој пребројал 10 цифри 2 во броевите од „непарната“ страна на улицата. До која куќа со сигурност стигнал Андреј за време на прошетката?

Решение. Во првата стотка непарни броеви во кои се јавува цифрата 2 се 21, 23, 25, 27 и 29, а во втората стотка тоа се броевите 121, 123, 125, 127 и 129. Во овие десет броја цифрата 2 е запишана 10 пати, што значи дека Андреј со сигурност стигнал до куќата $N^{\circ}129$.

13. Мојата куќа има број 17. Колку куќи има од нашата страна на улицата меѓу мојата и последната куќа, која има број 135, ако не ја бројам ниту мојата ниту последната куќа?

Решение. Од нашата страна на улицата се куќите кои се нумерирани со непарните броеви. Непарни броеви поголеми од 17, а помали од 135 има $(133 - 17) : 2 = 116 : 2 = 58$. Според тоа, од нашата страна на улицата меѓу мојата и последната куќа, има 58 куќи.

14. Во нашата улица од едната страна се куќите со броевите 1, 3, 5 итн. Наспроти $N^{\circ}1$ од другата страна на улицата е $N^{\circ}2$, наспро-

ти $N^{\circ}3$ е $N^{\circ}4$ итн. Мојата куќа е со број 17 и до неа ги гледам броевите на спротивната куќа, двете куќи пред неа и двете куќи по неа. Определи го збирот на броевите на куќите кои ги гледам.

Решение. Покрај бројот 18, јас ги гледам броевите 16 и 14, како и броевите 20 и 22. Според тоа, бараниот збир е еднаков на $14+16+18+20+22=90$.

15. Од едната страна на улицата куќите се нумерирани со броевите 1, 3, 5, 7, ..., при што се искористени 800 цифри. Кој е најголемиот број со кој е нумерирана куќа на таа страна на улицата?

Решение. За нумерирање со едноцифрени броеви се употребени 5 цифри и бидејќи има 45 непарни двоцифрени броеви за нив се употребени $45 \cdot 2 = 90$ цифри.

Според тоа, преостанатите $800 - (5 + 90) = 705$ цифри се употребени за трицифрени броеви, па затоа од таа страна на улицата имаме $705 : 3 = 235$ трицифрени непарни броеви.

Конечно, најголемиот број кој е употребен за нумерирање на куќа од оваа страна на улицата е $99 + 235 \cdot 2 = 569$.

16. Определи ги сите броеви кои се помали од 10 и истовремено се збир на три последователни броја и се збир на два последователни броја.

Решение. Збирот на два последователни броја е непарен број. Бидејќи тој треба да е помал од 10, треба да провериме дали броевите 3, 5, 7 или 9 се збир на три последователни броја.

За бројот 9 имаме: $9 = 4 + 5$ и $9 = 2 + 3 + 4$ и тој е решение на задачата.

За бројот 7 имаме: $7 = 3 + 4$, но $1 + 2 + 3 = 6 < 7 < 9 = 2 + 3 + 4$, па не е решение на задачата.

За бројот 5 имаме: $5 = 2 + 3$, но $5 < 6 = 1 + 2 + 3$ и тој не е решение на задачата.

За бројот 3 имаме: $3 = 1 + 2$, но $3 < 6 = 1 + 2 + 3$ и тој не е решение на задачата.

Значи, единствено решение на задачата е бројот 9.

17. Бројот A е двоцифрен, а бројот B е запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Определи го бројот A , ако $A + B = 55$ и $A - B$ се едноцифрени броеви.

Решение. Ако цифрата на единиците на бројот A е y , а цифрата на десетките на бројот A е x , тогаш $A = 10x + y$ и $B = 10y + x$.

Од условот на задачата следуваат неравенствата

$$0 \leq 10x + y - (10y + x) < 10 \text{ и } 0 \leq 10x + y + 10y + x - 55 < 10,$$

т.е. неравенствата $0 \leq 9(x - y) < 10$ и $0 \leq 11(x + y) - 55 < 10$. Од првото неравенство добиваме $x - y = 0$ или $x - y = 1$, а од второто неравенство добиваме $x + y = 5$. Случајот $x - y = 0$ не е возможен, бидејќи збир на два еднакви броја не може да е непарен број. Значи, $x - y = 1$ и $x + y = 5$. Збир на две соседни цифри е еднаков на 5 ако тоа се цифрите 3 и 2, па затоа $x = 3$ и $y = 2$, т.е. $A = 10 \cdot 2 + 3 = 32$.

18. Андреј, Пабло и Филип замислиле еден ист двоцифрен број. Андреј го помножил со 3, на добиениот резултат додал 3, добиениот број го поделил до 3, од количникот одзел 3 и го добил бројот a . Пабло, на замислениот број му додал 3, добиениот резултат го помножил со 3, од производот одзел 3, разликата ја поделил со 3 и го добил бројот b . Филип од замислениот број одзел 3, резултатот го помножил со 3, на производот додал 3, збирот го поделил со 3 и го добил бројот c . Подреди ги по големина броевите a, b и c , почнувајќи од најмалиот.

Решение. Нека замислениот број е x . Андреј го добил бројот:

$$a = (3x + 3) : 3 - 3 = x + 1 - 3 = x - 2.$$

Пабло го добил бројот:

$$b = ((x + 3) \cdot 3 - 3) : 3 = (3x + 9 - 3) : 3 = (3x + 6) : 3 = x + 2.$$

Филип го добил бројот:

$$c = ((x - 3) \cdot 3 + 3) : 3 = (3x - 9 + 3) : 3 = (3x - 6) : 3 = x - 2.$$

Конечно, од $x - 2 = x - 2 < x + 2$ следува $a = c < b$.

19. Определи го збирот на цифрите на најмалиот природен број чиј

производ на цифри е поголем од 500.

Решение. За да бројот биде најмал потребно е да употребиме што е можно помалку цифри. Бидејќи производ на два едноцифрени броја е најмногу $9 \cdot 9 = 81$, јасно е дека бројот треба да биде три или повеќецифрен. Понатаму, бидејќи $7 \cdot 81 = 567$ бараниот број е помал или еднаков на 799. Но, бидејќи $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ добиваме дека 789 е помал број чиј производ на цифри е поголем од 500. Јасно, не постои помал број чиј производ на цифри е поголем од 500, па затоа бараниот збир е $7 + 8 + 9 = 24$.

20. Определи го производот на цифрите на најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 23.

Решение. Најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 23 се добива ако цифрата на стотките е најмалата можна, а тоа значи дека цифрите на единиците и десетките се најголемите можни, т.е. двете се еднакви на 9. Според тоа, цифрата на стотките е $23 - 9 - 9 = 5$ и бројот е 599. Производот на неговите цифри е $5 \cdot 9 \cdot 9 = 405$.

21. Броевите на страниците на една книга, од која е скинат еден лист, се запишани со вкупно 2009 цифри. Колку листови има сега книгата? (Секој лист, освен можда последниот има две страници.)

Решение. Можни се следниве пет случаи:

- 1) Од книгата е скинат лист чии страни се нумерирани со едноцифрени броеви, па затоа за нумерирање на страниците со трицифрени броеви преостануваат $2009 - 7 \cdot 1 - 90 \cdot 2 = 1822$ цифри, што не е можно бидејќи бројот 1822 не е делив со 3.
- 2) Од книгата е скинат лист чии страни се нумерирани со едноцифрен и двоцифрен број, па затоа за нумерирање на страниците со трицифрени броеви преостануваат $2009 - 8 \cdot 1 - 89 \cdot 2 = 1823$, што не е можно бидејќи бројот 1823 не е делив со 3.
- 3) Од книгата е скинат лист чии страни се нумерирани со двоцифрени броеви, па затоа за нумерирање на страниците со трицифрени броеви преостануваат $2009 - 9 \cdot 1 - 88 \cdot 2 = 1824$

цифри. Сега, од $1824:3=608$ заклучуваме дека имаме 608 страници нумерирани со трицифрени броеви. Значи, книгата има $9+88+608=705$ и како $705=2\cdot 352+1$ заклучуваме дека таа има 353 листови (последниот лист има една нумерирана страна).

- 4) Од книгата е скинат лист чии страни се нумерирани со двоцифрен и трицифрен број, па затоа за нумерирање на другите страници со трицифрени броеви преостануваат

$$2009 - 9 \cdot 1 - 89 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1819$$

цифри, што не е можно бидејќи бројот 1819 не е делив со 3.

- 5) Од книгата е скинат лист чии страни се нумерирани со трицифрени броеви, па затоа за нумерирање на другите страници со трицифрени броеви преостануваат

$$2009 - 9 \cdot 1 - 90 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1814$$

цифри, што не е можно бидејќи бројот 1814 не е делив со 3.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека книгата има 353 листови.

II.2. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

22. Андреј го замолил Горјан од бурекџилницата да му купи кифла и сок, при што му дал пари точно колку што чинеле кифлата и сокот. Но, во бурекџилницата немало ниту кифла, ниту сок, па затоа Горјан купил баничка која била 5 денари поскапа и јогурт кој бил 10 денари поефтин. Како Андреј и Горјан ја израмниле сметката?

Решение. Баничката е 5 денари поскапа, а јогуртот е 10 денари поефтин. Значи, Горјан платил $10 - 5 = 5$ денари помалку, па затоа треба на Андреј да му врати 5 денари.

23. Земјоделецот Марко решил да произведува компири. Тој за семето платил 20 евра, за орање на земјата платил 52 евра, за заштитни средства платил 54 евра и за користење на системот за наводнување платил 34 евра. Од продажбата на компирите Марко

добил 998 евра. Колку пари заработил Марко?

Решение. За производството на компирите Марко потрошил $20 + 52 + 54 + 34 = 160$ евра. Од продажбата добил 998 евра, што значи дека Марко заработил $998 - 160 = 838$ евра.

24. Градинарот Марко под еден пластеник произвел 500 килограми домати. Притоа потрошил 350 денари за семе, 330 денари за заштитни средства, 1000 денари за обработка на почвата и 1200 денари за наводнување. Колку пари заработил Марко, ако килограм домати продавал по 55 денари?

Решение. Марко од продажбата на произведените домати добил $500 \cdot 55 = 27500$ денари. Понатаму, за производството на овие домати тој потрошил $350 + 330 + 1000 + 1200 = 2880$ денари. Според тоа, тој заработил $27500 - 2880 = 24620$ денари.

25. Колку пари платил Пабло за списание од 2 евра и 35 евроценти и пенкало од 1 евро и 86 евроценти?

Решение. Имаме, 2 евра и 35 евроценти се $200 + 35 = 235$ евроценти и 1 евро и 86 евроценти се $100 + 86 = 186$ евроценти. Пабло за списанието и пенкалото платил $235 + 186 = 421$ евроценти, односно 4 евра и 21 евроцент.

26. Горјан, Андреј и Пабло заедно имале 94 евра. Сите тројца си купиле по една иста книга. Потоа Андреј имал 21 евро, Горјан имал 26 евра и Пабло имал 32 евра. Колку пари имало секое дете на почетокот?

Решение. По купувањето на трите книги на децата вкупно им останале $21 + 26 + 32 = 79$ евра. Според тоа, книгите чинеле $94 - 79 = 15$ евра. Значи, цената на една книга била $15 : 3 = 5$ евра. Според тоа, на почетокот Андреј имал $21 + 5 = 26$ евра, Горјан имал $26 + 5 = 31$ евро и Пабло имал $32 + 5 = 37$ евра.

27. Од посетата за еден месец во летото во еден аквапарк заработиле 103363 евра. Влезот за возрасен е 25 евра, а за дете е 12 евра. Ако близнаци го посетуваат аквапаркот, тогаш за едниот влезот

е бесплатен. Тој месец 2635 возрасни го посетиле аквапаркот. Колку луѓе го посетиле аквапаркот, ако имало пет парови близнаци?

Решение. Од посетата на возрасните лица аквапаркот заработил $2635 \cdot 25 = 65875$ евра. Според тоа, од посетата на децата заработката е $103363 - 65875 = 37488$ евра. Влезницата за едно дете е 12 евра, што значи дека $37488 : 12 = 3124$ деца платиле влезници. Според тоа, влезници платиле $2635 + 3124 = 5759$ луѓе и како имало пет парови близнаци, бројот на лицата кои го посетиле аквапаркот е 5764.

28. Горјан купил 4 пакетчиња бонбони, а Пабло и Андреј купиле по 3 пакетчиња бонбони. Тројцата го сретнале Филип и четворицата подеднакво ги поделиле сите бонбони, при што се договориле дека ќе си ги поделат правилно и трошоците. Тие пресметале дека Филип треба да им даде на другите тројца 120 денари.

а) Колку чинело едно пакетче бонбони?

б) Колку пари треба да добие Горјан, а по колку треба да добијат Пабло и Андреј?

Решение. а) Филип треба да даде 120 денари, а сите учествуваат подеднакво во трошоците, па заклучуваме дека бонбоните чинат $4 \cdot 120 = 480$ денари. Децата купиле $4 + 3 + 3 = 10$ пакетчиња бонбони, што значи дека едно пакетче чини $480 : 10 = 48$ денари.

б) Горјан купил 4 пакетчиња бонбони, за што платил $4 \cdot 48 = 192$ денари, а требало да учествува со 120 денари. Значи, тој треба да добие $192 - 120 = 72$ денари од парите кои ги дал Филип.

Слично, Пабло и Андреј потрошиле по $3 \cdot 48 = 144$ денари, а секој требало да учествува со по 120 денари, па затоа Андреј и Пабло треба да добијат по $144 - 120 = 24$ денари од парите кои ги дал Филип.

29. Лилјана имала 1000 денари. Таа купила 3 исти колачи и 7 исти сокчиња, по што и вратиле 482 денари. Еден колач чини 119 денари. Колку чини едно сокче ?

Решение. Колачите и сокчињата заедно чинат $1000 - 482 = 518$

денари. Само колачите чинат $3 \cdot 119 = 357$ денари. Според тоа, сокчињата чинат $518 - 357 = 161$ денар. Конечно, едно сокче чини $161 : 7 = 23$ денари.

30. Едно училиште купило 15 таблети и 9 лаптопа. Цената на еден таблет е 424 евра, а на еден лаптоп е три пати поголема. Колку пари се платени повеќе за лаптопите отколку за таблетите?

Решение. Цената на еден лаптоп е $3 \cdot 424 = 1272$ евра. За таблетите се платени $15 \cdot 424 = 6360$ евра, а за лаптопите се платени $9 \cdot 1272 = 11448$ евра.

Значи, за лаптопите се платени $11448 - 6360 = 5088$ евра повеќе отколку за таблетите.

31. Мобилен телефон чини 360 евра. Клиент го купил на отплата од мобилен оператор, со што се зголемила цената на телефонот. Согласно склучениот договор телефонот треба да се плати на еднакви месечни рати од по 30 евра, при што за секој месец користење клиентот плаќа по 6 евра. Ако ратите се плаќаат на крајот од месецот, колку пари го чинел клиентот избраниот телефон?

Решение. Телефонот чинел 360 евра и како месечно се плаќаат по 30 евра, клиентот ќе го отплати телефонот на $360 : 30 = 12$ рати. Значи, бидејќи ратите се плаќаат на крајот на месецот пред да го отплати телефонот клиентот телефонот ќе го користи 12 месеци, за што ќе плати $12 \cdot 6 = 72$ евра. Конечно, клиентот за телефонот ќе плати $360 + 72 = 432$ евра.

32. Цената на еден автомобил е 27500 евра. Алекса автомобилот го купил на деветмесечен кредит при што месечно плаќал по 3360 евра. Колку Алекса платил повеќе од цената на автомобилот?

Решение. Алекса вкупно платил $9 \cdot 3164 = 28476$ евра. Цената на автомобилот била 27500 евра, што значи дека Алекса повеќе платил $28476 - 27500 = 976$ евра.

33. Иван на 1.1.2020 година на отплата на 24 рати купил компјутер

кој чинел 48000 денари. Тој месечно отплаќал по 2000 денари, а на почетокот на секоја година за неотплатените пари плаќал надомест (камата) по 70 денари на секои 1000 денари. Колку вкупно пари вкупно треба да плати Иван за компјутерот?

Решение. Од $48000:1000 = 48$ заклучуваме дека Иван на 1.1.2020 година платил надомест (камата) од $48 \cdot 70 = 3360$ денари. Потоа, следните 12 месеци, Иван отплаќа $12 \cdot 2000 = 24000$ денари, што значи дека на 1.1.2021 година ќе му останат да отплати $48000 - 24000 = 24000$ денари. Бидејќи $24000:1000 = 24$, за овие пари Иван ќе плати надомест (камата) од $24 \cdot 70 = 1680$ денари. Конечно, Иван за компјутерот вкупно треба да плати $48000 + 3360 + 1680 = 53040$ денари.

34. За градбата и опремување на викендицата семејството Јакопетревски потрошило: 2500 евра за изработка на планот и добивање дозвола за градба, 6250 евра за градежни работи, 5990 евра за занатски работи и 4300 евра за опремување на викендицата. Половината од потебните пари семејството ги имало заштедено, а за другата половина од банката зело заем за што за целиот период на отплата на заемот платило надомест (камата) еднаква на петтина од земената сума пари. Колку евра вратило на банката семејството Јакопетрески?

Решение. За градба и опремување на викендицата се потрошени вкупно $2500 + 6250 + 5990 + 4300 = 19040$ евра. Семејството зело заем во висина од $19040:2 = 9520$ евра. За овие пари на банката и платило надомест (камата) од $9520:5 = 1904$ евра. Според тоа, семејството Јакопетрески во банката вратило

$$9520 + 1904 = 11424 \text{ евра.}$$

35. Јован Јакопетрески купил нов стан, по што му останале 2000 евра. Јован решил да го уреди станот, но се покажало дека му недостасуваат пари, па затоа зел едногодишен заем во висина од 2000 евра за кој платил еднократна камата. Со парите од заштедата и заемот купил гарнитура за дневна совба и маса со шест столци за што вкупно платил 2290 евра, фрижидер и машина за

садови за 450 евра, машина за перење алишта и машина за сушење алишта за 550 евра, кујнски шпорет за 155 евра и мебел за кујна за 530 евра. По набавката се покажало дека парите кои му останале биле колку четвртина од каматата за заемот. Пресметај ја каматата за заемот.

Решение. По земањето на заемот Јован за опремување на станот имал $2 \cdot 2000 = 4000$ евра. При опремувањето на станот Јован потрошил

$$2290 + 450 + 550 + 155 + 530 = 3975 \text{ евра,}$$

што значи дека му останале $4000 - 3975 = 25$ евра. Бидејќи парите што му останале биле колку една четвртина од камата за заемот, заклучуваме дека каматата на заемот била $4 \cdot 25 = 100$ евра.

36. Андреј купил 40 топчиња за 60 евра, а Горјан купил 120 исти такви топчиња. Колку пари платил Горјан?

Решение. Андреј купил 40 топчиња, а Горјан 120 исти такви топчиња. Бидејќи $120 : 40 = 3$, заклучуваме дека Горјан топчињата го чинеле три пати повеќе од Андреј. Значи, Горјан платил $3 \cdot 60 = 180$ евра.

37. Филип од баба му добил 20 евра. Тој отишол во слаткарница и купил два колачи од по 1 евро и 50 евроценти и еден сок од 2 евра. Колку пари му останале на Филип?

Решение. За колачите Филип плати 2 евра и $2 \cdot 50 = 100$ евроценти. Но 100 евроценти е 1 евро, што значи дека колачите чинеле $2 + 1 = 3$ евра. Според тоа, за двата колачи и сокот Филип плати $3 + 2 = 5$ евра. Конечно, на Филип му останале $20 - 5 = 15$ евра.

38. Еден кроасан чини 1 евро и 50 евроценти. Горјан купил 7 кроасани и на продавачот му дал банкнота од 20 евра. Колку пари му вратил продавачот на Горјан?

Решение. Бидејќи 1 евро и 50 евроценти е 150 евроценти, кроасаните чинеле $7 \cdot 150 = 1050$ евроценти, односно 10 евра и 50 евроценти. Горјан на продавачот му дал банкнота од 20 евра,

што значи дека тој му вратил:

$$20 \text{ евра} - 10 \text{ евра } 50 \text{ евроценти} = 9 \text{ евра и } 50 \text{ евроценти.}$$

39. Цените на фармерките и кошулите во една продавница за алишта се соодветно 20 евра и 12 евра. На денот „Црн петок“ сопственикот на продавницата ги намалил цените на артиклите за една четвртина од постојните цени. Пабло го искористил намалувањето и купил по еден пар фармерки и по една кошула за него и неговиот братучед Андреј. Колку пари заштедил Пабло од сумата која би ја платил ако купувал по цени пред намалувањето?

Решение. *Прв начин.* Цената на пар фармерки била намалена за $20:4=5$ евра, а цената на една кошула била намалена за $12:4=3$ евра. Пабло купил 2 пара фармерки и 2 кошули, што значи дека тој вкупно заштедил $2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 16$ евра.

Втор начин. За 2 пара фармерки и 2 кошули Пабло требало да плати $2 \cdot 20 + 2 \cdot 12 = 64$ евра. Бидејќи цените на артиклите биле намалени за една четвртина од постојните цени, Пабло платил помалку $64:4=16$ евра, т.е. заштедил 16 евра.

40. Во училишниот ресторан еден цеден сок од портокал чини 75 денари, а еден витамински сок чини 32 денари. Ресторантот има промоција при што за едновременно купување цеден сок од портокал и витамински сок се плаќаат 100 денари. Пабло сака да купи 5 сока од цеден портокал и 3 витамински сока. Колку најмалку треба да плати Пабло?

Решение. Пабло најмалку ќе плати ако максимално ја искористи промоцијата. Тоа значи, ако купи 3 комплети цеден сок од портокал и витамински сок и 2 сока од цеден портокал. Тогаш ќе плати

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 75 = 300 + 150 = 450 \text{ денари.}$$

41. Калина на 22.02.2020 година пребројала дека во штедната касата има 18500 денари. Таа решила од следниот ден секој ден во касата да штеди по 20 денари. Колку пари имала Калина на 20.12.

2020 година, ако и на 20.12 таа ставила 20 денари во штедната каса?

Решение. Бидејќи 2020 година е престапна, таа има 366 дена. Калина не штедела $31 + 22 = 53$ дена на почетокот на годината и 11 дена на крајот на годината. Според тоа, таа во касата ставала по 20 денари во текот на $366 - (53 + 11) = 302$ дена и заштедила $302 \cdot 20 = 6040$ денари. Значи, на 20.12.2020 година Калина во касата ќе има $18500 + 6040 = 24540$ денари.

42. Горјан собира поштенски марки. Тој на една од страните на албумот ставил марки од по 1 ден., по 2 ден. и по 5 ден. Горјан забележал дека вредноста на марките на таа страна од албумот е 64 денари и дека од секој вид има еднаков број марки. Колку марки вкупно има на оваа страна од албумот?

Решение. На страната на албумот од секој вид марки има еднаков број марки. Секоја група марки од по 1 марка од 1 ден., 1 марка од 2 ден. и 1 марка од 5 ден. чини $1 + 2 + 5 = 8$ денари. Бидејќи вкупната вредност на сите марки на страната е еднаква на 64 денари, заклучуваме дека на оваа страна од албумот има $64 : 8 = 8$ од разгледуваните групи марки. Во секоја група имаме по 3 марки, што значи дека на оваа страна на албумот има $8 \cdot 3 = 24$ марки.

43. Во книжарница може да се купат 3 тетратки, 2 моливи и 1 пенкало за вкупно 296 денари, а 6 тетратки, 4 моливи и 1 пенкало за вкупно 522 денари. Колку чини еден молив ако 4 тетратки се поскапи од 2 пенкала за 100 денари?

Решение. Според условот на задачата 6 тетратки, 4 моливи и 2 пенкала чинат $2 \cdot 296 = 592$ денари. Понатаму, 6 тетратки, 4 моливи и 1 пенкало чинат 522 денари. Според тоа, едно пенкало чини $592 - 522 = 70$ денари. Сега, бидејќи 4 тетратки се поскапи од 2 пенкала за 100 денари, добиваме дека 4 тетратки чинат $100 + 2 \cdot 70 = 240$ денари, па затоа 1 тетратка чини $240 : 4 = 60$ денари. Конечно, 2 моливи чинат $296 - (3 \cdot 60 + 1 \cdot 70) = 46$ денари, па затоа 1 молив чини $46 : 2 = 23$ денари.

44. На почетокот на работниот ден продавачот во една буреџијница не ги пребројал парите во касата, кои останале од претходниот ден. Тој до 8 часот продал само 7 пити и тогаш констатирал дека во касата има 20 евра. До 11 часот биле продадени уште 8 банички по 1 евро и вкупно 17 пити. Сега во касата имало 48 евра. Колку евра имало во касата пред почетокот на работниот ден?

Решение. Во 11 часот без парите кои биле земени од продажбата на баничките во касата имало $48 - 8 \cdot 1 = 40$ евра. Од 8 до 11 часот биле продадени $17 - 7 = 10$ пити и тие чинеле $40 - 20 = 20$ евра. Според тоа, една пита чини $20 : 10 = 2$ евра. Конечно, на почетокот на работниот ден во касата имало $20 - 7 \cdot 2 = 6$ евра.

45. Сума од 450 денари е платена со монети од 5 и 10 денари. Монетите од 5 денари се четири пати повеќе од монетите од 10 денари. Колку монети од секој вид се употребени за плаќање на оваа сума?

Решение. Ако при плаќање на сумата се употребени x монети од 10 денари, тогаш бројот на монетите од 5 денари е $4x$. Затоа

$$10x + 4x \cdot 5 = 450,$$

$$30x = 450,$$

$$x = 15.$$

Според тоа, за плаќање на сумата се употребени 15 монети од 10 денари и $4 \cdot 15 = 60$ монети од 5 денари.

46. Андреј купил чоколадо и колач. Тој забележал дека чоколадото е пет пати поскапо од колачот и дека колачот е 92 денари поефтин од чоколадото. Колку пари чини чоколадото, а колку колачот?

Решение. Нека колачот чини x денари. Тогаш чоколадото чини $5x$ денари и како чоколадото е 92 денари поскапо од колачот добиваме дека чоколадото чини $x + 92$ денари. Значи,

$$5x = x + 92,$$

$$x = 23.$$

Значи, колачот чини 23 денари, а чоколадото чини $23 + 92 = 115$ денари.

47. Сечењето на еден железен профил на две парчиња чини 15 денари. Колку денари чини сечењето на истиот тој профил на 10 парчиња?

Решение. При пресекувањето на профилот на два дела имаме едно сечење. Според тоа, едно сечење чини 15 денари. За делење на профилот на 10 парчиња, ни се потребни 9 сечења. Значи, делењето на истиот профил на 10 парчиња, ќе чини $9 \cdot 15 = 135$ денари.

48. Андреј во продавница вратил 5 празни шишиња и за секое шише добил по 24 денари. Тој сака да купи колач кој чини 200 денари. Колку пари треба да доплати Андреј?

Решение. За вратените шишиња Андреј добил $5 \cdot 24 = 120$ денари. Колачот чинел 200 денари, што значи дека Андреј треба да доплати $200 - 120 = 80$ денари.

49. Кога Џо одел во казино, тој ги удвојувал парите со кои влегувал во казиното. Пред да го пушти во казиното вратарот секој пат му земал по 20 долари. Колку долари имал Џо пред првата посета на казиното, ако откако третиот пат влегол во казиното забележал дека тој нема пари?

Решение. Пред третиот пат да влезе во казиното Џо имал 20 долари. Според тоа, при второто излегување од казиното Џо имал 20 долари, што значи дека кога вториот пат влегол во казиното Џо имал $20 : 2 = 10$ долари, а пред да влезе имал $10 + 20 = 30$ долари. Сега, при првото излегување Џо имал 30 долари, што значи дека по првото влегување тој имал $30 : 2 = 15$ долари. Конечно, пред првата посета Џо имал $15 + 20 = 35$ долари.

50. Во едно училиште купиле ракометни и фудбалски топки по цена 7 евра за ракометна и 10 евра за фудбалска топка. Вкупно се потрошени 165 евра. Колку фудбалски, а колку ракометни топки

се купени, ако се купени помалку фудбалски од ракометни топ-ки?

Решение. Вкупно се платени 165 евра, а за фудбалските топки е платена сума која завршува со 0 (Зошто?). Според тоа, за ракометните топки е платена сума која завршува на цифрата 5 и е делива со 7. Тоа значи дека може да се купени:

а) 5 ракометни топки за кои се платени $7 \cdot 5 = 35$ евра, што значи дека се купени $(165 - 35) : 10 = 13$ фудбалски топки, што не е можно бидејќи бројот на фудбалските топки треба да е помал од бројот на ракометните топки,

б) 15 ракометни топки за кои се платени $7 \cdot 15 = 105$ евра, што значи дека се купени $(165 - 105) : 10 = 6$ фудбалски топки.

Конечно, бидејќи $7 \cdot 25 > 165$, заклучуваме дека се купени 15 ракометни и 6 фудбалски топки.

51. Градинарот Марко на пазар однесол каранфили кои ги продавал по цена од 70 денари за еден каранфил. Првиот купувач купил половина од каранфилите и уште еден каранфил. Вториот купувач купил половина од преостанатите каранфили и уште еден каранфил и третиот купувач купил половина од преостанатите каранфили и уште еден каранфил, по што Марко ги продал сите каранфили. Колку пари заработил Марко?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Последниот каранфил кој го купил третиот купувач всушност е половина од каранфилите кои останале по купувањето на вториот купувач. Според тоа, по вториот купувач останале $2 \cdot 1 = 2$ каранфили. Понатаму, $2 + 1 = 3$ се половина од каранфилите кои преостанале по купувањето на првиот купувач, што значи дека по првиот купувач преостанале $2 \cdot 3 = 6$ каранфили. Слично, $6 + 1 = 7$ се половина од каранфилите пред купувањето на првиот купувач, т.е. каранфилите кои Марко ги донел на пазар. Значи, Марко на пазар донел $2 \cdot 7 = 14$ каранфили и за нив добил $14 \cdot 70 = 980$ денари.

52. Ако Андреј купи 5 исти лижавчиња, му преостануваат 10 дена-

ри. За да купи 7 исти такви лижавчиња, му недостасуваат 22 денари. Определи ја цената на едно лижавче? Колку пари има Андреј?

Решение. Бидејќи кога Андреј купува 5 лижавчиња му преостануваат 10 денари, а кога купува 7 лижавчиња му недостасуваат 22 денари, заклучуваме дека за да купи $7 - 5 = 2$ лижавчиња тој треба да плати $10 + 22 = 32$ денари. Значи, едно лижавче чини $32 : 2 = 16$ денари. Конечно, Андреј има $5 \cdot 16 + 10 = 80 + 10 = 90$ денари.

53. За „Денот на книгата“ ученици од четврто и петто одделение купиле по една „Збирка задачи за IV и V одделение“, користејќи ја промотивната цена на книгата. Во споредба со редовната цена на книгата учениците од IV одделение добиле вкупен попуст од 81 денар, а учениците од V одделение добиле вкупен попуст од 72 денари. Книгата ја купиле 9 ученици од четврто одделение. Колку ученици од петто одделение ја купиле книгата?

Решение. Учениците од IV одделение добиле вкупен попуст од 81 денар, па бидејќи книгата ја купиле 9 ученици, заклучуваме дека цената на книгата била намалена за $81 : 9 = 9$ денари. Бидејќи учениците од V одделение добиле вкупен попуст од 72 денари, а цената на една книга била намалена за 9 денари, заклучуваме дека книгата ја купиле $72 : 9 = 8$ ученици од V одделение.

54. Превоз со траект чини 900 денари за автомобил со возач, плус 200 денари за секој дополнителен патник. Вкупно плативме 1500 денари. Колку мина бевме во автомобилот?

Решение. За дополнителните патници плативме

$$1500 - 900 = 600 \text{ денари.}$$

Бидејќи превозот на секој дополнителен патник чини 200 денари, во автомобилот освен возачот имаше $600 : 200 = 3$ други патници. Конечно, во колата бевме $1 + 3 = 4$ луѓе.

55. Три круши чинат колку две јаболка. Колку чинат девет круши ако три јаболка чинат 60 денари?

Решение. Имаме $9 = 3 \cdot 3$ и бидејќи три круши чинат колку две јаболка, заклучуваме дека девет круши чинат колку $3 \cdot 2 = 6$ јаболка. Но, 2 јаболка чинат 60 денари, па од $6 = 3 \cdot 2$ следува дека шест јаболка чинат $2 \cdot 60 = 120$ денари. Значи, девет круши чинат 120 денари.

56. Купив два сока од по 35 денари и една кифла од 25 денари. На продавачот му дадов банкнота од 100 денари. Колку пари треба да ми врати продавачот?

Решение. Соковите и кифлата чинат $2 \cdot 35 + 1 \cdot 25 = 70 + 25 = 95$ денари. На продавачот му дадов банкнота од 100 денари. Според тоа, продавачот треба да ми врати $100 - 95 = 5$ денари.

57. Пабло има банкнота од 1000 денари и со неа купил 4 чоколади и 3 колачи, по што продавачот му вратил 553 денари. Едно чоколадо чини 99 денари. Колку пари чини еден колач?

Решение. За купените 4 чоколади и 3 колачи Пабло платил $1000 - 553 = 447$ денари. Четири чоколади чинат $4 \cdot 99 = 396$ денари, што значи дека трите колачи чинат $447 - 396 = 51$ денар. Значи, еден колач чини $51 : 3 = 17$ денари.

58. Горјан има банкнота од 500 денари и со неа купил две кутии колачи од по 89 денари за една кутија и девет еднакви сока. Продавачот му вратил 34 денари. Колку пари чини еден сок?

Решение. Нека сокот чини x денари. Тогаш

$$2 \cdot 89 + 9x + 34 = 500,$$

$$9x + 178 + 34 = 500,$$

$$9x + 212 = 500,$$

$$9x = 500 - 212,$$

$$9x = 288,$$

$$x = 32.$$

Значи, еден сок чини 32 денари.

59. Филип купил 15 чоколади за 500 денари: неколку млечни по 40

денари за едно чоколадо и неколку овошни по 30 денари за едно чоколадо. Колку чоколади купил Филип од секој вид?

Решение. *Прв начин.* Ако сите купени чоколади се овошни, тогаш Филип требало да плати $30 \cdot 15 = 450$ денари. Но, тој платил $500 - 450 = 50$ денари повеќе и тоа е разликата која ја платил за млечните чоколади. Бидејќи едно млечно чоколадо е поскапо за $40 - 30 = 10$ денари, Филип купил $50 : 10 = 5$ млечни чоколади. Според тоа, тој купил $15 - 5 = 10$ овошни чоколади.

Втор начин. Нека Филип купил x млечни чоколади. Тоа значи дека купил $15 - x$ овошни чоколади. Така ја добиваме равенката

$$40x + 30 \cdot (15 - x) = 500.$$

Последователно имаме

$$40x + 450 - 30x = 500,$$

$$10x = 500 - 450,$$

$$10x = 50,$$

$$x = 50 : 10,$$

$$x = 5.$$

Значи, Филип купил 5 млечни и $15 - 5 = 10$ овошни чоколади.

60. Компанија за своите вработени купила вкупно 62 таблети и телефони, за што потрошила 6690 евра. Ако еден таблет чини 135 евра, а еден телефон чини 87 евра, колку таблети и колку телефони купила компанијата?

Решение. *Прв начин.* Ако компанијата купила x таблети, тогаш бројот на купените телефони е $62 - x$. Така ја добиваме равенката

$$135x + (62 - x) \cdot 87 = 6690,$$

од каде следува $(135 - 87)x + 62 \cdot 87 = 6690$, т.е. $x = 27$. Значи, компанијата купила 27 таблети и $62 - 27 = 35$ телефони.

Втор начин. Ако се купени само телефони, тогаш компанијата треба да плати $62 \cdot 87 = 5394$ евра. Таа платила $6690 - 5394 = 1296$ евра повеќе. Бидејќи еден таблет чини $135 - 87 = 48$ повеќе од телефон, заклучуваме дека компанијата купила $1296 : 48 = 27$ таблети. Конечно, бројот на купените телефони е $62 - 27 = 35$.

61. Два молива и пет тетратки чинат 1100 денари, а осум моливи и две тетратки чинат 800 денари. Колку чини еден молив и една тетратка?

Решение. Бидејќи 8 моливи и 2 тетратки чинат 800 денари, заклучуваме дека $8:2=4$ моливи и $2:2=1$ тетратка чинат $800:2=400$ денари. Според тоа, $5\cdot 4=20$ моливи и $5\cdot 1=5$ тетратки чинат $5\cdot 400=2000$ денари.

Понатаму, бидејќи 20 моливи и 5 тетратки чинат 2000 денари, а 2 моливи и 5 тетратки чинат 1100 денари, заклучуваме дека $20-2=18$ моливи и $5-5=0$ тетратки чинат $2000-1100=900$ денари. Значи, 1 молив чини $900:18=50$ денари. Според тоа, 2 тетратки чинат $800-8\cdot 50=400$ денари, па затоа 1 тетратка чини $400:2=200$ денари.

Конечно, 1 молив и 1 тетратка чинат $200+50=250$ денари.

62. Сопственик на модна конфекција започнал производство на нов модел на летни машки костуми. Во производството на еден костум тој вложил ленено платно за 1560 денари и дополнителен материјал (постава, петлици, конци и друг материјал) со три пати помала вредност. Потоа пресметал дека вредноста на трудот за шиенето на еден костум е 100 денари пониска од вредноста на дополнителниот материјал за него. По која цена треба конфекцијата да продава еден костум, ако сопственикот сака заработувачката од продажбата на 75 костуми да биде 151500 денари?

Решение. Вредноста на дополнителниот материјал е три пати помала од вредноста на лененото платно, од каде добиваме дека дополнителниот материјал чини $1560:3=520$. Понатаму, шиенето на еден костум чини $520-100=420$ денари. Заработувачката од 75 костуми е 151500 денари, па затоа заработувачката од еден костум е $151500:75=2020$ денари. Значи, конфекцијата треба еден костум да продава за $1560+520+420+2020=4520$ денари.

63. За опремување на екипата во фудбал (мал фудбал) едно училиш-

те купило 11 пара патики и 13 дресови, за кои вкупно платило 1420 евра. Колку пари чини еден пар патики, а колку еден дрес, ако 5 пара патики и 6 дресови заедно чинат 650 евра?

Решение. Бидејќи 5 пара патики и 6 дресови заедно чинат 650 евра, заклучуваме дека $2 \cdot 5 = 10$ пара патики и $2 \cdot 6 = 12$ дресови заедно чинат $2 \cdot 650 = 1300$ евра.

Понатаму, 11 пара патики и 13 дресови заедно чинат 1420 евра, па следува дека $11 - 10 = 1$ пар патики и $13 - 12 = 1$ дрес заедно чинат $1420 - 1300 = 120$ евра.

Според тоа, 5 пара патики и 5 дреса заедно чинат $5 \cdot 120 = 600$ евра, па затоа $5 - 5 = 0$ пара патики и $6 - 5 = 1$ дрес, односно 1 дрес чини $650 - 600 = 50$ евра. Конечно, 1 пар патики чини $120 - 50 = 70$ евра.

64. Шест тетратки и три моливи чинат колку пет тетратки и 12 моливи. Колку моливи чинат колку што чинат две тетратки?

Решение. Ако од групата 6 тетратки и 3 моливи, односно од групата 5 тетратки и 12 моливи извадиме 5 тетратки и 3 моливи ќе добиеме група од 1 тетратка и група од 9 моливи. Бидејќи 6 тетратки и 3 моливи чинат колку 5 тетратки и 12 моливи, а од двете групи извадивме еднаков број тетратки и моливи, заклучуваме дека 1 тетратка чини колку 9 моливи. Значи, 2 тетратки чинат колку $2 \cdot 9 = 18$ моливи.

65. На пазарот 2 круши чинат колку 3 јаболки, 2 јаболки чинат колку 3 портокали. Колку јаболки чинат 4 круши и 9 портокали?

Решение. Бидејќи $4 = 2 \cdot 2$, а 2 круши чинат колку 3 јаболки заклучуваме дека 4 круши чинат колку $2 \cdot 3 = 6$ јаболки. Слично, од $9 = 3 \cdot 3$ и 3 портокали чинат колку 2 јаболки следува дека 9 портокали чинат колку $3 \cdot 2 = 6$ јаболки. Според тоа, 4 круши и 9 портокали чинат колку $6 + 6 = 12$ јаболки.

66. Племето Итромани не знае што се тоа пари, па своите пазарни односи ги регулира со размена на стоки. Така, советот на племето ги утврдил следниве соодноси:

две тикви $\leftrightarrow$ три јајца, пет јајца $\leftrightarrow$ седум јаболки.

Итроманот Ацо почнал бизнис со 210 јаболки. Колку тикви може да добие за нив?

Решение. Имаме $210:7=30$, па како за секои 7 јаболки се добиваат 5 јајца, 210 јаболки вредат колку $5\cdot 30=150$ јајца. Понатаму, бидејќи $150:3=50$, па како за секои 3 јајца се добиваат по 2 тикви, 150 јајца вредат колку $2\cdot 50=100$ тикви.

Значи, за 210 јаболки Ацо може да добие 100 тикви.

67. Горјан, Андреј и Пабло береле јаболка во блиската овошна градина и секој од нив заработил определена сума пари. Тие решиле заработените пари да ги поделат на три еднакви дела, но наместо да го пресметаат збирот и да го поделат на 3, тие постапиле на следниот сложен начин: Горјан на другите двајца има дал по 3 евра, Андреј на другите двајца им дал по 5 евра и Пабло на другите двајца им дал по 7 евра. Ако пред поделбата Андреј имал 19 евра, колку пари имале Горјан и Пабло пред поделбата?

Решение. Андреј дал $2\cdot 5=10$ евра, а добил $3+7=10$ евра, што значи дека неговата сума останала непроменета. Тоа значи дека по поделбата секој имал по 19 евра. Пабло дал $2\cdot 7=14$ евра, а добил $5+3=8$ евра, што значи дека неговата сума се намалила за $14-8=6$ евра. Бидејќи по поделбата тој имал 19 евра, заклучуваме дека пред поделбата тој имал $19+6=25$ евра. Горјан дал $2\cdot 3=6$ евра, а добил $5+7=12$ евра, што значи дека неговата сума се зголемила за $12-6=6$ евра и тој пред поделбата имал $19-6=13$ евра.

68. Пабло си купил неколку бонбони по 8 денари и неколку чоколатца по 11 денари. Тој потрошил точно 100 денари. Колку бонбони и чоколатца купил Пабло?

Решение. Ако Пабло купил a бонбони, тој потрошил $8a$ денари, т.е. потрошил парен број денари. Бидејќи вкупната потрошена сума е парен број, заклучуваме дека и за чоколатцата Пабло потрошил парен број денари. Но, едно чоколатце чини 11 денари, заклучуваме дека Пабло купил парен број чоколатца а од

$11 \cdot 10 > 100$ следува дека тој купил 2, 4, 6 или 8 чоколатца.

Ако купил 2 чоколатца, тој потрошил 22 денари, па за бонбоните му останале 78 денари, што не е можно бидејќи бројот 78 не е делив со 8.

Ако купил 4 чоколатца, тој потрошил 44 денари, па за бонбоните му останале 56 денари, што значи дека купил и $56 : 8 = 7$ бонбони.

Ако купил 6 чоколатца, тој потрошил 66 денари, па за бонбоните му останале 34 денари што не е можно бидејќи бројот 34 не е делив со 8.

Ако купил 8 чоколатца, тој потрошил 88 денари, па за бонбоните му останале 12 денари што не е можно бидејќи бројот 12 не е делив со 8.

Според тоа, Пабло купил 4 чоколатца и 7 бонбони.

69. За денот на книгата во училиштето на Пабло купиле книги со кои ги наградиле победниците на одделните натпревари. Имало два вида книги, од 9 евра и од 7 евра. Колку книги биле купени, ако за нивната набавка се потрошени 62 евра?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $9 > 7$, бројот на книгите од 9 евра не може да е поголем од бројот на книгите од 7 евра. Затоа е добро да го разгледуваме бројот на книгите од 9 евра. Ја составуваме следнава табела.

книги од 9 ев.		остануваат	проверуваме дали бројот е од таблицата за множење со 7	книги од 7 ев.
број	цена	евра		број
1	9	$62 - 9 = 53$	53 не е од таблицата	нема решение
2	18	$62 - 18 = 44$	44 не е од таблицата	нема решение
3	27	$62 - 27 = 35$	35 е од таблицата	$35 : 7 = 5$
4	36	$62 - 36 = 26$	26 не е од таблицата	нема решение
5	45	$62 - 45 = 17$	17 не е од таблицата	нема решение
6	54	$62 - 54 = 8$	8 не е од таблицата	нема решение
>7	> 63	$63 > 62$	броевите се поголеми од 62	нема решение
ВКУПНИОТ БРОЈ КНИГИ Е			$3 + 5 = 8$	

Втор начин. Разликата на цената на двата вида книги е $9 - 7 = 2$ евра. Имаме, $62 = 8 \cdot 7 + 6$, што значи дека ако сме купиле само книги од по 7 евра, тогаш сме купиле 8 книги и не преостанале 6

евра. Овие 6 евра се потрошени за $6:2=3$ книги од 9 евра. Конечно, вкупно се купени 8 книги и тоа: 3 книги од по 9 евра и $8-3=5$ книги од по 7 евра.

70. Пабло, Горјан и Андреј влегле во книжарница. Пабло купил едно хемиско, еден молив и една гума. Андреј купил две хемиски и една гума, а Горјан купил два молива и три гуми. Се покажало дека Горјан потрошил 80 евроценти повеќе пари од Андреј, а Андреј и Пабло потрошиле исти суми пари. Една гума е 10 евроценти поскапа од еден молив.

а) Колку пари потрошил Горјан?

б) Ако Пабло располага со монети од 50 евроценти, 20 евроценти, 5 евроценти и 1 евроцент, но со нив не може да плати без кусур, колку најмногу пари може да има Пабло?

Решение. а) Нека x е цената на хемиското, y е цената на моливот и z е цената на гумата. Андреј и Пабло потрошиле исти суми пари, па затоа $x + y + z = 2x + z$, т.е. $y = x$. Понатаму, Горјан потрошил 80 евроценти повеќе пари од Андреј, па затоа $2y + 3z = 2x + z + 80$, од каде добиваме $y + z = x + 40$. Но, $y = x$, па затоа $z = 40$ евроценти. Сега, гумата е 10 евроценти поскапа од моливот, па затоа $y = z - 10 = 40 - 10 = 30$ евроценти. Значи, Горјан потрошил $2y + 3z = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 40 = 180$ евроценти.

б) Пабло платил $180 - 80 = 100$ евроценти. Пабло има 1 монета од 50 евроценти. Ако има повеќе од една монета од 50 евроценти, тој со 2 ќе може да плати без кусур. Монетите од 20 евроценти се четири. Ако се повеќе, со 5 од нив ќе може да плати без кусур. Монетите од 5 евроценти се една, бидејќи ако се повеќе од една тогаш $50 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 5 = 100$ евроценти. Ако Пабло има повеќе од 1 монета од 5 евроценти, тој ќе има 1 монета од 20 евроценти. Монетите од 1 евроцент се најмногу 4. Значи, Пабло има

$1 \cdot 50 + 1 \cdot 20 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 99$ или $1 \cdot 50 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 139$ евроценти. Конечно, Пабло може да има најмногу 139 евроценти.

71. Еден расипан автомат за кафе ги извршува само следниве три операции:

- 1) за монета од 1 евро се добиваат едно кафе и две монети од по 20 евроценти,
- 2) за монета од 20 евроценти се добиваат едно кафе и монета од 50 евроценти,
- 3) за монета од 50 евроценти се добиваат едно кафе и монета од 1 евро.

Филип на почетокот има само една монета од 1 евро и од автоматот купил 4 кафиња.

а) Која е најголемата можна сума која Филип може да ја има по купувањето на кафињата?

б) Која е најмалата можна сума која Филип може да ја има по купувањето на кафињата?

Решение. а) Најголемата можна сума која на Филип може да му остане по купување на кафињата е 1 евро и 50 евроценти и истата се добива ако во секое од четири купувања максимално ја зголемуваме сумата и тоа:

Купување	Троши	Останува
Прво	1 евро	20 ес + 20 ес
Второ	20 ес	20 ес + 50 ес
Трето	50 ес	1 евро + 20 ес
Четврто	20 ес	1 евро + 50 ес

б) Најмалата можна сума која на Филип може да му остане по купување на кафињата е 60 евроценти и истата се добива ако во четирите купувања најголем можен број пати ја намалиме сумата и тоа:

Купување	Троши	Останува
Прво	1 евро	20 ес + 20 ес
Второ	20 ес	20 ес + 50 ес
Трето	50 ес	1 евро + 20 ес
Четврто	1 евро	20 ес + 20 ес + 20 ес

II.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

72. Товарен воз треба да се состави од две локомотиви, 17 товарни вагони и 15 цистерни. На почетокот сите локомотиви, вагони и цистерни се одделени. Ако едно закачување трае 2 минути, колку минути се потребни за составување на композицијата?

Решение. Композицијата има $2+17+15=34$ локомотиви, вагони и цистерни. За нивно составување се потребни $34-1=33$ закачувања. Бидејќи едно закачување трае 2 минути, за составување на композицијата се потребни $33 \cdot 2 = 66$ минути.

73. Горјан ги искачува скалите, прескокнувајќи по едно стапало во секунда (гази на секое второ стапало). Површините меѓу катите ги сметаме за стапала, а за да на секој кат дојде од едните до другите скали на Горјан му се потребни 5 секунди. За колку секунди Горјан ќе се качи од првиот до шестиот кат, ако скалите меѓу секои два ката имаат по 20 стапала?

Решение. Од површината на првиот кат, одејќи кон вториот кат, Горјан стапнува на стапалата 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 и 20, со што се наоѓа на површината на вториот кат. Значи, за да отиде од првиот на вториот кат му се потребни 10 s. Истото време му е потребно за искачување на останатите четири скали. Значи, за искачување на скалите на Горјан му се потребни $5 \cdot 10 = 50$ s и како од првиот до шестиот кат, за да дојде од едни до други скали, тој треба да изоди 4 површини добиваме дека вкупното време е $50 + 4 \cdot 5 = 70$ s.

74. За 1 минута Марија окопува 2 борчиња, а Симона окопува 3 борчиња. Симона работела 5 минути повеќе и двете заедно окопале 95 борчиња. Колку минути работело секое девојче?

Решение. Симона работела 5 минути повеќе и за ова време таа окопала $5 \cdot 3 = 15$ борчиња. Според тоа, во времето кога заедно работеле девојчињата окопале $95 - 15 = 80$ борчиња. Бидејќи двете заедно за 1 минута окопуваат $2 + 3 = 5$ борчиња, тие заед-

но работеле $80:5=16$ минути. Значи, Марија работела 16 минути, а Симона работела 21 минута.

75. Во четврто одделение во едно училиште има 121 ученик. Денес во 8 часот наутро четвртоодделенката Сања за 15 минути на три свои соученици им раскажала интересна сторија. Одма потоа секој од тројцата соученици за 15 минути сторијата ја раскажал на други три соученици. Секој од деветте ученици во следните 15 минути ја раскажал сторијата на други три соученици итн. Во колку часот секој ученик од четврто одделение ја знаел сторијата, ако секој ја слушал само по еднаш?

Решение. Во 8:15 часот сторијата ја знаеле $1+3\cdot1=4$ ученици. Во 8:30 часот сторијата ја знаеле $4+3\cdot3=13$ ученици. Во 8:45 часот сторијата ја знаеле $13+9\cdot3=40$ ученици. Во 9:00 часот сторијата ја знаеле $40+27\cdot3=121$, односно сите ученици.

76. Според мерењето на времето на племето Итромани, еден нивен час од нашиот час е пократок за 15 наши минути. Колку нивни часови трае деноноќието на племето Итромани?

Решение. *Прв начин.* Еден наш час трае наши 60 min, а еден час на племето Итромани трае наши $60-15=45$ min. Во едно деноноќие има наши $24\cdot60=1440$ min. Но, еден час на племето Итромани трае наши 45 min, па затоа во едно деноноќие има $1440:45=32$ часови на племето Итромани.

Втор начин. Еден наш час трае наши 60 min, а еден час на племето Итромани трае наши $60-15=45$ min. Бидејќи $3\cdot60=4\cdot45$ три наши часа траат колку четири часа на племето итромани. Сега, од $24:3=8$ следува дека едно деноноќие на племето Итромани има $8\cdot4=32$ часа.

77. Колку часови трае едно земско деноноќие на племето Итромани, ако еден нивен час е за 20 наши минути пократок од еден наш час?

Решение. Во текот на едно деноноќие има наши 24 часови по 60

минути, што значи $24 \cdot 60 = 1440$ наши минути. Еден час на племето Итромани трае $60 - 20 = 40$ наши минути, па затоа едно земско деноноќие на племето Итромани трае $1440 : 40 = 36$ нивни часови.

78. Горјан заспал во 10 часот и 15 минути вечерта, а се разбудил во 6 часот и 40 минути следното утро. Колку време спиел Горјан?

Решение. Бидејќи 10 h 15 min вечерта, всушност е 22 h 15 min, Горјан до полноќ спиел $24 \text{ h} - 22 \text{ h } 15 \text{ min} = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$. По полноќ тој спиел 6 h 40 min, што значи дека вкупно спиел

$$1 \text{ h } 45 \text{ min} + 6 \text{ h } 40 \text{ min} = 7 \text{ h } 85 \text{ min} = 8 \text{ h } 25 \text{ min}.$$

79. Возот од Загреб за Скопје патува 7 h 30 min и во Скопје пристигнал во 5:45 часот. Во колку часот возот тргнал од Загреб?

Решение. Бидејќи

$$7 \text{ h } 30 \text{ min} = 5 \text{ h } 45 \text{ min} + 1 \text{ h } 45 \text{ min},$$

возот од Загреб тргнал 1 h 45 min пред полноќ. Понатаму, бидејќи

$$24 \text{ h} - 1 \text{ h } 45 \text{ min} = 22 \text{ h } 15 \text{ min},$$

заклучуваме дека возот од Загреб тргнал во 22:15 часот.

80. Во училиштето на Филип еден час трае 45 минути, а одморите меѓу часовите траат 7 минути. Филип денес има пет часа. Часовите на Филип започнуваат во 7:30 часот. Во колку часот Филип завршува со настава?

Решение. Меѓу 5 часа има четири одмори. Според тоа, часовите и одморите меѓу часовите траат

$$5 \cdot 45 + 4 \cdot 7 = 225 + 28 = 253 \text{ min} = 4 \text{ h } 13 \text{ min}.$$

Филип почнува со настава во 7 h 30 min, па затоа тој со настава завршува во

$$7 \text{ h } 30 \text{ min} + 4 \text{ h } 13 \text{ min} = 11 \text{ h } 43 \text{ min}.$$

81. Денес, решавајќи задачи, за напреварот по математика Марија

се подготвуваше 1 час и 45 минути и со решавањето задачи заврши во 11:03 часот. Во колку часот таа започна да решава задачи?

Решение. Марија завршила со решавањето задачи во 11 часот и 3 минути. Бидејќи подготовката траела 1 час и 45 минути, таа со решавањето задачи започнала во

$11\text{ h }3\text{ min} - 1\text{ h }45\text{ min} = 10\text{ h }63\text{ min} - 1\text{ h }45\text{ min} = 9\text{ h }18\text{ min}$,
односно во 9:18 часот.

82. Андреј домашната по математика ја пишувал 1 час и 25 минути и истата ја завршил во 11 часот и 5 минути. Во колку часот Андреј почнал да ја пишува домашната?

Решение. Имаме

$11\text{ h }5\text{ min} - 1\text{ h }25\text{ min} = 10\text{ h }65\text{ min} - 1\text{ h }25\text{ min} = 9\text{ h }40\text{ min}$,
што значи дека Андреј домашната почнал да ја пишува во 9:40 часот.

83. Автобус тргнал од Белград петнаесет минути пред шест часот и во Солун пристигнал попладне десет минути пред три часот. Колку време патувал овој автобус?

Решение. Автобусот тргнал од Белград до 5 h 45 min , а во Солун пристигнал во 14 h 50 min . Според тоа, автобусот патувал

$$14\text{ h }50\text{ min} - 5\text{ h }45\text{ min} = 9\text{ h }5\text{ min} .$$

84. Филмот „Леси се враќа дома“ без реклами трае 137 минути. Филмот почнал да се прикажува на телевизија од 11:30 часот, при што додека филмот се прикажувал имало 5 реклами, секоја од по 7 минути. Во колку часот завршило прикажувањето на филмот?

Решение. Вкупното времетраење на филмот заедно со рекламите е

$$137 + 5 \cdot 7 = 137 + 35 = 172\text{ min} = 2\text{ h }52\text{ min} .$$

Филмот почнал да се прикажува во 11:30 = 11 h 30 min , што значи дека тој завршил во

$$11\text{ h }30\text{ min} + 2\text{ h }52\text{ min} = 13\text{ h }82\text{ min} = 14\text{ h }22\text{ min} .$$

85. Ивана секој ден патува од дома до училиште 25 минути. Таа денес има 5 часа по 40 минути, 3 одмори од по 10 минути и еден одмор од 20 минути. По часовите таа 35 минути била на игра-орна секција. Дома се вратила во 13 часот и 20 минути. Во колку часот Ивана тргнала на училиште?

Решение. Времето кое Ивана го поминала да отиде од дома до училиштето, во училиштето и да се врати од училиштето до дома е еднакво на:

$$25 + 5 \cdot 40 + 3 \cdot 10 + 20 + 35 + 25 = 335\text{ min} = 5\text{ h }35\text{ min} .$$

Таа дома се вратила во 13 h 20 min , што значи дека на училиште тргнала во

$$13\text{ h }20\text{ min} - 5\text{ h }35\text{ min} = 12\text{ h }80\text{ min} - 5\text{ h }35\text{ min} = 7\text{ h }45\text{ min} .$$

86. На натпревар по математика Филип решавал 20 задачи. Секоја задача ја решавал за 3 минути и меѓу секои две задачи правел пауза од 1 минута. Во колку часот Филип ја предал тетратката со одговорите, ако започнал да ги решава задачите точно во 11:00 часот и не се задржувал по завршувањето со решавање на последната задача?

Решение. За секоја од првите 19 задачи заедно со паузите Филип потрошил по $3+1=4\text{ min}$. Според тоа, за решавање на сите 20 задачи, заедно со паузите, Филип потрошил $19 \cdot 4 + 3 = 79\text{ min}$. Но, тој почнал да го решава тестот во 11 h , што значи дека тој тестот го предал во $11\text{ h} + 79\text{ min} = 12\text{ h }19\text{ min}$.

87. Пред еден месец Филип решавал задачи по 2 часа на ден, при што секоја задача ја решавал 3 минути и 20 секунди. Сега тој успева секоја задача да ја реши за 2 минути и 30 секунди и секој ден решава еднаков број задачи како и пред еден месец. Определи го времето за кое сега Филип ги решава задачите.

Решение. Пред еден месец Филип една задача ја решавал за

$$3\text{ min }20\text{ s} = 3 \cdot 60\text{ s} + 20\text{ s} = 200\text{ s} .$$

Тој задачи решавал

$$2\text{ h} = 2 \cdot 60\text{ min} = 120\text{ min} = 120 \cdot 60\text{ s} = 7200\text{ s},$$

што значи дека дневно решавал $7200 : 200 = 36$ задачи.

Сега, Филип една задача решава за

$$2\text{ min } 30\text{ s} = 2 \cdot 60\text{ s} + 30\text{ s} = 150\text{ s}.$$

Но, тој повторно решава 36 задачи, па затоа потребното време е

$$36 \cdot 150\text{ s} = 5400\text{ s} = 3600\text{ s} + 1800\text{ s} = 1\text{ h } 30\text{ min}.$$

88. Селанката Лидија има три кокошки. Едната кокошка неси едно јајце секој ден, другата неси едно јајце преку еден ден, а третата неси едно јајце преку два дена. Колку јајца снесле кокошките на Лидија во текот на месец јуни, ако на 1 јуни сите три кокошки снесле јајца?

Решение. Месецот јуни има 30 дена, што значи дека првата кокошка снесла 30 јајца. Втората кокошка снесла јајце на 1, 3, 5, 7, 9, ..., 29 јуни, што значи дека снесла 15 јајца. Третата кокошка снесла јајца на 1, 4, 7, 10, 13, 16, ..., 28 јуни, што значи дека таа снесла 10 јајца.

Конечно, кокошките на Лидија снесле $30 + 15 + 10 = 55$ јајца.

89. Збирот на годините на Пабло, Андреј и Филип е 28. Колкав бил тој збир пред пет години, ако сите тројца веќе биле родени?

Решение. Бидејќи пред пет години сите момчиња биле родени, секое од нив било помладо за 5 години. Според тоа, тие заедно имале $3 \cdot 5 = 15$ години помалку, па збирот на нивните години бил $28 - 15 = 13$.

90. Збирот на годините на Иван и Павле е 15. Збирот на годините на Иван и Кате е 19. Следната година збирот на годините на Павле и Кате ќе биде 22. Определи ги годините на трите деца?

Решение. Бидејќи следната година збирот на годините на Павле и Кате ќе биде 22, а секој од нив ќе биде постар по 1 година, заклучуваме дека збирот на годините на Павле и Кате е $22 - 2 = 20$. Понатаму, збирот на годините Иван и Павле е 15, а збирот на годините на Иван и Кате е 19, па затоа удвоениот збир на годи-

ните на Иван, Павле и Кате е $20+15+19=54$. Според тоа, збирот на годините на Иван, Павле и Кате е $54:2=27$. Значи, Кате има $27-15=12$ години, Павле има $27-19=8$ години и Иван има $27-20=7$ години.

91. Петра е два пати помлада од нејзиниот брат, кој е 20 години помлад од нивната мајка. Братот на Петра има 14 години. Определи го збирот на годините на Петра, нејзиниот брат и нивната мајка?

Решение. Братот има 14 години, а Петра е два пати помлада, што значи дека Петра има $14:2=7$ години. Нивната мајка е 20 години постара од братот, што значи дека таа има $20+14=34$ години. Конечно, збирот на нивните години е $7+14+34=55$.

92. Горјан е пет пати постар од неговиот брат Андреј. Разликата на нивните години е 12. По колку години Горјан ќе биде двапати постар од Андреј?

Решение. Ако сега Андреј има x години, тогаш Горјан има $5x$ години. Значи, $5x-x=12$, од каде добиваме $4x=12$, односно $x=12:4=3$. Значи, сега Андреј има 3 години, а Горјан има $3+12=15$ години.

Нека по n години Горјан биде два пати постар од Андреј. Тогаш Андреј ќе има $3+n$ години, а Горјан ќе има $15+n$ години и ќе важи

$$15+n=2(3+n),$$

$$15+n=6+2n,$$

$$2n-n=15-6,$$

$$n=9.$$

Значи, по 9 години Горјан ќе биде двапати постар од Андреј. Притоа, Горјан ќе има $15+9=24$ години, а Андреј ќе има $3+9=12$ години.

93. Едно семејство се состои од татко, мајка и дете. Денес збирот на нивните години е 49, а пред 3 години бил 41. Колку години има

таткото денес, ако мајката е 21 година постара од детето?

Решение. Збирот на годините денес е 49, а пред три години бил $49 - 41 = 8$ години помал. Таткото и мајката пред три години заедно имале помалку $3 + 3 = 6$ години, што значи дека детето денес има $8 - 6 = 2$ години. Но, мајката е 21 година постара од детето, па затоа таа денес има $21 + 2 = 23$ години, а таткото има $49 - (23 + 2) = 24$ години.

94. Збирот на годините на таткото, мајката и двете деца е 100. Постарото дете се родило кога таткото имал 26 години, а помалото кога мајката имала 26 години. Определи го збирот на годините на децата.

Решение. Ако денес постарото дете има x години, а помалото има y години, тогаш таткото има $26 + x$, а мајката има $26 + y$. Значи, денес збирот на годините на таткото, мајката и двете деца е $x + (26 + x) + y + (26 + y) = 2(x + y) + 52$ и тој е еднаков на 100. Оттука добиваме $2(x + y) + 52 = 100$, па затоа $2(x + y) = 48$. Конечно, збирот на годините на двете деца е $x + y = 24$.

95. Мајката на Павел сега има 30 години, а нејзините три сина имаат 1, 3 и 5 години. По 12 години, збирот на годините на мајката и таткото на Павел ќе биде два пати поголем од збирот на годините на трите момчиња. Колку години има сега таткото на Павел?

Решение. Нека таткото на Павел сега има x години. По 12 години момчињата ќе имаат 13, 15 и 17 години, мајката ќе има 42 години и таткото ќе има $x + 12$ години. Затоа,

$$x + 12 + 42 = 2 \cdot (13 + 15 + 17),$$

$$x + 54 = 2 \cdot 45$$

$$x + 54 = 90.$$

$$x = 36.$$

Значи, сега таткото на Павел има 36 години.

96. Збирот на годините на членовите на едно семејство пред 4 годи-

ни бил 49. Тие се сите живи и здрави и сега збирот на нивните години е 62. Колку ќе биде збирот на годините на семејството по 4 години, ако пак се сите живи и здрави и вгодина им се роди уште едно дете?

Решение. За 4 години збирот на годините на семејството се зголемил за $62 - 49 = 13$ години. Бидејќи кај секој член на семејството бројот на годините се зголемува за 4, а $13 = 4 \cdot 3 + 1$, сега семејството има 4 члена. Понатаму, ако вгодина им се роди уште едно дете, по 4 години бројот на годините на семејството ќе се зголеми за $4 \cdot 4 + 3 = 19$ години. Значи, по 4 години збирот на годините на семејството ќе биде $62 + 19 = 81$.

97. Фаница научила колку години има учителката Ирена и ѝ кажала на Костадинка. Костадинка ѝ била лута на учителката, па на Мирјана ѝ кажала дека учителката има два пати повеќе години. Мирјана не ѝ поверувала на Костадинка, па од око намалила 10 години и на Билјана ѝ ја кажала својата верзија. Дома Билјана кажала дека учителката има 38 години, намалувајќи го по свое за 8 бројот на годините кој ѝ го кажала Костадинка. Колку години има учителката Ирена, според информацијата пренесена од Фаница?

Решение. Мирјана на Билјана ѝ кажала дека учителката Ирена има $38 + 8 = 46$ години. Понатаму, Костадинка на Мирјана ѝ кажала дека учителката има $46 + 10 = 56$ години. Конечно, според информацијата која на Костадинка ѝ ја пренела Фаница, учителката Ирена има $56 : 2 = 28$ години.

98. Весна може да заврши една работа за 30 минути. Петар истата работа ја завршува за 40 минути, а Ирена истата работа ја завршува за 24 минути. Кое е најмалото време за кое тројцата може да ја завршат работата, ако ја поделат работата на соодветен начин?

Решение. Весна за $4 \cdot 30 = 120$ минути може 4 пати да ја заврши работата. Слично, Петар за $3 \cdot 40 = 120$ минути може 3 пати да ја заврши работата, а Ирена за $5 \cdot 24 = 120$ може 5 пати да ја завр-

ши работата. Оттука добиваме дека тројцата заедно за 120 минути може $3 + 4 + 5 = 12$ пати да ја завршат работата. Бидејќи за 120 минути тројцата заедно 12 пати ја завршуваат работата, заклучуваме дека ако ја поделат работата на соодветен начин тие можат да ја завршат за $120 : 12 = 10$ минути.

99. Катерина е родена во понеделник на 24 март. Никола е роден истата година на 28 мај. Во кој ден од седмицата е роден Никола?

Решение. Месецот март има 31 ден и месецот април има 30 дена. Значи, Никола е роден $7 + 30 + 28 = 65$ дена по Катерина. Бидејќи $65 = 9 \cdot 7 + 2$ заклучуваме дека Никола е роден 9 недели и 2 дена по Катерина. Но, Катерина е родена во понеделник, што значи дека Никола е роден во среда.

100. На 1 ноември 2009 година телевизискиот канал МеМаОл почнал да ја прикажува серијата „Солзи радосници“, секој ден по две епизоди. Во 2009 епизода главната хероина плаче од радост, бидејќи освоила златен медал на Меѓународната олимпијада по математика. На кој датум гледачите ја гледале оваа епизода?

Решение. Бидејќи секој ден се прикажувале по 2 епизоди од серијата, и $2009 = 2 \cdot 1004 + 1$ заклучуваме дека 2009 епизода се прикажувала во 1005-тиот ден. Во 2009 година серијата се прикажувала 61 ден, што значи дека почнувајќи од 1 јануари 2010 година спомената епизода се прикажала во $1005 - 61 = 944$ ден. Понатаму, бидејќи $944 = 2 \cdot 365 + 214$ и годините 2010 и 2011 не се престапни, спомената епизода се прикажала во 214 ден од 2012 година. Сега, од

$$214 = 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 1$$

следува дека епизодата се прикажала на 1 август 2012 година.

101. Во два последователни месеци има 8 вторници и 8 саботи. На кој датум паднала првата среда од првиот месец?

Решение. Ако во двата последователни месеци вторникот е пред саботата, тогаш од првиот вторник до осмата сабота има $6 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = 54$ дена. На овие 54 дена може да се додадат најмно-

гу 2 дена на почетокот (понеделник и недела) и најмногу 2 дена на крајот (недела и понеделник), па така добиваме $54 + 4 = 58$ дена. Меѓутоа не постојат два последователни месеци кои имаат 58 дена.

Ако во двата последователни месеци саботата е пред вторникот, тогаш од првата сабота до осмиот вторник има $7 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = 53$ дена. На овие 53 дена може да се додадат најмногу 3 дена пред првата сабота и најмногу 3 дена по последниот вторник и така добиваме $53 + 6 = 59$ дена. Единствени можности се месеците јануари и февруари или пак февруари и март. Во двата случаја првата среда од првиот месец е на први во тој месец, т.е. тоа е датумот 01.01 или 01.02.

102. Од домот до училиште Климе има два премини со семафори со зелено и црвено светло. Од првиот до вториот премин Климе оди 2 минути. Климе знае дека на секој семафор зеленото и црвеното светло светат еднакво време и тоа 2 минути. Од домот до првиот премин тој оди 10 минути и од вториот премин до училиште оди 10 минути. Секој премин Климе го минува за 5 секунди. Едно утро Климе од дома излегол во 8:00 часот и увидел дека на секој семафор едновременно гори зелено светло. Во колку часот тој ќе стаса на училиште ако не го нарушува правилото?

Решение. Климе ќе стаса во 8 часот 26 минути и 5 секунди.

Циклусот зелено-црвено на семафорите се повторува секои 4 минути. Затоа, кога Климе ќе дојде до првиот премин, ќе гори црвено светло (поминале два циклуса и уште две минути зелено светло). Климе ќе чека 2 минути и потоа брзо ќе ја премине улицата (во 8 часот 12 минути и 5 секунди). На вториот премин во тоа време свети зелено светло, па затоа кога по 2 минути Климе ќе дојде до преминот ќе свети црвено светло. Значи, Климе ќе чека да се запали зелено светло (1 минута и 55 секунди) и за 5 секунди ќе ја помине улицата, а тоа е во 8 часот 16 минути и 5 секунди. Сега тој до училиштето оди уште 10 минути, па ќе стаса во 8 часот 26 минути и 5 секунди.

II.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

103. Од лента со должина $5\text{ dm } 5\text{ cm } 8\text{ mm}$ прво е отсечено парче со должина 2 dm , потоа парче со должина 14 cm и на крајот парче со должина 52 mm . Колкава е должината на пресотанатата лента?

Решение. Должината на лентата била

$$5\text{ dm } 5\text{ cm } 8\text{ mm} = (500 + 50 + 8)\text{ mm} = 558\text{ mm},$$

а збирот на должините на отсечените парчиња бил

$$2\text{ dm} + 14\text{ cm} + 52\text{ mm} = (200 + 140 + 52)\text{ mm} = 392\text{ mm}.$$

Значи, должината на преостанатата лента била

$$(558 - 392)\text{ mm} = 166\text{ mm} = 1\text{ dm } 6\text{ cm } 6\text{ mm}.$$

104. Ацо е 5 cm понизок од Бојан, а Бојан е 8 cm повисок од Васил. Колку сантиметри е висок Ацо, ако Васил е висок 133 cm ?

Решение. Бојан е висок $133\text{ cm} + 8\text{ cm} = 141\text{ cm}$. Значи, Ацо е висок $141\text{ cm} - 5\text{ cm} = 136\text{ cm}$.

105. Андреј е 2 cm понизок од Пабло и е 3 cm повисок од Филип, кој е висок $1\text{ m } 38\text{ cm}$. Колку е висок Пабло?

Решение. *Прв начин.* Андреј е 3 cm повисок од Филип, кој е висок $1\text{ m } 38\text{ cm}$, што значи дека Андреј е висок

$$1\text{ m } 38\text{ cm} + 3\text{ cm} = 1\text{ m } 41\text{ cm}.$$

Понатаму, Пабло е 2 cm повисок од Андреј, па затоа Пабло е висок

$$1\text{ m } 41\text{ cm} + 2\text{ cm} = 1\text{ m } 43\text{ cm}.$$

Втор начин. Пабло е 2 cm повисок од Андреј, а овој е 3 cm повисок од Филип. Значи, Пабло е $3\text{ cm} + 2\text{ cm} = 5\text{ cm}$ повисок од Филип. Но, Филип е висок $1\text{ m } 38\text{ cm}$, па затоа Пабло е висок

$$1\text{ m } 38\text{ cm} + 5\text{ cm} = 1\text{ m } 43\text{ cm}.$$

106. На патот Скопје-Прилеп-Битола-Охрид автобусот вкупно изми-

нал 246 km . Од Скопје до Битола автобусот изминал 176 km , а од Прилеп до Охрид изминал 111 km . Колку километри автобусот изминал од Прилеп до Битола?

Решение. Патот од Скопје до Битола е долг 246 km , а патот од Скопје до Битола е долг 176 km , па затоа од Битола до Охрид автобусот изминал $246 - 176 = 70\text{ km}$.

Понатаму патот од Прилеп до Охрид е долг 111 km , а патот од Битола до Прилеп е долг 70 km , па затоа автобусот од Прилеп до Битола изминал $111 - 70 = 41\text{ km}$.

107. На права алеја во паркот се поставени клупи со должина 2 метри. Пет клупи се поставени на 30 метри. Колку метри се потребни за да се постават 25 клупи?

Решение. Должината на растојанијата меѓу петте клупи е еднаква на $30 - 5 \cdot 2 = 20\text{ m}$. Бидејќи меѓу пет клупи имаме четири растојанија, добиваме дека растојанието меѓу две клупи е еднакво на $20 : 5 = 5\text{ m}$. Сега, меѓу 25 клупи имаме 24 растојанија, па затоа да се постават 25 клупи се потребни $24 \cdot 5 + 25 \cdot 2 = 150\text{ m}$.

108. На семафор еден зад друг застанале два автобуси и неколку автомобили. Секој автобус е долг 12 m , а секој автомобил е долг 3 m . Растојанието меѓу секои две превозни средства е 1 m . Колоната е долга 37 m . Колку автомобили има во колоната?

Решение. Нека во колоната има x автомобили. Тогаш бројот на превозните средства е $x + 2$, па затоа меѓу нив има $x + 1$ растојание од по 1 m . Тоа значи

$$3x + 2 \cdot 12 + x + 1 = 37$$

$$4x + 25 = 37$$

$$4x = 12$$

$$x = 3.$$

Значи, во колоната има 3 автомобили.

109. Дедо Марко за прихрана со сено еден зад друг во колона ги наредил животните: коњ, овен, коњ, овен итн. Секој коњ зафаќа 3 m , а секој овен зафаќа 1 m . Во колоната има 15 животни. Колку е долга колоната?

Решение. Бидејќи коњите и овните наизменично се менуваат, а во колоната има непарен број животни, заклучуваме дека бројот на коњите е за еден поголем од бројот на овните. Според тоа, бројот на овните е $(15-1):2=7$, а бројот на коњите е $15-7=8$. Конечно, колоната е долга $8\cdot 3+7\cdot 1=31\text{ m}$.

110. Андреј се враќа од училиште со брзина од 1 метар во секунда. Кога се наоѓал на 280 метри до домот, кучето Лиса му се затрчало во пресрет со брзина 3 метри во секунда. На колку метри од домот ќе се сретнат Андреј и кучето Лиса?

Решение. Со секоја измината секунда растојанието меѓу Андреј и Лиса ќе се намалува за $1+3=4$ метри. Значи, тие ќе се сретнат по $280:4=70$ секунди. За тоа време Лиса ќе помине $70\cdot 3=210$ метри.

111. Пабло во базен долг 50 m препливал растојание од 100 m за 110 секунди, а во базен долг 25 m истото растојание го препливал за 2 минути. Колку време му е потребно на Пабло за 100 m да преплива во базен долг 100 m ? Секое дејствие Пабло ги прави со една иста брзина, а различните дејствија со различни брзини.

Решение. Имаме, $100=2\cdot 50$ и $100=4\cdot 25$. Бидејќи сите исти дејствија Пабло ги прави со иста брзина, тој цело време плива со една иста брзина. Затоа разликата во времето се јавува заради бројот на вртењата кои се последица од различните должини на базените. Во базен долг 50 m Пабло има едно вртење, а во базен долг 25 m тој има три вртења. Бидејќи во 2 минути има 120 секунди, заклучуваме дека за $120-110=10$ секунди Пабло прави 2 вртења, што значи дека едно вртење трае $10:2=5$ секунди. Конечно, бидејќи при едно вртење тој 100 m плива за 110 секунди, заклучуваме дека само пливањето трае $110-5=105$ се-

кунди, односно 1 минута и 45 секунди и тоа е времето за кое Пабло во базен долг 100 m ќе преплива 100 m .

112. Турист за 9 дена одејќи со една иста брзина поминал 120 km .

Првата половина од патот ја поминал за 3 дена, при што пешачел по 4 часа на ден. По колку часа на ден пешачел туристот во втората половина од патот, ако е познато дека тој секој ден пешачел ист број часови?

Решение. *Прв начин.* Патот што туристот со постојана брзина го поминал за 3 дена одејќи по 4 часа е еднаков на патот кој туристот со истата брзина го поминал за $9 - 3 = 6$ дена, при што секој ден одел ист број часови. Бидејќи бројот на деновите е два пати поголем, заклучуваме дека бројот на часовите мора да е два пати помал. Значи, туристот секој ден пешачел по $4 : 2 = 2$ часа.

Втор начин. Половина од патот е $120 : 2 = 60\text{ km}$ и туристот ја поминал за 3 дена одејќи по 4 часа на ден, т.е. за $3 \cdot 4 = 12$ часа. Значи, брзината со која одел туристот е $60 : 12 = 5\text{ km/h}$.

Втората половина од патот, т.е. 60 km туристот ги поминал за $9 - 3 = 6$ дена, што значи дека тој дневно поминувал по $60 : 6 = 10\text{ km}$. Брзината со која одел е 5 km/h , па затоа тој во вториот дел од патот секој ден одел по $10 : 5 = 2\text{ h}$.

113. Шест јајца имаат маса 300 g . Колкава е масата на 40 јајца?

(Сите јајца имаат еднаква маса.)

Решение. Масата на едно јајце е еднаква на $300 : 6 = 50\text{ g}$. Според тоа, масата на 40 јајца е еднаква на $40 \cdot 50 = 2000\text{ g} = 2\text{ kg}$.

114. Со помош на три ваги се измерени неколку метални топки. Резултатите од мерењата се прикажани на долните цртежи. Ако топките со една иста боја имаат еднаква маса, колкава е масата на една црна топка?



Решение. Две црвени и една бела топка имаат маса 10 kg , а една црвена и една бела топка имаат маса 6 kg . Според тоа, една црвена топка има маса $10 - 6 = 4\text{ kg}$. Понатаму, бидејќи една црвена и две црни топки имаат маса 14 kg , а една црвена топка има маса 4 kg , заклучуваме дека две црни топки имаат маса $14 - 4 = 10\text{ kg}$. Конечно, една црна топка има маса $10 : 2 = 5\text{ kg}$.

115. Фунта и унца се англиски мерки за маса. Масата на една фунта е 16 унци. Масата на три унци бонбони е 84 грама. Колку грама е масата на две фунти компири?

Решение. Масата на една унца е $84 : 3 = 28\text{ g}$. Значи, масата на една фунта е $16 \cdot 28 = 448\text{ g}$. Според тоа, масата на 2 фунти компири е 896 g .

116. Кошница со едно јаголко во неа има маса 340 g , кошница со 4 јаболки во неа има маса 580 g , а кошница со 3 јаболки и 2 круши во неа има маса 670 g . Колкава е масата на една круша? (Сите јаболки имаат еднакви маси и сите круши имаат еднакви маси.)

Решение. Бидејќи кошница со едно јаголко има маса 340 g , а со 4 јаболка има маса 580 g , добиваме дека масата на 3 јаболка е 240 g . Значи, масата на едно јаголко е $240 : 3 = 80\text{ g}$, па затоа масата на празната кошница е $340 - 80 = 260\text{ g}$. Сега, бидејќи масата на кошница со 3 јаболки и 2 круши е 670 g , заклучуваме дека масата на 2 круши е $670 - 260 - 3 \cdot 80 = 170\text{ g}$. Конечно, масата на една круша е $170 : 2 = 85\text{ g}$.

117. Кошница со 1 јаголко во неа има маса 360 g , кошница со 6 јаболки има маса 710 g , а кошница со 2 јаболки и 3 круши има маса 700 g . Колкава е масата на една круша? (Сите јаболки имаат еднакви маси, сите круши имаат еднакви маси.)

Решение. Пет јаболки имаат маса $710 - 360 = 350\text{ g}$, што значи

дека едно јаболки има маса $350:5=70\text{ g}$. Значи, празната кошница има маса $360-70=290\text{ g}$. Според тоа, 3 круши имаат маса $700-290-2\cdot70=270\text{ g}$, па затоа масата на една круша е $270:3=90\text{ g}$.

118. Во 39 полни канистери има 600 литри вода. Канистерите се од 15 и од 16 литри. Колку канистери биле од 15 литри?

Решение. Имаме $600=40\cdot15$, па затоа ако сите канистери се од по 15 литри, тогаш за 600 литри ни се потребни 40 канистери. Но, имаме 39 канистери, па затоа водата од 1 канистер од 15 литри се наоѓа во канистери од 16 литри. Бидејќи еден канистер од 16 литри содржи 1 литар вода повеќе отколку 1 канистер од 15 литри, заклучуваме дека имаме 15 канистери од 16 литри. Значи, бројот на канистерите од 15 литри е $39-15=24$. Навистина, $24\cdot15+15\cdot16=360+240=600$ литри вода.

119. На 1 ноември попладне прасето на дедо Стојан тежи 80 kg . Колку килограми ќе тежи прасето на дедо Стојан на 20 јануари следната година, ако на секои 24 часа неговата тежина се зголемува за 1 kg ?

Решение. Од 1 ноември до 20 јануари имаме $29+31+20=80$ деноноќија. Според тоа, прасето на дедо Стојан на 20 јануари ќе тежи $80+80\cdot1=160\text{ kg}$.

120. Учениците од едно одделение се вклучиле во акција за собирање на стара хартија за рециклирање. Дванаесет ученици донеле по 6 kg хартија, а преостанатите 14 ученици донеле по 7 kg хартија. Колку дрва спасиле учениците, ако рециклирањето на 1105 kg хартија спасува 13 дрва?

Решение. Бидејќи рециклирањето на 1105 kg хартија спасува 13 дрва, рециклирањето на $1105:13=85\text{ kg}$ хартија спасува 1 дрво. Учениците донеле $12\cdot6+14\cdot7=72+98=170\text{ kg}$ хартија, што значи дека тие спасиле $170:85=2$ дрва.

121. Во една продавница имало неколку вреќи со вкупно 144 kg бадеми. Во текот на месец јуни од секоја вреќа биле продадени по 6 kg бадеми. На крајот на месецот се покажало дека вкупното количество бадеми се намалило четири пати, а половина од вреќите биле празни. Во текот на месец јули од секоја од преостанатите вреќи биле продадени уште по 2 kg бадеми. Колку килограми бадеми биле продадени во текот на двата месеци?

Решение. На крајот на месец јуни во продавницата останале $144 : 4 = 36\text{ kg}$ бадеми. Според тоа, во месец јуни биле продадени $144 - 36 = 108\text{ kg}$ бадеми. Овие 108 kg биле продадени од различни вреќи, при што од секоја вреќа се продадени по 6 kg бадеми. Според тоа, во продавницата имало $108 : 6 = 18$ вреќи бадеми. На крајот од месец јуни половината вреќи биле празни, што значи дека преостанатите 36 kg бадеми биле сместени во $18 : 2 = 9$ вреќи. Бидејќи од секоја вреќа биле продадени уште по 2 kg , во јули биле продадени $9 \cdot 2 = 18\text{ kg}$ бадеми. Конечно, во двата месеци вкупно биле продадени $108 + 18 = 126\text{ kg}$ бадеми.

122. Во продавницата на млекарата „Мариовски чобан“ 250 g сирење чини 2 евра помалку, отколку половина килограм сирење од истиот вид, а 1 kg кашкавал чини 12 евра повеќе отколку 250 g грама кашкавал од истиот вид. Стојан купил 12 kg сирење и 5 kg кашкавал. Колку пари му вратиле на Стојан, ако тој за купената стока на продавачот му дал 2 банкноти од по 100 евра?

Решение. *Прв начин.* Од $500\text{ g} - 250\text{ g} = 250\text{ g}$, заклучуваме дека 250 g сирење чини 2 евра. Тоа значи дека $1\text{ kg} = 4 \cdot 250\text{ g}$ сирење чини $4 \cdot 2 = 8$ евра. Од $1\text{ kg} - 250\text{ g} = 750\text{ g} = 3 \cdot 250\text{ g}$ заклучуваме дека 250 g кашкавал чинат $12 : 3 = 4$ евра. Значи, 1 kg кашкавал чини $4 \cdot 4 = 16$ евра.

Стојан купил 12 kg сирење и 5 kg кашкавал, за што требало да плати $12 \cdot 8 + 5 \cdot 16 = 176$ евра. Тој за да ја плати купената стока дал $2 \cdot 100 = 200$ евра, што значи дека продавачот му вратил

$$200 - 176 = 24 \text{ евра.}$$

Втор начин. Нека цената на 250 g сирење е x евра. Тогаш цената на половина килограм, т.е. на $500 \text{ g} = 2 \cdot 250 \text{ g}$ сирење е $2x$ евра. Значи, $2x - x = 2$, т.е. $x = 2$ евра. Според тоа, цената на $1 \text{ kg} = 4 \cdot 250 \text{ g}$ сирење е $4x = 4 \cdot 2 = 8$ евра.

Нека цената на 250 g кашкавал е y евра. Тогаш цената на 1 kg , т.е. на $1000 \text{ g} = 4 \cdot 250 \text{ g}$ кашкавал е $4y$ евра. Значи, $4y - y = 12$, т.е. $y = 4$ евра. Според тоа, цената на $1 \text{ kg} = 4 \cdot 250 \text{ g}$ кашкавал е $4y = 4 \cdot 4 = 16$ евра.

Стојан купил 12 kg сирење и 5 kg кашкавал, за што требало да плати $12 \cdot 8 + 5 \cdot 16 = 176$ евра. Тој за да ја плати купената стока дал $2 \cdot 100 = 200$ евра, што значи дека продавачот му вратил $200 - 176 = 24$ евра.

123. Дедо Стојан произвел 1 t и 60 kg компири и сакал да ги стави во вреќи кои собираат 40 kg и 50 kg компири. Кој е најмалиот број вреќи кои може да ги искористи дедо Стојан?

Решение. *Прв начин.* Бројот на вреќите е најмалможен, кога се користи најмалиот можен број вреќи кои собираат по 40 kg компири. Ако земеме предвид дека $1 \text{ t } 60 \text{ kg} = 1060 \text{ kg}$, ја составуваме следнава табела:

вреќи 40 kg		остануваат	пресметуваме дали е можно	вреќи 50 kg
број	kg	kg	kg	број
1	40	$1060 - 40 = 1020$	$20 \cdot 50 < 1020 < 21 \cdot 50$	не е можно
2	80	$1060 - 80 = 980$	$19 \cdot 50 < 980 < 20 \cdot 50$	не е можно
3	120	$1060 - 120 = 940$	$18 \cdot 50 < 940 < 19 \cdot 50$	не е можно
4	160	$1060 - 160 = 900$	$18 \cdot 50 = 900$	18
НАЈМАЛ ВКУПЕН БРОЈ ВРЕЌИ $4 + 18 = 22$				

Втор начин. Најмалможен број вреќи ќе искористиме, ако имаме најголем можен број вреќи од 50 kg . Имаме:

$$1 \text{ t } 60 \text{ kg} = 1060 \text{ kg} = 1100 \text{ kg} - 40 \text{ kg} = 22 \cdot 50 \text{ kg} - 40 \text{ kg}.$$

Според тоа, во 22 вреќи кои собираат по 50 kg компири можеме да ставиме 1100 kg компири или 40 kg компири повеќе. Секоја

поголема вреќа собира повеќе по $50 - 40 = 10 \text{ kg}$ компири, па затоа треба $40 : 10 = 4$ поголеми вреќи да замениме со 4 помали вреќи. Конечно, најмалиот вкупен број вречи е 22 и тоа 4 вреќи кои собираат по 40 kg компири и $22 - 4 = 18$ вреќи кои собираат по 50 kg килограми компири. Навистина,

$$4 \cdot 40 + 18 \cdot 50 = 160 + 900 = 1060 \text{ kg} .$$

II.5. РАЗНИ ЗАДАЧИ

124. На куќата на Павле застанале неколку врапчиња. По две минути 5 од врапчињата одлетале, а по уште две минути три врапчиња слетале на куќата и сега имало вкупно 12 врапчиња. Колку врапчиња биле на почетокот?

Решение. Откако одлетале 5 врапчиња и долетале 3 врапчиња, бројот на врапчињата кои биле на почетокот се намалил за $5 - 3 = 2$. Значи, на почетокот на куќата имало $12 + 2 = 14$ врапчиња.

125. Бојан, Павле и Александар се гаѓале со снежни топки. Бојан фрлил 20 топки, Павле фрлил 14 и Александар фрлил 8 топки. Познато е дека Павле промашил со сите 14 топки. Александар фрлал топка само како одговор кога ќе бил погоден со некоја топка, а Бојан погодил со половина од топките кои ги фрлил. Колку топки го погодиле Павле?

Решение. Александар фрлил 8 топки, што значи дека тој бил погоден 8 пати. Бидејќи Павле промашил со сите топки, Александар бил погоден 8 пати само од Бојан и Александар ниту еднаш не фрлил кон Павле. Но, Бојан погодил $20 : 2 = 10$ пати, што значи дека тој $10 - 8 = 2$ пати го погодил Павле. Значи, Павле го погодиле 2 топки.

126. Андреј, Горјан и Пабло вкупно изеле 9 кифлички. Андреј и Горјан заедно изеле 6 кифлички, а Пабло и Горјан заедно изеле 5

кифлички. Кое дете изело најмногу кифлички?

Решение. Тројцата вкупно изеле 9 кифлички, а Андреј и Горјан заедно изеле 6 кифлички. Според тоа, Пабло изел $9 - 6 = 3$ кифлички. Но, Пабло и Горјан заедно изеле 5 кифлички, што значи дека Горјан изел $5 - 3 = 2$ кифлички. Конечно, Андреј изел $6 - 2 = 4$ кифлички.

Според тоа, Андреј изел 4, Пабло изел 3 и Горјан изел 2 кифлички, што значи дека Андреј изел најмногу кифлички.

127. На почетната постојка на еден автобус се качиле возачот и 7 патници. На втората постојка се симнале 5 патници и се качиле 12 луѓе, меѓу кои и 3 контролори. На следната постојка се симнале контролорите и уште еден патник, а се качил само Горјан. Колку луѓе имало тогаш во автобусот?

Решение. По почетната постојка во автобусот имале $1 + 7 = 8$ луѓе. По првата постојка во автобусот имало $8 - 5 + 12 = 15$ луѓе. По втората постојка во автобусот имало $15 - (3 + 1) + 1 = 12$ луѓе.

128. На почетната постојка на еден автобус се качиле возачот и 25 патници. На втората постојка се симнале 7, а се качиле 12 луѓе меѓу кои пет пожарникари. На следната постојка слегле пожарникарите и уште еден патник, а се качиле три патници. Колку луѓе имало потоа во автобусот?

Решение. На почетокот во автобусот имало $1 + 25 = 26$ луѓе. На првата постојка бројот на патниците се зголемил за $12 - 7 = 5$ луѓе, а на третата се намалил за $5 + 1 - 3 = 3$ луѓе. Значи, потоа во автобусот имало $26 + 5 - 3 = 28$ луѓе.

129. Ана и Кристина заедно набрале 18 јаболки. Ако Кристина и даде на Ана три од своите јаболки, тогаш таа ќе има две јаболки помалку од Ана. Колку јаболки набрало секое девојче?

Решение. Кога Кристина и дава на Ана три од своите јаболки, тогаш Ана има две јаболки повеќе од Кристина. Според тоа, ако Кристина и даден две јаболки на Ана, тогаш тие ќе имаат еднаков број јаболки и тоа по $18 : 2 = 9$ јаболки. Значи, Кристина на-

брала $9 + 2 = 11$ јаболки, а Ана набрала $9 - 2 = 7$ јаболки.

Навистина, кога Кристина и дава на Ана 3 јаболки таа има $11 - 3 = 8$ јаболки, а Ана има $7 + 2 = 9$ јаболки, т.е. 2 повеќе од Кристина.

130. Иван и Петар заедно уловиле 16 риби, Иван и Марко заедно уловиле 17 риби, а Петар и Марко заедно уловиле 19 риби. Колку риби уловило секое дете?

Решение. Во збирот $16 + 17 + 19 = 52$ бројот на рибите што ги уловило секое дете учествува два пати. Според тоа, трите деца заедно уловиле $52 : 2 = 26$ риби.

Значи, Марко уловил $26 - 16 = 10$, Петар уловил $26 - 17 = 9$ и Иван уловил $26 - 19 = 7$ риби.

131. Иван и Марко се другари. Бабата на Иван бојадисала 19 јајца, едно јајце зачувала за себе, а преостанатите подеднакво ги поделила на своите шест внуци. Бабата на Марко бојадисала 27 јајца, три јајца зачувала за себе, а преостанатите јајца подеднакво ги поделила на своите осум внуци. Кој добил повеќе јајца, Иван или Марко?

Решение. Бабата на Иван поделила $19 - 1 = 18$ јајца на 6 внуци, што значи дека Иван добил $18 : 6 = 3$ јајца. Бабата на Марко поделила $27 - 3 = 24$ јајца на 8 внуци, што значи дека Марко добил $24 : 8 = 3$ јајца. Според тоа, Иван и Марко добиле еднаков број јајца.

132. Матеј во текот на една седмица требало да реши 121 задачи. Тој од понеделник до петок секој ден решавал по 15 задачи, а во саботата решил 20 задачи. Колку задачи му останале да реши во неделата?

Решение. Од понеделникот до петокот Матеј решил $5 \cdot 15 = 75$ задачи. Бидејќи во саботата тој решил 20 задачи, а требало да реши 121 задача, за неделата му останале $121 - 20 - 75 = 26$ задачи.

133. Марија одгледува цвеќе. Таа на пазар однела определен број букети за продавање. Марија ги продала букетите во три дена. Првиот ден таа продала половина од сите букети и уште 2 букета, вториот ден продала половина од остатокот и уште 3 букети, а третиот ден ги продала половината од новиот остаток и последниот букет. Определи го бројот на букетите кои Марија ги однела на пазар.

Решение. Задача ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Последниот букет е половина од букетите кои преостанале по вториот ден, што значи дека третиот ден Марија продала $2 \cdot 1 = 2$ букета. Сега, од условот следува дека $2 + 3 = 5$ се половина од букетите кои преостанале по првиот ден, што значи дека по првиот ден преостанале $2 \cdot 5 = 10$ букети. Понатаму, според условот на задачата $10 + 2 = 12$ се половина од букетите кои Марија ги понела на пазар, што значи дека Марија на пазар понела $2 \cdot 12 = 24$ букети.

134. На една плажа има пет тушеви. Меѓу секои два туша има по 25 лежалки. Колку лежалки има на плажата?

Решение. Меѓу петте тушеви има четири растојанија, каде што се поставени лежалки. Според тоа, на плажата има $4 \cdot 25 = 100$ лежалки.

135. На болниот мачор Дивко ветеринарот препишал да се дадат следниве лекови: првите три дена по 2 таблети од видот А и по една таблета од видот Б, следните шест дена по 1 таблета од видот А и по 1 таблета од видот Б, па следните 5 дена по 2 таблети од видот Б. Колку таблети се потребни за лечењето на Дивко?

Решение. За првите три дена се потребни $3 \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9$ таблети, за следните шест дена се потребни $6 \cdot (1 + 1) = 6 \cdot 2 = 12$ таблети и за последните пет дена се потребни $5 \cdot 2 = 10$ таблети. Значи, за лечењето на Дивко вкупно се потребни $9 + 12 + 10 = 31$ таблета.

136. Лилјана и Мирјана решавале задачи. Секој ден Лилјана решава

по 3 задачи, а за истото време Мирјана решава по четири задачи. Коку задачи решило секое девојче, ако двете заедно решиле 112 задачи?

Решение. Секој ден девојчињата заедно решавале по $3 + 4 = 7$ задачи. Двете заедно решиле 112 задачи, што значи дека решавале $112 : 7 = 16$ дена. Конечно, Лилјана решила $3 \cdot 16 = 48$ задачи, а Мирјана решила $4 \cdot 16 = 64$ задачи.

137. Марија има 16 гердани со по 9 бисери на секој од нив. Колку гердани со по 12 бисери на секој од нив може да направи Марија од овие бисери?

Решение. Герданите кои ги има Марија содржат $16 \cdot 9 = 144$ бисери. Еден нов гердан содржи по 12 бисери, па затоа Марија може да направи $144 : 12 = 12$ нови гердани.

138. Маја има 18 гердани со по 8 бисери. Таа ги растурила герданите и составила гердани со по 9 бисери. Колку гердани составиле Маја?

Решение. Герданите вкупно имаат $18 \cdot 8 = 144$ бисери. Еден нов гердан содржи 9 бисери, што значи дека Маја составила $144 : 9 = 16$ гердани.

139. Марија има 12 гердани со по 24 бисери во секој гердан. Таа ги однижала бисерите и од нив направила нови гердани со по 16 бисери. Колку такви гердани направила Марија?

Решение. Вкупниот број бисери е еднаков на $12 \cdot 24 = 288$. Секој нов гердан содржи по 16 бисери, што значи дека Марија направила $288 : 16 = 18$ нови гердани.

140. Дедо Стојан има кокошки и кози, вкупно 8. Клуновите на животните се 6 пати помалку од нозете. Колку крила имаат животните на дедо Стојан?

Решение. Нека има x кокошки. Тогаш бројот на козите е $8 - x$. Секоја кокошка има по 2 нозе, а секоја коза има по 4 нозе, па затоа бројот на нозете е $2x + 4(8 - x)$ и тој треба да е 6 пати

поголем од бројот на клуновите, т.е. да е еднаков на $6x$. Значи, $6x = 2x + 4(8 - x)$, од каде добиваме $x = 4$. Значи, дедо Стојан има 4 кокошки и 4 кози. Секоја кокошка има по 2 крила, па затоа животните на дедо Стојан имаат $4 \cdot 2 = 8$ крила.

141. Трговец располага со складишта за чување стока. Тој планира да купи определен број палети со стока и подеднакво да ги распредели во сите свои складишта. Сакајќи да има најмалку трошоци за превоз на палетите, трговецот пресметал дека ако искористи 8 складишта помалку од складиштата со кои располага, тогаш во секој склад кој ќе го користи ќе треба да стави уште по 16 палети стока. Исто така, пресметал дека ако купи помалку 60 палети со стока, тогаш во секое складиште ќе распредели по 5 палети помалку. Колку палети планирал трговецот да купи на почетокот?

Решение. Од $60 : 5 = 12$, заклучуваме дека трговецот има 12 складишта. Ако трговецот користи $12 - 8 = 4$ складишта, тогаш во секое од овие 4 складишта би требало да се распределат вкупно $4 \cdot 16 = 64$ палети повеќе, кои би биле распределени за сметка на осумте складишта кои нема да се користат. Според тоа, на почетокот било планирано во секое складиште да бидат распределени по $64 : 8 = 8$ палети. Заклучуваме, дека на почетокот било планирано да се купат $12 \cdot 8 = 96$ палети стока.

142. Две верверички заедно имаат 44 ореви. Секоја од нив изела по 6 ореви, по што поголемата верверичка имала три пати повеќе ореви од помалата. Колку ореви имала секоја верверичка на почетокот?

Решение. Откако верверичките изеле по 6 ореви, тие заедно имале $44 - 2 \cdot 6 = 32$ ореви. Бидејќи, потоа поголемата верверичка имала 3 пати повеќе ореви од помалата, двете заедно имале четири пати повеќе ореви од помалата. Значи, помалата верверичка имала $32 : 4 = 8$ ореви. Конечно, на почетокот помалата верверичка имала $8 + 6 = 14$ ореви, а поголемата верверичка имала $44 - 14 = 30$ ореви.

143. На еден тест со 20 прашања за точен одговор се даваат 7 бодови, за грешен одговор не се добиваат бодови и за neodговорено прашање се добиваат 3 бодови. Колку бодови освоила Анета на тестот, ако таа одговорила само 11 прашања, од кои на 6 дала точен одговор?

Решение. Анета не одговорила на $20 - 11 = 9$ прашања, а точен одговор дала на 6 прашања. Според тоа, таа на тестот освоила $9 \cdot 3 + 6 \cdot 7 = 27 + 42 = 69$ бодови.

144. Фудбалска екипа изиграла 31 натпревар, при што во 7 од нив играла нерешено и одвоила 64 бодови. Колку натпревари загубила оваа екипа? (Во фудбалот за победа се добиваат 3 бодови, за нерешен резултат се добива 1 бод и за пораз не се добиваат бодови.)

Решение. Во натпреварите кои ги одиграла нерешено екипата освоила $7 \cdot 1 = 7$ бодови. Според тоа, $64 - 7 = 57$ бодови екипата освоила во натпреварите во кои екипата победила. Бидејќи за победа се добиваат 3 бода, екипата победила во $57 : 3 = 19$ натпревари. Конечно, екипата загубила $31 - (7 + 19) = 5$ натпревари.

145. Горјан, Андреј и Пабло заедно имале 30 топчиња. Горјан му дал на Андреј 4 топчиња, Андреј му дал на Пабло 2 топчиња и на крајот Пабло му дал на Горјан 3 топчиња, по што сите тројца имале еднаков број топчиња. Колку топчиња имало секое дете на почетокот?

Решение. На крајот сите деца имале еднаков број топчиња, што значи дека имале по $30 : 3 = 10$ топчиња.

Пред Пабло да му даде на Горјан 3 топчиња децата имале:

Горјан 7 топчиња, Андреј 10 топчиња и Пабло 13 топчиња.

Пред Андреј да му даде на Пабло 2 топчиња децата имале:

Горјан 7 топчиња, Андреј 12 топчиња и Пабло 11 топчиња.

Пред Горјан да му даде на Андреј 4 топчиња, што значи на почетокот, децата имале:

Горјан 11 топчиња, Андреј 8 топчиња и Пабло 11 топчиња.

146. Сметајќи од ист ден (момент), 5 кокошки можат да снесат 60 јајца за 21 ден. За колку дена, сметајќи од ист ден (момент), 6 кокошки можат да снесат 72 јајца?

Решение. Бидејќи 5 кокошки за 21 ден несат 60 јајца, заклучуваме дека 1 кокошка за 21 ден ќе снеси $60 : 5 = 12$ јајца. Понатаму, 5 кокошки за 21 ден несат 60 јајца и 1 кокошка за 21 ден неси 12 јајца, па затоа $5 + 1 = 6$ кокошки за 21 ден ќе снесат $60 + 12 = 72$ јајца.

147. Скалите од приземје до првиот кат имаат 20 стапала, а скалите меѓу секои два погорни ката имаат по 18 стапала. Меѓу кои два ката е Филип, кој тргнал од приземје и искачил 80 стапала?

Решение. Филип искачил 20 стапала и се качил на првиот кат. Бидејќи искачил 80 стапала, тој по првиот кат искачил $80 - 20 = 60$ стапала. Од $60 = 3 \cdot 18 + 6$ следува дека Филип искачил уште три, т.е. се искачил до четвртиот кат и се наоѓа меѓу четвртиот и петтиот кат.

148. Кога влегол на час учителот забележал дека на клупите вкупно има 39 тетратки. Пред 8 ученици имало по три тетратки, пред 5 имало по една тетратка, а пред преостанатите ученици имало по 2 тетратки. Колку ученици биле присутни на часот?

Решение. По една и три тетратки имало пред 5 и 8 ученици. Според тоа, пред овие 13 ученици имало $5 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 29$ тетратки. Преостанатите $39 - 29 = 10$ тетратки биле пред ученици кои имале по 2 тетратки. Според тоа, по 2 тетратки имале $10 : 2 = 5$ ученици. Конечно, на часот биле присутни $8 + 5 + 5 = 18$ ученици.

149. Тројца пријатели заедно имаат 24 чоколадни бонбони. Секој има онолку бонбони колку што имал години пред три години. Најмладиот си оставил половина од бонбоните, а преостанатите бонбони ги поделил на пријателите на два еднакви дела. Потоа средниот по возраст си оставил половина од бонбоните, а преостанатите бонбони ги поделил на пријателите на два еднакви

дела. На крајот истото го направил и најстариот, по што сите тројца имале еднаков број бонбони. Колку години има секој од пријателите?

Решение. На крајот од постапката сите имале еднаков број и тоа $24:3=8$ бонбони. Тоа значи дека дека најстариот на пријателите поделил 8 бонбони и тоа по $8:2=4$ бонбони. Според тоа, пред тој да даде од своите бонбони, пријателите имале: најстариот $8+8=16$, средниот $8-4=4$ и најмладиот $8-4=4$ бонбони. Значи, средниот на пријателите им поделил 4 бонбони и тоа по $4:2=2$ бонбони, па затоа пред тој да подели бонбони тие имале: најстариот $16-2=14$ бонбони, средниот $4+4=8$ бонбони и најмладиот $4-2=2$ бонбони. Конечно, најмладиот поделил 2 бонбони и тоа $2:2=1$ бонбона на секој од пријателите. Според тоа, пред неговата поделба тие имале: најстариот $14-1=13$ бонбони, средниот $8-1=7$ бонбони и најмалиот $2+2=4$ бонбони.

Од досега изнесенот следува дека пријателите пред три години имале 13, 7 и 4 години, што значи дека сега имаат 16, 10 и 7 години.

150. Петар во новата тетратка го опишал неговиот излет на планината Кораб, на кој бил заедно со својата другарка Весна. Во текстот тој неколку пати го искористил зборот „опасност“. Учителката му кажала дека зборот се пишува „опасност“ и го нтерала неколку пати правилно да го запише зборот за да го запамети. Зборовите „опасност“ и „опасност“ во тетратката на Петар биле запишани 23 пати, а буквата „т“ била употребена 31 пат. Колку пати Петар го запишал зборот „опасност“?

Решение. *Прв начин.* Во зборот „опасност“ буквата „т“ се среќава два пати, а во зборот „опасност“ се среќава еднаш. Ако сите зборови биле „опасност“, тогаш буквата „т“ ќе била запишана 23 пати. Но, таа била запишана $31-23=8$ пати повеќе, што значи дека имаме 8 збора „опасност“. Според тоа, зборот „опасност“ бил запишан $23-8=13$ пати.

Втор начин. Во зборот „опасност“ буквата „т“ се среќава два

пати, а во зборот „опасност“ се среќава еднаш. Нека зборот „опасност“ е запишан x пати. Тогаш зборот „опасност“ е запишан $23 - x$ пати, па затоа $2 \cdot x + 1 \cdot (23 - x) = 31$, од каде добиваме $x = 8$. Според тоа, зборот „опасност“ бил запишан $23 - 8 = 13$ пати.

151. Група од пет момчиња и едно девојче требало заедно да решат 120 задачи. Секое момче решило по 6 задачи помалку од девојчето. Колку задачи решило секое дете?

Решение. *Прв начин.* Ако секое момче решило по x задачи, тогаш девојчето решило $x + 6$ задачи. Заедно решиле

$$5x + x + 6 = 6x + 6$$

задачи. Затоа $6x + 6 = 120$, од каде добиваме $x = 19$.

Значи, секое момче решило по 19 задачи, а девојчето решило $19 + 6 = 25$ задачи.

Втор начин. Ако од шесте задачи кои девојчето ги решило повеќе од секое од петте момчиња, пет задачи и тоа по една задача префрлиме кај секое момче, добиваме дека сите деца решиле еднаков број задачи, што значи дека решиле $120 : 6 = 20$ задачи. Според тоа, секое момче решило по $20 - 1 = 19$ задачи, а девојчето решило $20 + 5 = 25$ задачи.

152. За новогодишните празници Андреј и Пабло имаат исто домашно по математика. Андреј решил 37 задачи, а Пабло решил 9 задачи. На Пабло му останува да реши пет пати повеќе задачи отколку на Андреј. Од колку задачи се состои домашната?

Решение. Ако домашната има x задачи, тогаш на Андреј му останало да реши $x - 37$ задачи, а на Пабло му останало да реши $x - 9$ задачи. Но, на Пабло му останало да реши пет пати повеќе задачи отколку на Андреј, па затоа

$$x - 9 = 5(x - 37),$$

$$x - 9 = 5x - 185,$$

$$5x - x = 185 - 9,$$

$$x = 44.$$

Значи, домашната се состои од 44 задачи.

153. Сашо заедно со 24 ученици бил на кроз. Ако половината од учениците кои биле побрзи од Сашо, се пласирале по него, тогаш натпреварувачите кои се поспори од Сашо, ќе бидат три пати повеќе од натпреварувачите кои се побрзи од Сашо. На кое место се пласирал Сашо?

Решение. Нека пред Сашо се пласирале $2x$ натпреварувачи. Тогаш по Сашо се пласирале $24 - 2x$ натпреварувачи. Кога половината од натпреварувачите кои се побрзи од Сашо, би биле поспори од него, тогаш побрзи би биле x натпреварувачи, а поспори $24 - 3x$ натпреварувачи. Сега од условот добиваме дека $24 - 3x = 3x$, од каде добиваме $6x = 24$, односно $x = 4$. Значи, побрзи од Сашо биле $2x = 2 \cdot 4 = 8$ натпреварувачи, што значи дека Сашо се пласирал на деветтото место.

154. Андреј предвидел еднаков број бонбони за себе и своите три пријатели. Меѓутоа, Бојан изел 3 бонбони повеќе од предвиденото, Васил изел 2 бонбони повеќе од предвиденото и Горјан изел 2 бонбони повеќе од Васил. Така за Андреј не останале бонбони. Колку бонбони биле на почетокот?

Решение. Нека бројот на бонбоните предвидени за секое дете е x . Тогаш вкупниот број бонбони е $4x$. Бојан изел $x + 3$ бонбони, Васил изел $x + 2$ бонбони и Горјан изел $x + 2 + 2 = x + 4$ бонбони. Бидејќи за Андреј не останале бонбони, добиваме

$$4x = (x + 3) + (x + 2) + (x + 4),$$

$$4x = 3x + 9$$

$$x = 9.$$

Значи, на почетокот биле $4 \cdot 9 = 36$ бонбони.

155. Пабло, Горјан и Андреј заедно имале 33 топчиња. Горјан имал едно топче повеќе од Андреј, кој имал два пати помалку топчиња од Пабло. Колку топчиња имало секое дете?

Решение. Нека Андреј имал x топчиња. Тогаш Пабло имал $2x$, а Горјан имал $x + 1$ топче. Затоа,

$$x + 2x + (x + 1) = 33,$$

$$4x + 1 = 33,$$

$$4x = 32,$$

$$x = 8.$$

Значи, Андреј имал 8 топчиња, Горјан имал $8 + 1 = 9$ топчиња и Пабло имал $2 \cdot 8 = 16$ топчиња

156. Четири мачки вкупно фатиле 11 глувци. Секоја мачка фатила различен број глувци. Колку глувци фатила секоја мачка?

Решение. Треба да определиме четири различни броја чиј збир е еднаков на 11. Од $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ следува дека тоа се броевите 1, 2, 3 и 5. Според тоа, мачките во некој редослед фатиле 1, 2, 3 и 5 глувци.

157. За 3 дена 6 орли фаќаат 72 желки. Колку желки ќе фатат 2 орли за 12 дена? (Секој орел за исто време фаќа еднаков број желки.)

Решение. *Прв начин.* Бидејќи 6 орли за 3 дена фаќаат 72 желки, и $6 : 2 = 3$ добиваме дека 2 орли за 3 дена ќе фатат три пати помалку желки, т.е. $72 : 3 = 24$ желки. Понатаму, $12 = 3 \cdot 4$, па затоа 2 орли за 12 дена ќе фатат четири пати повеќе желки отколку 2 орли за 3 дена, т.е. ќе фатат $24 \cdot 4 = 96$ желки.

Втор начин. За 3 дена 6 орли фаќаат 72 желки, што значи дека за 1 ден 1 орел ќе фати $3 \cdot 6 = 18$ пати помалку желки, т.е. ќе фати $72 : 18 = 4$ желки. Сега, 2 орли за 12 дена ќе фатат $2 \cdot 12 = 24$ пати повеќе желки отколку 1 орел за 1 ден, што значи дека ќе фатат $24 \cdot 4 = 96$ желки.

158. На еден натпревар Ана, Елена и Јана заедно освоиле 41 поен. Поените на Ана се два пати помалку од поените на Елена и се за 5 поени помалку од поените на Јана. Колку поени освоило секое девојче?

Решение. Ако Ана има x поени, тогаш Елена има $2x$ поени и Јана има $x + 5$ поени. Според тоа, $x + 2x + x + 5 = 41$, од каде добиваме $4x = 36$, односно $x = 9$. Значи, Ана има 9 поени, Елена

има $2 \cdot 9 = 18$ поени и Јана има $9 + 5 = 14$ поени.

159. Учениците од четврто одделение на едно училиште биле во различни времиња на три екскурзии, при што некои ученици биле на екскурзија повеќе од еднаш. На првата екскурзија биле A , на втората B и на третата C ученици. Бројот на учениците кои биле точно на една екскурзија е еднаков на бројот на учениците кои биле точно на две екскурзии и е еднаков на бројот на учениците кои биле на трите екскурзии. Определи го бројот на учениците кои биле на трите екскурзии, ако

$$A = (1005 : 5) \cdot 7 + (12003 - 7359) : 8 - 1890,$$

$$B = (1 + 2 + 3 + \dots + 22 + 23) : 4 \text{ и}$$

$$C = 2019 \cdot 23 + 1991 \cdot 13 - 1988 \cdot 13 - 2018 \cdot 23 + 4.$$

Решение. Имаме:

$$A = (1005 : 5) \cdot 7 + (12003 - 7359) : 8 - 1890$$

$$= 201 \cdot 7 + 4464 : 8 - 1890 = 1407 + 558 - 1890 = 75,$$

$$B = (1 + 2 + 3 + \dots + 22 + 23) : 4 = ((1 + 22) \cdot 11 + 23) : 4$$

$$= (23 \cdot 12) : 4 = 69,$$

$$C = 2019 \cdot 23 + 1991 \cdot 13 - 1988 \cdot 13 - 2018 \cdot 23 + 4$$

$$= (2019 - 2018) \cdot 23 + (1991 - 1988) \cdot 13 + 4$$

$$= 1 \cdot 23 + 3 \cdot 13 + 4 = 23 + 39 + 4 = 66.$$

Нека x е бројот на учениците кои патувале точно на една, точно на две и на сите три екскурзии. Тогаш,

$$x + 2x + 3x = A + B + C = 75 + 69 + 66, \text{ т.е. } 6x = 210,$$

од каде следува $x = 35$.

160. Иван, Дамјан и Павле имаат определен број топчиња. Дамјан има два пати повеќе топчиња од Иван, а Павле има повеќе топчиња од Иван. Тројцата му дале еднаков број од своите топчиња на Костадин, кој пред тоа немал топчиња. Така Иван веќе немал топчиња. Потоа Дамјан на Иван му дал пет пати помалку од топчињата кои му преостанале, а Павле му дал определен број топчиња на Иван, по што Иван, Дамјан и Павел имале по 12 топчиња. Колку топчиња имал секој на почетокот и колку топ-

чиња добил Костадин?

Решение. Нека на почетокот Иван имал $5a$ топчиња. Тогаш Дамјан имал $10a$ топчиња, Павле имал y топчиња и Костадин немал топчиња. Иван му ги дал на Костадин сите свои топчиња и по толку на Костадин му дале и Дамјан и Павле, па затоа: Иван имал 0 топчиња, Дамјан имал $5a$ топчиња, Павле имал $y - 5a$ топчиња и Костадин имал $3 \cdot 5a = 15a$ топчиња.

Понатаму, Дамјан му дал a топчиња на Иван, а Павле му дал x топчиња на Иван и сега бидејќи секој имал по 12 топчиња добиваме: Иван имал $a + x = 12$ топчиња, Дамјан имал $4a = 12$ топчиња и Павле имал $y - 5a - x = 12$ топчиња, од каде наоѓаме: $a = 3, x = 9, y = 36$.

Значи, Иван имал 15 топчиња, Дамјан имал 30 топчиња, Павле имал 36 топчиња, а Костадин добил 45 топчиња.

161. Три другарки Ана, Бојана и Олгица заедно имаат 19 чоколади. Секое девојче има различен непарен број чоколади. Бојана има најмногу, а Ана има најмалку чоколади. Ана и Олгица заедно имаат повеќе чоколади од Бојана. Колку чоколади има секое девојче?

Решение. Бројот 19 како збир на три различни непарни броја може да се запише на следниве начини:

$$19 = 15 + 3 + 1,$$

$$19 = 13 + 5 + 1,$$

$$19 = 11 + 7 + 1,$$

$$19 = 11 + 5 + 3,$$

$$19 = 9 + 7 + 3.$$

Бојана има најмногу чоколади, а Ана има најмалку и притоа Ана и Олгица заедно имаат повеќе чоколади од Бојана. Последното значи дека во горните равенства треба да го најдеме она равенство во кое збирот на двата помали собирци на десната страна е поголем од третиот собирик. Тоа е случај само во равенството $19 = 9 + 7 + 3$, што значи дека Бојана има 9 чоколади, Олгица има 7 чоколади и Ана има 3 чоколади.

162. На еден математички натпревар бројот на секоја задача соодветствува на поените кои се добиваат доколку задачата е точно решена. На пример, за задачата 4 се добиваат 4 поени, за задачата 2 се добиваат 2 поени итн., а за нецелосен или грешен одговор не се добиваат поени. На натпреварот може да се освојат најмногу 21 поен. Анета освоила 13 поени. Колку задачи точно решила Анета?

Решение. Вкупниот број поени е еднаков на 21 и како

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

заклучуваме дека на натпреварот биле зададени 6 задачи. Сега, од

$$13 = 6 + 5 + 2,$$

$$13 = 6 + 4 + 3,$$

$$13 = 6 + 4 + 2 + 1,$$

$$13 = 5 + 4 + 3 + 1,$$

заклучуваме дека Анета решила 3 или 4 задачи.

163. Павел, Васил и Никола нацртале 24 цртежи. Павел нацртал два пати повеќе цртежи од Никола, а Васил нацртал помалку цртежи од Павел, но повеќе од Никола. Колку цртежи нацртало секое дете?

Решение. Нека Никола нацртал x цртежи. Тогаш Павел нацртал $2x$ цртежи, а Васил нацртал y цртежи, при што $x < y < 2x$. Тројцата заедно нацртале 24 цртежи, што значи $x + y + 2x = 24$, односно $3x + y = 24$. Сега ја составуваме следнава табела:

x	$y = 24 - 3x$	$2x$	$x < y < 2x$
1	21	2	НЕ
2	18	4	НЕ
3	15	6	НЕ
4	12	8	НЕ
5	9	10	ДА
6	6	12	НЕ
7	3	14	НЕ
8	0	16	НЕ

Од податоците во табелата заклучуваме дека Никола нацртал 5 цртежи, Васил нацртал 9 цртежи и Павел нацртал 10 цртежи.

164. Во една просторија неколку луѓе седат на триножни и четириножни столчиња. Вкупниот број нозе и ногалки е 26. Колку мина има во собата ако сите столчиња се зафатени и на секое столче седи по еден човек?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на табела. Бидејќи на секое столче седи по еден човек, за секое столче имаме или по 5 или по 6 нозе и ногалки. Бидејќи $5 \cdot 6 = 30 > 26$ може да има најмногу четири столчиња со по четири ногалки. Така ја имаме следнава табела.

со 4 ногалки	нозе и ногалки	остануваат	со 5 ногалки
1	$6 \cdot 1 = 6$	$26 - 6 = 20$	$20 : 5 = 4$
2	$6 \cdot 2 = 12$	$26 - 12 = 14$	не може
3	$6 \cdot 3 = 18$	$26 - 18 = 8$	не може
4	$6 \cdot 4 = 24$	$26 - 24 = 2$	не може

Според тоа, во просторијата имало $5 + 1 = 6$ луѓе.

III ГЕОМЕТРИЈА

1. На права се означени точките A, B, C, D во овој редослед и важи $\overline{AD} = 2 \text{ dm } 20 \text{ mm}$, $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ и $\overline{CD} = 60 \text{ mm}$. Определи го растојанието меѓу средините на отсечките AD и BC .

Решение. Имаме: $\overline{AD} = 22 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ и $\overline{CD} = 6 \text{ cm}$. Затоа,

$$\overline{BC} = \overline{AD} - \overline{AB} - \overline{CD} = 22 - 4 - 6 = 12 \text{ cm}.$$

Ако F е средината на AD , тогаш $\overline{AF} = 22 : 2 = 11 \text{ cm}$. Ако E е средината на BC , тогаш $\overline{BE} = 12 : 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. Затоа,

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = 4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 10 \text{ cm}.$$

Конечно,

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = 11 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 1 \text{ cm}.$$

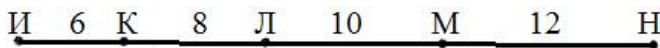
2. На една права се нанесени 10 точки при што растојанието меѓу секои две соседни точки е 1 cm . На друга права исто така се нанесени 10 точки, при што растојанието меѓу првите две точки е 1 cm , а секое следно растојание меѓу две соседни точки е поголемо за 5 mm од претходното. Колку пати растојанието меѓу првата и последната точка од првата права е помалко од растојанието меѓу првата и последната точка од втората права?

Решение. На двете прави имаме по 10 точки, што значи дека растојанието меѓу првата и последната точка е еднакво на збирот на деветте растојанија меѓу соседните точки. Значи, растојанието меѓу првата и последната точка на првата права е еднаков на $9 \cdot 1 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$. Понатаму, растојанието меѓу првата и последната точка на втората права е еднакво на

$$10 \text{ mm} + 15 \text{ mm} + 20 \text{ mm} + 25 \text{ mm} + 30 \text{ mm} + \\ + 35 \text{ mm} + 40 \text{ mm} + 45 \text{ mm} + 50 \text{ mm} = 270 \text{ mm} = 27 \text{ cm}.$$

Значи, растојанието меѓу првата и последната точка од првата права е $27 : 9 = 3$ пати помало од растојанието меѓу првата и последната точка од втората права

3. Селата И, К, Л, М и Н се наоѓаат на еден пат, како што е прикажано на цртежот. Дадени се растојанијата меѓу секои две соседни села.



На патот треба да се постави бензиска станица. На колку километри од селото И треба да е бензинската станица, за да збирот на растојанијата од секое од селата до бензинската станица биде најмал?

Решение. Бензиската станица може да се постави меѓу селата И и К, меѓу селата К и Л, меѓу селата Л и М, меѓу селата М и Н. Одделно ќе го пресметаме збирот на растојанијата во четирите случаи. Нека растојанието од селото И до бензинската станица е x . Тогаш:

- 1) Ако станицата е меѓу селата И и К, тогаш $x \leq 6$ и збирот на растојанијата е

$$x + (6 - x) + (14 - x) + (24 - x) + (36 - x) = 80 - 3x \geq 80 - 18 = 62.$$

- 2) Ако станицата е меѓу селата К и Л, тогаш $6 < x \leq 14$ и збирот на растојанијата е

$$x + (x - 6) + (14 - x) + (24 - x) + (36 - x) = 68 - x,$$

и важи $62 > 68 - x \geq 54$.

- 3) Ако станицата е меѓу селата Л и М, тогаш $14 < x \leq 24$ и збирот на растојанијата е

$$x + (x - 6) + (x - 14) + (24 - x) + (36 - x) = 40 + x,$$

и важи $54 < 40 + x \leq 64$.

- 4) Ако станицата е меѓу селата М и Н, тогаш $24 < x \leq 36$ и збирот на растојанијата е

$$x + (x - 6) + (x - 14) + (x - 24) + (36 - x) = 3x - 8,$$

и важи $64 < 40 + x \leq 100$.

Од претходните разгледувања следува дека најмалото можно растојание е 54 и тоа се достигнува за $x = 14$.

4. Меѓу куќите на Волчко и Меца живеат Зајко, Лиса и Ежко. На куќата на Волчко се напишани растојанијата во метри од неговата куќа до куќите на Зајко, Лиса и Ежко. На куќата на Меца се

напишани растојанијата во метри од нејзината кука до куќите на Зајко, Лиса и Ежко. За роденденот Зајко посакал од Волчко и Меца да му подарат вкупно толку моркови, колку што метри е растојанието од куќата на Волчко до куќата на Меца. На прославата Волчко рекол: „Јас не знам колкаво е растојанието од мојата кука до куќите на Зајко, Лиса и Ежко, го поделив добиениот збир на 2 и ти носам 420 моркови“. Меца рекла: „И јас направив исто, но со растојанијата од мојата кука до куќите на Зајко, Лиса и Ежко, па ти носам 531 морков“. Определи го растојанието меѓу куќите на Волчко и Меца.

Решение. Без ограничување можеме да сметаме дека растојанијата меѓу куќите се a, b, c и d , види цртеж.



Збирот на Волчко е:

$$a + (a + b) + (a + b + c) = 3a + 2b + c = 2 \cdot 420 = 840 \text{ m}.$$

Збирот на Меца е:

$$d + (d + c) + (d + c + b) = 3d + 2c + b = 531 \cdot 2 = 1062 \text{ m}.$$

Ако ги собереме две равенства добиваме:

$$3a + 3b + 3c + 3d = 840 + 1062 = 1902 \text{ m}.$$

Три пати помалото растојание е растојанието меѓу куќите на Волчко и Меца, т.е. тоа е

$$a + b + c + d = 634 \text{ m}.$$

5. Должините на страните на еден триаголник се три последователни непарни броеви, а должината на најмалата страна е еднаква на 3 cm . Определи го периметарот на овој триаголник.

Решение. Должината на средната страна е $3 + 2 = 5 \text{ cm}$, а должината на најголемата страна е $5 + 2 = 7 \text{ cm}$. Според тоа, периметарот на триаголникот е еднаков на $3 + 5 + 7 = 15 \text{ cm}$.

6. Квадрат со страна 16 cm , со помош на хоризонтални и вертикал-

ни отсечки е поделен на 16 помали квадрати. За колку сантиметри е поголем збирот на отсечките со кои е извршена поделбата од периметарот на квадратот?

Решение. Периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 16 = 64 \text{ cm}$. Поделбата е извршена со помош на три вертикални и три хоризонтални отсечки, што значи со помош на 6 отсечки со должина 16 cm . Збирот на нивните должини е еднаков на $6 \cdot 16 = 96 \text{ cm}$ и тој е за $96 - 64 = 32 \text{ cm}$ поголем од периметарот на квадратот.

7. Квадрат има должина на страна 25 dm , а должината на страната на рамнострани триаголник е 2 m . Определи ја разликата на нивните периметри.

Решение. Периметарот на квадратот е: $4 \cdot 25 \text{ dm} = 100 \text{ dm} = 10 \text{ m}$. Периметарот на рамностраниот триаголник е: $3 \cdot 2 = 6 \text{ m}$. Разликата на периметрите е: $10 \text{ m} - 6 \text{ m} = 4 \text{ m}$.

8. Периметарот на разностран триаголник е еднаков на периметарот на квадрат со страна 9 cm . Должините на страните на триаголникот се последователни парни броеви. Кои се тие броеви?

Решение. Периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}$. Ако должината на најмалата страна е x , тогаш должините на другите две страни се $x + 2$ и $x + 4$. Затоа,

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 36,$$

$$3x + 6 = 36,$$

$$3x = 30,$$

$$x = 10 \text{ cm},$$

Според тоа, должините на страните на триаголникот се 10 cm , 12 cm и 14 cm , т.е. бараните броеви се 10, 12 и 14.

9. Должините на страните на два рамнострани триаголници соодветно се еднакви на 4 cm и 8 cm . Определи ја плоштината на квадратот чиј периметар е еднаков на збирот на периметрите на двата триаголника.

Решение. Збирот на периметрите на двата триаголника е:

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 12 + 24 = 36 \text{ cm}.$$

Според тоа, должината на страната на квадратот е еднаква на $36 : 4 = 9 \text{ cm}$. Конечно, плоштината на овој квадрат е еднаква на $9 \cdot 9 = 81 \text{ cm}^2$.

10. Периметарот на еден разностран триаголник е еднаков на периметарот на квадрат со должина на страна 15 cm . Во низата броеви, кои се делат со 5, должините на страните на триаголникот се на три последователни места. Определи ги должините на страните на овој триаголник.

Решение. *Прв начин.* Периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}$. Низата броеви кои се деливи со 5 е:

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots$$

По ред, збирите на три последователни членови на оваа низа се:

$$\begin{aligned} 5 + 10 + 15 &= 30, & 10 + 15 + 20 &= 45, \\ 15 + 20 + 25 &= 60, & 20 + 25 + 30 &= 75, \dots \end{aligned}$$

Според тоа, само за броевите 15, 20 и 25 збирот е еднаков на 60. Значи, должините на страните на триаголникот се 15 cm , 20 cm и 25 cm .

Втор начин. Периметарот на квадратот е: $4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}$.

Ако должината на најмалата страна е $5x$, тогаш должините на другите две страни се $5x + 5$ и $5x + 10$. Значи,

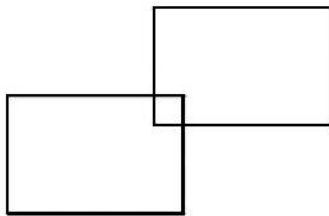
$$\begin{aligned} 5x + (5x + 5) + (5x + 10) &= 60, \\ 15x + 15 &= 60, \\ 15x &= 45 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Значи, должините на страните на триаголникот се:

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}, 5 \cdot 3 + 5 = 20 \text{ cm} \text{ и } 5 \cdot 3 + 10 = 25 \text{ cm}.$$

11. Два еднакви правоаголника имаат заеднички дел квадрат (цртеж десно). Страната на квадратот е шест пати пократка од големата

страна на правоаголникот, а помалата страна на правоаголникот е четири пати подолга од страната на квадратот. Периметарот на добиената фигура е еднаков на 108 cm . Определи ја плоштината на квадратот.



Решение. Нека должината на страната на квадратот е x . Тогаш должината на големата страна на правоаголникот е $6x$, а должината на малата страна на правоаголникот е $4x$. Сега периметарот на добиената фигура е еднаков на збирот на периметрите на двата правоаголници, намален за периметарот на квадратот. Затоа

$$2 \cdot 2 \cdot (6x + 4x) - 4x = 108,$$

$$4 \cdot 10x - 4x = 108,$$

$$36x = 108,$$

$$x = 3.$$

Значи, должината на страната на квадратот е 3 cm , па затоа неговата плоштина е $3 \cdot 3 = 9\text{ cm}^2$.

12. Периметарот на еден квадрат е еднаков на најголемиот трицифрен број запишан со различни парни цифри. Определи ја плоштината на овој квадрат.

Решение. Најголемиот трицифрен број запишан со различни парни цифри е 864. Според тоа, страната на квадратот е еднаква на $864 : 4 = 216$.

Значи, плоштината на квадратот е еднаква $216 \cdot 216 = 46656$.

13. Правоаголна градина со должина 11 m и ширина 5 m е заградена со жичана ограда. Определи ја плоштината на квадратната градина која може да биде заградена со истата ограда. (Оградата треба цела да се искористи.) Која градина има поголема плоштина, правоаголната или квадратната, и за колку?

Решение. Должината на оградата е еднаква на $2 \cdot (11 + 5) = 32\text{ m}$. Според тоа, периметарот на квадратната градина е еднаков на

32 m, па затоа нејзината страна е $a = 32 : 4 = 8 \text{ m}$.

Плоштината на квадратната градина е еднаква на $8 \cdot 8 = 64 \text{ m}^2$.

Плоштината на правоаголната градина е $5 \cdot 11 = 55 \text{ m}^2$. Значи, плоштината на квадратната градина е поголема од плоштината на правоаголната градина и тоа за $64 - 55 = 9 \text{ m}^2$.

14. На цртежот десно е прикажан квадрат со должина на страна 10 cm. Определи го збирот на периметрите на сивите делови.

Решение. Едната страна на сивиот правоаголник е долга 2 cm, а другата страна е долга $10 - (1 + 3) = 6 \text{ cm}$. Според тоа, периметарот на сивиот правоаголник е еднаков на

$$2 \cdot (2 + 6) = 16 \text{ cm}.$$

Должините на хоризонталните страни на другата сива фигура се

$$10 - (5 + 4) = 1 \text{ cm}, 5 \text{ cm} \text{ и } 5 + 1 = 6 \text{ cm},$$

а должините на вертикалните страни се

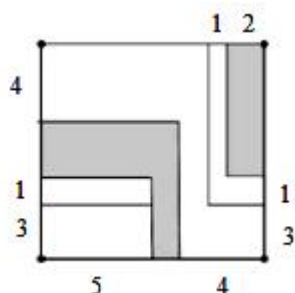
$$10 - (4 + 1 + 3) = 2 \text{ cm}, 3 + 1 + 2 = 6 \text{ cm} \text{ и } 3 + 1 = 4 \text{ cm}$$

Според тоа, периметарот на оваа фигура е еднаков на

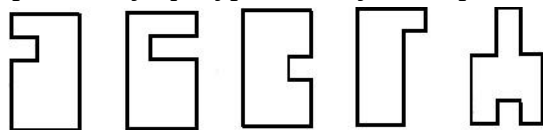
$$1 + 5 + 6 + 2 + 6 + 4 = 24 \text{ cm}.$$

Конечно збирот на периметрите на сивите фигури е еднаков на

$$16 + 24 = 40 \text{ cm}.$$



15. Фигурите прикажани на долните цртежи имаат еднакви висини и еднакви ширини. Која фигура има најмал периметар?



Решение. Броиме од лево кон десно.

Периметарот на четвртата фигура е еднаков на периметарот на

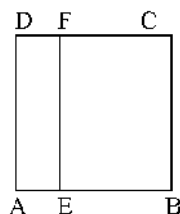
правоаголникот A чии страни се еднакви на висината и ширината на фигурите.

Периметарот на првата фигура е поголем од периметарот на правоаголникот A за збирот на должините на двете мали хоризонтални отсечки, а истото важи и за втората и третата фигура.

Периметарот на петтата фигура е поголем од периметарот на правоаголникот A за збирот на должините на двете најмали вертикални отсечки.

Значи, најмал периметар има четвртата фигура.

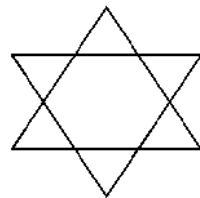
16. Периметарот на квадратот $ABCD$ прикажан на цртежот десно е еднаков на 16 cm , а периметарот на правоаголникот $AEFD$ е еднаков на 10 cm . Определи го периметарот на правоаголникот $EBCF$.



Решение. *Прв начин.* Должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $16 : 4 = 4\text{ cm}$. Збирот на периметрите на правоаголниците $AEFD$ и $EBCF$ се добива кога на периметарот на $ABCD$ два пати ќе му се додаде должината на отсечката EF , што значи должината на страната на квадратот $ABCD$. Значи, збирот на периметрите на правоаголниците $AEFD$ и $EBCF$ е еднаков на $16 + 2 \cdot 4 = 24\text{ cm}$. Конечно, периметарот на правоаголникот $EBCF$ е еднаков на $24 - 10 = 14\text{ cm}$.

Втор начин. Должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $16 : 4 = 4\text{ cm}$. Според тоа, должината на помалата страна на правоаголникот $AEFD$ е еднаква на $(10 - 2 \cdot 4) : 2 = 1\text{ cm}$. Значи, должината на помалата страна на правоаголникот $EBCF$ е еднаква на $4 - 1 = 3\text{ cm}$. Конечно, периметарот на правоаголникот $EBCF$ е еднаков на $2 \cdot (4 + 3) = 14\text{ cm}$.

17. Периметарот на централниот шестаголник на цртежот десно е еднаков 18 cm , а шесте мали триаголници над него се рамнострани триагол-



ници. Определи го периметарот на вака добиената шесткрака ѕвезда.

Решение. Над секоја страна на шестаголникот е конструиран рамностран триаголник. Тоа значи дека секоја страна на шестаголникот е заменета со две страни кои имаат иста должина како страната над која се конструирани. Според тоа, периметарот на шесткраката ѕвезда е два пати поголем од периметарот на шестаголникот. Конечно, периметарот на ѕвездата е еднаков на $2 \cdot 18 = 36 \text{ cm}$.

18. Периметарот на еден квадрат е еднаков на 1 dm . Колку милиметри квадратни е плоштината на овој квадрат?

Решение. Периметарот на квадратот е еднаков на $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$. Според тоа, должината на неговата страна е еднаква на $100 : 4 = 25 \text{ mm}$, па затоа неговата плоштина е еднаква на

$$25 \cdot 25 = 625 \text{ mm}^2.$$

19. Квадрат со должина на страна 10 cm е разделен на четири правоаголници A, B, C и D . Плоштините на правоаголниците A, B, C се:

A	B
C	D

$$P_A = 42 \text{ cm}^2, P_B = 18 \text{ cm}^2, P_C = 28 \text{ cm}^2,$$

соодветно. Определи ја плоштината на правоаголникот D .

Решение. Плоштината на квадратот е еднаква на

$$10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2.$$

Според тоа, плоштината на правоаголникот D :

$$\begin{aligned} P_D &= 100 - (P_A + P_B + P_C) = 100 - (42 + 18 + 28) \\ &= 100 - 88 = 12 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

20. Правоаголник со плоштина 252 cm^2 е добиен со составување на седум еднакви квадрати. Определи го периметарот на овој правоаголник.

Решение. Плоштината на еден од квадратите од кои е составен

правоаголникот е еднаква на $252 : 7 = 36 \text{ cm}^2$. Сега, бидејќи $6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$ заклучуваме дека должината на страната на квадратот е 6 cm . Бидејќи имаме 7 квадрати и бројот 7 не се дели со ниту еден број различен од 1, при составување на правоаголникот квадратите мора да се наредени во еден ред, па затоа должините на страните на правоаголникот се 6 cm и $6 \cdot 7 = 42 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на правоаголникот е $2 \cdot (6 + 42) = 96 \text{ cm}$.

21. Правоаголник со периметар 96 cm е составен од седум еднакви квадрати. Колкава е плоштината на овој правоаголник?

Решение. Бидејќи $7 = 7 \cdot 1$ квадратите од кои е составен правоаголникот се наредени во еден ред. Ако a е должината на страната на правоаголникот, тогаш должините на страните на правоаголникот се a и $7a$, ап затоа неговиот периметар е

$$2(a + 7a) = 16a.$$

Значи, $16a = 96$, од каде добиваме $a = 6 \text{ cm}$. Конечно, плоштината на правоаголникот е еднаква на $7 \cdot 6 \cdot 6 = 252 \text{ cm}^2$.

22. Подот на една соба е во форма на квадрат и е покриен со квадратни плочки, наредени шаховски: бела, црна, бела, црна итн. Бројот на црните плочки е 40. Колку бели плочки се употребени?

Решение. Бидејќи подот е во форма на квадрат и е покриен со квадратни плочки, заклучуваме дека колку што има плочки во еден ред, толку плочки има во една колона.

Ако бројот на плочките во ред (колона) е парен, тогаш колку што имаме плочки од едниот вид, толку имаме плочки од другиот вид (Зошто?). Ако бројот на плочките во ред (колона) е непарен, тогаш бројот на плочките од едниот вид е за 1 поголем од бројот на плочките од другиот вид (Зошто?).

Понатаму, ќе ја користиме следнава табела.

плочки во ред	вкупно во подот	црни	бели
1	$1 \cdot 1 = 1$	1	0
2	$2 \cdot 2 = 4$	$4 : 2 = 2$	$4 - 2 = 2$
3	$3 \cdot 3 = 9$	$(9 - 1) : 2 = 4$	$9 - 4 = 5$
4	$4 \cdot 4 = 16$	$16 : 2 = 8$	$16 - 8 = 8$
5	$5 \cdot 5 = 25$	$(25 - 1) : 2 = 12$	$25 - 12 = 13$
6	$6 \cdot 6 = 36$	$36 : 2 = 18$	$36 - 18 = 18$
7	$7 \cdot 7 = 49$	$(49 - 1) : 2 = 24$	$49 - 24 = 25$
8	$8 \cdot 8 = 64$	$64 : 2 = 32$	$64 - 32 = 32$
9	$9 \cdot 9 = 81$	$(81 - 1) : 2 = 40$	$81 - 40 = 41$
10	$10 \cdot 10 = 100$	$100 : 2 = 50$	$100 - 50 = 50$

Од горната табела се гледа дека за попложување на собата се потрошени 81 плочка и тоа 40 црни и 41 бела.

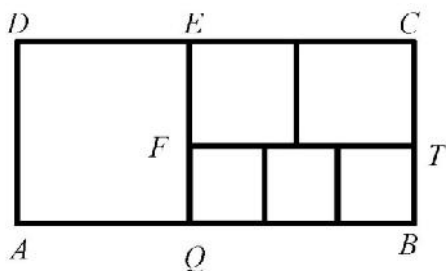
23. Горјан треба да ги попложи подот и сидовите на купатило со должина 3 m , ширина 270 cm и висина 240 cm , кое има врата со димензии 210 cm и 90 cm и нема прозорци. Тој сака попложувањето да го направи со квадратни плочки со страна 30 cm . Колку плочки му се потребни на Горјан? Ако еден во пакет има 11 плочки, колку пакети треба да купи Горјан?

Решение. Имаме $3\text{ m} : 30\text{ cm} = 10$ и $270\text{ cm} : 30\text{ cm} = 9$, што значи дека за подот се потребни $10 \cdot 9 = 90$ плочки. Слично, за сидовите се потребни $2 \cdot 10 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \cdot 8 - 7 \cdot 3 = 283$ плочки. Според тоа, вкупниот број потребни плочки е $90 + 283 = 373$. Бидејќи

$$373 = 11 \cdot 33 + 10,$$

Горјан треба да купи 12 пакети и на крајот ќе му преостане една плочка.

24. Правоаголникот $ABCD$ се состои од шест квадрати, при што трите мали се еднакви, како и двата средни (цртеж десно).



а) Ако плоштината на правоаголникот $QBTF$ е еднаква на 12 cm^2 , определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

б) Ако плоштината на квадратот $AQED$ е еднаква на 100 cm^2 , определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Нека должината на страната на најмалиот квадрат е $2x$.

а) Должините на страните на правоаголникот $QBTF$ се еднакви на $6x$ и $2x$, па затоа $12 = 6x \cdot 2x$, односно $x \cdot x = 1$, од каде добиваме $x = 1 \text{ cm}$. За должините на страните на правоаголникот $ABCD$ добиваме

$$\overline{BC} = 2x + 3x = 5x = 5 \text{ cm}$$

и

$$\overline{AB} = 3 \cdot 2x + 5x = 11x = 11 \text{ cm},$$

па затоа неговата плоштина е:

$$P = 11 \cdot 5 = 55 \text{ cm}^2.$$

б) Од $P_{AQED} = 100 \text{ cm}^2$ следува $\overline{AQ} = \overline{AD} = \overline{BC} = 10 \text{ cm}$. Но, $\overline{BC} = 5x$, па затоа $5x = 10$, т.е.

$$x = 2 \text{ cm} \text{ и } \overline{QB} = 6x = 12 \text{ cm}.$$

Конечно,

$$L_{ABCD} = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AD} = 2 \cdot (10 + 12) + 2 \cdot 10 = 64 \text{ cm}.$$

25. Должината на страната на квадрат изразена во cm е природен број, а плоштината му е 1 cm^2 поголема од плоштината на правоаголник чии должини на страни изразени во cm се едноцифрени непарни броеви. Периметарот на рамностран триаголник е еднаков на збирот на периметрите на квадратот и правоаголникот, а должината на неговата страна изразена во сантиметри е природен број. Определи ја должината на страната на рамностраниот триаголник.

Решение. Непарни едноцифрени природни броеви се 1, 3, 5, 7 и 9. Можните случаи се дадени во следнава табела.

Правоаголник	Плоштина на правоаголникот	Плоштина на вадратот	Страната на квадратот е природен број
1 cm, 3 cm	3 cm ²	4 cm ²	Да
1 cm, 5 cm	5 cm ²	6 cm ²	Не
1 cm, 7 cm	7 cm ²	8 cm ²	Не
1 cm, 9 cm	9 cm ²	10 cm ²	Не
3 cm, 5 cm	15 cm ²	16 cm ²	Да
3 cm, 7 cm	21 cm ²	22 cm ²	Не
3 cm, 9 cm	27 cm ²	28 cm ²	Не
5 cm, 7 cm	35 cm ²	36 cm ²	Да
5 cm, 9 cm	45 cm ²	46 cm ²	Не
7 cm, 9 cm	63 cm ²	64 cm ²	Да

- 1) За правоаголникот со страни 1 cm, 3 cm, бидејќи $4 = 2 \cdot 2$ должината на страната на соодветниот квадрат е еднаква на 2 cm.

Периметарот на рамностраниот триаголник е

$$L = 2 \cdot (1 + 3) + 4 \cdot 2 = 16 \text{ cm},$$

па како $16 = 3 \cdot 5 + 1$ не е делив со 3, заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение.

- 2) За правоаголникот со страни 3 cm, 5 cm, бидејќи $16 = 4 \cdot 4$ должината на страната на соодветниот квадрат е еднаква на 4 cm. Периметарот на рамностраниот триаголник е

$$L = 2 \cdot (3 + 5) + 4 \cdot 4 = 32 \text{ cm},$$

па како $32 = 3 \cdot 10 + 2$ не е делив со 3, заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение.

- 3) За правоаголникот со страни 5 cm, 7 cm, бидејќи $36 = 6 \cdot 6$ должината на страната на соодветниот квадрат е еднаква на 6 cm. Периметарот на рамностраниот триаголник е

$$L = 2 \cdot (5 + 7) + 4 \cdot 6 = 48 \text{ cm},$$

па како $48 = 3 \cdot 16$ е делив со 3, заклучуваме дека во овој случај задачата има решение и должината на страната на рамностраниот триаголник е $a = 16 \text{ cm}$.

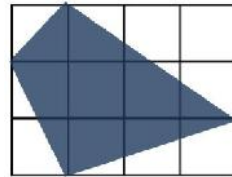
- 4) За правоаголникот со страни $7 \text{ cm}, 9 \text{ cm}$, бидејќи $64 = 8 \cdot 8$ должината на страната на соодветниот квадрат е еднаква на 8 cm . Периметарот на рамностраниот триаголник е

$$L = 2 \cdot (7 + 9) + 4 \cdot 8 = 64 \text{ cm},$$

па како $64 = 3 \cdot 21 + 1$ не е делив со 3, заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение.

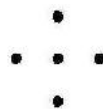
Конечно, единствено решение на задачата е $a = 16 \text{ cm}$.

26. Фигурата прикажана на цртежот десно претставува сребрен лист поделен на 12 квадратчиња. Секое квадратче тежи по 10 грама. Колку грама тежи затемнетиот дел на фигурата?



Решение. Првата колона на фигурата да ја поделиме на горното 1×1 квадратче и 2×1 правоаголникот под него, а преостанатиот дел од фигурата да го поделиме на 2×3 правоаголник и 1×3 правоаголник. Тогаш во секоја од добиените делбени фигури половината од површината е затемнета. Бидејќи целата фигура има 12 квадратчиња, заклучуваме дека затемнетиот дел од површината има 6 квадратчиња. Секое квадратче тежи по 10 грама, па значи затемнетиот дел од фигурата тежи $6 \cdot 10 = 60 \text{ g}$.

27. Определи го бројот на триаголниците чии темиња се точките прикажани на цртежот десно.



Решение. Дадените точки да ги означиме како што е прикажано на цртежот лево.

Ако земеме предвид дека точките A, E и D лежат на иста отсечка и дека точките B, E и C лежат на иста отсечка, добиваме дека со дадените точки се опреелени триаголниците:

$$ABE, ACE, BDE, DCE, ABD, ACD, BDC, BCA,$$

Според тоа, со дадените точки се определени 8 триаголници.

28. Определи го бројот на квадратите чии темиња се точките прикажани на цртежот десно (точките во секој ред и во секоја колона се наоѓаат на еднакво растојание).



Решение. Точките ќе ги означиме како на цртежот лево. Тогаш бараните квадрати се:

I, J, K, L $ABFE, BCGF, CDGH, EFJI, FGKJ,$
 E, F, G, H $GHLK, ACKI, BDLJ, BGJE, CHKF.$
 A, B, C, D

Според тоа, бројот на квадратите чии темиња се точките прикажани на дадениот цртеж е 10.

29. Во колку правоаголници на цртежот десно го има знакот ♡?



Решение. Знакот ♡ го има во 1 единечен, 2 двојни, 3 тројни, 3 четворни, 2 петторни и 1 шесторен правоаголник. Според тоа, бараниот број правоаголници е еднаков на:

$$1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12.$$

30. Колку правоаголници на фигурата прикажана на цртежот десно имаат ♡?

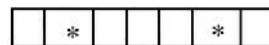


Решение. Имаме: 1 единичен правоаголник, 2 двојни правоаголници, 3 тројни правоаголници, 4 четворни правоаголници, 3 петторни правоаголници, 2 шесторни и 1 седморен.

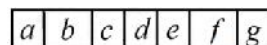
Значи, вкупниот број правоаголници е еднаков на

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16.$$

31. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно и кои имаат само по една ѕвездичка.



Решение. Полињата на фигурата да ги означиме како на цртежот десно. Правоаголници кои содржат по една ѕвездичка се оние правоаголници кои содржат точно една од буквите b и f . Тоа се правоаголници

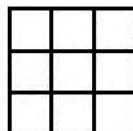


ците:

$b, ab, abc, abcd, abcde, bc, bcd, bcde,$
 $f, gf, gfe, gfed, gfedc, fe, fed, fedc.$

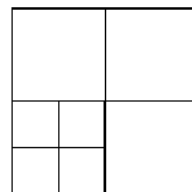
Според тоа, постојат 16 правоаголници кои содржат точно една свездичка.

32. Определи го бројот на квадратите кои ги содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



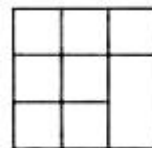
Решение. Дадената фигура содржи 9 единечни квадрати, 4 квадрати составени од по четири единечни квадрати и 1 квадрат составен од девет единечни квадрати. Според тоа, дадената фигура содржи $9 + 4 + 1 = 14$ квадрати.

33. Колку квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



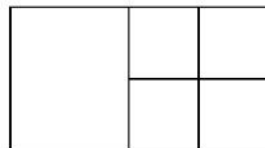
Решение. Дадената фигура содржи 4 мали квадрати, 4 средни квадрати и 1 голем квадрат. Значи, вкупниот број квадрати кои ги содржи оваа фигура е $4 + 4 + 1 = 9$

34. Определи го бројот на квадратите кои ги содржи фигурата прикажана на цртежот десно.

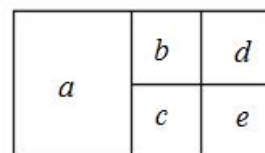


Решение. Дадената фигура содржи седум 1×1 квадрати, три 2×2 квадрати и еден 3×3 квадрат. Според тоа, бројот на сите квадрати е еднаков на $7 + 3 + 1 = 11$.

35. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани во фигурата која е прикажана на цртежот десно. (Квадратот е правоаголник.)



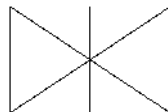
Решение. Одделните делови од кои е составена фигурата ќе ги означиме како на цртежот десно. Според тоа, дадената фигура ги содржи правоаголниците:



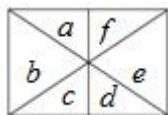
$a, b, c, d, e, bc, bd, ce, de, abc, bcde, acedb,$

т.е. таа содржи 12 правоаголници.

36. Колку правоаголни триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



Решение. Деловите на кои е поделен дадениот правоаголник ќе ги означиме како на цртежот

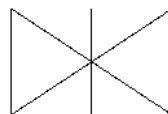


лево. Сега правоаголни триаголници кои ги содржи дадената фигура се:

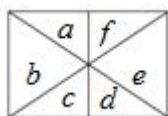
$a, c, d, f, bcd, cde, efa, fab.$

Според тоа, дадената фигура содржи 8 правоаголни триаголници.

37. Колку триаголници содржи фигурата која е прикажана на цртежот десно?



Решение. Деловите на кои е поделен дадениот правоаголник ќе ги означиме како на цртежот



лево. Сега дадената фигура ги содржи следниве триаголници:

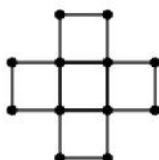
$a, b, c, d, e, f, ef, cd, bcd, cde, efa, fab.$

Според тоа, дадената фигура содржи 12 триаголници.

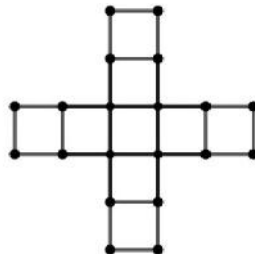
38. Горјан реди фигури од кибритени чкорчиња во следната форма:



Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3

...

- Колку квадратчиња има во фигурата со реден број 2019?
- Колку кибритени чкорчиња се потребни за фигурата со реден број 2019?
- Должината на едно кибритено чкорче е 5 cm . Определи го пе-

риметарот на фигурата со реден број 2019.

Решение. а) Првата фигура има 1 квадратче. Секоја следна фигура се добива од претходната со додавање на 4 квадратчиња. Значи, фигурата со реден број 2019 е составена од $1 + 4 \cdot 2018 = 8073$ квадратчиња.

б) За првата фигура се потребни 4 чкорчиња. За едно квадратче на следната фигура се потребни уште 3 чкорчиња, што значи дека за следната фигура се потребни уште $4 \cdot 3 = 12$ чкорчиња. Последното значи, дека за фигурата со реден број 2019 се потребни $4 + 12 \cdot 2018 = 24220$ чкорчиња.

в) Првата фигура има периметар 4 чкорчиња. Периметарот на секоја следна фигура се зголемува за $4 \cdot 2 = 8$ чкорчиња. Значи, периметарот на фигурата со реден број 2019 е составен од $4 + 2018 \cdot 8 = 16148$ чкорчиња. Но, едно чкорче е долго 5 *cm*, па затоа периметарот на фигурата со реден број 2019 е со должина $16148 \cdot 5 = 80740$ *cm*.

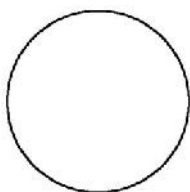
39. На колку делови глобусот е поделен од екваторот и два меридијани?

Решение. Екваторот глобусот го дели на два дела. Потоа првиот меридијан секој од двата дела не го дели на нови делови, што значи до сега глобусот е поделен на 2 дела. Понатаму, новиот меридијан секој од двата дела го дели на два дела. Значи, со екваторот и два меридијани глобусот е поделен на $2 \cdot 2 = 4$ делови.

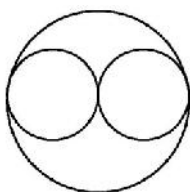
40. На колку делови е поделен глобусот со две паралели и три меридијани?

Решение. Првиот меридијан не го дели глобусот на делови. Вториот меридијан го дели глобусот на два дела, што значи дека добиваме 2 дела. Третиот меридијан дели еден од веќе добиените два дела на два дела, па така добиваме $1 + 2 = 3$ делови. Двете паралели секој од добиените три делови го делат на три дела, па затоа со три меридијани и две паралели глобусот е поделен на $3 \cdot 3 = 9$ делови.

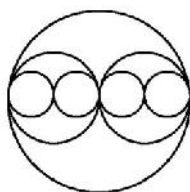
41. Откриј го правилото според кое се добива секоја од фигурите во низата прикажана на долните цртежи. Ако низата фигури се продолжи така што се запазува тоа правило, од колку кружници ќе се состои шестата фигура?



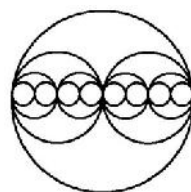
Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

Решение. Забележуваме дека:

- првата фигура има 1 кружница,
- втората фигура се добива од првата со доцртување на 2 кружници,
- третата фигура се добива од втората со доцртување на 4 кружници, и
- четвртата фигура се добива од третата со доцртување на 8 кружници.

Според тоа, секоја следна фигура ја добиваме кога на последната фигура доцртаме двојно повеќе кружници отколку што сме доцртале во претходниот чекор.

При добивање на четвртата фигура доцртавме 8 кружници и таа има 15 кружници. Сега за петтата фигура доцртуваме $2 \cdot 8 = 16$ кружници и таа ќе има $15 + 16 = 31$ кружница, а за шестата фигура доцртуваме на петтата $2 \cdot 16 = 32$ кружници и таа ќе има $31 + 32 = 63$ кружници.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ

Секоја задача од овој дел се решава со помош на Венов дијаграм, за што пресметикте се дадени во решенијата на задачите. Нацртај ги дијаграмите.

1. Во спортската секција има десет ученици и секој од нив игра или тенис или пинг-понг. Четири од овие ученици играат и пинг-понг и тенис. Седум од десетте ученици играат пинг-понг. Колку деца играат тенис?

Решение. Бидејќи 7 ученици играат пинг-понг, а 4 играат и пинг-понг и тенис, следува дека само пинг-понг играат $7 - 4 = 3$ ученици. Но, секцијата има 10 ученици и секој од нив игра еден од двата спортови, па затоа тенис играат $10 - 3 = 7$ ученици.

2. Во стационарот за животни има 10 мачки. Од нив 4 не сакаат риба, 5 не сакаат кренвишли, 2 не сакаат ниту риба ниту кренвишли. Колку мачки сакаат и риба и кренвишли?

Решение. Од 10 мачки 4 не сакаат риба, што значи дека $10 - 4 = 6$ мачки сакаат риба. Слично, $10 - 5 = 5$ мачки сакаат кренвишли. Понатаму, $10 - 2 = 8$ мачки сакаат риба или кренвишли, па затоа $6 + 5 - 8 = 3$ сакаат и риба и кренвишли.

3. Во училиштето на Горјан има 60 учители. Од нив кафе сакаат 39, чај сакаат 28, а 16 сакаат и чај и кафе. Колку учители во училиштето на Горјан не сакаат ниту кафе, ниту чај?

Решение. Само кафе сакаат $39 - 16 = 23$ учители, а само чај сакаат $28 - 16 = 12$ учители. Ниту кафе, ниту чај не сакаат $60 - (23 + 12 + 16) = 60 - 51 = 9$ учители.

4. Во училиштето на Иван има 50 ученици во четврто одделение. Од нив 20 тренираат фудбал, 22 тренираат пливање, а 16 не тре-

нираат ниту фудбал, ниту пливање. Колку ученици од четврто одделение тренираат и фудбал и пливање?

Решение. Еден од двата спорта тренираат $50 - 16 = 34$ ученици. Само пливање тренираат $34 - 20 = 14$ ученици, а само фудбал тренираат $34 - 22 = 12$ ученици. Значи, двата спорта ги тренираат $34 - (14 + 12) = 8$ ученици.

5. Секој од 27-те ученици во едно одделение во текот на летото ќе оди на езеро или на планина. На езеро ќе одат 13 деца, а на планина ќе одат 18 деца. Колку деца ќе одат и на езеро и на планина?

Решение. Бидејќи од 27 деца, 13 одат на езеро, само на планина ќе одат $27 - 13 = 14$ деца. Но, на планина одат 18 деца и меѓу нив се и децата кои одат и на планина и на езеро заклучуваме дека и на планина и на езеро ќе одат $18 - 14 = 4$ деца.

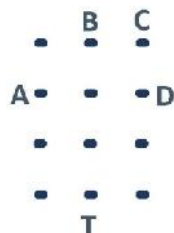
6. Во одделението на Филип има 21 ученик. Од нив 12 ученици не сакаат чај, 8 не сакаат млеко, а 5 сакаат и чај и млеко. Колку ученици во одделението на Филип не сакаат ниту чај ниту млеко?

Решение. Бидејќи 12 ученици не сакаат чај, заклучуваме дека $21 - 12 = 9$ ученици сакаат чај. Слично, $21 - 8 = 13$ ученици сакаат млеко.

Понатаму, бидејќи 5 ученици сакаат и чај и млеко, само чај сакаат $9 - 5 = 4$ ученици, а само млеко сакаат $13 - 5 = 8$ ученици. Конечно, чај или млеко сакаат $4 + 5 + 8 = 17$ ученици, па затоа ниту чај ниту млеко не сакаат $21 - 17 = 4$ ученици.

IV.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

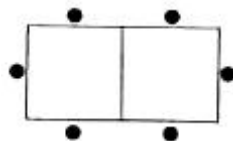
7. За цртежот десно стрелката ја означува насоката, а бројот до неа го означува бројот на чекорите во таа насока, при што чекор е растојанието до најблиската точка во покажаната насока. На пример,



ако A помине пат $(\rightarrow 2)(\uparrow 1)$ тогаш таа ќе се најде во C . Во која точка ќе се најде турист T откако ќе го помине патот $(\uparrow 2)(\leftarrow 1)(\downarrow 1)(\rightarrow 2)(\uparrow 2)$.

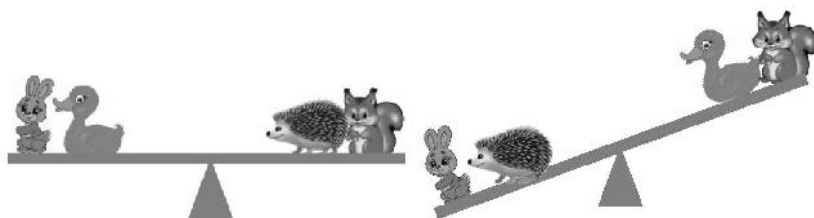
Решение. Со првите два чекори туристот T ќе се најде во точката A . Потоа, со следните два чекори ќе се најде одма под точката D и со последниот петти чекор тој ќе се најде во точката C .

8. Во ресторан околу една квадратна маса седат 4 луѓе. На цртежот десно е покажано како 6 луѓе се седнати околу 2 споени маси. Определи го најмалиот број такви маси што треба да се нареди во еден ред за да може да седне група од 12 луѓе.



Решение. На една маса седат 4 луѓе, на две маси седат 6 луѓе итн. со поставување на секоја следна маса бројот на луѓето кои може да седнат се зголемува за 2. Според тоа, потребно е да се постават $(12 - 2) : 2 = 5$ маси.

9. Зајачето и пајчето имаат иста маса како ежето и верверичката. Зајачето и ежето имаат поголема маса од пајчето и верверичката. Кој има поголема маса, зајачето или верверичката?



Решение. Ако верверичката има поголема маса од зајачето, тогаш заради рамнотежата на првата вага, пајчето има поголема маса од ежето. Последното значи дека пајчето и верверичката имаат поголема маса од зајачето и ежето, што е спротивно на условот на задачата. Ако зајачето и верверичката имаат иста маса, тогаш кога ќе ги заменат местата на тасовите на првата вага, вагата повторно не ќе остане во рамнотежа. Но, тоа е спротивно на условот на задачата.

тивнона условот на задачата, бидејќи втората вага не е во рамнотежа. Значи, зајачето има поголема маса од верверичката.

10. Во продавницата има само пет чинии, од кои две се исти. Кои чинии се исти:



Решение. Броиме од лево кон десно. Украсите на чиниите се ѕвезда (S), кругче (K) и два круга (K2). Почнувајќи од ѕвезда (S) украсите се распоредени на следниве начини:

прва чинија: S,K2,K,S,K,K2,

втора чинија: S,K2,S,K,K2,K,

трета чинија: S,K2,K,S,K,K2,

четврта чинија: S,K2,K,K2,S,K,

петта чинија: S,K2,K,S,K2,K.

Значи, распоредот на украсите е еднаков на првата и трета чинија, што значи дека овие две чинии се исти.

11. Околу тркалезна маса има седум столчиња на кои се на седумте џуџиња. Тие седнале на столчињата така што точно n џуџиња седнале на своите столчиња. Дали n може да биде еднаков на:
- а) три, б) четири, в) пет, г) шест.

Решение. Нека на џуџињата означени со буквите A, B, C, D, E, F, G , соодветно има припаѓаат столчињата означени со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

а) Може, на пример еден таков распоред на седнување е:

$A1, B2, C3, D7, E4, F5, G6.$

б) Може, на пример еден таков распоред на седнување е:

$A1, B2, C3, D4, E7, F5, G6.$

в) Може, на пример еден таков распоред на седнување е:

$A1, B2, C3, D4, E5, F7, G6.$

г) Не може. Имено, ако било кои шест џуџиња седнат на своите столчиња, тогаш преостанатото седмо столче припаѓа на седмо-

то цуце, па затоа и тоа мора да седне на своето столче.

12. Илија, Марко и Павле се родени на 19 ноември, 27 ноември и 3 декември, соодветно. Тие решиле заедно да го слават роденденот во оној ден кога збирот на деновите меѓу родендените и денот на прослава ќе биде најмал. Кој е тој ден?

Решение. За било кој од деновите меѓу 19 ноември и 3 декември, збирот на деновите до овие два дена е константен и тој е еднаков на 14 дена. Според тоа, збирот на деновите ќе биде најмал кога растојанието до роденденот на Марко е најмало, а тоа е на 27 ноември.

13. Девет девојчиња и петнаесет момчиња се поделиле во групи по тројца. Во секоја група има и момче и девојче. Во колку групи момчињата се повеќе од девојчињата?

Решение. Вкупно се $9+15=24$ деца. Секоја група има по 3 деца, па затоа децата се поделени во $24:3=8$ групи. Бидејќи во секоја група има и момче и девојче, осум девојчиња се по едно во осумте групи и во една од овие групи се наоѓа деветтото девојче. Значи, во една група има повеќе девојчиња од момчиња. Тоа значи дека во $8-1=7$ групи има повеќе момчиња од девојчиња.

14. Ана, Билјана, Вања, Галија и Донка седнале во слаткарница околу тркалезна маса. Ана не била до Билјана, Галија била до Донка, а Билјана не била до Галија. Кои девојчиња биле од двете страни на Вања?

Решение. Местата околу масата да ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4 и 5, а девојчињата со почетните букви на нивните имиња. Бидејќи Г и Д биле една до друга, можеме да земеме дека Г е на 1, а Д е на 2. Бидејќи Б не е до Г и А не е до Б, добиваме дека А е на 3. Навистина, ако А е на било кое друго место, тогаш Б е или до А или до Г, што не е можно. Според тоа, Б е на 4, а В е на 5. Конечно, В е меѓу А и Б, односно од двете страни на Вања седат Ана и Билјана.

15. Иван, Никола, Стефан и Павле имале различен број топчиња. Павле имал 1 топче, а другите тројца имале 2, 3 и 4 топчиња. Момчињата седнале на четирите страни на квадратна маса. Павле седнал лево од Никола, Иван седнал десно од момчето кое што имало 4 топчиња. Стефан седнал наспроти Никола и тој нема 3 топчиња. Колку топчиња има Иван?

Решение. Стефан и Никола седат еден наспроти друг, па затоа Павле и Иван седат еден наспроти друг. Павле е лево од Никола, што значи дека Иван е десно од Никола. Но, Иван седи десно од момчето кое има 4 топчиња. Значи, Никола има 4 топчиња, Павле има 1 топче, а Стефан нема 3 топчиња. Според тоа, Стефан има 2 топчиња и останува Иван да има 3 топчиња.

16. На 4 гранки на едно дрво има 13 врапчиња. Што може со сигурност да се тврди?
- а) На секоја гранка има барем по 3 врапчиња.
 - б) Постои гранка на која има барем 4 врапчиња.
 - в) Нема гранка на која има 5 врапчиња.
 - г) Има гранка со само 1 врапче.
 - д) На една гранка има 4 врапчиња, а на преостанатите три има по 3 врапчиња.

Решение. Не може со сигурност да се каже дека е точно тврдењето под а), в), г) или д) бидејќи на четирите гранки во некој редослед може да има 2, 2, 4 и 5 врапчиња.

Ќе покажеме дека сигурно е точно тврдењето под б). Ако ова тврдење не е точно, тогаш на секоја гранка може да има најмногу по 3 врапчиња. Но, бидејќи имаме 4 гранки, тогаш на дрвото има најмногу $4 \cdot 3 = 12$ врапчиња, што е спротивно на условот дека бројот на врапчињата е 13. Од добиената противречност следува деја постои гранка на која има најмалку 4 врапчиња.

17. Во училиницата било скршено стакло. Горјан го испитувал случајот и заклучил дека стаклото било скршено од еден од учениците: Ацо, Бојан и Васил. Ацо кажал дека Бојан го скршил стаклото. Бојан и Васил нешто објасниле, но Горјан ги заборавил дета-

лите. Сепак, Горјан дознал дека тој што му ја кажал вистината го скршил стаклото. Кој го скршил стаклото?

Решение. Ако Ацо ја кажал вистината требало да каже дека тој го скршил стаклото. Значи, Ацо излагал, па и тврдењето дека Бојан го скршил стаклото не е точно. Според тоа, Ацо и Бојан не го скршиле стаклото, па преостанува дека Васил го скршил стаклото.

18. Четворица пријатели договараат средба. Секој предложил место и ден: на фитнес во недела, во слаткарница во петок, на фудбал во недела и во слаткарница во сабота. Компромис бил постигнат, така што точно по едно од барањата на секој е задоволено. Кога и каде е средбата?

Решение. Денот петок и местото фитнес се јавуваат само по еднаш, па затоа ако овој ден или ова место се дел од договорот, тогаш бидејќи ниту еден ден и ниту едно место во предлозите не се јавува три пати, не може да се постигне компромис. Според тоа, за да биде точно едно од барањата на првите двајца задоволено денот мора да е недела, а местото слаткарница. Навистина, тогаш за третиот пријател се совпаѓа денот – недела, а за четвртиот местото – слаткарница.

19. Во ред еден до друг се наредени 2014 луѓе, секој од кои е или лажливец (кој секогаш лаже) или витез (кој секогаш ја говори вистината). Секој тврди: „Лево од мене има повеќе лажливци отколку десно.“ Колку лажливци има во редот?

Решение. Ако има два или повеќе лажливци, тогаш лажливецот кој е крајно десно кажал вистина, што не е можно. Значи, може да има најмногу 1 лажливец и тој е крајно лево во редот. Јасно, лажливецот излагал, бидејќи на двете страни од него има по 0 лажливци, а секој витез кажал вистина и условот на задачата е исполнет.

20. Фрлив три коцки за играње и на трите паднаа три различни броја точки. Од збирот на два од броевите го одзедов третиот и го

добив бројот 10. Кои броеви точки паднаа на коцките?

Решение. Бидејќи резултатот од одземањето е 10, збирот на два од броевите мора да е 11 или 12. Ако збирот е 12, тогаш на двете коцки паднале броевите 6 и 6, што противречи на условот дека паднале три различни броја точки. Значи, збирот е 11 и на двете коцки паднале 5 и 6 точки. За да разликата биде 10, единствена можност е третиот број да е 1. Според тоа, паднатите броеви точки се 1, 5 и 6.

21. Три деца играат домино. Секое дете зело по една домино плочка од сетот и ги дало следниве три искази:

- 1) На моето домино збирот на точките 4.
- 2) На моето домино има половина без точки.
- 3) На моето домино има еднаков број точки на секоја половина.

Кои домино плочки биле земени од сетот, ако сите деца два пати кажала вистина, а еднаш излагале?

Решение. Две деца не може истовремено да дадат исти точни искази. Имено, секои два точни искази точно определуваат едно домино, а домината се различни. Затоа треба да ги разгледаме трите комбинации кога два од трите искази се точни.

Ако се точни 1) и 2), тогаш станува збор за доминото 4–0.

Ако се точни 1) и 3), тогаш станува збор за доминото 2–2.

Ако се точни 2) и 3), тогаш станува збор за доминото 0–0.

22. Симон и Бојан се подготвуваат за натпревар по математика. Бојан го прашал Симон колку задачи решил. Симон му одговорил со шифра: „Решив $43 + 57 = 207$ задачи.“ и му кажал на Бојан дека секоја цифра е зголемена или намалена за 1. Колку задачи решил Симон?

Решение. Јасно, цифрата 0 е добиена со намалување за 1, па затоа на нејзино место треба е цифрата 1. Понатаму, збир на два двоцифрени броја е помал од 200, па затоа цифрата 2 е добиена со зголемување за 1, па на нејзино место треба да е цифрата 1. Сега, во трицифрениот број треба да е цифрата 8 или цифрата 9,

а при собирање на единиците на двоцифрените броеви можни се следниве случаи: $2+8=10$, $2+6=8$, $4+8=12$ или $4+6=10$. Значи, единствена можност е цифрите на единиците на собирците да се 2 и 6 и тогаш збирот ќе биде 118. Конечно, ако цифрите на десетките на собирците ги зголемиме за 1 добиваме $52+66=118$. Значи, Симон решил 118 задачи.

23. Сашо, Коле, Маја и Олгица живеат во петкатна зграда на различни катови. При една средба пред зградата, Сашо рече: „Ја живеам над сите останати.“, а Маја на тоа додаде „Јас сум во средината.“ Потоа, Коле се надоврза: „Живеам над Маја и под Олгица“, на што Олгица додаде: „Коле излага. Меѓу мене и Коле има кат на кој никој од нас не живее.“

Се покажало дека тие што живеат на непарните катови излагале, а тие на парните говореле вистина. Кој на кој кат живее?

Решение. Маја тврди дека живее на 3 кат, а Сашо тврди дека дека е на 4 или 5 кат. Сашо не може да живее на 5 кат, бидејќи тие што живеат на непарни катови излагале. Од исти причини Маја не живее на 3 кат, па затоа таа живее на 1 или 5 кат, а Сашо живее на 1, 3 или 4 кат. Ако Сашо и Маја двајцата излагале, тогаш останува само еден кат, а меѓу Олгица и Коле едниот говори вистина, а другиот лаже (Двајцата не може да говорат вистина, бидејќи си противречат.)

- 1) Нека Олгица ја говори вистината, а Коле лаже. Тогаш за да е точно тврдењето на Олгица за катот меѓу нив, Коле треба да живее на 5, а Олгица на 2. Но, тогаш Маја живее на 1 и тврдењето на Коле дека живее над Маја е точно, што е противречност.
- 2) Нека Олгица лаже, а Коле ја говори вистината. Тогаш Коле живее над Маја. Според тоа, Маја живее на 1 кат, Сашо на 3 кат, Олгица која излага е на 5 кат, а Коле е на 4 кат.
- 3) Нека Сашо говори вистина. Тогаш тој живее на 4 кат, сите други живеат под него. Тоа значи дека Маја е на 1 кат, Олгица на 3 и како меѓу девојчињата нема празен кат, Коле живее на 2 кат.

24. Двете паралелки 4^a и 4^b заедно имаат 48 ученици. За патрониот празник учениците од 4^a се построиле во 6 реда по 4 ученици. Бројот на редовите во 4^b е за 5 поголем од бројот на учениците во секој ред. Во колку редови се построиле учениците од 4^b одделение?

Решение. Имаме $6 \cdot 4 = 24$, што значи дека во 4^a учат 24 ученици. Сега, од $48 - 24 = 24$ следува дека во 4^b учат 24 ученици. Бидејќи $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, заклучуваме дека единствените множители 3 и 8 се разликуваат за 5. Последното значи дека учениците од 4^b се построиле во 8 реда со по 3 ученици.

25. Мартин се почесто плаќа со кредитната картичка. Секоја картичка има пин-код кој е четирицифрен број. Колку можности има за пин-кодот на картичката на Мартин, ако четирите цифри на пин-кодот се различни, збирот на цифрите е еднаков на 8 и двоцифрениот број од првите две цифри (во истиот редослед) е еднаков на производот на другите две цифри?



Решение. Збирот на четири различни едноцифрени броја е еднаков на 8 само ако броевите се: 0, 1, 2 и 5, или 0, 1, 3 и 4. Бидејќи за секој број a важи $0 \cdot a = 0$, цифрата 0 не се наоѓа меѓу првите две цифри. Тоа значи дека, кога цифрите се 0, 1, 2 и 5, двоцифрениот број составен од првите две цифри може да биде:

а) 10 и во тој случај имаме $10 = 2 \cdot 5$, што значи дека за пин-кодот на картицата на Мартин имаме две можности и тоа: 1025 и 1052.

б) 20 и како $20 \neq 1 \cdot 5$ во овој случај немаме решение.

в) 50 и како $50 \neq 1 \cdot 2$ во овој случај немаме решение.

Ако цифрите се 0, 1, 3 и 4, тогаш двоцифрениот број составен од првите две цифри може да биде:

а) 10 и како $10 \neq 3 \cdot 4$ во овој случај немаме решение.

б) 30 и како $30 \neq 1 \cdot 4$ во овој случај немаме решение.

в) 40 и како $40 \neq 1 \cdot 3$ во овој случај немаме решение.

Конечно, за пин-кодот на картичката на Мартин имаме две можности и тоа : 1025 и 1052.

26. Фудбалската екипа „Водно“ изиграла три натпревари, од кои во еден натпревар победиле, во еден згубиле и во еден одиграле нерешено. Притоа дале 3 гола и примиле 1 гол. Определи ги резултатите во трите натпревари.

Решение. Бидејќи екипата загубила еден натпревар, а примила само еден гол, тие натпреварот го загубиле со резултат 1:0. Понатаму, во натпреварот кој го одиграле нерешено не дале гол, бидејќи при нерешен резултат колку се дадени, толку се и примени голови, а тие примиле само 1 гол и тоа во натпреварот кој го загубиле. Значи, нерешениот натпревар завршил со резултат 0:0. Конечно, сите голови ги дале во натпреварот во кој победиле, а притоа не примиле гол, па затоа овој натпревар завршил со резултат 3:0.

27. Во кутија има 3 црвени, 4 сини и 4 зелени топчиња. Кој е најмалиот број топчиња што треба да го извадиме без да гледаме, за да сме сигурни дека сме извадиле топчиња од сите бои?

Решение. Ако извадиме 8 топчиња, тогаш бидејќи $8 = 4 + 4$, може да се случи сите извадени топчиња да се сини и зелени, па така нема да имаме црвено топче. Но, ако извадиме 9 топчиња, тогаш меѓу нив сигурно ќе има топчиња од сите три бои.

28. Катерина има 5 исти пара бели патики и 5 исти пара сини патики. Колку патики треба да извади без да гледа, за да е сигурна дека меѓу нив има пар патики, лева и десна, од една иста боја?

Решение. Ако извади 10 патики, може да се случи 5 патики да се бели и леви (десни) и 5 патики да се сини леви (десни), па затоа во овој случај нема да има пар патики, лева и десна, од една иста боја. Но, кога ќе ја извади единаесеттата патика, тогаш мора да има 6 од една боја и меѓу овие шест патики мора да има и

лева и десна. Значи, Катерина треба да извади 11 патики.

29. Во една торба има бели, зелени и црвени топчиња. Бели и црвени вкупно има 29, црвени и зелени вкупно има 32, зелени и бели вкупно има 35. Кој е најмалиот број топчиња што треба без да се гледа да се извадат од кутијата за да сме сигурни дак сме извадиле топчиња со две различни бои?

Решение. Во збирот $29 + 32 + 35 = 96$ бројот на топчињата од секоја боја се јавува два пати. Според тоа, вкупниот број топчиња во торбата е $96 : 2 = 48$. Значи, во торбата има $48 - 29 = 19$ зелени топчиња, $48 - 32 = 16$ бели топчиња и $48 - 35 = 13$ црвени топчиња.

Ако извадиме 19 топчиња, може да се случи сите да бидат зелени, но ако извадиме 20 топчиња, тогаш мора да има барем две топчиња од различни бои.

30. Во една кутија има неспарени чорапи од 3 пара зелени, 2 пара црвени и 5 пара сини чорапи, кои се разликуваат само по боја. Кој е најмалиот број чорапи кои, без гледање, треба да ги извадиме за да сме сигурни дека сме извадиле пар еднобојни чорапи?

Решение. Ако извадиме 3 чорапи, може да се случи еден да биде зелен, другиот црвен и третиот да е син. Но, ако извадиме 4 чорапи тогаш два сигурно ќе бидат со иста боја. Значи, треба да извадиме најмалку 4 чорапи.

31. Вера во торбата има 3 зелени, 2 сини, 5 црвени и 2 кафеави моливи. Определи го најмалиот број моливи кои што Вера без да гледа треба да ги извади од торбата за да биде сигурна дека меѓу нив ќе има црвен молив.

Решение. Ако Вера извади 7 моливи, тогаш бидејќи $7 = 3 + 2 + 2$, може да се случи сите моливи да се зелени, сини и кафеави. Но, ако таа извади 8 моливи, тогаш меѓу нив сигурно ќе има барем еден црвен.

32. Во една кутија има 16 црвени, 18 бели и 19 сини топчиња. Кој е најмалиот број топчиња што треба го земеме без да гледаме за да сме сигурни дека сме зеле:

а) барем едно сино топче,

б) барем по едно топче од секоја боја?

Решение. а) Ако земеме 34 топчиња, тогаш бидејќи $34 = 16 + 18$, може да се случи сите топчиња да се црвени и бели. Но, ако земеме 35 топчиња, тогаш меѓу нив мора да има барем едно сино топче.

б) Ако земеме 37 топчиња, тогаш бидејќи $37 = 18 + 19$ може да се случи сите топчиња да се бели и сини, т.е. да немаме топчиња од сите три бои. Но, ако земеме 38 топчиња, тогаш меѓу нив сигурно ќе има топчиња од сите три бои.

33. Околу базенот има дваесет и пет деца. Ако избереме било кои четири деца, тогаш барем едно од нив знае да плива. Кој е најголемиот можен број деца околу базенот, кои не знаат да пливаат?

Решение. Ако четири или повеќе деца не знаат да пливаат, тогаш ќе избереме четири од овие деца и меѓу нив нема да има дете кое што знае да плива. Ова е спротивно на условот на задачата, па затоа бројот на децата кои не знаат да пливаат е помал од 4. Ако има 3 деца кои не знаат да пливаат, тогаш меѓу било кои четири деца може да има најмногу три деца што не знаат да пливаат, па затоа барем едно дете знае да плива. Значи, меѓу децата околу базенот најголемиот можен број деца кои што не знаат да пливаат е 3.

34. На бреговите на една многу кривулеста река живеат Марко (М), Ратко (Р) и Кирил (К). Алиса добила карта на дел од областа во која живеат децата.



Дали таа може да определи кои деца живеат на еден брег, а кои живеат на различен брег? Ако одговорот е позитивен покажи

кои деца живеат на еден брег.

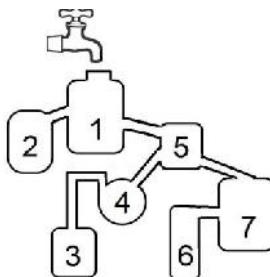
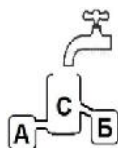
(Реката е непрекината линија, која самата себе не се сече и нема гранки, но не е познато како таа тече. Во областа нема други водотеци.)

Решение. Марко и Кирил живеат на ист брег, а Ратко живее на другиот брег на реката.

Навистина, да ја доцртаме реката на било каков начин. На пример, како што тоа е покажано на цртежот десно. Од цртежот следува одговорот на задачата. Но, тоа не е доволно. Треба да докажеме дека како и да го доцртаме цртежот, положбата на бреговите не се менува. Да ги поврземе трите точки кои не интересираат со отсечки. Тогаш ако реката ја сече отсечката парен број пати, тогаш точките се на еден брег, а ако ја сече непарен број пати, тогаш точките се на различни брегови. Провери дека тоа е така. Тоа може да се направи и ако бреговите се обојат со различни бои, па кога се менува брегот, се менува и бојата.



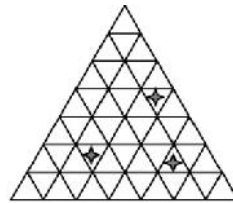
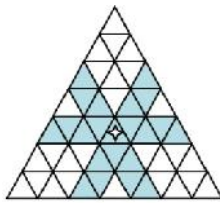
35. Ако од чешмата се полни системот садови кој е прикажан на цртежот лево, прво ќе се наполни садот А. Кој сад прв ќе се наполни ако од чешмата се полни системот садови кој е прикажан на цртежот десно? (Воздухот не пречи во полнењето на садите.)



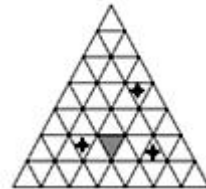
Решение. Кога водата ќе се пушти во садот C , тогаш водата прво го достигнува отворот во садот A , ќе се прелева во овој сад, додека не се наполни садот A , а потоа ќе продолжи да го полни садот C . Потоа со подигнување на нивото на водата, таа ќе достигне до отворот во садот B и ќе продолжи истиот да го полни. Кога ќе се наполни садот B , ќе продолжи да се полни садот C . Според тоа, полнењето на еден сад исклучиво зависи од нивото на отворот од кој садот се полни.

Нека водата е пуштена да го полни системот садови прикажан на цртежот десно. Нивото на отворот на садот 5 е пониско од нивото на отворот на садот 2. Затоа, додека не се наполни садот 5 нема да се полни садот 2. Но, садот 5 нема да се наполни додека не се наполнат садовите 4 и 7. Од нив садот 7 ќе се наполни порано. Но, за да се наполни садот 7, мора да се наполни садот 6. Конечно, во дадениот систем садови прв ќе се наполни садот 6.

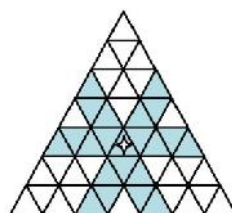
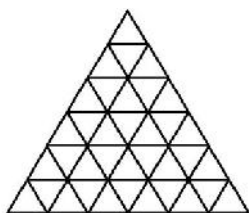
36. Музејот во волшебниот град Оз е поделен на триаголни сали. Волшебен фенер поставен во една сала ги осветлува сите сали кои се наоѓаат во три правци (цртеж лево). Ако било која сала е осветлена од три страни, таа станува невидлива. Три фенери се поставени како на цртежот десно. Кои сали се невидливи?



Решение. Само една од сите сали на музејот е осветлена од три страни. Тоа е салата до левиот фенер во вториот ред, која на планот е обоена со сива боја.

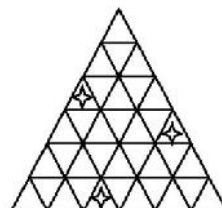


37. Градскиот парк во градот Оз е во форма на рамностран триаголник и е поделен на триаголни сектори (цртеж лево). Ако во било кој сектор ставиме фенер, тогаш тој ќе ги осветлува алеите во три насоки, како што е прикажано на цртежот десно.



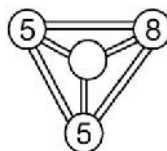
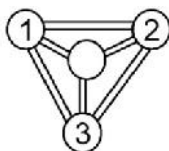
Осветли го целиот парк со само три фенери.

Решение. Бидејќи на страна од паркот имаме повеќе од три правци, за да страната биде осветлена на неа мора да е поставен фенер. Значи, трите фенери мора да се постават на трите страни од паркот. Понатаму, фенерите не смеа да се поставени така што



ќе осветлуваат ист правец. Сега, гледајќи од горе како и да ги поставиме фенерите на страните првите два реда ќе бидат осветлени, па затоа треба да го осветлиме третиот ред, т.е. еден фенер да поставиме на третиот ред. Понатаму, од причини на симетрија лесно се добива дека фенерите треба да се поставени како на горниот цртеж, со што целиот парк е осветлен.

38. За да се изигра една игра на автоматот потребно е истовремено да се стави по 1 монета во три кругови кои се темиња на триаголник кој го содржи централниот круг. Во секој круг се наоѓаат броевите на монетите кои се ставени во тој круг (екранот на средниот круг е скршен и броевите не се гледаат). Горјан почнал да игра кога во круговите биле броевите прикажани на левиот цртеж, а со играње завршил кога во круговите биле броевите прикажани на цртежот десно. Колку пати играл Горјан?



Решение. Бидејќи монетите се ставаат во круговите во темињата на триаголник кој го содржи централниот круг, за секоја игра Горјан става по една монета во центарот и две монети во било кои други два круга. Затоа вкупниот број монети ставени

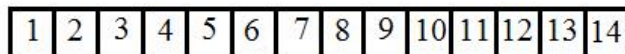
во центарот е два пати помал од бројот на монетите кои се ставени во преостанатите три круга. Во овие три круга Горјан ставил $(5-1)+(5-2)+(8-3)=12$ монети. Значи, во централниот круг ставил $12:2=6$ монети и тоа е бројот на игрите кои ги изиграл Горјан.

39. Скакулец се движи по скала со повеќе од 30 стапала, така што во еден скок прескокнува или 3 стапала нагоре или 4 стапала надолу. На пример, ако се наоѓа на 10-тото стапало тој со еден скок може да дојде на 14-тото стапало или на 5-тото стапало. Скакулецот се наоѓа на првото стапало. Кој е најмалиот можен број скокови со кои тој може да дојде на 20-тото стапало?

Решение. Најмалиот број скокови со кои скакулецот може да дојде на 20-тото стапало е 7. Притоа, тој пет пати нагоре прескокнува по 3 стапала, па надолу прескокнува 4 стапала и на крајот нагоре прескокнува 3 стапала. Скакулецот редоследно ќе се наоѓа на стапалата означени со броевите: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 16 и 20.

40. Правоаголник долг 14 cm и широк 1 cm е поделен на 14 квадратни клетки 1×1 . Во центарот на најлевата клетка се наоѓа болва B . Првиот скок на B е 1 cm и таа доаѓа во центарот на соседната клетка. Секој следен скок се зголемува за 1 cm и B скока во центарот на некоја клетка од кутијата. Кој е најмалиот број скокови кои и се потребни на B за да дојде до центарот на најдесната клетка?

Решение. Клетките да ги означиме со броевите 1, 2, 3, ..., 14 (види цртеж).



Болвата се наоѓа во полето 1, па ако таа скока само на десно, од

$$1+1+2+3+4=11 < 14 < 16=1+1+2+3+4+5,$$

заклучуваме дека болвата мора да има скокови и во лево. Јасно,

првот и вториот скок се во десно и тогаш $1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4$, па ако

третиот скок е во лево, тогаш $1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{-3} 1$, т.е. болвата се враќа на почетокот. Бидејќи се бара најмалиот број скокови, мора и третиот скок да е во десно, па имаме

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7.$$

Сега, ако четвртиот скок е во десно, ќе добиеме

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11$$

и за да B стигне во полето 14 ќе треба таа да оди во лево, па во десно, па во лево итн., што значи дека ќе бидат потребни повеќе од 6 скокови. Меѓутоа, ако во четвртиот скок B оди во лево, тогаш следната шема покажува дека се доволни 6 скокови:

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{-4} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+6} 14.$$

41. На патот од дома до училиштето Климе има три премини на улица со семафори. Од првиот до вториот семафор Климе оди за 2 минути и од вториот до третиот семафор исто така оди за 2 минути, при што улиците ги минува за 5 секунди. Климе знае дека на секој семафор жолто свети 1 минута, а зелено и црвено светат подеднакво време. На првиот семафор зелено и црвено светат по 1 минута, на вториот светат по 2 минути и на третиот светат по 3 минути. Климе знае дека во 8:00 часот на сите три семафори едновременно светнува зелено светло. Во колку часот Климе треба да дојде пред првиот премин, за да стаса на училиште без да се задржува на премините?

Решение. Треба да избереме време такво што кога Климе ќе дојде до некој премин, таму веднаш ќе се запали зелено светло или времето пред да се изгасне зеленото светло ќе биде најмалку 5 секунди. Бидејќи на Климе му требаат 2 минути да стигне до вториот премин, па потоа уште 2 до третиот премин, за да не се задржува на премините треба да најдеме време во кое на првиот премин ќе биде зелено светло, по 2 минути на вториот премин ќе биде зелено светло и по уште 2 минути на третиот премин ќе биде зелено светло.

Ја цртаме табелата прикажана на цртежот десно, во која во првиот ред се минутите по 8:00 часот, во вториот ред светлата кои се појавуваат на првиот семафор, во четвртиот ред светлата кои се појавуваат на вториот семафор и во шестиот ред светлата кои се појавуваат на третиот семафор.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
З	Ж	О	З	З	Ж	О	З	З	Ж	О	З	З	Ж
З	З	Ж	О	О	З	З	Ж	О	О	З	З	Ж	З
З	З	З	Ж	О	О	О	З	З	З	З	Ж	О	О

Во 8:00 прв пат се запалува зелено светло на првиот семафор, но на вториот семафор од 8:02 до 8:05 нема зелено светло, па затоа треба да го разгледаме следното време кога на првиот семафор е зелено светло. Тоа е 8:04. Како што можеме да видиме во 8:06 на вториот семафор се пали зелено светло, а во 8:08 на третиот семафор се пали зелено светло, што значи дека Климе нема да чека на семафорите за да ги премине улиците.

Од претходните разгледувања следува дека Климе до првиот семафор треба да дојде во било кое време од 8:04:00 до 8:04:55 и тогаш нема да чека на ниту еден семафор.

42. Од 23 на изглед еднакви монети една монета е неисправна и е потешка од преостанатите. Покажи како на вага без тегови со само три мерења може да се најде неисправната монета.

Решение. Монетите ги делиме во три групи од по 9, 9 и 5 монети.

Прв мерење. На двата таса ги ставаме групите од по 9 монети. Можни се два случаја:

- 1) Вагата е во рамнотежа и тогаш неисправната монета е во групата од 5 монети.
- 2) Вагата не е во рамнотежа и тогаш неисправната монета е во групата чиј тас е подолу.

Во случајот 1) постапуваме на следниов начин. Монетите ги делиме на групи од по 2, 2 и 1 монета.

Второ мерење. На вагата ги ставаме групите од по 2 монети.

Ако вагата е во рамнотежа, тогаш неисправна е монетата која е сама во група. Ако вагата не е во рамнотежа, неисправната монета е во групата на тасот кој натежнува и имаме трето мерење *Трето мерење*. На секој тас ставаме по една монета од групата во која е неисправната монета и истата ја определуваме.

Во случајот 2) постапуваме на следниов начин. Групата од 9 монети во која е неисправната монета ја делиме на три групи од по 3 монети.

Второ мерење. На вагата ставаме две групи од по три монети. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш неисправната монета е во третата група, а ако не е во рамнотежа, тогаш неисправната монета е во групата чиј тас натежнува.

Трето мерење. Земаме две монети од групата во која е неисправната монета и ги споредуваме. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш неисправна е третата монета, а ако не е во рамнотежа, неисправна е монетата чиј тас натежнува.

IV.3. ДОПОЛНУВАМЕ ШТО НЕДОСТАСУВА

43. Горјан пополнува 4×4 табела со броевите 1, 2, 3 и 4, при што во секое поле запишува по еден ред, но така што во секој ред и секоја колона запишаните броеви се различни. Дел од броевите Горјан веќе ги запишал. Помогни му на Горјан да ја пополни табелата.

1	2	3	4
2			1
3			
4			

Решение. Заради третата колона во второто поле на вториот ред е бројот 3, па затоа во третото поле е бројот 4. Понатау, заради четвртиот ред, во третото поле на втората колона е бројот 4, па затоа во четвртиот ред е бројот 1. Така ја добиваме табелата прикажана на цртежот десно.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4		
4	1		

Сега, заради четвртиот ред (четвртата колона) во третото поле на третата колона (третиот ред) мора да е бројот 1. Јасно, во четвртото поле на четвртиот ред и четвртото поле на третата колона е бројот 2. Конечно, во долното аголно поле е бројот 3.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

44. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно треба да се запише по една од буквите А, Б, В или Г, така што во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали се запишани различни букви. Која буква треба да се запише на местото на прашалникот?

А			
		Б	
			?
Г			

Решение. Заради првиот ред, во првото поле на дијагоналата од десно кон лево мора да е запишана буквата В. Сега, во преостанатото поле на истата дијагонала мора да е запишана буквата А. Понатаму, заради третата колона во второто поле на првиот ред мора да е буквата Б, па затоа во третото поле ќе биде буквата Г (цртеж десно).

А	Б	Г	В
		Б	
	А		
Г			

Понатаму, заради третиот ред во третото и четвртото поле на третата колона мора да се запишани буквите В и А, соодветно. Сега, заради втората и четвртата колона во второто и четвртото поле на четвртиот ред мора да се запишани буквите В и Б, соодветно (цртеж десно).

А	Б	Г	В
		Б	
Б	А	В	
Г	В	А	Б

Значи, во второто поле на втората колона е буквата Г, а заради првата и четвртата колона на вториот ред во првото и четвртото поле се запишани буквите В и А, соодветно. Конечно, во првото и четвртото поле на третиот ред се буквите Б и Г, соодветно. Значи, на местото на прешалмикот е буквата Г (цртеж десно).

А	Б	Г	В
В	Г	Б	А
Б	А	В	Г
Г	В	А	Б

45. Пабло во табела 4×4 ги запишувал броевите 1, 2, 3 и 4 така што што во секој ред, секоја колона и во секој аголен 2×2 квадрат треба да запише различни броеви. Некои броеви се веќе запишани (цртеж десно). Помогни му на Пабло да ги пополни празните полиња во табелата.

4			
	2		
			1
1		4	

Решение. Заради третата и четвртата редица бројот 1 мора да биде запишан во првото поле на втората колона. Понатаму, заради левиот горен 2×2 квадрат во првото поле на вториот ред мора да е запишан бројот 3, а заради четвртата колона во третото поле на вториот ред мора да е бројот 1, што значи дека во четвртото поле на овој ред е бројот 4 (цртеж десно).

4	1		
3	2	1	4
			1
1		4	

Понатаму, бројот 2 мора да е запишан во третото поле на првата колона, а заради третата колона во второто поле на третиот ред е бројот 4. Според тоа, во третото поле на третиот ред е бројот 3, па затоа во првото поле на третата колона е бројот 2. Сега е јасно, дека во второто поле на четвртиот ред е бројот 3 а во четвртото поле на овој ред е бројот 2. Конечно, во првото поле на четвртата колона е бројот 3.

4	1	2	3
3	2	1	4
2	4	3	1
1	3	4	2

46. Филип во табела 4×4 ги запишувал броевите 1, 2, 3 и 4 така што што во секој ред, секоја колона и во секој аголен 2×2 квадрат треба да запише различни броеви. Некои броеви се веќе запишани (цртеж десно). Помогни му на Филип да ги пополни празните полиња во табелата.

3		2	
4			
	1		3

Решение. Заради првата колона во првото поле на четвртиот ред мора да е бројот 2, па значи во третото поле на овој ред е бројот 4. Сега во првото поле на првата колона е бројот 1, а во четвртото поле на долниот лев аголен 2×2 квадрат е бројот 3 (цртеж десно).

1			
3		2	
4	3		
2	1	4	3

Понатаму, заради вториот ред во второто поле на втората колона мора да е бројот 4, па затоа во првото поле на оваа колона е бројот 2. Сега заради третата и четвртата колона во третото и четвртото поле на првиот ред мора да се редоследно броевите 3 и 4. Последните три полиња се пополнуваат едноставно, па така ја добиваме табелата прикажана на цртежот десно.

1	2	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	4	3

47. Во секое поле во фигурата на цртежот десно треба да се запише по еден од броевите 1, 2, 3 или 4, така што во секој ред, во секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии се запишани сите четири броја. Пресметај го збирот на броевите запишани на дијагоналата која ги поврзува горниот лев и долниот десен агол.

1			
		2	
	3		

Решение. Заради втората колона во долното десно поле на малиот 2×2 квадрат мора да е запишан бројот 3. Понатаму, заради третиот и четвртиот ред во второто поле на првата колона мора да е запишан бројот 3, што значи дека бројот 3 мора да е запишан и во четвртото поле на првиот ред (цртеж десно).

1			3
3		2	
		3	
	3		

Сега, заради третата колона бројот 2 мора да е запишан во второто поле на првиот ред, а во четвртото поле на истиот ред е бројот 4. Понатаму, бројот 1 мора да е во четвртото поле на третата колона (цртеж десно).

1	2	4	3
3		2	
		3	
	3	1	

Понатаму, во слободното поле на левата Г фигура мора да е бројот 4, па во четвртото поле на првата колона мора да е бројот 2. Сега, во четвртото поле на четвртиот ред мора да е бројот 4, кој мора да е во второто поле на вториот ред (Зошто?). Конечно, во празното поле на втората колона е бројот 1, кој е и во празното поле на вториот ред и во третото поле на четвр-

1	2	4	3
3	1	2	4
2	4	3	1
4	3	1	2

тата колона е бројот 2 (цртеж десно). Значи, бараниот збир е $1+4+3+4=12$.

48. Во секое поле во 5×5 табелата прикажана на цртежот десно треба да се запише по еден од броевите 1, 2, 3, 4 или 5, еден број во едно поле, така што во секој ред, секоја колона и секоја фигура ограничена со подебели линии се запишани различни броеви. Некои броеви се веќе запишани. Дополни ја табелата.

2	3			
	4	5		
				3

Решение. Јасно, во првото поле на првата колона мора да е бројот 1. Сега, заради првата колона во двете полиња во втората колона на малата фигурата во долниот лев агол мора да се броевите 1 и 2, па затоа во првото поле на втората колона мора да е бројот 5. Понатаму, заради првата колона и третиот ред во првото поле на третиот ред мора да е бројот 3. Потоа, заради петтата колона и третиот ред во најдолното поле на малата фигура во горниот десен агол мора да е бројот 3 (цртеж десно).

1	5			
2	3			
3	4	5		
			3	
				3

Понатаму, јасно е дека во третото поле на првиот ред е бројот 3, па заради вториот ред и малата фигура во четвртото поле на првиот ред мора да е бројот 2. Јасно, во петтото поле на првиот ред е бројот 4. Сега, заради вториот ред, четвртата колона и малата фигура во горниот десен агол во третото поле на петтиот ред мора да е бројот 2, па затоа во четвртото поле на третиот ред е бројот 1. Понатаму, во второто поле на петтата колона е бројот 5, а во четвртото нејзино поле е бројот 1 (цртеж десно).

1	5	3	2	4
2	3			5
3	4	5	1	2
			3	1
				3

Јасно, во третото поле на третиот ред е бројот 1, во четвртото поле е бројот 4 и во петтото поле на четвртата колона е бројот 5. Сега, заради петтиот ред во четвртото поле на првата колона мора да е бројот 5, па затоа во нејзино-

1	5	3	2	4
2	3	1	4	5
3	4	5	1	2
5	2	4	3	1
4	1	2	5	3

то петто поле е бројот 4. Јасно, во петтото поле на втората колона е бројот 1, а во четвртото поле е бројот 2. Конечно, во четвртото поле на третата колона е бројот 4, а во нејзиното петто поле е бројот 2 (цртеж десно).

IV.4. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

49. Колку минути меѓу 10:00 и 11:45 на дисплејот на дигиталниот часовник барем еднаш се наоѓа цифрата 3?

Решение. Цифрата 3 се појавува во 10:03, 10:13, 10:23, од 10:30 до 10:39, во 10:43, 10:53, 11:03, 11:13, 11:23, од 11:30 до 11:39 и во 11:43. Според тоа, во периодот од 10:00 до 11:45 цифрата 3 се појавува:

$$1+1+1+10+1+1+1+1+1+10+1=29 \text{ минути.}$$

50. Колку минути во периодот од 9:00 до 10:00 часот на дисплејот на дигиталниот часовник има барем две еднакви цифри?

Решение. Во периодот од 9:00 до 10:00 на дисплејот на дигиталниот часовник две еднакви цифри се:

09:00, 09:01, 09:02, 09:03, 09:04, 09:05, 09:06, 09:07,

09:08, 09:09, 09:10, 09:11, 09:19, 09:20, 09:22, 09:29,

09:30, 09:33, 09:39, 09:40, 09:44, 09:49, 09:50, 09:55, 09:59

и тоа се 25 минути.

51. Природните броеви од 1 до 2013 се запишани во низа еден по друг:

$$123456789101112131415\dots20122013.$$

Колку пати е запишана цифрата 2?

Решение. Во првата десетка цифрата 2 е запишана само еднаш, во втората десетка е запишана два пати, во третата десетка е запишана десет пати, па во четвртата, петтата, шестата, седмата, осмата, деветтата и десеттата (без бројот 100) е запишана по еднаш. Значи, во првата стотка (без бројот 100), т.е. во броевите од 1 до 99 цифрата 2 е запишана $1+2+10+7=20$ пати. Јасно во

броевите од 100 до 199 цифрата 2 е запишана 20 пати, во броевите од 200 до 299 таа е запишана 120 пати, и во броевите од 300 до 399, од 400 до 499 итн. од 900 до 999 таа е запишана по 20 пати. Според тоа, во броевите од 1 до 999 цифрата 2 е запишана $120 + 9 \cdot 20 = 300$ пати. Јасно, во броевите од 1000 до 1999 цифрата 2 запишана уште 300 пати, а во броевите од 2000 до 2013 таа е запишана 16 пати. Конечно, во дадената низа цифрата 2 е запишана $300 + 300 + 16 = 616$ пати.

52. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се помали од 321 и во чиј запис барем една цифра е 1.

Решение. Броевите од 100 до 199 се помали од 321 и во записот имаат барем една цифра 1 (сигурно цифрата на стотките). Тоа се 100 броја. Понатаму, во втората стотка такви броеви се броевите: 201, од 210-219, 221, 231, 241, 251, 261, 271, 281 и 291, т.е. има 19 такви броја. Во третата стотка тоа се броевите: 301, од 310-319, т.е. има 11 такви броја. Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $100 + 19 + 11 = 130$.

53. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани со една цифра 2, една цифра 9 и две цифри 0.

Решение. *Прв начин.* Со една цифра 2, една цифра 9 и две цифри нули се запишани броевите: 2009, 2090, 2900, 9002, 9020 и 9200. Значи, вкупниот број запишани броеви е 6.

Втор начин. За да бројот биде четирицифрен првата цифра мора да е различна од 0. Значи имаме две можности: 2 и 9. Ако првата цифра е 2, тогаш цифрата 9 може да биде на второ, трето и четврто место, што значи имаме три можност. Исто ако првата цифра е 9, за цифрата 2 имаме 3 можности. Значи, бараниот број четирицифрени броеви е $2 \cdot 3 = 6$.

54. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои се запишуваат само со парни цифри.

Решение. За цифрата на десетките имаме 4 можности и тоа цифрите: 2, 4, 6 или 8. За секоја од овие 4 можности за цифрата на

единиците имаме 5 можности и тоа цифрите: 0, 2, 4, 6 или 8. Конечно, бројот на двоцифрените броеви кои се запишуваат само со парни цифри е еднаков на $4 \cdot 5 = 20$.

55. На тастатурата на дигитронот на Марко работат само типките со броевите 0, 1, 2 и 8. Колку различни двоцифрени броеви може да запише Марко?

Решение. Бидејќи броевите треба да се двоцифрени на местото на десетките може да се запише било која од цифрите 1, 2 или 8, т.е. имаме три можности. За секоја запишана цифра на местото на десетките цифрата на единиците може да биде 0, 1, 3 или 8, т.е. имаме четири можности. Значи, вкупниот број двоцифрени броеви кои може да ги запише Марко е $3 \cdot 4 = 12$ и тоа се броевите: 10, 11, 12, 18, 20, 21, 22, 28, 80, 81, 82 и 88.

56. Определи го збирот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3.

Решение. Од $3 = 3 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1$ добиваме дека трицифрени броеви чиј збир на цифри е 3 се: 300, 102, 120, 201, 210 и 111. Значи, бараниот збир е

$$300 + 102 + 120 + 201 + 210 + 111 = 1044.$$

57. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

Решение. Бројот 4 како збир на три броја може да се запише на еден од следниве начини :

$$4 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 = 2 + 2 + 0 = 2 + 1 + 1.$$

Затоа броеви чиј збир на цифри е 4 се:

$$400, 310, 301, 130, 103, 220, 202, 211, 121, 112,$$

Значи, имаме 10 трицифрени броеви чиј збир на цифри е 4.

58. Определи го бројот на броевите чиј збир на цифри е 7, а производот на цифри е 9.

Решение. Имаме, $9 = 3 \cdot 3$ и како $9 > 7$, а $3 + 3 < 7$, заклучуваме дека цифрите на бараните броеви се 1, 3 и 3. Навистина

$$9 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \text{ и } 1 + 3 + 3 = 7.$$

Од овие цифри може да се состават броевите: 133, 313 и 331, што значи дека постојат три броја со саканите својства.

59. Определи го бројот на броевите кои се запишуваат со различни непарни цифри и збирот на цифрите им е 17.

Решение. Бројот 17 како збир на различни непарни едноцифрени броеви може да се запише на еден од следниве начини:

$$17 = 1 + 7 + 9 \text{ и } 17 = 3 + 5 + 9.$$

Од цифрите 1, 7 и 9 може да се состават шест броја со различни цифри и тоа:

$$179, 197, 719, 791, 971 \text{ и } 917,$$

а од цифрите 3, 5 и 9 може да се состават шест броја со различни цифри и тоа:

$$359, 395, 539, 593, 935 \text{ и } 953.$$

Според тоа, бараниот број броеви е $6 + 6 = 12$.

60. Определи го бројот на природните броеви кои се меѓу 1878 и 2010 и се запишуваат со помош на четири различни цифри?

Решение. Само бројот 1879 е меѓу 1878 и 1889 и е запишан со четири различни цифри, т.е. има само 1 број.

Броеви кои се меѓу 1889 и 1900 и се запишани со четири различни цифри се 1890, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896 и 1897, што значи дека има 7 такви броеви.

Броеви кои се меѓу 1900 и 1999 и се запишани со четири различни цифри се од видот $\overline{19ab}$, каде $a \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и за секој избор на a цифрата b може да е било која од преостанатите седум цифри. Значи, вакви броеви имаме $8 \cdot 7 = 56$.

Не постојат броеви кои се меѓу 1999 и 2010 и се запишани со четири различни.

Конечно, бројот на броеви кои се меѓу 1878 и 2010 и се запишуваат со помош на четири различни цифри е еднаков на

$$1 + 7 + 56 = 64.$$

61. Определи го бројот на непарните двоцифрени броеви кои не

завршуваат на цифрата 5.

Решение. Вкупно има $99 - 9 = 90$ двоцифрени броеви. Од нив парни се $90 : 2 = 45$ и непарни се 45. Во секоја десетка, почнувајќи од втората до десеттата има по еден непарен број кој завршува на цифрата 5 и тоа се 9 броја. Значи, бараниот број броеви е $45 - 9 = 36$.

62. Располагаме со доволно монети од 1, 2 и 5 денари. На колку различни начини во продавница може да се плати сума од 7 денари, без притоа продавачот да враќа пари?

Решение. Бројот на монетите при различните начини на точно плаќање на сума од 7 денари со монети од 1, 2 и 5 денари е даден во следнава табела:

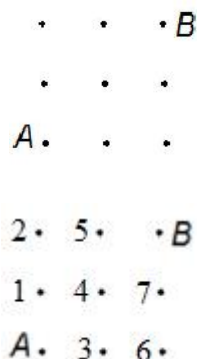
1 денар	0	2	1	3	5	7
2 денари	1	0	3	2	1	0
5 денари	1	1	0	0	0	0

Според тоа, постојат шест различни начини на плаќање.

63. Телевизорот на Ана има 72 програми. Во моментот тој е вклучен на 18-та програма. Ана сака да ја гледа десеттата програма. Колку смени се потребни, ако програмите се менуваат по ред во растечки редослед на броевите, без да се прескокнува?

Решение. За да дојде од 18-та до 72-та програма Ана треба да направи $72 - 18 = 54$ смени. Сега, за да дојде до 10-та програма нејзе и се потребни уште 10 смени. Значи, потребно е да направи вкупно $54 + 10 = 64$ смени.

64. Во шемата прикажана на цртежот десно е дозволено од една точка да се премине во точка која и е соседна по хоризонтала, вертикала или дијагонала. На колку различни начини во три чекори може да се стигне од точката A во точката B?



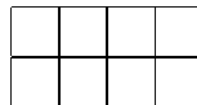
Решение. Неозначените точки да ги означиме како на цртежот десно. Тогаш патишта во три

чекори од A до B се:

$$A15B, A14B, A45B, \\ A47B, A34B, A37B.$$

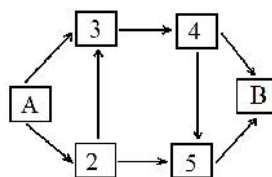
Значи, на саканиот начин од A до B може да се стигне на 6 начини.

65. Филип живее во населба во која улиците се како на цртежот десно. По колку различни најкратки патишта тој може да стигне од горниот лев до долниот десен агол, движејќи се само по улиците?



Решение. Во секоја раскрсница го запишуваме бројот на најкратките патишта од горниот лев агол до таа раскрсница. Тој број всушност е збирот на бројот над него и бројот лево од него, бидејќи до секоја раскрсница доаѓаме од горе или од лево. Така во првиот ред во секоја раскрсница го запишуваме бројот 1. Во вториот ред од лево кон десно ги запишуваме броевите 1, 2, 3, 4 и 5, а во третиот ред од лево кон десно броевите 1, 3, 6, 10 и 15. Значи, бараниот број патишта е 15.

66. На колку начини во шемата која е прикажана на цртежот десно може да се стигне од полето A до полето B , ако се движиме само во насоките кои ги покажуваат стрелките?



Решение. Од полето A во полето B движејќи се во насоките кои ги покажуваат стрелките може да се стигне на еден од следниве начини:

$$A \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow B, \\ A \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow B, \\ A \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow B, \\ A \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow B, \\ A \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow B,$$

што значи на 5 начини.

67. На цртежот десно е дадена шема со осум полиња. Во горното лево поле се наоѓа мува (М), а во долното десно поле се наоѓа торта (Т). Од дадено поле мувата може да премине во полето под него, во полето десно од него или во дијагоналното-десно долно поле од него. На колку различни начини мувата може да стигне до тортата?

М			
			Т

Решение. Полињата да ги означиме како на цртежот десно. Од полето 1 во кое се наоѓа мувата, во полето 8 во кое е тортата, на опишаниот начин мувата може да стигне по еден од следниве патишта:

1	2	3	4
5	6	7	8

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 8,$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$$

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$$

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8.$$

Значи, мувата до тортата може да стигне на 7 различни начини.

68. На цртежот десно е дадена шема со осум полиња. Во горното лево поле се наоѓа мува (М), а во долното десно поле се наоѓа торта (Т). Од дадено поле мувата може да премине во полето под него, во полето десно од него или во дијагоналното-десно горно поле од него. На колку различни начини мувата може да стигне до тортата?

М			
			Т

Решение. Полињата да ги означиме како на цртежот десно. Од полето 1 во кое се наоѓа мувата, во полето 8 во кое е тортата, на опишаниот начин мувата може да стигне по еден од следниве патишта:

1	2	3	4
5	6	7	8

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8.$
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$	$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$	
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$	
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8,$	
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8.$	

Значи, мувата до тортата може да стигне на 20 различни начини.

69. Јазикот на племето Бау-бау се состои само од зборови запишани со три различни букви, кои почнуваат со буквата „б“ и во секој збор задолжително учествува буквата „у“. Во секој збор задолжително се појавува и секоја од следниве букви: „р“, „и“, „а“, „е“, „о“. Колку зборови има јазикот на племето Бау-бау?

Решение. Бидејќи сите зборови се од три букви и почнуваат со буквата „б“, добиваме дека буквата „у“, која задолжително е во секој збор може да биде на второ или трето место. Бидејќи секој збор се запишува со различни букви, третата буква во зборот може да биде една од буквите: „р“, „и“, „а“, „е“, „о“. Така, ако буквата „у“ е на второ место, тогаш имаме 5 збора, а ако буквата „у“ е на трето место, тогаш имаме уште 5 збора. Конечно, јазикот на племето Бау-бау има $5 + 5 = 10$ збора.

70. Андреј решил да обои две полиња во табелата прикажана на цртежот десно. Тој боењето сака  да го направи така што едното го бои се зелена боја, другото со црвена боја и обоените полиња не се соседни. На колку начини Андреј може да ја обои табелата?

Решение. Ако со 3 го означиме зелениот поле, со Ц го означиме

црвеното поле и со X означиме поле кое не е обоено, тогаш можни се следниве случаи:

$3X1X, 3XX1, X3X1, X1X3, 1XX3, 1X3X.$

Според тоа, Андреј саканото боење на табелата може да го направи на 6 начини.

71. Анета простира крпа, пар бели чорапи и пар зелени чорапи. На колку различни начини таа може да ги простри алиштата, без притоа да става еден до друг чорапи од една иста боја?

Решение. Без да става еден до друг чорапи од иста боја Анета чорапите може да ги спрости на следниве начини: $3БЗБ$ и $БЗБЗ$. Сега, за секој ваков распоред крпата може да се постави на 5 начини и тоа на почетокот, меѓу првите два чорапи итн., т.е. на следниве начини:

$КЗБЗБ, ЗКБЗБ, БЗКЗБ, ЗБЗКБ$ и $ЗБЗБК;$

$КБЗБЗ, БКЗБЗ, БЗКБЗ, БЗБКЗ$ и $БЗБЗК.$

Освен овие распореди постојат уште два распореди кои го задоволуваат условот на задачата, кои се добиваат од распоредите кога два чорапи од иста боја се еден до друг, а другите две не се еден до друг, т.е. од $БЗЗБ$ и $ЗББЗ$, при што крпата се става меѓу истобојните чорапи. Значи, имаме уште две можности:

$БЗКЗБ$ и $ЗБКБЗ.$

Конечно, Анета може на $5+5+2=12$ начини да ги простри алиштата при што ќе бидат задоволени условите на задачата.

72. Од еден бел, еден црвен и два розови бисери е направен гердан. На колку различни начин може да се направи герданот? (Два гердана се сметаа за еднакви ако едниот може да се добие од другиот се вртење или превртување.)

Решение. Бисерита се бел (Б), црвен (Ц) и розов (Р). Ако прво ги ставиме розовите бисери, а потоа ги разместуваме другите два бисера ги добиваме следниве гердани:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1) РРБЦ, | 2) БРРЦ, | 3) БЦРР, |
| 4) РБРЦ, | 5) БРЦР, | 6) РБЦР, |
| 7) РРЦБ, | 8) ЦРРБ, | 9) ЦБРР, |
| 10) РЦРБ, | 11) ЦРБР, | 12) РЦБР, |

Но, првиот, третиот, шестиот и осмиот гердан се исти (првиот се добива со кружно поместување на бисери од останатите три гердани), а истото важи и за вториот, седмиот, деветтиот и дванаесеттиот гердан. Но, ако го превртиме деветтиот гердан, гледаме дека го добиваме герданот РРБЦ, а тоа е првиот гердан. Значи, досега имаме еден гердан.

Слично, исти се четвртиот, петтиот, десеттиот и единаесеттиот гердан, бидејќи секој од нив се добива од другите со кружно поместување на бисерите.

Според тоа, герданот може да се направи само на 2 различни начини.

73. Треба да направам гердан од четири бисери. Секој од нив е бел, син или лилјаков, при што од секоја боја мора да има барем по еден бисер. На колку различни начини може да се направи герданот? (Два гердана се сметаа за еднакви ако едниот може да се добие од другиот со вртење или превртување.)

Решение. Според претходната задача кога четвртиот бисер е бел имаме 2 различни гердани, а по 2 различни гердани имаме и кога четвртиот бисер е син или лилјаков. Значи, герданот може да се направи на $2 + 2 + 2 = 6$ различни начини.

74. Од бел, лилјаков, син и 2 розеви бисери е направен гердан. На колку различни начин може да се направи герданот? (Два гердана се сметаа за еднакви ако едниот може да се добие од другиот со вртење или превртување.)

Решение. Според задача 72 од бел (Б), син (С) и 2 розеви (Р) бисери може да се направат следниве два различни гердана: РРБС и РБРС. Сега, со ставање на лилјаковиот (Л) бисер на сите можни позиции кои даваат различни гердани ги добиваме сите можни решенија. Така имаме осум можности: РРБСЛ, РРЛБС, РРБЛС, РЛРБС, ЛРБРС, РЛБРС, РБЛРС и РБРЛС. Притоа со превртување на петтиот и вртење на бисерите се добива осмиот, а со превртување на шестиот и вртење на бисерите се добива седмиот гердан. Значи, герданот може да се направи на шест различни начини.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Ilić, N. V.: Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
4. Stojanović, V.: Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd, 1999
5. Андрић, В.: Математика X (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 1996
6. Аневска, К., Гоговска, В. Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје, 2015
7. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 1, Математилка искра 1, Скопје, 2020
8. Главче, М., Малчески, Р.: Движење по патеки и лавиринти, Нумерус, Скопје, 2015
9. Главче, М.: Забавни кибритчиња, Нумерус, Скопје, 2014
10. Главче, М.: Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје, 2016
11. Главче, М.: Пополнуваме тоа што недостасува, Нумерус, Скопје, 2014
12. Главче, М.: Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје, 2016
13. Главче, М.: Споредуваме и пресметуваме, Матеметичка искра 1, Скопје, 2021
14. Главче, М.: Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје, 2018
15. Златилов, В.; Тонова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000

16. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 4 клас, Модул, София, 1993
17. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
18. Лазаревић, Б.: Припремни задачи за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
19. Малчески, А.: Прошетка по лавиринти, Армаганка, Скопје
20. Малчески, Р., Главче, М.: Занимливи броења, Нумерус, Скопје, 2019
21. Малчески, Р., Главче, М.: Решаваме бројни ребуси, Нумерус, Скопје, 2017
22. Малчески, Р.: Да размислуваме со „здрав разум“, Армаганка, Скопје, 2021
23. Малчески, Р.: Дали добро забележуваш, Армаганка, Скопје, 2021
24. Малчески, Р.: Малку логика, Армаганка, Скопје, 2021
25. Малчески, Р.: Малку поинакви пресметувања, Армаганка, Скопје, 2021
26. Малчески, Р.: Нестандардни мерки за должина, Армаганка, Скопје, 2021
27. Малчески, Р.: Право, лево и десно, Армаганка, Скопје, 2021
28. Малчески, Р.: Редици од броеви, Армаганка, Скопје, 2021
29. Малчески, Р.: Редослед на настани, Математичка искра 1, Скопје, 2020
30. Малчески, Р.: Решаваме задачи со броење коцки, Нумерус, Скопје, 2016
31. Малчески, Р.: Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје, 2003
32. Малчески, Р.: Црвенкапа и загатките на волкот, Математичка искра 1, Скопје, 2020
33. Малчески, С.: Времето е важно, Армаганка, Скопје, 2021
34. Малчески, С.: Броиме коцки, Математичка искра, Скопје, 2021
35. Малчески, С., Малчески, А.: Броиме патишта, Армаганка, Скопје, 2021
36. Малчески, С.: Движење по лавиринти, Армаганка, Скопје

37. Малчески, С.: Дополнуваме што недостасува, Армаганка, Скопје, 2021
38. Малчески, С.: Математика во правоаголна мрежа, Армаганка, Скопје, 2021
39. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
40. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София, 1995
41. Тюфекчиев, И.; Лесов, Х.: Задачи за извънкласна работа по математика в VI и V клас, СМБ, София, 1985
42. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998