РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА,ОДРЖАН ВО 1957 ГОД.

Шести клас

1. Да се реши системот равенки

$$x(x+1)(3x+5y)=144,\quad x^2+4x+5y=24.$$

2. Два брода,од кои секој минува по мирна вода 20 км. на саат,поаѓаат од речните пристаништа A и B во исто време еден спрема друг.Откога првиот ќе стигне во B ,а вториот во A,останува секој од нив во тие пристаништа подеднакво долго време, а потоа тргнуваат пак еден спрема друг.

Да се одреди:местото и времето на сретнувањето на бродовите,како и времето што го поминува секој од нив во пристаништето,ако се знае дека е растојанието AB = 30 км,брзината на реката 5 км/ч и дека во текот на 24 саати секој од бродовите тргнува од исто пристаниште шест пати.

3. Дадена е една права и две точки од иста страна на правата.Да се конструира триаголник што има основа на дадената права,а за кого двете дадени точки претставуваат:

а) подножја на две негови висини;

б) подножја на симетралите на два внатрешни агли.

4. За каков агол треба да се наведне еден рамностран цилиндер,полн со вода,ако се сака да истече од него 30% од неговата содржина?

Седми клас

1. Првиот и последниот член на една трichлена аритметичка прогресија се еднакви со првиот,односно со последниот член на една геометриска трichлена прогресија.Дали сумата на сите членови на аритметичката прогресија е поголема или помала од сумата на сите членови на геометриската прогресија?

2. Да се реши системот равенки:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a,\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2$$

и да се изврши дискусија на добиените резултати.

3. Над страните од произволен триаголник ABC ,како над основи,се конструирани рамнокраки триаголници,кај кои сите агли при основите изнесуваат по 30°.

Да се покаже дека темињата на рамнокраките триаголници, кои се наоѓаат спрема основите,се истовремено темиња на еден рамностран триаголник.

4. Една топка,со радиус R ,пресечена е со рамнина и над пресекот е поставена полутопка.Кога ќе има вака добиеното тело максимална плоштина?

Осми клас

1. Да се докаже дека е:

$$\log_2 (a+b) > 1+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$$ ако е $(a>0,\ b>0)$.

2. Системот од двете равенки:

$$x^2-y^2=0,\ (x-a)^2+y^2=1$$

има во општ случај четири решенија.Да се најде алгебарски и графички за кои вредности ча параметарот a дадениот систем има три,односно само две решенија.

3. На дијаметарот AB од даден полукруг е избрана точката P . Треба да се одреди на периферијата на полукругот една точка C ,така што при вртењето на полукругот ACB околу неговиот дијаметар AB ,двата негови дела,на кои што го дели отсечката PC ,да опишат тела со еднаков волумен.

4. Правоаголен триаголник се движи во рамнината така, што темињата на неговите остри агли се лизгаат по две заемно нормални прави.Да се докаже дека темето на правиот агол опишува при тоа движење една отсечка.

РЕШЕНИЈА

Шести клас

1. Ако втората равенка од системот се трансформира во облик

$$x(x+1)+(3x+5y)=24$$

и ако ја извршиме смената

$$z_1=x(x+1),\quad z_2=3x+5y,$$

системот добива поедноставен облик:

$$z_1z_2=144,\quad z_1+z_2=24.$$

Според тоа z_1 и z_2 се корени на квадратната равенка

$$z^2-24z+144=0.$$

Со решавање на последната равенка се добива $z_{1,2}=12$.

Ако се вратиме на старите променливи, се добива системот равенки:

$$x(x+1)=12,\quad 3x+5y=12$$

чии решенија се: $x_1=3$, $y_1=\frac{3}{5}$; $x_2=-4$, $y_2=\frac{24}{5}$.

2. Бидејќи во текот на 24 саати секој од бродовите тргнува од истото пристаниште 6 пати, меѓу две последователни тргнувања на секој од нив од истото пристаниште изминуваат 4 саати. Низводната брзина на секој од нив е $V_1=20+5=25$ километри на саат, а узводната брзина на секој од нив е $V_2=25-5=15$ километри на саат. Според тоа, низводно бродовите го поминуваат патот за $\frac{30}{25}=\frac{6}{5}$ саати, а узводно за 2 саати, а оттука произлегува дека во секое пристаниште тие се задржуваат по $t=[4-(\frac{6}{5}+2)]/2=\frac{2}{5}$ саати, т.е. по 24 минути.

Ако со t_1 го обележиме времето што ќе помине од првото тргнување на бродовите од пристаништата A и B до нивното прво сретнување, тогаш од равенката

$$(25+15)t_1=30$$

произлегува дека е $t_1=3/4$ саати.

Според тоа тие ќе се сретнат прв пат на оддалеченост $x_1=25\cdot\frac{3}{4}=18,75$ километри од пристаништето (од кое, да речеме, првиот брод тргна низводно), односно на оддалеченост $x_2=15\cdot\frac{3}{4}=11,25$ километри од пристаништето B (од кое, да речеме, вториот брод тргна узводно). Потоа првиот брод ќе пристигне во пристаништето B, ќе се задржи тамо $\frac{2}{5}$ саати, и ќе тргне оттаму по $\frac{6}{5}+\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$ саати од моментот на своето прво тргнување. Слично со тоа вториот брод ќе пристигне во пристаништето A, ќе се задржи таму 2 саати, и ќе тргне оттаму по $2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$ саати од моментот на неговото прво тргнување.

Ако со t_2 го обележиме времето што ќе протекне од тргнувањето на вториот брод од пристаништето А до второто сретнување на бродовите, тогаш од равенките

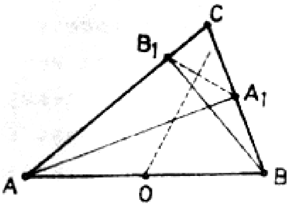
$$25.t_2+15(\frac{4}{5}+t_2)=30$$

произлегува дека е $t_2=\frac{9}{20}$.

Поради тоа ова сретнување ќе се случи на оддалеченост $x_1=25\cdot\frac{9}{20}=11,25$ километри од пристаништетоА ,а на $x_2=15.(\frac{4}{5}+\frac{9}{20})=$ $=18,75$ километри од местото В.

Потоа сите понатамошни средби ќе се случуваат во истите временски интервали и на истите места како овие две средби.

3.а) За да се реши оваа задача, треба да се има предвид дека подножните точки A_1 и B_1 на двете висини AA_1 и BB_1 во триаголникот ABC (сл.4) се наоѓаат, според Талесовата теорема, на периферијата на еден полукруг, конструиран над страната АВ на триаголникот и дека според тоа, отсечката A_1B_1 , претставува една тетива на тој круг. Нејзината симетрала ја сече, поради тоа, отсечката АВ во нејзината средина.

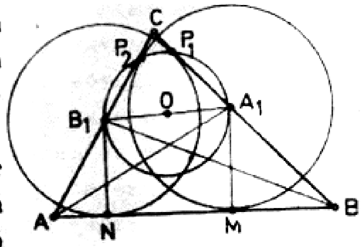


Сл.4

Нека се сега A_1 и B_1 двете дадени точки, а дадената права нека е (р). Со повлекувањето на симетралата на отсечката A_1B_1 се добива, во нејзиниот пресек со правата (р), точката О, околу која треба да се нацрта кругот кој минува низ точките A_1 и B_1 .Тој круг ја сече правата (р) во темињата А и В на бараниот триаголник ABC, а темето С се добива во пресекот на правите AB_1 и BA_1 .

Задачата може да има едно решение или да нема решение, ако отсечката A_1B_1 е нормална на правата (р).

б) Во овој случај треба да се има предвид дека кругот $(A_1, m=\overline{MA_1})$ ја тангира страната АС ,а кругот $(B_1, n=\overline{NB_1})$ ја тангира страната ВС на триаголникот ABC (сл.5). Според тоа за да се најдат страните на триаголникот ABC , треба најпрво да се конструираат круговите (A_1, m) и (B_1, n), а потоа да се конструираат тангентите, повлечени од точката A_1 до кругот (B_1, n) и

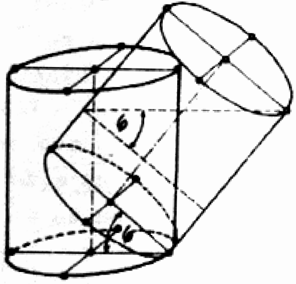


Сл.5

тангентите,повлечени од точката B_1 до кругот (A_1,m). Пресеците на овие тангенти со правата (p),односно нивните меѓусебни пресеци ги определуваат темињата на триаголникот ABC.

Лесно се утврдува дека на овој начин,освен бараниот триаголник ABC ,се добива и триаголникот A'B'C' ,кој има својство да на продолженијата на неговите страни A'C'и B'C' се наоѓаат точките A_1 и B_1 .Најпосле,задачата може и да нема решение,ако е задоволен макар еден од условите $m > A_1B_1$, $n > A_1B_1$.

4. Волуменот V_1 на истечената вода е рамен на половината од волуменот на цилиндерот чија висина е $H_1 = 2r\,tg\phi$(сл.6)а основата е еднаква со основата на дадениот цилиндер.



Сл.6

Според барањето во задачата е $V_1 = \frac{30V}{100}$,каде што V е волуменот на полниот цилиндер.

Следствено

$$\frac{3}{10}\, r^2 H = 1/2\ r^2 .2r\,tg\phi$$

Бидејќи е $H = 2r$,зашто цилиндерот е рамностран,имаме

$$tg\phi = \frac{3}{5} \text{ или } \phi = 30°57' .$$

Седми клас

1. Збирот на аритметичката прогресија може да се претстави во вид $S_1 = a_1 + \frac{a_1+a_3}{2} + a_3$,а збирот на геометриската прогресија може да се претстави во вид $S_2 = a_1 + \sqrt{a_1a_3} + a_3$.

Разликата на тие збирови е

$$S_1 - S_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} - \sqrt{a_1a_3}.$$

Бидејќи аритметичката средина на два позитивни броја, кои меѓу себе не се еднакви,е поголема од нивната геометриска средина,збирот на аритметичката прогресија е поголем од збирот на геометриската прогресија.

2. Ако tgx и tgy се изразат преку $tg\frac{x}{2}$ и $tg\frac{y}{2}$ се добива:

$$\frac{2tgx/2}{1-tg^2x/2}+\frac{2tgy/2}{1-tg^2y/2}=a.$$

Ако ставиме $tgx/2 = u$ и $tgy/2 = v$, системот добива вид:

$$\frac{2u}{1-u^2}+\frac{2v}{1-v^2}=a,\ u+v=2.$$

При претпоставка да е $(1-u^2)(1-v^2)\neq 0$,да го решиме овој систем со методата на замена.Од втората равенка следува:$v=2-u$. Ако ја извршиме таа замена во првата равенка на системот,се добива равенката

$$4(1-u)^2=a(1-u)^2(1+u)(u-3),$$

или,ако истата ја скратиме со $(1-u)^2$,се добива

$$au^2-2au-3a-4=0.$$

Оттука,под претпоставка дека е $a\neq 0$,следува

$$u_{1,2}=\frac{a\pm 2\sqrt{a(a+1)}}{a};\ v_{1,2}=\frac{a\mp 2\sqrt{a(a+1)}}{a},$$

т.е.

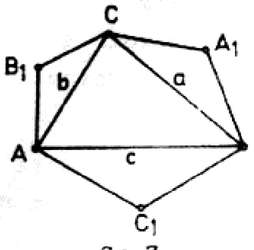
$$tgx/2=\frac{a\pm 2\sqrt{a(a+1)}}{a};\ tgy/2=\frac{a\mp 2\sqrt{a(a+1)}}{a}.$$

Како што се гледа,добиените решенија се реални за сите вредности на a,за кои се исполнети условите $a\neq o$, $a(a+1)\geqslant o$, а тоа значи за $a\leqslant -1$ и за $a>o$.Но за $a=-1$ е

$$tg\frac{x}{2}=u=1\ ,\ tg\frac{y}{2}=v=1,$$

што противречи на нашите претпостьаки.Според тоа системот има решение за $a<-1$ и за $a>0$.

3. Темињата на рамнокраките триаголници,кои се наоѓаат спрема основите,нека ги обележиме со A_1, B_1 и C_1 (сл.7). Тогаш должините на рамнокраките триаголници се:



Сл.7

$$\overline{BA_1}=\overline{CA_1}=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$\overline{AB_1}=\overline{CB_1}=\frac{b\sqrt{3}}{3},\overline{AC_1}=\overline{BC_1}=\frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

Применувајќи јв косинусната теорема на триаголникот $A_1B_1C_1$,се добива:

$$\overline{A_1C_1}^2=\frac{a^2}{3}+\frac{c^2}{3}-\frac{2ac}{3}\cos(\beta+60^\circ)=$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+c^2-ac\ \cos\beta+ac\ \sqrt{3}\sin\beta).$$

Од $b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos\beta$ следува: $ac\ \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$, поради што се добива:

$$\overline{A_1C_1}^2=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+ac\sqrt{3}\ \sin\beta\right).\qquad(1)$$

Аналогно,за останатите две страни на $\Delta A_1B_1C_1$,добиваме:

$$\overline{B_1C_1}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + bc\sqrt{3}\sin\alpha\right) \qquad (2)$$

и

$$\overline{A_1B_1}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + ab\sqrt{3}\sin\gamma\right). \qquad (3)$$

Со оглед на тоа дека е

$$ab\sin\gamma = ac\sin\beta = bc\sin\alpha = 2P,$$

каде што P е плоштината на триаголникот ABC ,овие равенки можат да се претстават во вид:

$$\overline{A_1C_1}^2 = \overline{B_1C_1}^2 = \overline{A_1B_1}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2P\sqrt{3}\right).$$

Со тоа докажавме дека $A_1B_1C_1$ е рамностран триаголник.

4. Површината на телото е збир од површините на полутопката и површината на калотата на пресечената топка.(сл.8).

$P = 2\pi r_1^2 + 2\pi R(R+x)$,каде што r_1 е радиус на пресекот, а x растојание на пресекот од центарот на пресечената топка.

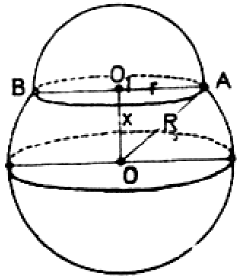
Од ΔOO_1A следува: $r_1{}^2 = R^2 - x^2$.

Поради тоа имаме:

$$P = 4\pi R^2 - 2\pi x^2 + 2\pi Rx = -2\pi(x - R/2)^2 + \frac{9\pi R^2}{2}.$$

Следува:

$$P_{max} = \frac{9\pi R^2}{2} \text{ за } x = \frac{R}{2}.$$



Сл.8

Осми клас

1. Даденото неравенство може да се напише во вид:

$$\log_2(a+b) > \log_2 2 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

Оттука следува:

$$a+b > 2\sqrt{ab}, \qquad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Последното неравенство е точно за секое $a>0$ и $b>0$. Според тоа и даденото неравенство е точно.

2. Со решавање на дадениот систем се добиваат следните решенија:

$$x = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}, \quad y = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2};$$

$$x = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}, \quad y = -\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2};$$

$$x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}, \quad y = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2};$$

$$x=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2},\quad y=-\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Ако е $2-a^2>0$, (т.е. ако е $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$) сите овие решенија се реални и различни, освен за случајот кога е $a=\pm1$,па последните две решенија меѓу себе се поклопуваат. Во тој случај системот има три решенија.

Ако е $2-a^2=0$ (т.е. ако е $a=\pm\sqrt{2}$),системот има две решенија,и тоа за $a=\sqrt{2}$ решенијата се:

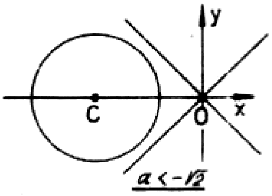
$$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2};\ x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

а за $a=-\sqrt{2}$ решенијата

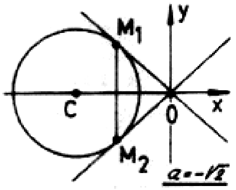
$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ако е $2-a^2<0$,системот нема реални решенија.

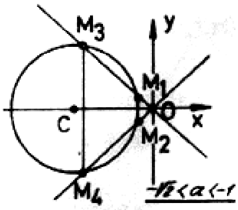
Ова може да се објасни и графички.Бидејќи равенката $x^2-y^2=0$ претставува две прави кои се сечат во координатниот почеток,а равенката $(x-a)^2+y^2=1$ претставува кружница со центар во точката $C\ (a,o)$ и радиус $r=1$,решенијата на системот,во колку тие се реални,се претставени со координатите на пресечните точки на оваа кружница и на овие прави. Но, ако е $a<\sqrt{2}$ или е $a<-\sqrt{2}$, кружницата воопшто не се сече со правите;потоа, ако е $a=\pm\sqrt{2}$, кружницата ги допира правите,секоја во по една точка; ако е пак $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$, $a\neq\pm1$ кружницата ги сече правите во по 2 точки; и, најпосле, ако е $a=\pm1$, кружницата ги сече двете прави во нивниот пресек во координатниот почеток и уште во по една друга точка.



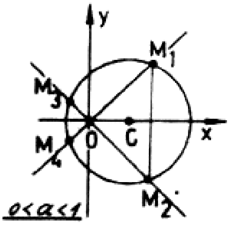
$a<-\sqrt{2}$



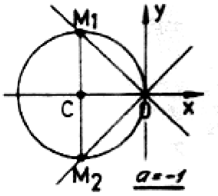
$a=-\sqrt{2}$



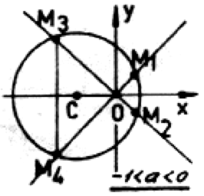
$-\sqrt{2}<a<-1$



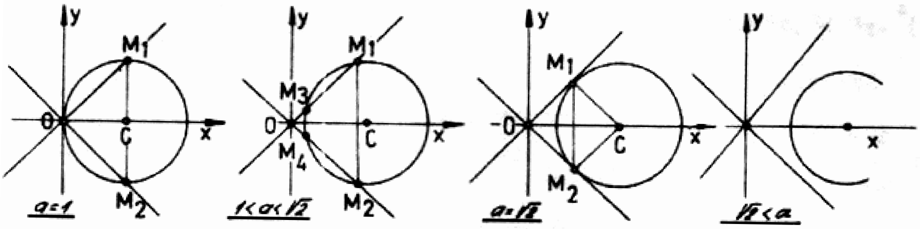
$0<a<1$



$a=-1$



$-1<a<0$



Сл.9

3. Нека V е волуменот на топката, V_1 – волуменот на телото што се добива со ротација на кружниот исечок APC (сл.10) околу дијаметарот AB, и нека е $AP = a$, каде што a е константа, според условот на задачата.

Волуменот V_1 се состои од еден топкин отсечок со висина $AD = x$ и од еден конус со висина $a-x$. Поради тоа е:

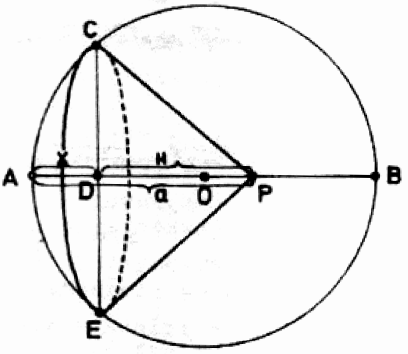
$$V_1 = \pi x^2\left(R-\frac{x}{3}\right)+\frac{\pi\varrho^2}{3}(a-x),$$

каде што е $\varrho = CD$ радиус на кругот што го опишува точката C. Но, бидејќи е $\varrho^2 = x(2r-x)$, имаме:

$$V_1 = \pi x^2\left(R-\frac{x}{3}\right)+\frac{\pi x(2R-x)\;(a-x)}{3}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[Rx^2+ax(2R-x)\right].$$

Според барањето во задачата треба да е



Сл.10

$$V_1 = V/2,$$

од каде што се добива равенката

$$(a-R)x^2-2aRx+2R^3=0.$$

Од таа равенка имаме

$$x_{1,2}=\frac{R\left[a\pm\sqrt{(a-R)^2+R^2}\right]}{a-R}.$$

4. Нека е даден триаголникот ACB.

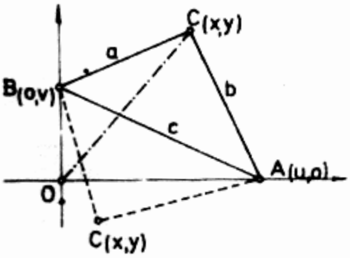
Да претпоставиме дека темето $A(u,o)$ се движи по x-оската, а темето $B(v,o)$ се движи по y-оската. Под таа претпоставка, макар во која положба да се наоѓа триаголникот ABC, се задоволени условите:

$$(x-u)^2+y^2=b^2,\ x^2+(y-v)^2=a^2,\ u^2+v^2=a^2+b^2.$$

Следува:

$$x-u=\pm\sqrt{b^2-y^2},\ y-v=\pm\sqrt{a^2-x^2};$$

$$u=x\pm\sqrt{b^2-y^2},\ v=y\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$



Сл.11

Ако секој од добиените изрази за u се доведе во врска со секој од добиените изрази за v, се добива:

$$(x+\sqrt{b^2-y^2})^2+(y-\sqrt{a^2-x^2})^2=a^2+b^2,\ (x+\sqrt{b^2-y^2})^2+(y-\sqrt{a^2-x^2})^2=a^2+b^2;$$

$$(x-\sqrt{b^2-y^2})^2+(y-\sqrt{a^2-x^2})^2=a^2+b^2,\ (x-\sqrt{b^2-y^2})^2+(y-\sqrt{a^2-x^2})^2=a^2+b^2.$$

Од овие четири равенки следува:

$$2x\sqrt{b^2-y^2}+2y\sqrt{a^2-x^2}=0,\ 2x\sqrt{b^2-y^2}-2y\sqrt{a^2-x^2}=0,$$

$$-2x\sqrt{b^2-y^2}+2y\sqrt{a^2-x^2}=0, -2x\sqrt{b^2-y^2}-2y\sqrt{a^2-x^2}=0,$$

а тоа значи

$$x\sqrt{b^2-y^2}+y\sqrt{a^2-x^2}=0,\ x\sqrt{b^2-y^2}-y\sqrt{a^2-x^2}=0,$$

односно

$$y=\pm\frac{bx}{a}.$$

Оттука се гледа дека темето C, макар каква да е почетната положба на дадениот триаголник ABC во однос на правоаголникот координатен систем, додека темето A се движи по x-оската, а темето B се движи по y-оската, може да се движи само по правите $y=\pm\frac{bx}{a}$ Притоа лесно се утврдува дека темето C ќе се движи по правата $y=\frac{bx}{a}$, ако за $u > o, v > o$ истото теме се наоѓа во првиот квадрант, а по правата $y=-\frac{bx}{a}$, ако тоа за $u<o$, $v<o$ се наоѓа во третиот квадрант.

Со оглед на тоа дека точките O и C (односно C') лежат на една кружница чиј дијаметар е AB, отсечката OC (односно OC') претставува една тетива на таа кружница и добива своја најголема вредност c кога темето на правиот агол дојде во точката C(a,b) или во точката $C_1(-a,-b)$ односно, во вториот од наведените случаи, во точката C'(a,-b), или во точката $C_1'(-a,b)$. Оттука следува дека, при движењето на триаголникот, темето C (односно темето C') ја поминува отсечката CC_1 (односно отсечката $C'C_1'$)

отсечката CC_1 (односно отсечката $C'C_1'$).

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески