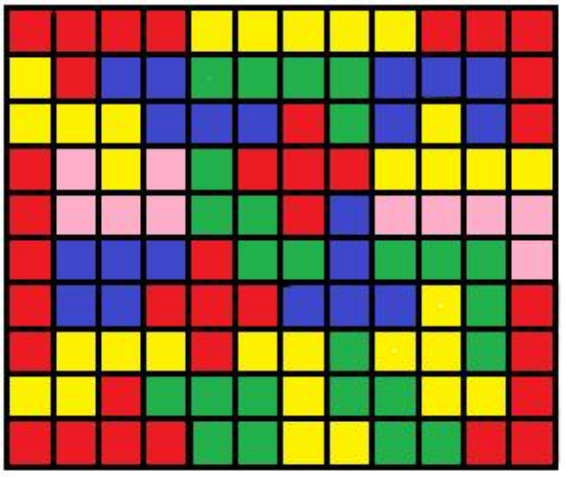
МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 44

Самоил Малчески

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ШЕСТО ОДДЕЛЕНИЕ



Скопје, 2024

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка подготвителни задачи за натпревари по математика за учениците од шесто одделение во основното образование. Збирката содржи 442 решени задачи кои се поделени во шест тематски целини и тоа:

- Множества,
- Теорија на броеви
- Аритметика и алгебра,
- Текстуални задачи,
- Геометрија и
- Логика и комбинаторика.

Во одделните целини задачите не се поделени во посебни параграфи, но сепак истите се групирани според сродноста. Така, во делот Геометрија прво се задачите со отсечки, потоа се задачите за агли, па конструктивните задчи, за да по задачите за триаголник, квадрат, круг и правоаголник следуваат задачите за коцка и квадар. Овде ќе напоменам дека само мал дел од конструктивните задачи се целосно решени следејќи го алгоритамот: анализа, конструкција, доказ и дискусија, па затоа на читателот му препорачувам самостојно да ги реализираат четирите фази од решавањето на конструктивна задача. Слично групирање е направено и во другите пет целини.

Во првиот дел од збирката се дадени формулациите на задачите, а во вториот дел за повеќето задачи се дадени целосни решенија, а само кај мал дел се дадени само одговори. На читателот му препорачувам да се обиде самостојно да ја реши секоја задача, а потоа решението кое го добил да го спореди со даденото решение, односно да го проучи даденото решение ако самостојно не успеал да ја реши задачата.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат

грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за регионалните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторот
4. јуни, 2024 г.

1. МНОЖЕСТВА

1. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$. Колку подмножества има A кај кои збирот на најмалиот и најголемиот елемент е еднаков на 5?

2. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Определи го бројот на подмножествата на множествоpo A чиј производ на најмалиот и најголемиот елемент е еднаков на 6.

3. Дадени се множествата
$$S=\{1,2,3,4,5\},\ Z=\{c \mid c=a+b, a,b\in S, a\neq b\}.$$
Определи ги множествата
а) $(Z\setminus S)\cup(S\setminus Z)$, б) $Z\cap(S\setminus Z)$, в) $(Z\setminus S)\cap(S\setminus Z)$.

4. Дадени се множествата $S=\{1,2,3,4\}$ и $Z=\{c=ab \mid a\in S, b\in S\}$. Определи ги множествата
а) $(Z\setminus S)\cup(S\setminus Z)$, б) $Z\cap(S\setminus Z)$, в) $(Z\setminus S)\cap(S\setminus Z)$.

5. Од 29 ученици во едно одделение 12 ученици дополнително одат на курс по англиски јазик, а 8 ученици дополнително одат на курс по германски јазик. Колку ученици одат на двата курса, ако 11 ученици не одат на ниту еден курс?

6. На еден летен камп имало 70 ученици. Од нив фудбал играле 27 ученици, кошарка играле 32 ученика и 22 ученика пливале. Фудбал и кошарка играле 10 ученици, со кошарка и пливање се занимавале 6 ученици, 8 ученици и пливале и играле фудбал, а 3 пливачи играле и фудбал и кошарка. Колку ученици не се занимавале со ниту еден спорт?

7. Филип на својот роденден повикал 26 другарчиња од неговото одделение. Мајката на Филип подготвила сендвичи со сирење, сендвичи со свински врат и мали пици. Пици јаделе 16 деца, сендвичи со сирење јаделе 15 деца и сендвичи со свински врат јаделе 13 деца. Пици и

сендвичи со сирење јаделе шест деца, пица и сендвичи со свински врат јаделе 5 деца, а сендвичи со сирење и сендвичи со свински врат јаделе 7 деца. Колку деца јаделе и пица и двата вида сендвичи?

8. Дадени се множествата A,B,C такви, што $A\cap B\cap C=\varnothing$. Ако множеството $A\setminus B$ има 8 елементи, множеството $C\setminus B$ има 6 елементи, $A\cap C$ има еден елемент, а $A\cup B\cup C$ има 20 елементи, колку елементи има множеството B?

9. Дадени се множествата A,B,C такви што $A\setminus B$ има 8 елементи, $B\setminus C$ има 10 елементи и $C\setminus A$ има 6 елементи. Множеството $A\cup B\cup C$ има 30 елементи. Колку елементи има множеството $A\cap B\cap C$?

10. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 1000 и кои не се деливи ниту со 2, ниту со 5.

11. Определи ги множествата A,B и C ако
$$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\quad A\cap B\cap C=\{3\},$$
$$C\setminus(A\cup B)=\{5,8\},\quad A\cap B=\{1,3\},\quad B\setminus C=\{1,2\},$$
$$A\setminus C=\{1,4\},\quad B\cap C=\{3,6\}.$$

12. Определи ги елементите на множествата A,B,C ако важи:
$A\cup B\cup C=\{n\mid n\in\mathbb{N}$ и n е едноцифрен број$\}$,
$A\cap B\cap C=\{2\}$, $C\setminus(A\cup B)=\{1,3,5|$, $(B\cap C)\setminus A=\{6,7\}$,
$(A\cap C)\setminus B=\varnothing$, $A\cap(B\cup C)=\{2,4,9\}$.

13. Со Венов дијаграм претстави ги множествата:
а) $A=\{a,m,p,x\}$, $B=\{b,c,d\}$,
б) $A=\{a,m,p,x\}$, $B=\{a,b,x,u,c,d\}$,
в) $A=\{a,m,p,x\}$, $B=\{a,b,c,m,p,x\}$,
и определи го бројот на елементите на множеството $A\cup B$. Провери дали за дадените множества важи равенството
$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$
каде со $|X|$ е означен бројот на елементите на множеството X.

14. Определи ги вредностите на променливите x,y и z ако

$A=\{1,9,2011,2012,4561\}$, $B=\{9,2011,z\}$,
$C=\{1,9,x,y\}$, $C\subset(A\cap B)$ и C има три елементи.

15. Во шесто одделение на едно училиште има 50 ученици, од кои 39 тренираат кошарка, а 21 тренираат фудбал. Секој ученик тренира барем еден спорт. Колку ученици тренираат и кошарка и фудбал?

16. Близнаците Златко и Златка го славеле својот 11. роденден. За прославата нивната мајка Веселинка направила 100 колачи. Златко и Златка колачите ги украсувале со ореви, суво грозје и мелено чоколадо. Колачите ги ставиле во ред, а потоа на секој втор колач ставиле чоколадо, на секој трет суво грозје и на секој петти ореви. Колку колачи биле украсени само со чоколадо и со суво грозје? Колку колачи воопшто не биле украсени?

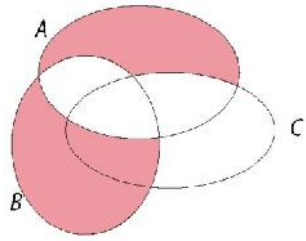
17. На роденденската прослава близнаците Златко и Златка ги повикале своите пријатели, па на прославата имало вкупно 30 деца. На крајот од прославата се покажало дека пет деца јаделе колачи кои воопшто не биле украсени. Од преостанатите деца, десет не јаделе колачи кои биле украсени со ореви, а две деца не јаделе колачи кои биле украсени со чоколадо и ореви. Четири деца не јаделе колачи кои биле украсени со орев и суво грозје. Пет деца јаделе колачи кои биле украсени само со ореви, дванаесет деца не јаделе колачи украсени со суво грозје, а две деца јаделе колачи украсени и со ореви и со чоколадо и со суво грозје. Колку деца јаделе колачи украсени и со ореви и со суво грозје, ако секое дете изело барем еден колач?

18. Во едно одделение со пливање се занимава 5 ученици, со велосипедизам 12 ученици и со трчање 9 ученици, при што некои ученици се занимаваат и со неколку активности, а некои ниту со една. Шест ученици се занимаваат со трчање и со велосипедизам, а четири ученици се занимаваат со пливање и со велосипедизам. Два ученика се занимаваат со сите три активности, а нема ученик кој се занимава само со пливање и трчање. Два ученика не се занимава со ниту една активност.
    а) Колку ученици се занимаваат само се една активност?
    б) Колку ученици се занимаваат само со трчање?
    в) Колку ученици се занимаваат со пливање и велосипедизам, а не

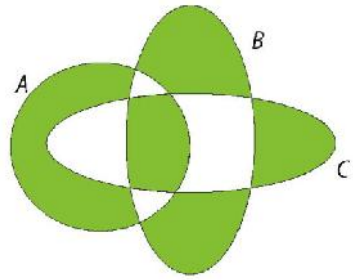
трчаат?
г) Колку ученици има во ова одделение?
д) Колку ученици се занимаваат барем со една активност?

19. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,100,101\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A\cup B=S$, $A\cap B=\varnothing$ и збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B?

20. Дадени се множествата A,B и C. Со помош на оперциите за множества запиши го множеството кое е составено од обоените делови (подмножества).



21. Дадени се множествата A,B и C. Користејќи ги основните операции за множествата запиши го множеството кое е составено од обоените делови на цртежот десно.



22. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,8,9\}$. Определи ги сите множества A,B и C кои ги задоволуваат условите $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\varnothing$, $A\cup B\cup C=S$, множеството A има помалку елементи од множеството B, множеството B има помалку елементи од множеството C и збирот на елементите во секое од множествата A,B и C е еднаков.

23. Определи го бројот на тричлените подмножества на множеството $A=\{\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}\}$ кај кои збирот на најмалиот и најголемиот член е еднаков на 1?

24. Определи го бројот на четиричлените подмножества на множеството $A=\{\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}\}$ кај кои збирот на најмалиот и најголемиот член е

еднаков на 1?

25. Дадено е множеството $S = \{1, 2, 3, ..., 2008, 2009\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A \cup B = S$, $A \cap B = \varnothing$ и збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B?

26. Дадени се множествата

$$S_1 = \{1\}, S_2 = \{2, 3\}, S_3 = \{4, 5, 6\}, S_4 = \{7, 8, 9, 10\}, ...$$

Определи го збирот на елементите на множеството S_{10}.

27. Ана, Бранка и Вера играат игра со карти кои се нумерирани со броевите од 1 до 100. Прво Ана ги зема картите на кои се броевите деливи со 5. Потоа Бранка од преостанатите карти ги зема картите кои се деливи со 3 и на крајот Вера од преостанатите карти ги зема картите на кои се запишани парни броеви. Кое девојќе ќе има најмногу карти?

28. Определи ги множествата A и B за кои важи

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \ A \cap B = \{8, 9, 10, 11, 12\}$$

и збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B.

2. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Користејќи ги цифрите 0, 1, 2 и 7 запиши три различни четирицифрени броја чиј збир е делив со 100. Притоа, во секој од броевите употреби ги сите цифри.

2. Стојан и Зоран бираат по четири броја, т.е.вкупно осум, од дадените девет броеви: 4, 12, 8, 13, 24, 14, 7, 5 и 23. Констатирале дека збирот на броевите кој ги избрал Стојан е три пати поголем од збирот на броевите кои ги избрал Зоран? Кој број не е избран?

3. Дали е збирот на простите делители на бројот 2010 прост број?

4. Дадени се неколку последователни прости броеви. Определи го нивниот збир ако производот на најмалиот и најголемиот од овие броеви е 589.

5. Вистински делители на даден природен број се сите делители различни од самиот тој број, вклучувајќи го и бројот 1. За еден природен број велиме дека е совршен ако е еднаков на збирот на сите свои вистински делители. Определи ги совршените броеви во првата десетка природни броеви.

6. а) Дали во втората десетка има совршени природни броеви?
   б) Определи ги совршените броеви во третата десетка природни броеви.

7. Дали може број запишан само со четворки да е делив со број запишан само со тројки (најмалку две тројки)? Дали број запишан само со тројки може да е делив со број запишан само со четворки (најмалку две четворки)?

8. Стојмен ги запишал сите броеви од 2012 до 1. Прво го пречкртал бројот 2012 и сите негови делители, потоа секој следен пат во низата го пречкртувал првиот непречкртан број и сите негови делители. Кој е бројот што Стојмен последен го пречкртал?

9. Трицифрениот број $\overline{abc}$ е делив со 5 и притоа $a+b=12$. Колку такви броеви има ако цифрите
   а) не се задолжително различни,
   б) се различни?

10. Четирицифрен број $\overline{abcd}$ е делив со 25 и притоа $a+b=10$. Колку има такви броеви ако:
    а) цифрите не се задолжително различни,
    б) ако цифрите се различни?

11. Производот на два природни броја е запишан во вид на производ на прости множители: $2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^3$. Дали збирот на овие броеви може да е делив со:
    а) 28, б) 8?

12. Со кој најмал природен број треба да се помножи бројот 63000 така што добиениот производ ќе биде точен квадрат?

13. Дали постојат десет различни природни броеви такви што меѓу нив не постојат шест броеви чиј збир е делив со 6?

14. Дали е можно да се најдат 14 различни природни броеви такви што меѓу нив не постојат осум броеви чиј збир е делив со 8?

15. Бројот x има повеќе од 20, а помалку од 30 цифри и сите негови цифри се 2. Определи го овој број ако е познато дека тој е делив со 7.

16. Дали 7 е делител на бројот $\underbrace{888...88}_{72}$?

17. Докажи дека бројот $2007^{2007}-3$ е делив со 10.

18. Кој е
    а) најголемиот б) најмалиот
    природен број делив со 18 во чиј запис се употребени сите цифри точно по еднаш?

19. Кој е
    а) најголем, б) најмал
    природен број делив со 45 во чиј запис секоја цифра е употребена точно еднаш?

20. На бројот 2009 од левата и од десната страна допиши му една иста цифра така што добиениот број ќе биде делив со 12.

21. На бројот 2013 допиши му од левата и од десната страна:
    а) по една иста цифра,
    б) по една цифра,
    така што добиениот шестцифрен број ќе биде делив со 12. Колку решенија има задачата?

22. Кои цифри треба да се стават на местата на буквите a и b така што бројот $\overline{2a0a1b2b}$ ќе биде делив со 12?

23. Определи ги цифрите a и b така да бројот $\overline{2a0b1a1b}$ е делив со 36.

24. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{78a9b}$ ќе биде делив со 18.

25. На бројот 2014 допиши му од левата и десната страна по една иста цифра така што добиениот шестцифрен број е делив со 36.

26. На бројот 2014 допиши му од левата и десната страна по една цифра така што добиениот шестцифрен број е делив со 36.

27. Замени ги * со соодветни цнфри така што вредноста на дропката $\frac{\overline{3*6*}}{36}$ е двоцифрен природен број. Колку решенија има задачата.

28. Замени ги * со соодветни цифри така што количникот на дропката $\frac{\overline{4*5*}}{45}$ и бројот 2 ќе биде двоцифрен број.

29. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 15 и се запишува само со цифрите 0 и 4.

30. Број запишан со три или повеќе цифри е делив со 8 ако и само ако неговиот трицифрен завршеток е делив со 8. Докажи!

31. Определи го најмалиот природен број делив со 72 чиј збир на цифри е 72.

32. Определи ја цифрата x така што бројот $\overline{94x60}$ е делив со 56.

33. Определи ги цифрите x и y ако производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 15. Колку решенија има задачата?

34. Определи ги цифрите x и y така што производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 12.

35. Определи ви сите шестцифрени броеви $\overline{abcdef}$ кои се деливи со 9 и кај кои трицифрениот број $\overline{abc}$ е за 860 поголем од трицифрениот број $\overline{def}$.

36. Горјан ги разместил (испермутирал) цифрите на природниот број n и така добил три пати помал број m . Докажи дека бројот n е делив со 27.

37. Ако природниот број n се подели на 12 се добива остаток 11, а ако n се подели на 18 се добива остаток 5. Кој остаток се добива при делењето на n со 36?

38. Збирот на два броја е 2013. Ако овие два броја ги поделиме со 23 се добиваат остатоци 5 и 7, а разликата на добиените количници е 1. Кои се тие броеви?

39. Определи ги најмалиот трицифрен и најголемиот четирицифрен број такви што при делење со 3 даваат остаток 1,при делење со 4 даваат остаток 2, при делење со 5 даваат остаток 3, при делење со 6 даваат остаток 4 и при делење со 7 даваат остаток 5.

40. Трипун замислил три броја. Најголемиотзаеднички делител на првиот и вториот број е 12, на првиот и третиот е 8, а на вториот и третиот е 4. Кои се најмалите природни броеви кои Трипун можел да ги замисли?

41. Весна замислила три броја. Најголемиот заеднички делител на првиот и вториот број е 8, на првиот и третиот е 4, и на вториот и третиот е 4. Кои се најголемите двоцифрен броеви кои Весна можела да ги замисли?

42. Дедо и внук имаат роденден во ист ден. При прославата на еден роденден дедото констатирал дека бројот на неговите години е делив со бројот на годините на внукот и дека тоа ќе важи и за следните 5 родендени. Колку најмалку години можел да има дедото кога тоа го забележал?

43. На екранот на компјутерот е запишана реченицата

    ТОМЕ СО СИНОТ И ЌЕРКАТА ОДИ ВО КИНО.

    Секогаш кога на тастатурата ќе притиснеме „+“, компјутерот од секој збор првата буква ја преместува на последно место на тој збор. На пример, кога прв пат ќе притиснеме „+“, на екранот се појавува

    ОМЕТ ОС ИНОТС И ЕРКАТАЌ ДИО ОВ ИНОК.

    Кога втор пат ќе притиснеме „+“, на екранот се појавува

    МЕТО СО НОТСИ И РКАТАЌА ИОД ВО НОКИ

    итн. Колку пати треба да се притисне „+“, за да на екранот за прв пат повторно се добие почетната реченица?

44. Две жаби во исто време го напуштаат брегот. Се движат по патека од 18 лилјани (барско растение). Првата скока на секој трет лилјан, а втората на секој втор лилјан. На колку исти лилјани ќе скокнат двете жаби и кои се тие?

45. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9 и ако бројот 1200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Определи ги соодветните количници?

46. Определи ги сите парови природни броеви n и $2n+1$ такви што двата броја се прости и се помали од 100. Колку парови доби?

47. Кој од броевите 2013, 3102 и 1032 има најмалку делители?

48. Со скратување на допката $\frac{n}{2010}$ се добива дропка чиј именител е прост број. Определи ги сите такви природни броеви n.

49. Определи ги сите природни броеви a и b такви што
$$\frac{2}{31}-\frac{1}{a}=\frac{2+b}{2015}.$$

50. Определи ги природните броеви a и b такви што $\frac{2}{a}+\frac{1}{13}=\frac{200-b}{2015}$.

51. Определи ги природниот број x и простиот број p за кои важи $\frac{2017-x}{2016}=\frac{1}{p}$.

52. Определи ги природниот број x и простиот број y за кои важи $\frac{x+y}{2015}=\frac{1}{y}$.

53. Определи ги сите прости броеви p за кои важи $2<\frac{p}{16}<3$.

54. Определи ги сите прости природни броеви p за кои важи
$$\frac{33}{2013}<\frac{2}{p}<\frac{38}{2014}.$$

55. Определи го најмалиот прост број p и најголемиот прост број q такви што се исполнети неравенствата $\frac{1}{p}<\frac{31}{2010}<\frac{1}{q}$.

56. Броителот и именителот на дропката $\frac{p}{q}$ се прости броеви. Определи ги простите броеви p и q ако збирот на дропката и нејзината реципрочна дропка е $\frac{130}{33}$.

57. Дали постојат прости броеви p и q такви што $p+4q=2006$.

58. Определи и сите прости броеви p и q такви што $2p+3q=100$.

59. Определи ги сите прости броеви p,q,r такви што $2p+3q+4r=2006$.

60. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $p+pq=2010$.

61. Определи ги сите прости броеви p,q,r такви што $p+pq+pqr=2010$.

62. Определи ги сите можни прости броеви a,b,c,d,e за кои важи
$$a+b=\frac{2563}{c\cdot d\cdot e}.$$

63. За нечиј роденден велиме дека е прост ако славеникот тој ден полни прост број години. Учителот Симон и неговиот син Рампо се родени во ист ден. Се покажало дека седум последователни прости родендени на учителот Симон истовремено биле прости родендени и на неговиот син Рампо. На следниот прост роденден на учителот Симон му се родил првиот внук. Колку најмалку години имал Симон кога станал дедо?

64. Збирот на сите четирицифрени природни броеви деливи со 45 кај кои цифрата на десетките е три пати поголема од цифрата на стотките намали го за збирот на сите трицифрени природни броеви деливи со 18 кај кои цифрата на стотките е најголемиот прост едноцифрен број.

65. Пресметај ја аритметичката средина на првите 1000 природни броеви кои при делење со 14 даваат остаток 6.

66. Определи го природниот број n таков што аритметичката средина на првите n природни броеви кои при делење со 23 даваат остаток 19 е еднаква на 2020.

3. АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

1. Едноцифрен број поголем од 1, помножен е со 27, а потоа добиениот производ е помножен со 37. Цифрата на единиците на добиениот број е 1. Кој е тој едноцифрен број?

2. На која цифра завршува бројот 9^9?

3. Премести две цифри така што од
$$25 \cdot 92 = 2592$$
ќе добиеш точно равенство.

4. а) Определи го најмалиот природен број чиј збир на цифри е 2009.
б) Дали постои природен број чиј збир и производ на цифри е 2009?

5. Во низата
$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$
збирот на паровите соседни броеви последователно е
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$$
и секој член на оваа низа е за 2 поголем од претходниот. Распореди ги броевите од 0 до 9, така што во низата која ќе ја добиеш на ист начин секој нејзин член е за 1 поголем од претходнио.

6. Во изразот на левата страна стави загради
$$1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 = 7$$
така што ќе добиеш точно равенство.

7. Меѓу цифрите во низата
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$
запиши знаци на основните аритметички операции така што вредноста на добиениот израз е 2008.

8. Меѓу секои две цифри во низата
$$3\ 2\ 5\ 4\ 1$$
постави по еден знак од четирите основни операции така да вредноста

на добиениот израз биде 25. Секоја операција треба да се употреби еднаш. Дозволено е да се користат загради.

9. Меѓу некои цифри во низата

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0$$

стави знаци на основните операции за пресметување така што вредноста на добиениот израз ќе биде 2008. Дозволено е користење на загради.

10. Меѓу секои две цифри во низата

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

стави знаци на некои од четирите основни аритметички операции и по потреба користи загради така што вредноста на добиениот израз ќе биде 2020.

11. Меѓу некои цифри во низата

$$9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9$$

стави знаци на основните операции за пресметување така што вредноста на добиениот израз ќе биде 2008.

12. Дадени се природни броеви a,b и c такви што $a+b+c=2006$ и $a>b>c$. Определи за кои вредности на a,b и c изразот $a-b+c$ е:
    а) најмал,
    б) најголем.

13. Буквите замени ги со цифри така што ќе биде исполенто

$$A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E\cdot F=2016,$$
$$A<B<C<D<E<F.$$

14. Замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри, а истите букви со исти цифри) така што ќе важи

$$A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E+F=2017$$

и

$$A<B<C<D<E.$$

15. Во бројниот ребус $\frac{R\cdot E\cdot B\cdot R\cdot A\cdot S\cdot T\cdot I}{B\cdot E\cdot L\cdot O}$ замени ги еднаквите букви со еднакви цифри, а различните букви со разли цифри, така што вредноста на

дропката ќе биде најголемиот природен број кој може да се добие на овој начин.

16. Во бројниот ребус $\frac{M\cdot A\cdot T\cdot E\cdot M\cdot A\cdot T\cdot I\cdot Č\cdot K\cdot I}{K\cdot V\cdot I\cdot Z}$ замени ги буквите со цифри (исти букви со исти цифри и различни букви со различни цифри) така што ќе се добие најголемиот можен природен број.

17. Дали постојат различни цифри A и B такви што $\overline{AAA}\cdot\overline{AB}=\overline{ABA}\cdot\overline{AA}$.

18. Сите цифри на седумцифрреniот број $\overline{abcdefg}$ се различни, при што $g\neq 0$. Збирот на цифрите на овој број е 21. Кога овој број ќе се собере со бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед се добива број кај кој сите цифри се еднакви. Кој е најголемиот можен таков седумцифрен број?

19. Секоја ѕвездичка замени ја со знак на некоја од основните перации и по потреба користи загради така што равенството
$$9*8*7*6*5*4*3*2*1=2018$$
ќе биде точно.

20. Во записот
$$M*A*T*E*M*A*T*I*K*A=2018$$
замени ги буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри), а секоја ѕвездичка замени ја со знак на некоја од основните аритметички операции, така што добиеното равенство ќе биде точно.

21. Дешифрирај го множењето:
$$*7\cdot 30=*0**.$$

22. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abba}$ такви што важи равенството $\overline{abba}\cdot 2=\overline{ccdd}$, каде a,b,c,d се различни цифри.

23. Здравко решавајќи задача направил две грешки така што при множење на три броја еден знак за множење изоставил, а другиот го запишал на погрешно место. Така наместо $\overline{AB}\cdot\overline{C}\cdot\overline{DE}$ запишал $A\cdot\overline{BCDE}$.

Дали е множно да важи

$$\overline{AB}\cdot\overline{C}\cdot\overline{DE}=A\cdot\overline{BCDE}\,,$$

ако на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

24. Замени ги буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што двете равенства ќе бидат истовремено точни:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MA}=\overline{MIR}\ \text{ и }\ \overline{AM}\cdot\overline{AM}=\overline{RIM}$$

25. Секоја буква замени ја со некоја цифра (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето

$$\overline{DVA}+\overline{TRI}=\overline{PET}$$

ќе биде точно и $\overline{PET}$ ќе биде најголемит можен број.

26. Секоја буква замени ја со некоја цифра (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно:

$$\overline{ТРИ}+\overline{ТРИ}=\overline{ШЕСТ}$$

27. Секоја буква замени ја со цифра (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно:

$$\overline{UDAR}+\overline{UDAR}=\overline{DRAMA}\,.$$

28. Определи го најголемиот број можни собирци на десната страна во равенството

$$\underbrace{\overline{PI}+\overline{PI}+\ldots+\overline{PI}}_{x}=\overline{PILE}$$

во кое на различни букви соодветствуваат различни цифри,а на исти букви исти цифри.

29. Реши го бројниот ребус

$$\overline{DVA}+\overline{DVA}+\overline{DVA}+\overline{DVA}=\overline{BRAN}\,,$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

30. Реши го бројниот ребус

$$\overline{LETO} + \overline{LETO} = \overline{POLET}$$

во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри и на исти букви соодветствуваат исти цифри.

31. Дали е можно во записот

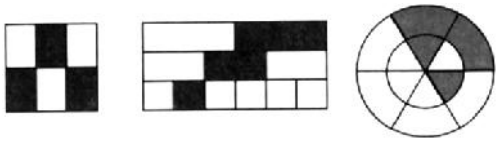
$$\overline{LETO} + \overline{LETO} + \overline{LETO} = \overline{ODMOR}$$

да се заменат буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што добиеното равенство ќе биде точно.

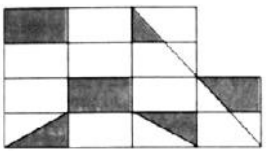
32. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви различни цифри:

$$\overline{TAMTAM} + \overline{MRAK} = \overline{KOШMAP}\,.$$

33. На долните цртежи квадратот е поделен на еднакви квадратчиња, трите ленти на правоаголникот се со еднаква ширина и секој е поделена на еднакви делови, а круговите се поделени на еднакви делови. На која фигура е обоена точно една третина од фигурата.



34. На фигурата прикажана цртежот десно сите мали правоаголници се еднакви. Колкав дел од оваа фигура е осенчен?

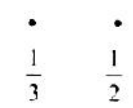


35. Определи која цифра се наоѓа на 2016-тото место по децималната запирка, во децималниот запис на дропката:

а) $\frac{3}{7}$, б) $\frac{1711}{495}$.

36. Пабло претставил некои дропки на бројната полуправа. По грешка избришал сè освен точките кои соодветствуваат на броевите $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$ (цртеж десно). Како Пабло ќе го определи почетокот на бројната полуправа?

37. Андреј претставил некои дропки на бројната полуправа. По грешка избришал сè освен точките кои соодветствуваат на броевите $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Како Андреј ќе го определи почетокот на бројната полуправа?



38. Милка нацртала бројна права и означила некои дропки на неа. Нејзиниот помал брат Богдан го избришал почетокот на полуправата, па така останал делот од $\frac{2}{3}$ до $\frac{7}{8}$. Како Милка ќе го определи почеткот на полуправата, односно бројот 0, ако уште знае дека растојанието меѓу дропките $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{8}$ е еднакво на $5\,cm$?

39. На бројната права определи го местото на бројот $\frac{5}{7}$, ако знаеш каде се наоѓаат броевите $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{5}$, растојанието меѓу кои е еднакво на $1\,cm$.

40. Пресметај ја разликата $\frac{232323}{242424}-\frac{23}{24}$.

41. Пресметај:
    а) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{3}{2017\cdot 2020}$,
    б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot 2020}$.

42. Дропката $\frac{277}{2007}$ запиши ја како збир како збир на две нескратливи дропки чии именители се заемно прости броеви.

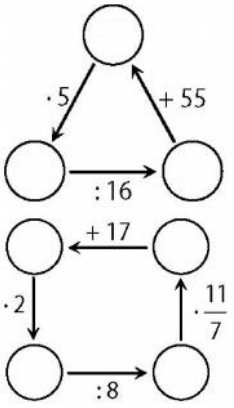
43. Користејќи некои прости броеви од првата стотка кои во својот запис ја содржат цифрата 7 и операциите собирање, одземање, множење и делење, запиши израз чија вредност е $\frac{1}{2}$.

44. Дропката $\frac{11}{15}$ запиши ја како збир на две нескратливи дропки чии именители се различни. Колку решенија има задачата?

45. Ако $((x+23):7-17)\cdot 13=429$, пресметај ја вредноста на изразот

$6x+62$.

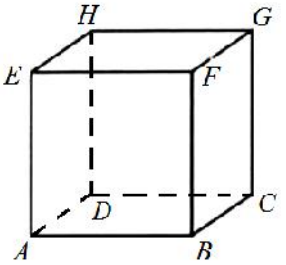
46. Во кругчињата на шемата прикажана на цртежот десно запиши броеви така што пресметувањата ќе бидат точни.



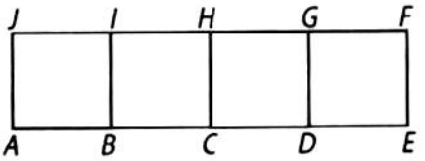
47. Во кругчињата на шемата прикажана на цртежот десно запиши ги потребните броеви така што пресметувањата ќе бидат точни.

48. Определи ги броевите a,b,c ако важи
$$a+b=\frac{23}{21},\ b+c=\frac{76}{63}\ \text{и}\ c+a=\frac{13}{9}.$$

49. Маја ги означила темињата на коцката со букци, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа на буквите им дала вредности така што збировите на секои четири броја кои се темиња на било кој ѕид се еднакви. Нејзината сестра Матеа избришала некои броеви, па така знаеме дека $A=1,\ C=\frac{1}{3},$ $F=\frac{1}{2}, G=1, H=\frac{1}{4}$. Определи ги вредностите на B,D и E.



50. Темињата на квадратите на цртежот десно се означени со буквите A,B,C,D,E,F,G,H,I,J и е познато дека
$$A=\frac{3}{4}, C=\frac{5}{6}, D=\frac{1}{4}, F=\frac{2}{3},$$
$$G=1, I=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{3}.$$



Определи ги вредностите на буквите B,E и H ако збировите на четирите броја запишани во темињата на секој квадрат се еднакви.

51. Најди ги сите решенија на следниот систем равенки:
$$a+b+c=0,$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

52. Три различни дропки имаат својство нивниот збир да е природен број, но и збирот на нивните реципрочни вредности исто така да е природен број. Најди барем три такви дропки.

53. Аритметичката средина на осум различни природни броеви е 15. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.

54. Аритметичката средна на десет различни природни броеви е 12. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.

55. Аритметичката средина на десет различни природни броеви е 18. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.

56. Аритметичката средина на дванаесет различни парни природни броеви е еднаква на 20. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.

57. Што е поголемо $\frac{8}{119}$ или $\frac{133}{2010}$?

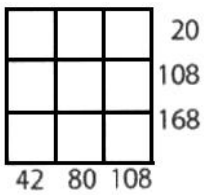
58. Спореди ги дропките $\frac{5}{67}$ и $\frac{149}{2010}$.

59. Спореди ги дропките $\frac{12}{67}$ и $\frac{390}{2009}$.

60. Определи ги сите природни броеви x за кои е точна неравенката
$$\frac{701}{1011} < \frac{13x}{2022} < \frac{601}{674}.$$

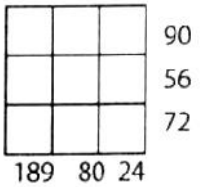
61. Определи ги сите дропки $\frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ за кои важи $\frac{53}{2014} < \frac{1}{n} < \frac{61}{2013}$.

62. Пополни ја табелата со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што производот на броевите во секој ред ќе биде еднаков на бројот запишан на десната страна од тој ред, а производот на броевите во секоја колона ќе биде еднаков на бројот

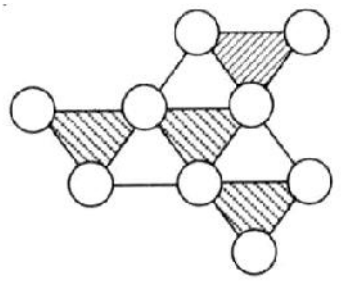


запишан под таа колона.

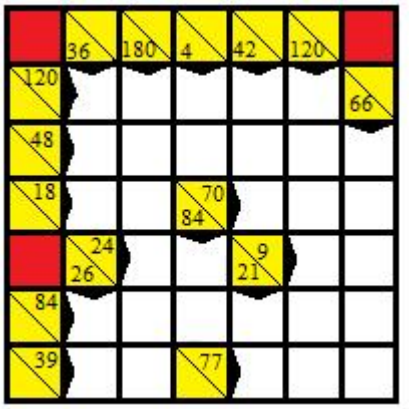
63. Табелата прикажана на цртежот десно пополни ја со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така, што производот на броевите во секој ред е еднаков на бројот запишан на десната страна од тој ред, а производот на броевите во секоја колона е еднаков на бројот запишан под таа колона.



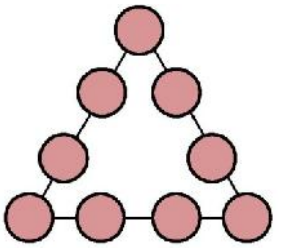
64. Броевите од 1 до 9 распореди ги во кругчињата на цртежот десно така што ќе бидат задоволени следниве услови:
    1) Збирот на трите броја запишани во темињата на секој бел триаголник е еднаков,
    2) Збирот на трите броја запишани во темињата на секој шрафиран триаголник е еднаков и е за 3 поголем од збирот на броевите запишани во темињата на секој бел триаголник.



65. Пополни ја табелата прикажана на цртежот десно, ако броевте во жолтите полиња се еднакви на производите на броевите од соодвет-ните бели полиња во насока на стрелките.



66. Дропките $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ подреди ги по големина, а потоа запиши ги во кругчињата на страните на триаголникот, така што збировите на дропките на сите страни ќе бидат еднакви.



67. Дропките $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12}$ распореди ги во табела 3×3 така што збировите на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала се еднакви меѓусебно.

4. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Марко трицифрен природен број заокружил на најблиската десетка и го добил бројот 950. Петар трицифрен природен број заокружил на најблиската стотка и го добил бројот 800. Колкава е најголемата, а колкава е најмалата можна разлика меѓу двата почетни броја?

2. Определи го бројот на паровите природни броеви $n, 2n+1$ такви што двата броја се двоцифрени и n е непарен број.

3. Колку цифри се потребни за да се нумерираат 425 страници од една книга? Првата страница е нумерирана со бројот 1.

4. Природните броеви од 1 до 2024 се запишани во низа еден по друг: 123456789101112...20232024. Која цифра се наоѓа точно во средина на оваа низа?

5. Природните броеви од 1 до 2015 се запишани еден по друг и така е добиен бројот 12345678910...20142015.
   а) Колку цифри има овој број?
   б) Која цифра е средна во овој број?

6. Марко запишал на лист еден трицифрен број. Ако пред цифрата на стотките се допише цифрата 9 се добива четирицифрен број кој што е 21 пат поголем од бројот кој го запишал Марко. Кој број го запишал Марко.

7. Трицифрен број има цифра на единиците 2. Ако таа цифра се премести на местото на стотките, а другите две цифри го задржат редоследот се добива број кој е за 36 помал од почетниот број. Определи го збирот на цифрите на дадениот трицифрен број

8. Цифрата на стотките во даден трицифрен број е 7. Ако таа цифра ја преместиме на местото на единиците, цифрата на десетките ја преместиме на местото на стотките и цифрата на единиците ја пре-

местиме на местото на десетките, ќе се добие нов трицифрен број кој е за 567 помал од дадениот број. Најди го дадениот број.

9. Производот на еден едноцифрен и еден двоцифрен број се запишува само со помош на неколку цифри 2. Кои се тие броеви?

10. Бројот 100 е помножен или со 3 или со 4, потоа добиениот резултат е зголемен или за 1 или за 2. На крајот добиениот број е поделен или со 3 или со 4, по што е добиен цел број. Кој е добиениот резултат на крајот?

11. Марко замислил еден број. Бројот го намалил за 12,12 и добиената разлика ја поделил со $\frac{1}{5}$, на добиениот резултат додал 1,85 и добиениот збир го поделил со 0,1. Така го добил бројот 68,5. Кој број го замислил Марко?

12. Марко му вели на Иван: *Јас имам интересен број на телефон. Тоа е седумцифрен број чии први три цифри се меѓусебно еднакви и преостанатите четири се меѓусебно еднакви. Збирот на сите седум цифри е двоцифрен број чија прва цифра е еднаква на првата цифра на мојот телефонски број, а последната на последната. Кој е тој број*? Помогни му на Иван да го открие телефонскиот број на Марко.

13. Збирот на четири броја е 147. Ако на првиот му се додаде 6, од вториот се одземе 6, третиот се помножи со 6 и четвртиот се подели со 6, се добива еден ист број. Определи ги овие броеви.

14. Збирот на четири природни броја е еднаков на 2017. Третиот број е три пати помал од првиот број, за 3 е поголем од вториот број и е за 4 помал од четвртиот број. Кои се тие броеви?

15. Збирот на пет броја е 2017. Третиот број е двапати помал од петтиот број, за 2 помал од вториот број и за 1 поголем од првиот број. Третиот и четвртиот број се еднакви. Определи ги овие броеви.

16. Збирот на педесет природни броеви е 8625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот број е за 5 поголем од третиот, ... , педесеттиот број е за 5 поголем од

четириесет и деветтиот број. Определи ги најголемиот и најмалиот собирок во дадениот збир.

17. Производот на два броја е 150. Ако првиот множител се зголеми за 5, тогаш производот е еднаков на 225. Определи ги овие броеви.

18. Количникот на два броја е 150. Ако делениот се намали за 500, тогаш количникот е еднаков на 100. Определи ги овие броеви.

19. Петцифрениот број a може да се добие од еден двоцифрен и еден трицифрен број на два начина така што тие броеви се запишуваат еден по друг. Во првиот случај нивниот производ е 4020, а во вториот 10366. Определи го бројот a.

20. На таблата се запишани десет последователни природни броеви. Кога еден од запишаните броеви е избришан, збирот на преостанатите броеви е 2009. Кој број е избришан?

21. Андреј на таблата запишал 10 природни броја. Горјан за секои 9 запишани броеви го пресметал нивниот збир. Меѓу добиените збирови има 9 различни броеви:

    86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95.

    Кои броеви ги запишал Андреј?

22. Определи ги броевите a,b,c ако $a+b=1,2$, бројот b е за 0,4 поголем од бројот a, а бројот c е за 1 поголем од аритметичката средина на броевите a,b и c.

23. Збирот на броителот и именителот на една дропка е 95. По скратување на дропката добиена е дропката $\frac{7}{12}$. Одреди ја таа дропка.

24. Кој број треба да се одземе од броителот, а да се додаде на именителот на дропката $\frac{2023}{2024}$ за да се добие дропката $\frac{1}{2}$?

25. Дадена е дропката $\frac{7989}{2010}$. Кога од броителот на дадената дропка ќе се одземе бројот x, а на именителот ќе му се додаде бројот x се добива

дропката $\frac{1}{8}$. Определи го x.

26. Матеа почнала од бројот 2 да ги одзема дропките $\frac{1}{2011}, \frac{2}{2011}, \frac{3}{2011}, \ldots$. Која е последната дропка која Матеа можела да ја одземе, а резултатот да биде поголем од 0?

27. Матеа почнала да ги пишува дропките $\frac{1}{2012}, \frac{2}{2012}, \frac{3}{2012}, \ldots$. Колку најмногу дропки може да запише Матеа така што нивниот збир ќе биде помал од 3?

28. Збирот на $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ од некој број е за 9 поголем од половината од тој број. Кој е тој број?

29. Збирот на $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ од некој број е за 48 помал од збирот на $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$ и $\frac{7}{12}$ на истиот тој број. Кој е тој број?

30. Митра замислила три броја. Од најмалиот природен број кој е поголем од нив ја одзела секоја од дропките $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}$. Кои броеви ги замислила Митра, ако нивната аритметичка средина е $\frac{49}{36}$?

31. Александра замислила три броја и ги собрала со најголемиот природен број кој е помал од нив. Така ги добила броевите $14,5; 12,2$ и $13\frac{2}{3}$. Кои броеви ги замислила Александра?

32. Определи ги нескратливите дропки $\frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} < 1$, такви што збирот на броителот и именителот е 37. Притоа, на дропките им соодветствува конечен децимален запис.

33. Определи ги сите нескратливи дропки $\frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}$ кај кои производот на броителот и именителот е еднаков на 220, а на дропките им соодветствува конечен дециналeн запис.

34. Определи го природниот број x за кој дропката $\frac{20+x}{30}$ е помала од 0,75 и истата има бесконечен периодичен децимален запис. Која цифра се наоѓа на 2016-тото место по децималната запирка на децималниот запис на добиената дропка?

35. Бојан имал шише од $1l$ кое било полно со сируп за сок од портокал. Првиот ден тој отпил шестина од содржината на шишето и шишето го дополнил со вода. Вториот ден отпил третина од содржината на шишето и шишето го дополнил со вода. Третиот ден отпил половина од содржината на шишето и шишето го дополнил со вода. Четвртиот ден Бојан го испил целиот сок од шишето. Што во текот на четирите дена повеќе испил Бојан, вода или сируп за сок од портокал?

36. Во текот на ноќта паѓал снег и го покрил целиот двор на семејството Јакопетресќи. Ако помалиот син Трајко го чисти дворот, нему му се потребни 6 часа да го исчисти целиот снег, неговиот постар брат ќе го исчисти снегот два пати побрзо, а нивниот татко може да исчисти како двајцата браќа заедно. Колку време е потребно за се исчисти целиот двор, ако чистат сите тројца заедно?

37. Пабло изедува цела пица за 15 минути, а Пабло и Матео заедно изедуваат цела пица за 6 минути. Колку време му е потребно на Матео сам да изеде цела пица?

38. Ацо изедува половина пица за 10 минути, а Ацо и Елена изедуваат една и половина пица за 18 минути. За колку време Елена сама ќе изеде една пица ако сите пици се еднакви и децата јадат рамномерно?

39. Ангелина изедува едно и пол чоколадо за 1 час, а Ангелина и Боркица заедно изедуваат третина чоколадо за 10 минути. Колку време ѝ е потребно на Боркица да изеде едно чоколадо? (Сите чоколади се еднакви и девојчињата јадат рамномерно.)

40. Еден работник некоја работа ја завршил за 12 дена, друг за 15 дена, а трет за 20 дена. Колкав дел од работата ќе остане незавршен ако сите три работници заедно работат 4 дена.

41. Киро една работа може да ја заврши за 12 дена, Мендо истата работа

ја завршува за 15 дена, а на Рампо за да ја заврши истата работа му се потребни 20 дена. Киро завршил четвртина од работата, по што дошол Мендо и со него работел три дена. Остатокот од работата го завршил Рампо. Колку дена работел Рампо?

42. Киро една работа може да ја заврши за 12 дена, Мендо истата работа ја завршува за 15 дена, а на Рампо за да ја заврши работата му се потребни 20 дена. Киро завршил четвртина од работата, по што дошол Мендо и сам работел три дена. Остатокот од работата го завршил Рампо. Колку дена работел Рампо?

43. Еден молер молерисува $10\,m^2$ ѕид за 35 минути, а друг молер молерисува $10\,m^2$ за 42 минути. Двајцата истовремено започнале да молерисуваат две исти куќи. Кога првиот ја завршил работата на вториот му преотанале да молериса $75\,m^2$. Колку метри квадратни требало да молериса секој молер?

44. Вера, нејзината сестра и мајка пред 15 години заедно имале 45 години. Колку години тие имаат заедно денес?

45. Производот на годините на таткото и синот е 2015. Колкава е разликата на нивните години? (Се зема во предвид само природен број години.)

46. Горјан имал тројно повеќе години отколку што имала Виолета кога бил на нејзината сегашна возраст. Одреди го односот на годините на Горјан и Виолета.

47. Во 2012 година Митко наполнил толку години колку што бил збирот на цифрите на годината кога се родил. Неговата мајка забележала дека тоа истото важи и за нејзиниот најстар син Стојан. Колку години е Митко помлад од Стојан?

48. Дедо Јордан и неговиот внук Иван имаат роденден на ист ден. Годините на едниот и на другиот се пишуваат со истите цифри. „Разликата на нивните години е еднаква на бројот на твојата куќа“ - му рече Марко на Петар. Петар многу брзо пресмета колку години имаат

Јордан и Иван. Колку се стари дедото и внукот?

49. Ивана на полноќ на дочекот на 2024. година рекла дека пред 2024 часови наполнила 11 години. Определи го точниот датум и час кога Ивана се родила.

50. Ѓорѓи го сретнал математичарот Рампо и го прашал колку е часот. Рампо погледнал на часовникот и рекол: Кога ќе собереш четвртина од досега поминатото време во денот со половина од половината време кое останува до крајот на денот ќе го добиеш точното време? Колку е часот?

51. Горјан во текот на три дена читал книга. Додека читал, брзината на читањето му била постојана. Првиот ден тој читал $\frac{1}{32}$ од денот, а секој следен ден читал третина од времето помалку отколку претходниот ден. Колкав дел изразен во проценти, треба Горјан уште да прочита ако за читање на целата книга му требало 1 час и 40 минути?

52. Аритметичката средина на височините на 24 ученици во едно одделение е $151,3\,cm$ и мерењето било извршено кога Дијана не била на училиште. Колку е аритметичката средина на височините на сите ученици ако Дијана е висока $152,5\,cm$?

53. Просечната височина на 30 ученици од една паралелка е $156,67\,cm$. На крајот од мерењето е констатирана грешка, т.е. Гордана ја мереле два пати, а Гвозден ниту еднаш. По исправката се покажало дека точната просечна височина на паралелката е $157,1\,cm$. За колку е Гвозден повисок од Гордана?

54. Хартиена лента по должина е превиткана на половина, потоа уште еднаш на половина и уште еднаш на половина. Вака добиената осумслојна лента е пресечена на едно место. Определи ја должината на лентата пред сечењето ако се знае дека две од дибиените парчиња имаат должини $9\,cm$ и $4\,cm$.

55. Возач на камион во еден момент погледнал на бројачот за поминати километри и видел дека бројачот покажува 25952. „Колку убав број

километри сум поминал! Веројатно нема скоро да се повтори така убав симетричен број“ – помислил. Меѓутоа точно по еден час и 20 минуто бројачот го покажал следниот симетричен број. Со која брзина се движел камионот?

56. Петранка купила украсна трака. На својата мајка и дала $\frac{2}{5}$ од траката, а на сестра ѝ Матеа и дала $\frac{1}{3}$ од траката. Кога пресметала видела дека дала $14\,m$ трака повеќе отколку што и останало. Колкава била должината на траката која Петранка ја купила?

57. Велосипедист првиот ден поминал $\frac{1}{4}$ од патот, вториот ден поминал $\frac{1}{3}$ од остатокот од патот, третиот ден $\frac{4}{5}$ од новиот остаток, а четвртиот ден ги поминал преостанатите $84\,km$. Колку километри велосипедистит поминал за 4 дена?

58. Во акција за собирање стара хартија учениците од 6^a одделение собрале $178\,kg$ хартија, од 6^b одделение собрале $47\,kg$ повеќе од 6^a, од 6^c собрале $36\,kg$ помалку од 6^b, а од 6^d собрале колку што собрале заедно 6^a и 6^b. Колку хартија недостасува за сите заедно да соберат еден тон хартија?

59. Матеја од полн бокал лимунада може да наполни 7 чаши. Полниот бокал има маса $1\,kg$, а по полнењето на две чаши масата на бокалот со преостанатата лимонада е $\frac{3}{4}\,kg$. Определи ја масата на празниот бокал.

60. Пет кутии имаат различни маси. Ако за секои две кутии го пресметаме збирот на нивните маси во килограми, ги добиваме следниве 10 броеви: 114, 85, 122, 74, 133, 118, 147, 99, 107 и 93. Колкава е масата на секоја од петте кутии?

61. Определи го минималниот број камиони со носивост 7,5 тони со кои може одеднаш да се превезат 50 контејнери со маси:

$$925\,kg, 930\,kg, 935\,kg, ..., 1165\,kg, 1170\,kg\,.$$

62. Четири слона и осум зебри дневно изедуваат еден тон храна. Секој слон дневно изедува $214\,kg$ храна повеќе од една зебра. Ако на зебрата и требаат 24 минути да изеде $1\,kg$ храна, колку време и треба да го изеде своето дневно количество храна?

63. Ако свежото грозје содржи 75% вода, а сувото грозје содржи 5% вода, колку килограми свежо грозје се потребни за да се добијат $130\,kg$ суво грозје?

64. Три другарки Косара, Ленка и Марија купиле заеднички поклон за својот другар Доротеј. Поклонот чинел 6600 денари. Ако Косара и Марија заедно дале 600 денари повеќе отколку Ленка, а Марија дала два пати повеќе од Косара, колку пари дало секое девојче за поклонот?

65. Три другарки Кирјана, Лимонка и Маја за роденденот на Павел купиле заеднички поклон. Кирјана дала два пати повеќе пари од Лимонка, а Маја дала четири пати повеќе пари од Лимонка и 2400 денари повеќе од Кирјана. Колку пари дало секое девојќе и колку чинел поклонот?

66. Лонец со поклопец чини 2000 денари денари, при што лонецот е 900 денари поскап од поклопецот. Колку чини лонецот без поклопец?

67. Матеј за својот роденден сакал да ги почести своите другари со сок. Купил $8\,l$ сок од јаболка и $5\,l$ сок од портокал, за што платил 880 денари. Колку чини по литар од овие сокови ако $4\,l$ сок од јаболка чинат колку $3\,l$ сок од портокал?

68. Митре на пазар продавал јаготки. На првиот купувач му продал $\frac{5}{36}$ од вкупното количество јаготки, а на вториот $\frac{1}{9}$. Кога ги измерил јаготките, видел дека му преостанале $25\,kg$ јаготки повеќе од тоа што продал. Колку пари заработил Митре од првите двајца купувачи ако килограм јаготки чинел 90 денари?

69. Бојан првиот ден од месецот потрошил $\frac{1}{15}$ од својот џепарлак. Истиот ден неговата баба му дала 50 денари, кои ги додал на џепарлакот, па сега имал $\frac{19}{20}$ од џепарлакот. Колку пари добива Бојан за џепарлак?

70. Богдан првиот ден од месецот потрошил 100 денари од својот џепарлак. По 10 дена добил $\frac{1}{4}$ од сумата која ја имал во тој момент и потрошил 100 денари. По 10 дена повторно добил $\frac{1}{4}$ од сумата која ја имал во тој момент и потрошил 100 денари. На крајот Богдан имал 800 денари повеќе пари отколку на почетокот на месецот. Колку пари бил џепарлакот на Богдан на почетокот на месецот?

71. Ацо, Бојан и Цане поделиле 1650 денари така што Бојан добил $\frac{2}{3}$ од парите што ги добил Ацо, а Цане добил $\frac{3}{8}$ од парите што заедно ги добиле Ацо и Бојан. Кое дете добило најмногу пари и колку?

72. Три ученици се договориле за ужинка да си поделат 11 еднакви кифлички. За таа прилика Трајко донел 5 кифлички, Вангел донел 6 кифлички, а Јордан донел 11 денари. Како овие 11 денари треба да ги распределат меѓу себе Трајко и Вангел, за тројцата ученици рамноправно да учествуваат во трошоците за ужинката?

73. Илија отворил менувачница во која менувал валути по следнава шема: За 2 евра дава 3 долари и една бомбона како поклон, а за 5 долари дава 3 евра и повторно една бомбона како поклон. Кога Марко влегол во мунувачницата, имал само долари, а по излегувањето имал помалку долари, повторно немал евра, но затоа имал 50 бомбони. Колку долари го чинеле Марко овие 50 бомбони?

74. Еден трговец на крајот на секој месец го пресметува приходот и расходот на фирмата. Тој констатирал дека за секој период од пет последователни месеци во текот на годината приходот бил поголем од расходот, а за целата година расходот бил поголем од приходот. Дали е тоа можно?

75. Во едно одделение има 27 ученици и нивните омилени предмети се

математика и биологија. Три ученици ги сакаат двата предмети, а преостанатите само по еден. Притоа, бројот на учениците кои сакаат само математика е два пати поголем од бројот на учениците кои сакаат само биологија. Колку ученици сакаат математика?

76. Во едно одделение има 30 ученици и нивни омилени предмети се музичко и биологија. Пет ученици ги сакаат двата предмети, четири не сакаат ниту еден, а преостанатите сакаат по еден предмет. Притоа, бројот на учениците кои сакаат само биологија е за 3 помал од бројот на учениците кои сакаат само музичко. Колку ученици сакаат биологија?

77. На една математичка школа учествувале 672 ученика. Во секое одделение имало точно по 24 ученици. Секое одделение пет дена од неделата има точно по пет часа, а секој наставник треба да одржи точно по 4 часа дневно. На секој час присуствува едно одделение и еден наставник. Колку наставници има на оваа школа?

78. Група деца треба со чамци да се префрлат од еден на друг брег на реката Вардар. Ако во секој чамец има по едно дете, за 5 деца нема чамци. Ако во секој чамец има по 2 деца, тогаш 2 чамци ќе останат празни. Колку деца има на брегот на реката и колку чамци се во реката?

79. Група момчиња треба да се префрлат од едниот на другиот брег на една река. Ако во секој чамец има по 2 момчиња, тогаш за 3 момчиња нема да има чамец. Ако во секој чамец има по 3 момчиња, тогаш два чамци остануваат празни. Колку момчиња има на брегот и колку чамци во реката?

80. Во продавница за спортска опрема стигнале 138 фудбалски топки, кои биле запакувани во мрежи со по 10 или 17 топки. Колку мрежи биле со 10, а колку со 17 топки?

81. На една ливада паселе 25 животни: крави, коњи, овци и кози. Крави имало три пати повеќе од коњи, а овци имало два пати повеќе од кози. Колку животни од кој вид имало на ливадата, ако сите коњи не биле истобојни?

82. На група од дванаесет луѓе, во која има и мажи и жени и деца, им се дадени дванаесет сомуни леб, што тие ги изеле. Притоа, секој маж изел по сомун и пол леб, секоја жена изела по половина сомун леб, и секое дете изело по четвртина сомун леб. Колку биле мажи, колку жени и колку деца во таа група?

83. Дамјан пет дена (од понеделни до петок) му помагал на дедо му да продава лубеници. Во табелата десно се дадени податоци за продажбата на лубениците одредени денови во текот на петдневниот период. Колку лубеници Дамјан и дедо му продале во вторникот?

Понеделник, вторник и среда	115
Среда и четврток	85
Вторник и четврток	90
Понеделник и петок	70
Четврток и петок	80

84. На натпревар по математика биле зададени 10 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат по 4 поени, а за секоја задача која не е решена или е неточно решена се губат по 3 поени. Колку задачи точно решил Андреј, ако тој освоил 19 поени?

85. Матеа тргнала од дома броејќи чекори. Прво одела 10 чекори напред па 3 назад, потоа 10 чекори напред па 2 чекори назад, потоа 10 чекори напред па 1 назад. Оваа постапка Матеа ја повторува при чекорењето. Колку чекори мора да направи Матеа за да од дома се оддалечи 2038 чекори?

86. Баба Цанка ја затворила славината за вода над кадата, но заборавила да ја затне кадата. Таа се сетила да ја затне кадата по 12 минути откако ја отворила славината. Ако е познато дека затната када се полни до горе за 10 минути, а полна када се празни за 20 минути, дали за тие 12 минути кадата се преполнила?

87. Марија имала неколку сликички со животни. Половина од сликичките и ги дала на другарката Јована. Третина од преостанатите сликички и ги дала на другарката Кристина, а четвртина и петтина од преостанатите сликички му ги дала на својот брат Марко. Така на Марија и останале 11 сликички. Колку сликички имала Марија на почетокот?

88. Марко, Жарко и Дарко собирале албум со сликички. Тие заедно собрале 1650 сликички. Жарко собрал $\frac{2}{3}$ од бројот на сликичките што ги собрал Марко, а Дарко собрал $\frac{3}{8}$ од бројот на сликичките кои што заедно ги собрале Марко и Жарко. Колку сликички собрало секое дете?

89. Бабата Илина за своите внуци им ги испекла омилените слатки *орасници*. Внукот Филип прв стигнал дома и изел четвртина и осмина од орасниците. Потоа стигнал внукот Андреј кој изел половина и шестина од преостанатите орасници. На крајот најмалиот внук Матео ги изел преостанатите 5 орасници. Колку орасници изел Филип, а колку Андреј?

90. Иван првиот ден прочитал $\frac{1}{4}$ од една книга, вториот ден прочитал $\frac{4}{9}$ од остатокот, а третиотден ги прочитал преостанатите 50 страници. Колку стриници има книгата која ја прочитал Иван?

91. На регионалниот натпревар по математика се пласирале $\frac{3}{40}$ од учесниците на општинскиот натпревар. Од овие ученици на регионалниот натпревар точно $\frac{2}{9}$ добиле награда или пофалница. Еден ученик добил прва, еден добил втора и двајца добиле трета награда. Пофалница добиле 4 натпреварувачи. Колку ученици улествувале на општинскиот натпреевар?

92. За една кино претстава половината од гледачите и уште едно лице биле деца. Мајки имало за 2 повеќе од четвртина од гледачите, а татковци имало за 3 повеќе од третина од посетителите. Други луѓе немало во киното. Колку мајки, татковци и деца имало на оваа претстава?

93. Михаил и Мартин живеат на иста оддалеченост од училиштето и истовремено тргнале кон училиштето. Чекорот на Михаил е за 10% пократок од чекорот на Мартин, но Михаил за исто време направил 10% повеќе чекори од Мартин. Кој од нив стигнал прв во училиште?

94. За одење во театар се пријавиле $\frac{2}{9}$ повеќе ученици отколку што е планирано. На денот на претставата заради болест $\frac{3}{11}$ од пријавените не отишле во театар, па во театар отишле 5 ученици помалку отколку што било планирано. Колку ученици биле во театар?

95. За одење на излет се пријавиле $\frac{3}{11}$ помалку ученици отколку што е планирано. На денот на одењето на излетот дошле уште $\frac{1}{4}$ од бројот на пријавените, па на излетот отишле 2 ученика помалку отколку што било планирано. Колку ученици биле планирано да одат на изет?

96. Учениците од едно одделение правеле писмена работа. Бројот на учениците кои добиле оценка 4 е еднаков на бројот на учениците кои добиле оценка 2. Бројот на учениците кои добиле оценка 5 е за 2 помал од бројот на учениците кои добиле оценка 3, а бројот на учениците кои добиле оценка 3 е за 1 поголем од бројот на учениците кои добиле оценка 2. Еден ученик добил оценка 1. Колку ученици има во оваа одделение ако просечната оценка од писмената работа била 3,25?

97. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во:
а) 8 часот, б) 8 часот и 15 минути.

98. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во:
а) 5 часот и 45 минути, б) 9 часот и 30 минути.

99. Кога прв пат по 12 часот стрелките на часовникот ќе зафаќаат прав агол?

100. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 14 часот и 20 минути.

101. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 13 часот и 30 минути.

102. Дали еднаков агол зафаќаат стрелките на часовникот во 12:15 и во 13:20?

103. а) Определи го аголот меѓу стрелките на часовникот ако се знае дека тие по 20 минути ќе зафаќаат исто толкав агол.

б) Колку пати во текот на денот стрелките на часовникот се наоѓаат во таква положба?

4. ГЕОМЕТРИЈА

1. Отсечката AB со точката C е поделена на два дела чии должини се разликуваат за $2\,cm$. Ако средината на отсечката AC е четири пати поблиска до точката A отколку до точката B, определи ја должината на отсечката AB.

2. Отсечката AB е поделена со точката C на два нееднакви дела. Растојанието меѓу средините на отсечките AC и CB е $5\,cm$, а точката C е 4 пати поблиску до средината на отсечката BC отколку до средината на отсечката AC. На кое растојание од точката A е точката C.

3. Точката C ја дели отсечката AB во однос $2:1$, точката D во однос $3:2$, а точката E во однос $4:3$. Во кој однос точката D ја дели отсечката CE?

4. Точката C ја дели отсечката AB во однос $2:1$, точката D во однос $3:1$, а точката E во однос $4:1$. Во кој однос точката D ја дели отсечката CE?

5. Дадена е отсечка $\overline{AB}=3012\,cm$. Точките O,M,K се на оваа отсечка такви што отсечката AM е два пати пократка од отсечката MB и $\overline{AO}=\overline{KB}=2014\,cm$. Каков е распоредот на точките A,B,O,M,K и колкаво е растојанието меѓу соседните точки?

6. Дадена е отсечка $\overline{AB}=3012\,cm$. Точките O,M,K на оваа отсечка се такви што отсечката AM е два пати подолга од отсечката MB и $\overline{AO}=\overline{KB}=1014\,cm$. Каков е распоредот на точките A,B,O,M,K и колкави се растојанијата меѓу соседните точки?

7. На отсечката AB се дадени точки P,Q и R такви што $A-P-Q-R-B$. Растојанието меѓу средините на отсечките PQ и QR е $8\,cm$, а меѓу средините на отсечките AP и RB е $22\,cm$. Определи ја должи-

ната на отсечката AB.

8. Определи го аголот кој е за $20^{\circ}17'$ поголем од својот комплементен агол.

9. Определи го аголот кој е $20^{\circ}16'$ помал од својот суплементен агол.

10. Разликата на два комплементни агли е еднаква на $2007'$. Кои се мерните броеви на овие агли?

11. Аглите ~ и се комплементни, а аглите ~ и 9 се суплементни. Определи ги мерните броеви на аглите ~ и .

12. Аглите ~ и се суплементни. Разликата на половина од аголот ~ и третина од аголот е еднаква на $2011'$. За колку е аголот ~ поголем од аголот ?

13. Збирот на половината, третината и шестината на аголот ~ е за $2012'$ поголем од неговиот суплементен агол. Определи го аголот ~ .

14. Аголот ~ е за $2015'$ помал од својот комплементен агол. Пресметај го суплементниот агол на аголот ~ .

15. Од два комплементни агли едниот е три пати поголем од другиот. Определи го аголот кој е суплементен на помалиот агол?

16. Аглите ~ и се комплементни. Определи ги овие агли, ако нивната разлика е еднаква на третина од поголемиот агол.

17. Аголот е суплементен на аголот $2\sim$, а аголот ¥ е комплементен на аголот ~. Ако $+¥=120^{\circ}$, определи го аголот ~.

18. Аголот е суплементен со аголот $3\sim$, а е комплементниот агол на $2\sim$ е аголот ¥. Ако $+¥=100^{\circ}$, определи го аголот ~.

19. Аглите ~ и се комплементни, а аглите и ¥ се суплементни. Определи ги аглите ~, и ¥ ако разликата на најголемиот и најмалиот од нив е еднаква на 102°.

20. Аглите ~ и се комплементни, а аглите и ¥ се суплементни. Определи ги аглите ~, ,¥, ако збирот на аглите ~ и ¥ е еднаков на 145°.

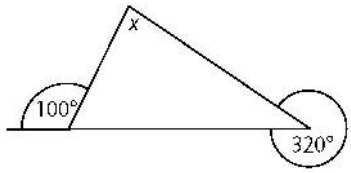
21. Разликата на два суплементни агли е еднаква на половината од помалиот агол. Определи ги мерните броеви на овие агли.

22. Аголот ~ е еднаков на збирот на неговиот комплементен агол и на својата третина. Определи го суплементниот агол на аголот ~.

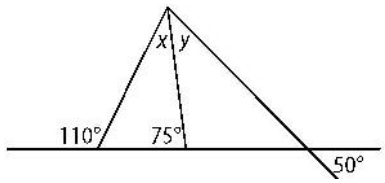
23. Аглите ~, и ¥ имаат паралелни краци. Определи ги аглите ~, и ¥, ако аголот ¥ е еднаков на збирот на аглите ~ и .

24. Определи го мерниот број на аголот ~ чиј комплементен агол е три пати помал од неговиот суплементен агол.

25. Определи го аголот x прикажан на цртежот десно.



26. Определи ги аглите x и y прикажани на цртежот десно.



27. Аглите ~ и се комплементни, а аглите ~ и ¥ се суплементни. Ако аголот ¥ е десет пати поголем од аголот , определи ги овие агли.

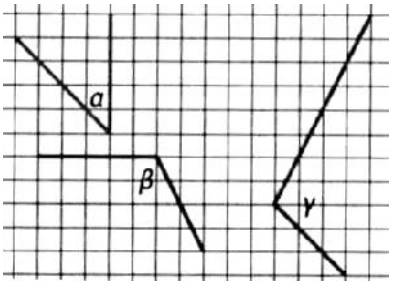
28. Две прави, a и b, се сечат во точка O, под агол $56^\circ 35'$. Во областа на овој агол се наоѓа произволна точка T. Точката T со оска симетрија се пресликува во однос на правите a и b, при што се добиени

сликите T_1 и T_2. Пресметај го $\angle T_1OT_2$.

29. Две прави се сечат во точка O и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е за половина од правиот агол помал од еден од накрсните тапи агли. Определи ги овие четири агли.

30. Две прави се сечат во точката O и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е четири пати помал од едниот од накрсните тапи агли. Определи ги овие агли.

31. Определи го збирот на аглите прикажани на долниот цртеж.



32. Во областа на $\angle AOB$ е повлечена полуправа OC така што $\angle AOC$ е за 40° помал од $\angle COB$ и е еднаков на една тгретина од $\angle AOB$. Определи го $\angle AOB$.

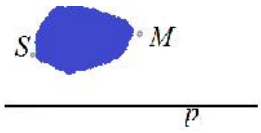
33. Даден е разностран триаголник ABC. Точките A и C се централно симетрични во однос на центар на симетрија D, а точките B и C се централно симетрични во однос на центар на симетрија E. Конструирај ја сликата на триаголникот ABC при осна симетрија со оска на симетрија DE.

34. Даден е триаголник ABC и права s, која минува низ точката B и е нормална на правата AB. Определи ја сликата на триаголникот ABC при осна симетрија со оска на симетрија правата s.

35. Даден е правоаголник $ABCD$, чии страни се $\overline{AB} = 7\,cm$ и $\overline{BC} = 4\,cm$. Определи ја сли-ката на правоаголникот $ABCD$ при осна си-метрија со оска на симетрија правата AC.

36. Точките B и C се наоѓаат на различни страни на правата a. Конструирај прави m_1 и m_2 симетрични во однос на правата a такви што m_1 ја содржи B, а m_2 ја содржи C.

37. Меѓу млекарата M и селото S се наоѓа езеро, па не е можно млекото директно да се носи од селото S до млекарата M. Затоа директорот на млекарата решил на магистралниот пат p да направи откупна станица O во која сточарите од селото S ќе го носат млекото (види цртеж). Каде треба да се направи откупната станица O за да патот од селото S до млекарата M, преку откупната станица S, биде најкраток?



38. Покрај две села A и B тече чиста река чиј брег е права линија. Селата се наоѓаат од иста страна на реката. Определи каде на реката треба да се уреди плажа, така што таа ќе биде еднакво оддалечена од двете села.

39. Населбата A и базенот B се од иста страна на реката p која тече по права линија. Определи каде на брегот на реката треба да се направи плажа, така што населбата A (која не е на брегот на реката) ќе биде еднакво оддалечено од плажата и од базенот B.

40. Во внатрешноста на остар агол е дадена точка A. Конструирај триаголник ABC, чии темиња B и C се наоѓаат на краците на аголот така што триаголникот ABC ќе има најмал периметар.

41. На страната AB на остроаголниот триаголник ABC е дадена точката X. На страните BC и CA соодветно определи точки Y и Z такви што добиениот троиаголник XYZ има најмал можен периметар.

42. Нека m_1 и m_2 се две прави кои не се паралелни и точката S не припаѓа на правите m_1 и m_2. Конструирај точки B и C кои припаѓаат соодветно на правите m_1 и m_2 и се такви што S е средина на отсечката BC.

43. Дадена е кружница $k(S, 2\,cm)$ и на кружницата точка A.
    а) Конструирај тетива AB на дадената кружница, така што нејзината должина е $2,5\,cm$.
    б) Конструирај кружница k_1 која минува низ точките A и B и чиј радиус е $r = 3\,cm$. Колку решенија има задачата?

44. Во рамнината конструирај фигура составена од две прави, две кружници со радиуси $2\,cm$ и $3\,cm$ и квадрат со страна $6\,cm$, така што сите фигури се пресликуваат сами во себе ако било која од двете прави е оска на симетрија.

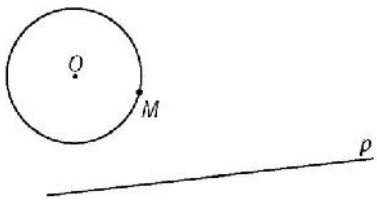
45. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $5\,cm$. Конструирај точка M која е еднакво оддалечена од темињата A и B и која од темето C е оддалечена $3\,cm$. Колку решенија има задачата?

46. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $5\,cm$. Конструирај точка M која е еднакво одалечена од страните AB и AD и која од темето D е оддалечена $4\,cm$. Колку решенија има задачата?

47. Конструирај кружница со радиус $r = 2,5\,cm$ која ги допира краците на остриот $\angle xOy = 60^\circ$.

48. Нацртај прави a и b кои се сечат во точка S. На правата a избери точка M. Конструирај кружница k која ги допира правите a и b и ја содржи точката M.

49. Дадени се кружница $k(O, 2,5\,cm)$, точка M на кружницата и права p која нема заеднички точки со кружницата (цртеж десно). Конструирај кружница k_1 која ги допира правата p и кружницата k во точката M.



50. Нацртај отсечка AB со должина $5\,cm$, па конструирај точка C која од точката A е на растојание $3\,cm$, а од точката B е на растојание $4\,cm$. Потоа конструирај точка M која е еднакво оддалечена од точките A и B и од точката C е на растојание $2\,cm$.

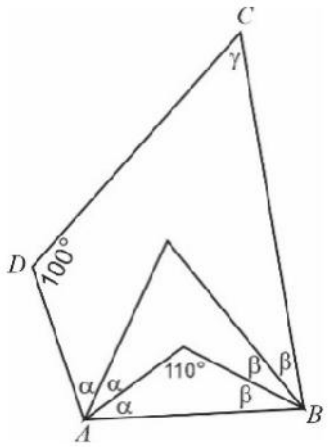
51. Дадени се кружница $k(A,2\,cm)$ и права која од центарот на кружницата е оддалечена $6\,cm$. Конструирај правоаголник чија една страна се наоѓа на правата и кој ја допира кружницата таков што едната страна на правоаголникот е два пати пократка од другата и должините на страните на правоаголникот се најмали можни.

52. Нацртај кружница $k(A,2\,cm)$ и права која од центарот на кружницата е оддалечена $5\,cm$. Конструирај квадрат со најмала должина на страната, таков што една негова страна се наоѓа на правата и кој ја допира кружницата.

53. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ $(\overline{AB}=\overline{AC})$ таков што $\angle BAC>50^\circ$. На страната BC е избрана точка M, таква што $\angle BAM=50^\circ$ и на страната AC е избрана точка N таква што $\overline{AM}=\overline{AN}$. Определи ја мерката на $\angle CMN$.

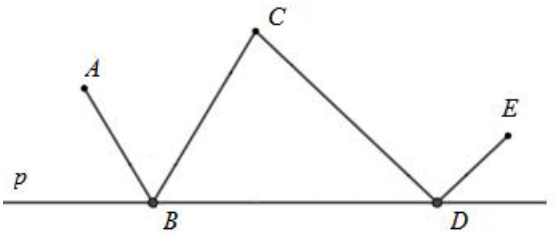
54. Во $\triangle ABC$ симетралите на $\angle BAC$ и $\angle ACB$ се сечат во точката S. Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$ ако $\angle ASC=110^\circ$ и $\angle BAC$ е три пати поголем од $\angle ABC$.

55. Даден е четириаголникот $ABCD$ кој е прикажан на цртежот десно. Определи ја вредноста на аголот ¥.



56. Искршената линија $L=ABCDE$ не преминува под правата p со која има точно две заеднички точки: B и D. Притоа, од сите такви искршени линии за кои прво, трето и петто теме се редоследно дадените точки A,C и

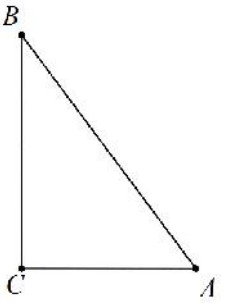
E , линијата L е со најмала можна должина



Докажи дека

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDE = 2\measuredangle BCD .$$

57. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C (цртеж десно). Должината на страната AC е $\frac{3}{4}$ од должината на страната BC, а должината на страната AB е за 25% поголема од дожината на страната BC. Нека C' е точката добиена при осна симетрија на точката C во однос на страната AB. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако периметарот на четириаголникот $CAC'B$ е еднаков на $16{,}8\,cm$.



58. На хоризонтална права која ја дели рамнината на горна и долна полурамнина, нацртана е отсечка AB со должина $72\,cm$. Користејќи ги крајните точки на отсечката, во горната полурамнина се нацртани правилен (рамностран) триаголник AM_1M_2 и правилен петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$, а во долната полурамнина се нацртани правилен четириаголник (квадрат) $M_2M_3M_4M_5$ и правилен шестаголник $M_9M_{10}M_{11}\,M_{12}M_{13}B$. Притоа, M_2, M_5 и M_9 се на отсечката AB, точката M_2 е меѓу A и M_5 и точката M_9 е меѓу M_5 и B. Должините на страните на правилните многуаголници се однесуваат како соодветните броеви на нивните страни. Пресметај ја должината на искршената линија

$$L \equiv AM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B .$$

59. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 3 *dm*. Пресметај го неговиот крак b, ако неговата основа е страна на рамностраниот триаголник со периметар 18 *cm*.

60. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни природни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е 12 *dm*. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.

61. Триаголниците ABC и MNP припаѓаат на рамнината $\sim$. Кои множества точки може да се добијат како пресек на триаголниците ABC и MNP?

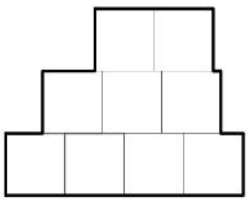
62. Квадратите $ABCD$ и $MNPQ$ припаѓаат на рамнината $\sim$. Кои множества точки може да се добијат како пресек на дадените квадрати?

63. Колку заеднички оски на симетрија имаат два круга со:
а) еднакви, б) различни
радиуси, ако нивните центри се различни точки.

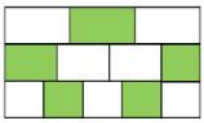
64. Со помош на
а) 6 еднакви кибритени чкорчиња,
б) 7 еднакви кибритени чкорчиња,
состави најмалку 4 фигури (затворени искршени линии без самопресекување) кои се осносиметрични. Кај секоја фигура определи ги оските на симетрија.

65. Колку заеднички оски на симетрија имаат три круга со:
а) еднакви, б) различни
радиуси, ако нивните центри се три различни точки.

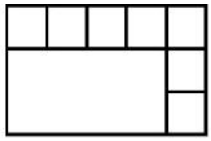
66. Лазо нацртал фигура која се состои од 9 еднакви квадрати (цртеж десно). Периметарот на фигурата е еднаков на $28\,cm$. Определи ја плоштината на еден квадрат.



67. Јанко нацртал предлог за знаме на својот клуб. Знамето се состои од три правоаголници со еднакви ширини. Правоаголниците ги поделил на 3, 4 односно 5 еднакви делови и ги обоил (цртеж десно). Колкав дел од знамето обоил Јанко?



68. Пабло нацртал предлог знаме за својот клуб. Знамето се состои од седум еднакви квадрати и еден правоаголник (цртеж десно). Треба да се обојат $\frac{2}{3}$ од знамето, но само цели делови. На колку начини тоа може да се направи?



69. Три еднакви квадрати се составени без да се преклопуваат така што формираат правоаголник со периметар $10\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на еден квадрат.

70. Даден е правоаголник $ABCD$ со периметар $40\,cm$. На страната AB е дадена точка M таква што должината на отсечката AM е за $5\,cm$ пократка од олжината на страната BC. Ако $\overline{MB} = 3\overline{AM}$ определи ја плоштината на дадениот правоаголник.

71. Шест еднакви квадрати се наредени така што е добиен правоаголник со периметар $21\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на еден од дадените квадрати.

72. Даден е правоаголник $ABCD$ чија страна AB е два пати подолга од страната BC. Нека M е средина на страната AB. Отсечката MC го дели правоаголникот на четириаголник $AMCD$ и триаголник MBC чии периметри се разликуваат за $20\,cm$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

73. Даден е правоаголник $ABCD$ чија една страна е долга $42\,cm$, а другата е пет пати пократка од првата. Пресметај ја плоштината на квадратот $EFGH$ чиј периметар е три пати помал од периметарот на правоаголникот $ABCD$.

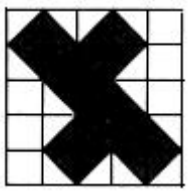
74. Зоран и Ана пресекле секој по еден од два складни (еднакви) правоаголници. Притоа направиле по едно сечење паралелно на еден пар страни на правоаголникот. Зоран добил два правоаголника чии периметри се по $110\,cm$, а Ана добила два правоаголника чии периметри се по $130\,cm$. Определи го периметарот на почетните правоаголници.

75. Ана ги собрала должините на три страни на еден правоаголник и добила $35\,cm$ Бојан собрал должини на три страни на истиот правоаголник и добил $40\,cm$. Определи ја плоштината на овој правоаголник.

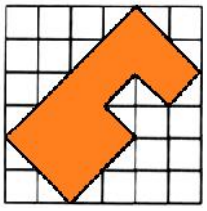
76. Правоаголник со две заемно нормални прави паралелни на неговите страни е поделен на четири помали правоаголници. Периметрите на три мали правоаголници се 100, 70 и 50. Определи ја:
а) најмалата, б) најголемата,
можна вредност која може да ја има периметарот на четвртиот правоаголник.

77. Должините на страните на правоаголникот се $20\,cm$ и $8\,cm$. Овој правоаголник е поделен со отсечки, паралелни на еден пар негови страни, на неколку складни (еднакви) помали правоаголници. Збирот на периметрите на добиените правоаголници е еднаков на $120\,cm$. Должините на страните на секој од овие правоаголници се природни броеви изразени во сантиметри. Пресметај ја плоштината на еден од малите правоаголници.

78. Андреј нацртал фигура во квадратна мрежа како на цртежот десно. Колкав е периметарот на оваа фигура ако дијагоналата на големиот квадрат е еднаква на $10\,cm$? А колкава е плоштината на оваа фигура.



79. Квадрат чија дијагонала е долга $6\,cm$ е поделен на 36 еднакви квадрати. Определи ги периметарот и плоштината на обоената фигура.



80. Квадратот BCD чија страна е еднаква на $8\,cm$ е поделен на квадратни сантиметри. На страните AB, BC, CD и DA соодветно се дадени точки M, N, P и Q такви што $\overline{AM} = 1\,cm$, $\overline{BN} = 2\,cm$, $\overline{CP} = 3\,cm$ и $\overline{DQ} = 4\,cm$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

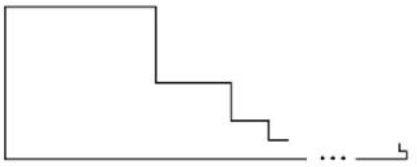
81. Во правоаголникот $ABCD$ отсечките AC и BD се сечат во точката O.

Одреди ја плоштината на правоаголникот, ако растојанието од точката O до поголемата страна е 3 пати помало од растојанието од точката O до помалата страна, а периметарот на правоаголникот изнесува 128 cm.

82. Во квадрат со плоштина 16 dm^2, две паралелни страни се продолжени при што се добил правоаголник со плоштина $28\,dm^2$. Одреди ги страните на правоаголникот.

83. Даден е правоаголник со должини на страни $2023\,cm$ и $1309\,cm$. Правоаголникот е поделен на еднакви квадрати со најголема можна страна чија должина изразена во сантиметри е природен број. Определи го збирот на периметрите на делбените квадрати.

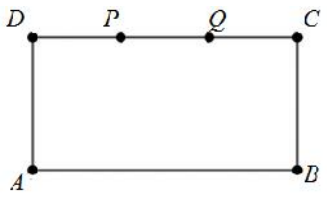
84. Во рамнината е даден квадрат со должина на страна $1024\,cm$. До дадениот квадрат е нацртан квадрат со два пати пократка страна и така се продолжува со цртање на квадрати се додека должините на страните изразени во сантиметри се природни броеви (види цртеж десно).



а) Определи го периметарот на фигурата добиена на погоре опишаниот начин.

б) Пресметај ја плоштината на квадратот кој се наоѓа во средината на вака добиената низа квадрати.

85. Даден е правоаголник $ABCD$. Со точките P и Q едната од поголемите страни е поделена на три еднакви дела (види цртеж).



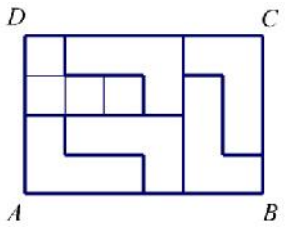
а) Докажи дека трепезот $ABQP$ е рамнокрак.

б) Одреди го односот меѓу плоштините на правоаголникот и трапезот.

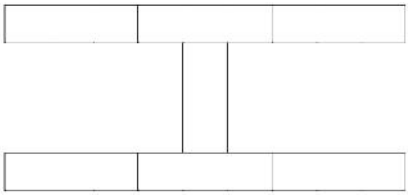
86. Даден е правоаголник $ABCD$ со периметар $40\,cm$. На страната AB е дадена точка M таква што отсечката AM е за $5\,cm$ пократка од

отсечката BC. Ако отсечката MB е три пати подолга од отсечката AM, пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

87. Правоаголникот $ABCD$ е составен од 6 исти фигури во форма на буквата „L“, а секоја буква „L“ е составена од 4 еднакви квадрати (види цртеж). Ако збирот на периметрите на сите букви „L“ е еднаков на $1200\,mm$, пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголникот $ABCD$



88. Седум еднакви правоаголници се наредени како на цртежот десно. Должината на едната страна на правоаголникот е три пати поголема од должината на другата стран, а добиената фигура има периметар $132\,cm$. Колку правоаголници со различен периметар може да се состават помош на овие седум правоаголници и колкави се невните периметри?



89. Од квадрати чии должини на страници изразени во сантиметри се природни броеви треба да се состави правоаголник со плоштина $2005\,cm^2$. Квадратите може да не се складни. Кој најмалиот број потребни квадрати?

90. Еден квадрат е поделен со две прави на четири правоаголници. Колкава е страната на дадениот квадрат, ако се познати плоштините на три од четирите правоаголници кои што изнесуваат $48\,cm^2$, $96\,cm^2$ и $144\,cm^2$. Пресекот е направен така што двата поголеми од споменатите три правоаголници имаат само едно заедничко теме.

91. Дадена е кружница $k(S,r)$ и точка M во нејзината надворешност. Најкраткото растојание од точката M до точките од кружницата е $3\,cm$, а најголемото растојание од точката M до точките од кружницата е $11\,cm$. Определи го радиусот на оваа кружница?

92. Дадена е отсечка AB, $\overline{AB} = 8\,cm$ и кружници $k_1(A, 2\,cm)$ и $k_2(B, 3\,cm)$. Кружницата k е таква што нејзиниот центар припаѓа на правата AB и ги допира кружниците k_1 и k_2. Определи го радиусот на кружницата k.

93. Квадар со рабови $12\,cm, 12\,cm$ и $2\,cm$ има плоштина еднаква на плоштината на коцка. Пресметај го волуменот на оваа коцка.

94. Квадар чии два раба се со должини $4\,cm$ и $6\,cm$ има волумен еднаков на волуменот на коцка со раб $6\,cm$. Определи ја плоштината на овој квадар.

95. Ана, Билјана и Венеса ги мереле должините на рабовите на дрвен квадар $ABCDEFGH$ и тоа три раба од темето A и по еден раб од темето G. Секоја ги собрала измерените должини и добиле $25\,cm$, $27\,cm, 28\,cm$. Дали и како може да се пресмета плоштината на квадарот?

96. Два квадари се составени од 5, односно 7 еднакви коцки. Плоштините на овие квадари се разликуваат за $200\,cm^2$. Определи ја плоштината на една од коцките.

97. Два квадари се составени од 5, односно од 11 еднакви коцки. Волуменот на овие квадари се разликува за $48\,cm^2$. Пресметај ја разликата на плоштините на двата квадари.

98. Квадар со рабови $4\,cm, 6\,cm, 8\,cm$ е расечен со рамнини паралелни на неговите ѕидови на најголеми можни коцки. Должините на рабовите на овие коцки изразени во сантиметри се природни броеви. Определи ја вкупната плоштина на сите така добиени коцки.

99. Дрвен квадар со рабови 72 *dm*, 96 *dm* и 120 *dm* е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, пришто должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

100. Дали постои коцка со раб $a\ cm, a \in \mathbb{N}$, чиј волумен е еднаков на збирот на волумените на квадари со рабови

$$6\ cm, 7\ cm, 18\ cm;\ 11\ cm, 12\ cm, 13\ cm \text{ и } 14\ cm, 15\ cm, 16\ cm\ ?$$

Ако постои определи ја должината на работ на таа коцка.

101. Дали постои коцка со раб $a, a \in \mathbb{N}$, чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на квадарите со рабови $1\ cm, 2\ cm, 3\ cm; 4\ cm, 5\ cm, 6\ cm$ и $7\ cm, 8\ cm, 9\ cm$.

6. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Во секој од градовите Битола, Велес и Кратово живее по едно од девојчињата Анка, Бранка и Дарка. Анка и Бранка ги дале следниве вистинити изјави:
   Анка: *Јас не живеам во Битола.*
   Бранка: *Јас живеам во Кратово.*
   Каде живее секое од девојчињата?

2. Мирјана секогаш ја говори вистината, освен на својот роденден, кога на прашањето кога и е роденден дава невистинит одговор. Стојан на 5. мај на Мирјана и поставил пршање:
   - Кога ти е роденден?
   - Беше вчера, - одговорила Мирјана.

   Утредента, на истото прашање, Стојан добил ист одговор. Кога е роденденот на Мирјана?

3. Горјан, Рампо и Сашко тренираат кошарка, ракомет и одбојка, при што секој од нив тренира само еден спорт. Горјан и Рампо ги дале следниве изјави:
   Горјан: *Јас сум одбојкар, а Сашко тренира кошарка*.
   Рампо: *Сашко е ракометар, а Горјан тренира кошарка*.
   Се покажало дека секој од нив дал еден вистинит и еден невистинит исказ. Со кој спорт се занимава секое од децата?

4. Секој од тројцата ученици Иван, Стефан и Дамјан се занимава само со еден од спортовите: кошарка, ракомет и одбојка, при што не постојат двајца кои тренираат ист спорт. Определи кој што тренира ако е точна само една од следниве реченици:
   1) Иван тренира кошарка.
   2) Стефан не тренира кошарка.
   3) Дамјан не тренира одбојка.

5. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 се поделени во три групи. Докажи дека производот на броевите во најмалку една од овие групи е поголем од 34.

6. Четири другарки Сава, Маја, Темјана и Дарка на писмената работа по математика добиле различни оценки и ниту една не добила единица. Радозналата Бојана, која не била на училиште, се интересирала за нивните оценки и ги добила следниве информации:
   1) Темјана добила 4, а Дарка добила 3,
   2) Темјана добила 5, а Маја добила 4,
   3) Сава добила 4, а Дарка добила 2.

   Во секоја од овие реченици еден дел е точен, а другиот е неточен. Помогни ѝ на Бојана да дознае која ученичка која оценка ја добила.

7. Четири ученици по писмената работа по математика, разговараат за решението на една задача, кое е природен број.
   Ацо: Решението е бројот 9.
   Марко: Решението е прост број.
   Ана: Решението е парен број.
   Марија: Решението е број делив со 15.
   Се покажало дека едно момче и едно девојче дале точни изјави, а другите две неточни. Кој број е решение на задачата.

8. На контролна вежба по математика учениците решавале две задачи. Точните одговори на двете задачи биле природни броеви. По часот Андреј, Бодан и Војдан дале по два искази кои се однесуваат на одговорите на задачите:
   Андреј: Одговорот на првата задача е поголем од 18. Одговорот на втората задача не е поголем од 14.
   Бодан: Одговорот на првата задача е помал од 20. Одговорот на втората задача е 14.
   Војдан: Одговорот на првата задача е 15. Одговорот на втората задача е поголем од 14.
   Познато е дека еден ученик погрешно ги решил двете задачи, додека двата исказа на другите два ученика се точни. Определи го збирот на решенијата на двете задачи.

9. Околу тркалезна маса седат 33 луѓе. Секој од нив или секогаш лаже или секогаш ја говори вистината. Секој од нив изјавил: „Сите десет луѓе десно од мене се лажливци“. Колку лажливци седат на масата?

10. На масата се наоѓаат три карти, на секоја е напишан природен број на

едната страна. Картите се наредени превртени на масата од лево на десно така што броевите на картите не се гледаат. Ана, Бисера и Цветанка пробуваат да ги погодат броевите на картите. На девојчињата им е познато дека:

- сите броеви на картите се меѓусебно различни,
- збирот на сите броеви на картите е еднаков на 13,
- броевите на картите се во растечки редослед од лево кон десно.

Ана го погледна бројот а левата карта и рече: „Немам доволно информации да ги определам другите два броја.“

Потоа Бисера знаејќи ја изјавата на Ана, го погледна бројот на десната карта ја кажа истата речениаца како и Ана. Конечно, Цветанка знаејќи ги изјавите на Ана и Бисера ја погледна средната карта и ја кажа истат реченица.

Дали може врз база на овие информации да определиме кој број е на средната карта?

11. Прераспореди ги цифрите на бројот 11223344 така што ќе добиеш осумцифрен број во кој меѓу две единици има една цифра, меѓу две двојки има две цифри, меѓу две тројки има три цифри и меѓу две четворки има четири цифри.

12. Маја има три кутии и шест топчиња, три црвени и три сини. Во секоја кутија ставила по две топчиња така што во една се наоѓаат две црвени, во друга две сини и во трета едно црвено и едно сино топче. Потоа на секоја кутија залепила по една од следниве реченици:
    - Во оваа кутија се две црвени топчиња.
    - Во оваа кутија се две сини топчиња.
    - Во оваа кутија е едно црвено и едно сино топче.

    Петар треба да погоди какви топчиња се во одделните кутии. Може да извлечи без гледање само едно топче од трите кутии. Притоа знае дека ниту еден напис не соодветствува на сосотојбата во кутијата. Од која кутија треба да го извлече тоа едно топче?

13. Илина за својот 11-ти роденден добила поклон од родителите. Тие малку се пошегувале, па поклонот го ставиле во една од три исто запакувани кутии и на секоја кутија ставиле по еден натпис:
    1) Поклонот е во оваа кутија.
    2) Поклонот не е во оваа кутија.

3) Поклонот е во оваа кутија.
Дали Илина може да заклучи во која кутија е поклонот, ако знае дека меѓу натписите има и точни и неточни?

14. Во една соба има три работни маси и над секоја маса има по една светилка, а во друга три прекинувачи за овие светилки, за секоја по еден. Познато е дека неколку часа пред тоа сите три светилки биле угасени. Како можеш два утврдиш кој прекинувач на која светилка ѝ соодветствува ако во собата со светилки можеш да влезеш само еднаш?

15. Од 27 коцки за играње е составена една голема коцка (На ѕидовите на коцките се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а збирот на броевите запишани на спротивните ѕидови е 7). Кој е најмалиот можен збир на видливите ѕидови на овие коцки?

16. На прашањето кој е бројот на зградата во која живее Стојмен одговорил дека кога ќе ги помножи бројот на своите години, бројот на одделението во кое оди, двоцифрениот број на зградата во која е училиштето и трицифрениот број на зградата во која живее се добива бројот 279279. Кој е бројот на зградата во која живее Стојмен?

17. Ако три саботи во еден месец се со парен датум, кој ден е 28. во тој месец?

18. Една година во месец март имало повеќе понеделници отколку среди, а во јуни повеќе вторници отколку недели. Кој е последниот ден во таа година?

19. Филип има дигитална вага која покажува точен број грамови и 10 вреќички со по 100 златници. Во девет вреќички се златници од по 10 грама, а во една се златници од 11 грама. Како само со едно мерење Филип може да открие во кои вреќички се златници од по 10 грама, а во која се златници од 11 грама?

20. Во една вреќа има $9\,kg$ брашно. Располагаме со вага со два таса и тег од 200 грама. Како со три мерења ќе измериме $2\,kg$ брашно?

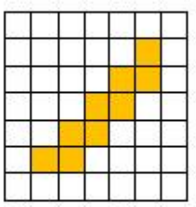
21. Во множество од четири топчиња некои се волшебни. Детектор може

да утврди колку волшебни топчиња има меѓу оние кои се ставени во него. Со помош на три теста со детекторот констатирај кои топчиња се волшебни, а кои не се волшебни.

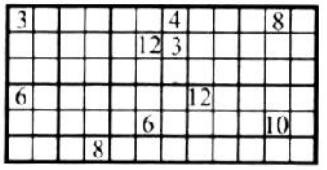
22. Даден е часовник кај кој часовите се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ..., 12. Повлечи две прави кои рамнината на часовникот ја делат на три дела, така што збирот на броевите во секој од добиените делови да е еднаков.

23. Елисавета купила правоаголен чаршав со димензии $9\,dm \times 12\,dm$. Нејзината ќерка Темјана си играла со ножички и од чаршавот отсекла правоаголно праче со димензии $1\,dm \times 8\,dm$, кое потоа го исекла на мали парчиња, така што истото било неупотребливо. Кога Елисавета видела многу се налутила, но по кратко време забележала дека од преостанатиот дел може да отсече едно парче со димензии $1\,dm \times 4\,dm$ и така да добие чаршав со плоштина $96\,dm^2$. Но, нејзиниот син Аритон ја советувал тоа да не го прави, бидејќи тој знае како преостанатиот дел да го исече на три дела од кои може да се сошие квадратен чаршав со плоштина $100\,dm^2$. Како тоа Аритон може да го направи?

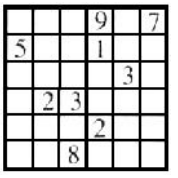
24. Колку најмногу квадрати можеме да обоиме, за да добиената фигура има еднаков периметар како и обоената фигура на цртежот десно?



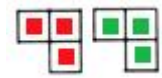
25. Правоаголникот прикажан на цртежот десно, по линиите на мрежата, расечи го на помали правоаголници така, што секој правоаголник ќе содржи точно еден број, и бројот на квадратчињата во секој правоаголник ќе биде еднаков на бројот кој го содржи.



26. Квадратот прикажан на цртежот десно подели го на шетири складни делови (делови со иста форма и еднаков број квадрати) така, што збирот на броевите во секој дел биде еднаков. Најди две решенија на здачата.



27. Колку различни фигури може да се состават од две L тримина (цртеж десно), ако е дозволено составување на триминатa само долж заедничка страна на квадратчињата? Дозволено е триминатa да се вртат и превртуваат. (Две фигури се различни ако со поместување во рамнината или со превртување не можеме да ги доведеме до поклопување.)



28. Распореди 12 точки на 6 прави така што на секоја права има по 4 точки.

29. На 8 прави распореди 16 точки така што на секоја права ќе има по 4 точки.

30. Градинарот Пандил во својата градина засадил 19 ружи во 9 реда така што во секој ред има точно по 5 ружи. Нацртај план според кој се засадени ружите.

31. Градинарот Анте во својата градина засадил 21 ружа во 9 реда така што во секој ред имало по 5 ружи. Нацртј можен распоред на ружите.

32. Во рамнината се дадени три прави a,b,c кои се сечат во една точка. Нацртај уште три прави од кои едната е паралелна со правата a, втората со правата b, а третата со правата c. Кој е најголемиот број пресечни точки што може да ги имаат нацртаните шест прави.

33. Една права ја дели рамнината во која се наоѓа на две област. Колку најмалку, а колку најмногу прави треба да се нацртаат во рамнината, за да тие ја поделат на точно 7 области?

34. Докажи дека меѓу 15 произволни природни броеви постојат два броја чија разлика е делива со 14.

35. Докажи дека секое множество кое содржи 20 природни броеви има подмножество чиј збир на елементи е делив со 19. Забелешка: збирот на елементите на едноелементно множество е самиот тој елемент.

36. Во едно училиште има 733 ученици. Докажи дека најмалку тројца од нив слават роденден во ист ден.

37. Сите ученици на едно одделение на крајот на учебната година добиле преодни оценки: 2, 3, 4 и 5. Ако во тоа одделение има 33 ученици докажи дека барем 3 ученици имаат исти оценки по математика и биологија.

38. Датумот 11.02.2011 е интересен бидејќи ако ги избришеме точките го добиваме бројот 11022011 кој е палндром (број кој и од лево и од десно се чита исто). Колку такви датуми има во третиот милениум?

39. Колку палиндроми покажува дигитален часовник со четири цифри, две за часови и две за минути? (Палиндром е број кој исто се чита од лево кон десно и од десно кон лево.)

40. Сите цифри на петцифрениот број $\overline{abcde}$ се меѓусебно различни и $e \neq 0$. Притоа збирот на цифрите е 10. Кога овој број се собере со бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед се добива број запишан со исти цифри. Колку има такви петцифрени броеви?

41. Определи го бројот природните броеви кои се помали од 2009 и чиј збир на цифри е поголем од 26?

42. Определи го бројот на броевите кои се помали од 2009 и чиј производ на цифри е еднаков на 10?

43. Определи го бројот на дропките кои се еднакви на $\frac{1}{2}$, чии броител и именител се природни броеви, а именителот е поголем од 2, но не е поголем од 100?

44. Определи го бројот на дропките од видот $\frac{a}{b+c}$ кои се еднакви на дропката $\frac{1}{3}$, ако a,b,c се едноцифрени броеви?

45. Одреди го бројот на:
а) двоцифрени б) трицифрени броеви
што се запишани само со парни цифри.

46. На еден шаховски турнир учествувале 12 шахисти. Секој шахист со

секој друг шахист одиграл по 3 партии. Колку партии се одиграни на турнирот.

47. Колку има трицифрени природни броеви такви што цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на десетките и единиците?

48. Определи го бројот на трицифрените природни броеви кај кои производот на цифрите е парен број.

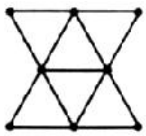
49. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои сите цифри не се различни.

50. Определи го бројот на петцифрените броеви кои се запишани со различни цифри, а во декадниот запис на броевите цифрите 1 и 2 се соседни.

51. Бојан има три коцки за играње: зелена, сина и жолта. На ѕидовите на зелената коцка се запишани броевите 1, 1, 2, 2, 3 и 3, на ѕидовите на жолтата броевите 2, 2, 4, 6, 6 и 6, на ѕидовите на сината броевите 1, 1, 2, 3, 3 и 4. По фрлањето на коцките од добиените броеви Бојан составува трицифрени броеви, така што на местото на стотките ја става зелената, на местото на десетите жолтата и на местото на единиците ја става сината коцка. Колку различни трицифрени броеви може да добие Бојан и колку од овие броеви се деливи со 3? Колку различни трицифрени броеви може Бојан да добие ако редоследот на коцките е жолта, сина, зелена или сина, жолта, зелена?

52. На колку начини бројот 2310 може да се запише како производ на два или три различни броја.

53. Колку отсечки и колку триаголници се прикажани на цртежот десно?



54. Колку најмалку и колку најмногу отсечки, колку најмалку и колку најмногу триаголници се определени со различните точки A, B, C, D и E кои припаѓаат на иста рамнина?

55. Колку отсечки, а колку триаголници се определени со темињата на

конвексен шестаголник?

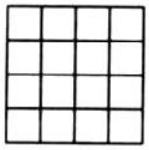
56. Дадени се 100 точки. Ако никои три од овие точки на припаѓаат на иста права, колку прави се определени со овие точки.

57. Колку прави се определени со 5 точки? Разгледај ги сите случаи.

58. Колку прави се определени со 6 точки? Разгледај ги сите случаи.

59. Шест точки A, B, C, D, E и F припаѓаат на рамнината ~ .
    а) Кој е најмалиот број четириаголници чии темиња се точките A, B, C, D, E и F ?
    б) Кој е најголемиот број четириаголници чии темиња се точките A, B, C, D, E и F ?
    в) Дали постои распоред на точките A, B, C, D, E и F таков што тие се темиња на точно 12 четириаголници?

60. Квадрат со димензии $4\,cm \times 4\,cm$ е поделен на мали квадрати со димензии $1\,cm \times 1\,cm$. Колку отсечки и колку квадрати содржи добиената фигура?



61. Колку квадрати може да се формираат така што нивните темиња ќе бидат точките на квадратната мрежа прикажана на цртежот десно?

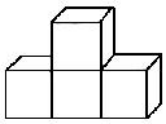
62. Софија има осум стапчиња со дожини $1\,cm, 2\,cm, ..., 8\,cm$ и од нив составува рамнострани триаголници. При составувањето таа стапчињата ги поврзува во нивните крајни точки, без виткање и кршење. На колку начини Софија може да состави рамнострани триаголници? Редоследот на страните и редоследот на стапчињата на нив не е важен.

63. Определи го бројот на триаголниците со периметар 49 кај кои должините на сите страни се прости броеви? Колку меѓу овие триаголници се рамнокраки?

64. Даден е правоаголник $ABCD$ и точки E, F, G, H такви што важи $A - E - B, B - F - C, C - G - D, D - H - A$. Определи го бројот на три-

аголниците чии темиња се од множеството $\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$.

65. Пабло од четири еднакви коцки ја составил фигурата прикажана на цртежот десно. Потоа тој фигурата ја обоил со сина боја. Колку ѕидови на коцка обоил Пабло?



66. Пабло со лепење на 18 еднакви коцки составил постоње за прогласување на победникот во училишниот кроз. Постољето имало три реда и за победникот, второпласираниот и третопласираниот местата биле на три различни висини, при што за секого имало по три коцки за стоење. Потоа постољето го обоил со сина боја. Колку кутии боја му биле потребни на Пабло за да го обои постољето ако со една кутија тој боел 6 ѕидови на една коцка?

67. Дрвена коцка со раб $5\,cm$ е обоена црвено, па е исечена на коцки со раб $1\,cm$ (единечни коцки). Ангел ги зел сите мали коцки со по еден обоен ѕид и од нив составувал нови коцки. Колку коцки Ангел можел да состави под услов да ги употреби сите мали коцки?

68. Дрвена коцка со раб $20\,cm$ е целата обоена, па е исечена на единечни коцки (коцки со раб $1\,cm$). Богдан ги зел сите мали коцки кои имаат точно два обоени ѕида и до нив составувал нови коцки. Колку коцки можел Богдан да состави ако ги употреби сите мали коцки?

69. Торта има форма на коцка со раб $4\,dm$. Горната страна на коцката и сите нејзини бочни ѕидови се премачкани со шлаг. Потоа тортата е расечена на 64 парчиња во форма на коцки со раб $1\,dm$, при што сечењето е направено паралелно со ѕидовите на коцката. Определи колку парчиња има кои:
    а) немаат ѕид премачкан со шлаг,
    б) имаат еден ѕид премачкан со шлаг,
    в) имаат два ѕида премачкани со шлаг.

70. Имаме 12 еднакви коцки за играње. На ѕидовите на секоја коцка се запишани броевите 1, 3, 5, 7, 9 и 11. Збирот на броевите на спротивните ѕидови на коцките е 12. Со овие коцки се составува квадар со

димензии $3\times 2\times 2$. Колку е најголемиот можен збир на броевите на коцките на видливите ѕидови на коцките?

71. Две момчиња играат игра во која секој од нив зголемува две цифри на бројот 130502 за 1. Победник е детето по чиј потег сите цифри на тој шестцифрен потез се еднакви. Дали во оваа игра може да има победник?

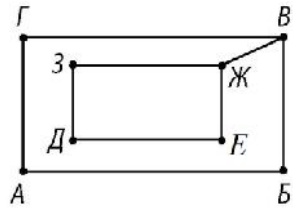
72. Ивана игра со коцки за играње, од кои едната е бела, а другата е црвена. На ѕидовите на белата коцка се запишани броевите 2, 3, 4, 5, 6 и 7, а на црвената броевите 1, 3, 5, 7, 8 и 9. По фрлањето на коцките Ивана составува двоцифрени броеви чија прва цифра ќе биде бројот од белата, а втора бројот од црвената коцка.
а) Колку различни двоцифрени броеви може Ивана да добие на овој начин?
б) Колку различни двоцифрени броеви може да добие ако редоследот на коцките не е важен и колку од овие броеви ќе бидат деливи со 9?

73. Ацо и Марија ја играат следнава игра. Карти, кои се нумерирани со броевите од 1 до 100, ги стават на маса една покрај друга, почнувајќи од 1 па до 100. Потоа Ацо ја зема секоја седма карта, па ја зема секоја карта на кои се броеви кои ја содржат барем една цифра 7. Потоа Марија од преостанатите карти ги зема картите на кои се броеви деливи со 5, а потоа и картите на кои се броеви кои содржат барем една цифра 5. Кој ќе има повеќе карти и за колку? Како ќе се заврши играта, ако Марија почне земање на карти кои со правилото кои се однесува на бројот 5, а Ацо продолжи со правилото кое се однесува на бројот 7?

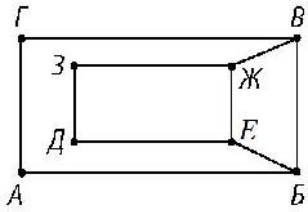
74. Матео и Пабло играат игра испишувајќи ги наименично цифрите на 2006-цифрен број. Матео ја почнува играта испишувајќи една цифра, при што може да избира дали ќе почне од првата или од последната (2006-та) цифра. Пабло ја продолжува низата цифри која ја започнал Матео, така што ја испишува втората или 2005-тата цифра итн. се до испишувањето на последната или првата цифра. Ако на крајот на играта се добие број кој е делив со 9 победува Пабло, а ако се добие број кој не е делив со 9 победува Матео. Кој има победничка стратегија?

75. Матео и Пабло играат игра испишувајќи ги наименично цифрите на 2006-цифрен број. Матео ја почнува играта испишувајќи една цифра, при што може да избира дали ќе почне од првата или од последната (2006-та) цифра. Пабло ја продолжува низата цифри која ја започнал Матео, така што ја испишува втората или 2005-тата цифра итн. се до испишувањето на последната или првата цифра. Ако на крајот на играта се добие број кој е делив со 11 победува Пабло, а ако се добие број кој не е делив со 11 победува Матео. Кој има победничка стратегија?

76. Во малата држава Недојдија градовите се обележани со буквите А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З и некои од нив се поврзани со патишта (цртеж десно). Дали сите патишта може да се поминат точно еднаш при што низ некој град може да се помине и повеќе пати? Ако е тоа можно објасни како и од кое место треба да се тргне?



77. Во малата држава Недојдија градовите се обележени со буквите А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З и некои од нив се поврзани со патишта (цртеж десно). Дали сите патишта може да се поминат точно еднаш при што низ некој град може да се помине и повеќе пати? Ако е тоа можно објасни како и од кое место треба да се тргне?



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. МНОЖЕСТВА

1. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$. Колку подмножества има A кај кои збирот на најмалиот и најголемиот елемент е еднаков на 5?
Решение. Имаме пет подмножества кои го задоволуваат условот на задачата и тоа: $\{1,4\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{2,3\}$.

2. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Определи го бројот на подмножествата на множеството A чиј производ на најмалиот и најголемиот елемент е еднаков на 6.
Решение. Имаме: $6=1\cdot 6=2\cdot 3$. Бараните множества се:
$\{1,6\}, \{1,2,6\}, \{1,3,6\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,4,6\},$
$\{1,2,5,6\}, \{1,3,4,6\}, \{1,3,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{1,2,3,4,6\},$
$\{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{2,3\},$
што значи дека вкупно има 17 подмножества.

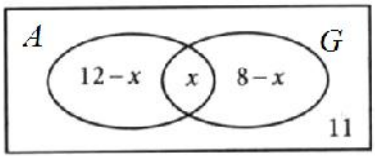
3. Дадени се множествата
$$S=\{1,2,3,4,5\},\ Z=\{c \mid c=a+b,\ a,b\in S,\ a\neq b\}.$$
Определи ги множествата
а) $(Z\setminus S)\cup(S\setminus Z)$, б) $Z\cap(S\setminus Z)$, в) $(Z\setminus S)\cap(S\setminus Z)$.
Решение. Имаме $Z=\{3,4,5,6,7,8,9\}$. Според тоа, $Z\setminus S=\{6,7,8,9\}$ и $S\setminus Z=\{1,2\}$.
а) Имаме: $(Z\setminus S)\cup(S\setminus Z)=\{6,7,8,9\}\cup\{1,2\}=\{1,2,6,7,8,9\}$.
б) Имаме: $Z\cap(S\setminus Z)=\{3,4,5,6,7,8,9\}\cap\{1,2\}=\varnothing$.
в) Имаме: $(Z\setminus S)\cap(S\setminus Z)=\{6,7,8,9\}\cap\{1,2\}=\varnothing$.

4. Дадени се множествата $S=\{1,2,3,4\}$ и $Z=\{c=ab \mid a\in S, b\in S\}$. Определи ги множествата
а) $(Z\setminus S)\cup(S\setminus Z)$, б) $Z\cap(S\setminus Z)$, в) $(Z\setminus S)\cap(S\setminus Z)$.
Решение. Имаме $Z=\{1,2,3,4,6,8,9,12,16\}$. Според тоа, $S\setminus Z=\varnothing$ и $Z\setminus S=\{6,8,9,12,16\}$, па затоа
$$(Z\setminus S)\cup(S\setminus Z)=\{6,8,9,12,16\}\cup\varnothing=\{6,8,9,12,16\},$$

$$Z \cap (S \setminus Z) = Z \cap \varnothing = \varnothing \text{ и}$$
$$(Z \setminus S) \cap (S \setminus Z) = (Z \setminus S) \cap \varnothing = \varnothing .$$

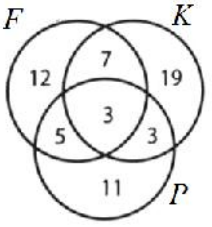
5. Од 29 ученици во едно одделение 12 ученици дополнително одат на курс по англиски јазик, а 8 ученици дополнително одат на курс по германски јазик. Колку ученици одат на двата курса, ако 11 ученици не одат на ниту еден курс?

Решение. Ако со x го означиме бројот на учениците кои дополнително ги посетуваат два курса, тогаш бројот на учениците кои го посетуваат курсот по англиски јазик е $12-x$, а бројот на учениците кои го посетуваат курсот по германски јазик е $8-x$ (цртеж десно). Од Веновиот дијаграм воочуваме дека $12-x+x+8-x+11=29$, т.е. $x=2$.



6. На еден летен камп имало 70 ученици. Од нив фудбал играле 27 ученици, кошарка играле 32 ученика и 22 ученика пливале. Фудбал и кошарка играле 10 ученици, со кошарка и пливање се занимавале 6 ученици, 8 ученици и пливале и играле фудбал, а 3 пливачи играле и фудбал и кошарка. Колку ученици не се занимавале со ниту еден спорт?

Решение. Со F, K и P да ги означиме множествата ученици кои се занимавале со фудбал, кошарка и пливање, соодветно. Од условот на задачата лесно следува Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Според тоа, со еден од спортовите се занимавале вкупно $3+3+5+7+19+11+12=60$ ученици. Значи, $70-60=10$ ученици не се занимавале со ниту еден спорт.



7. Филип на својот роденден повикал 26 другарчиња од неговото одделение. Мајката на Филип подготвила сендвичи со сирење, сендвичи со свински врат и мали пици. Пици јаделе 16 деца, сендвичи со сирење јаделе 15 деца и сендвичи со свински врат јаделе 13 деца. Пици и сендвичи со сирење јаделе шест деца, пица и сендвичи со свински врат јаделе 5 деца, а сендвичи со сирење и сендвичи со свински врат јаделе 7 деца. Колку деца јаделе и пица и двата вида сендвичи?

Решение. Нека x е бројот на децата кои јаделе и пица и двата вида сендвичи. Само сендвичи со сирење јаделе

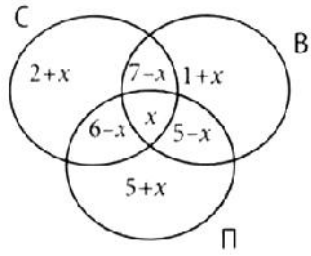
$$15-(6-c+7-x+7)=2+x$$

деца, само сендвичи со свински врат јаделе

$$13-(5-x+7-x+x)=1+x$$

деца, а само пици јаделе

$$16-(5-x+6-x+x)=5+x.$$



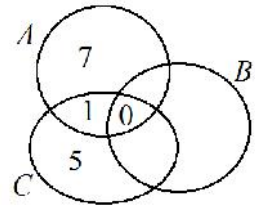
Значи,

$$2+x+7-x+1+x+6-x+x+x+5+5-x=26,$$
$$26+x=26,$$
$$x=0.$$

Според тоа, ниту едно дете не јадело и пица и од двата вида сендвичи.

8. Дадени се множествата A,B,C такви, што $A\cap B\cap C=\varnothing$. Ако множеството $A\setminus B$ има 8 елементи, множеството $C\setminus B$ има 6 елементи, $A\cap C$ има еден елемент, а $A\cup B\cup C$ има 20 елементи, колку елементи има множеството B?

Решение. Множеството $A\cap C$ има 1 елемент, множеството $A\cap B\cap C$ има 0 елементи, па затоа од 8 елементи кои се во $A\setminus B$ точно 7 се само во множеството A. На потполно ист начин заклучуваме дека од 6 елементи кои се во $C\setminus B$ точно 5 се во множеството C. Последното значи дека $7+5+1=13$ елементи се во $A\cup C$ но не се во B. Но, $A\cup B\cup C$ има 20 елементи, па затоа множеството B има 7 елементи.



9. Дадени се множествата A,B,C такви што $A\setminus B$ има 8 елементи, $B\setminus C$ има 10 елементи и $C\setminus A$ има 6 елементи. Множеството $A\cup B\cup C$ има 30 елементи. Колку елементи има множеството $A\cap B\cap C$?

Решение. Множествата $A\setminus B$, $B\setminus C$ и $C\setminus A$ се по парови дисјунктни, па затоа $|(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)|=24$. Понатаму, од

$$A\cap B\cap C=(A\cup B\cup C)\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A))$$

следува

$$|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|-|(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)|=30-24=6,$$

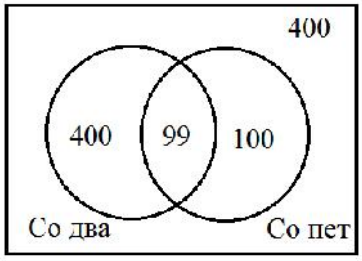
т.е. множеството $A \cap B \cap C$ има 6 елементи.

10. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 1000 и кои не се деливи ниту со 2, ниту со 5.

Решение. Броеви кои се помали од 1000 и се деливи со 2 се вкупно 499. Броеви кои се помали од 1000 и се деливи со 5 се вкупно 199. Броеви кои се помали од 1000 и се деливи и со 2 и со 5, што значи се деливи со 10 се вкупно 99. Значи, броеви кои се деливи со 2 но не се деливи со 5 се $499 - 99 = 400$, а броеви кои се деливи со 5, но не се деливи со 2 се вкупно $199 - 99 = 100$. Според тоа, броеви кои се деливи со 2 или се деливи со 5 се

$$400 + 99 + 100 = 599.$$

Конечно, броеви кои се помали од 1000 и кои не се деливи ниту со 2 ниту со 5 се $999 - 599 = 400$ (види цртеж десно).

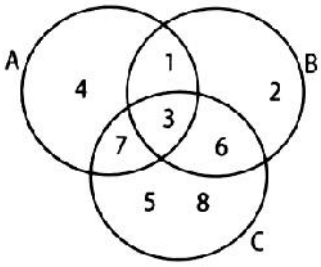


11. Определи ги множествата A, B и C ако

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \quad A \cap B \cap C = \{3\},$$
$$C \setminus (A \cup B) = \{5,8\}, \quad A \cap B = \{1,3\}, \quad B \setminus C = \{1,2\},$$
$$A \setminus C = \{1,4\}, \quad B \cap C = \{3,6\}.$$

Решение. Од податоците лесно се добива Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Според тоа,

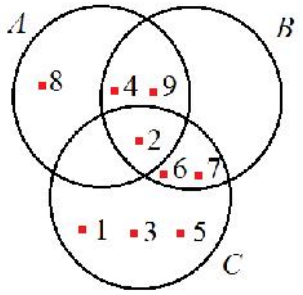
$$A = \{1,3,4,7\},$$
$$B = \{1,2,3,6\},$$
$$C = \{3,5,6,7,8\}.$$



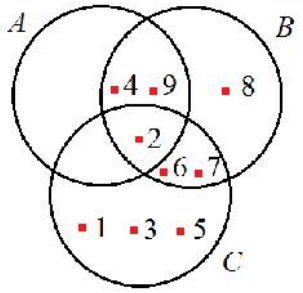
12. Определи ги елементите на множествата A, B, C ако важи:

$A \cup B \cup C = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ и n е едноцифрен број$\}$,
$A \cap B \cap C = \{2\}$, $C \setminus (A \cup B) = \{1,3,5|$, $(B \cap C) \setminus A = \{6,7\}$,
$(A \cap C) \setminus B = \varnothing$, $A \cap (B \cup C) = \{2,4,9\}$.

Решение. Ќе користиме Венови дијаграми. Според условите на задачата следува дека имаме две решенија кои се прикажани на долните цртежи:



$A=\{2,4,8,9\},\ B=\{2,4,6,7,9\},$
$C=\{1,2,3,5,6,7\}.$



$A=\{2,4,9\},\ B=\{2,4,6,7,8,9\},$
$C=\{1,2,3,5,6,7\}.$

13. Со Венов дијаграм претстави ги множествата:

а) $A=\{a,m,p,x\},\ B=\{b,c,d\},$

б) $A=\{a,m,p,x\},\ B=\{a,b,x,u,c,d\},$

в) $A=\{a,m,p,x\},\ B=\{a,b,c,m,p,x\},$

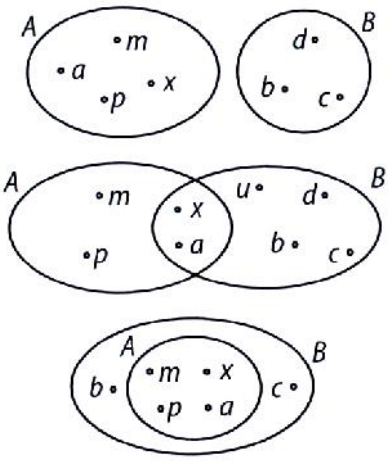
и определи го бројот на елементите на множеството $A\cup B$. Провери дали за дадените множества важи равенството

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$

каде со $|X|$ е означен бројот на елементите на множеството X.

Решение. а) Множествата A и B се дисјунктни. Имаме $|A|=4$, $|B|=3$, $|A\cup B|=7$ и $|A\cap B|=0$, па затоа

$$|A|+|B|-|A\cap B|=4+3-0$$
$$=7=|A\cup B|.$$



б) Имаме $|A\cup B|=8$, $|A|=4$, $|B|=6$ и $|A\cap B|=2$, па затоа

$$|A|+|B|-|A\cap B|=4+6-2$$
$$=8=|A\cup B|.$$

в) Имаме $|A\cup B|=6$, $|A|=4$, $|B|=6$ и $|A\cap B|=4$, па затоа

$$|A|+|B|-|A\cap B|=4+6-4$$
$$=6=|A\cup B|.$$

14. Определи ги вредностите на променливите x,y и z ако

$A=\{1,9,2011,2012,4561\}$, $B=\{9,2011,z\}$,

$C=\{1,9,x,y\}$, $C\subset(A\cap B)$ и C има три елементи.

Решение. За да множеството C има три елементи мора и пресекот на множествата A и B да има најмалку три елементи, од каде следува дека $z\in\{1,2012,4561\}$. Но, $1\in C$, па затоа 1 мора да припаѓа и на пресекот на множествата A и B, па затоа $z=1$. За да множеството C има три елементи, еден од елементите x или y мора да е еднаков на 2011, а другиот може да биде било кој од елементите 1, 9 или 2011. Според тоа:

1) $x=2011$, $y\in\{1,9,2011\}$ или
2) $y=2011$, $x\in\{1,9,2011\}$.

15. Во шесто одделение на едно училиште има 50 ученици, од кои 39 тренираат кошарка, а 21 тренираат фудбал. Секој ученик тренира барем еден спорт. Колку ученици тренираат и кошарка и фудбал?

Решение. Нека A е множеството ученици кои трнираат кошарка, а B е множеството ученици кои тренираат фудбал. Тогаш множеството ученици кои тренираат фудбал или кошарка е $A\cup B$, а множеството ученици кои тренираат и фудбал и кошарка е $A\cap B$. Притоа важи $|A\cup B|=50$, $|A|=39$ и $|B|=21$. Ако го искористиме равенството $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$, добиваме $50=39+21-|A\cap B|$, односно $|A\cap B|=39+21-50=10$. Значи, 10 ученици тренираат и фудбал и кошарка.

16. Близнаците Златко и Златка го славеле својот 11. роденден. За прославата нивната мајка Веселинка направила 100 колачи. Златко и Златка колачите ги украсувале со ореви, суво грозје и мелено чоколадо. Колачите ги ставиле во ред, а потоа на секој втор колач ставиле чоколадо, на секој трет суво грозје и на секој петти ореви. Колку колачи биле украсени само со чоколадо и со суво грозје? Колку колачи воопшто не биле украсени?

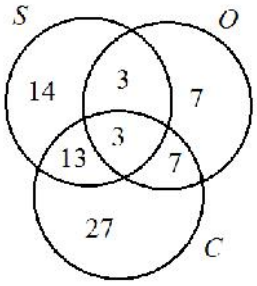
Решение. Множествата колачи украсени со суво грозје, ореви и чоколадо да ги означиме со S,O и C соодветно.

Од $100=2\cdot 50$ следува $|C|=50$, од $100=3\cdot 33+1$ следува $|S|=33$ и од $100=5\cdot 20$ следува $|O|=20$.

Понатаму, $\mathrm{NZS}(2,3)=6$ и од $100=6\cdot 16+4$ следува дека $|C\cap S|=16$,

$\mathrm{NZS}(2,5)=10$ и од $100=10\cdot 10$ следува $|C\cap O|=10$, $\mathrm{NZS}(3,5)=15$ и од $100=6\cdot 15+10$ следува $|O\cap S|=6$. Конечно, $\mathrm{NZS}(2,3,5)=30$ и од $100=3\cdot 30+10$ следува $|S\cap C\cap O|=3$.

Од горните податоци го добиваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно.



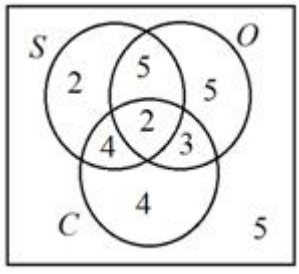
Според тоа, само со чоколадо и со суво грозје биле украсени 13 колачи, а неукрасени останале

$$\begin{aligned} n &= 100-|S\cup C\cup O| \\ &= 100-(14+3+3+13+27+7+7) \\ &= 100-74=26 \end{aligned}$$

колачи.

17. На роденденската прослава близнаците Златко и Златка ги повикале своите пријатели, па на прославата имало вкупно 30 деца. На крајот од прославата се покажало дека пет деца јаделе колачи кои воопшто не биле украсени. Од преостанатите деца, десет не јаделе колачи кои биле украсени со ореви, а две деца не јаделе колачи кои биле украсени со чоколадо и ореви. Четири деца не јаделе колачи кои биле украсени со орев и суво грозје. Пет деца јаделе колачи кои биле украсени само со ореви, дванаесет деца не јаделе колачи украсени со суво грозје, а две деца јаделе колачи украсени и со ореви и со чоколадо и со суво грозје. Колку деца јаделе колачи украсени и со ореви и со суво грозје, ако секое дете изело барем еден колач?

Решение. Нека S е множеството деца кои јаделе колачи украсени со суво грозје, C множеството деца кои јаделе колачи украсени со чоколадо и O множетвото деца кои јаделе колачи украсени со ореви. Пет деца јаделе колачи кои не биле украсени, па затоа нив нема да ги вбројуваме во ниту едно множество. Две деца јаделе колачи украсени на трите начини, па тие ги запишуваме во пресекот на трите множества. Две деца не јаделе колачи кои биле украсени со чоколадо и ореви, па тие ги запишуваме само во множеството S. Слично, четири деца запишуваме само во множеството C и пет деца запишуваме само во множеството O. Дванаесет деца не јаделе чоко-



ладо со суво грозје. Од нив $4+5=9$ веќе ги запишавме само во C и само во O, па затоа $12-9=3$ запишуваме во $C\cap O$. Десет деца не јаделе колачи со ореви, па затоа во $C\cap S$ запишуваме $10-(2+4)=4$. Конечно, колачи и со ореви и со суво грозје јаделе

$$25-(2+4+2+3+5+4)=5 \text{ деца.}$$

18. Во едно одделение со пливање се занимава 5 ученици, со велосипедизам 12 ученици и со трчање 9 ученици, при што некои ученици се занимаваат и со неколку активности, а некои ниту со една. Шест ученици се занимаваат со трчање и со велосипедизам, а четири ученици се занимаваат со пливање и со велосипедизам. Два ученика се занимаваат со сите три активности, а нема ученик кој се занимава само со пливање и трчање. Два ученика не се занимава со ниту една активност.

а) Колку ученици се занимаваат само се една активност?

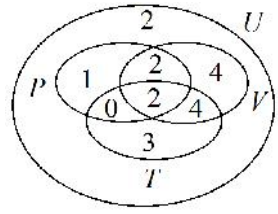
б) Колку ученици се занимаваат само со трчање?

в) Колку ученици се занимаваат со пливање и велосипедизам, а не трчаат?

г) Колку ученици има во ова одделение?

д) Колку ученици се занимаваат барем со една активност?

Решение. Ако со U,P,V,T соодветно ги означиме множествата на сите ученици, учениците кои се занимаваат пливање, велосипедизам и трчање, тогаш од расположливите податоци лесно се составува Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Оттука добиваме:



а) Само со една активност се занимаваат $1+4+3=8$ ученици.

б) Само со трчање се занимаваат 3 ученици.

в) Со пливање и велосипедизам, но не и со трчање се занимаваат 2 ученика.

г) Во ова одделение учат $2+1+2+4+2+4+3=18$ ученици.

д) Барем со една активност се занимаваат $18-2=16$ ученици.

19. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,100,101\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A\cup B=S$, $A\cap B=\varnothing$ и збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B?

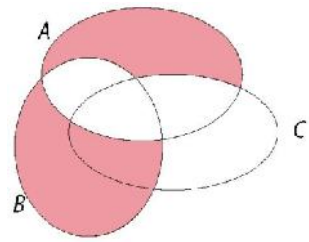
Решение. Нека збирот на елементите на множеството A е еднаков на

збирот на елементите на множеството B и е еднаков на x. Тогаш

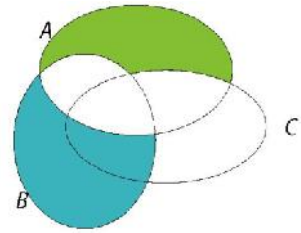
$$\begin{aligned} 2x &= 1+2+3+...+100+101 \\ &= (1+100)+(2+99)+...+(50+51)+101 \\ &= 50\cdot 101+101 = 51\cdot 101, \end{aligned}$$

што не е можно бидејќи во последното равенство левата страна е парен, а десната е непарен број. Според тоа, не постојат множества A и B со саканите својства.

20. Дадени се множествата A, B и C. Со помош на операциите за множества запиши го множеството кое е составено од обоените делови (подмножества).



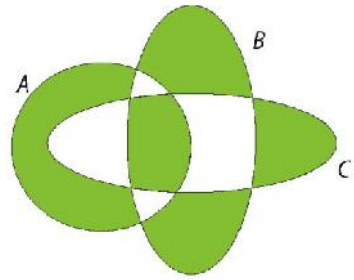
Решение. Обоените делови всушност се унија на зелениот и синиот дел на цртежот десно.



Бидејќи зелениот дел е еднаков на $A\setminus(B\cup C)$, а синиот дел е еднаков на $B\setminus A$, добиваме дека обоениот дел е еднаков на

$$(A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus A).$$

21. Дадени се множествата A, B и C. Користејќи ги основните операции за множествата запиши го множеството кое е составено од обоените делови на цртежот десно.



Решение. Од цртежот е јасно дека пресекот на трите множества е еден од обоените делови. Понатаму, преостанатиот обоен дел од множеството A нема заеднички точки со множествата B и C, па затоа можеме да го запишеме како $A\setminus(B\cup C)$. Истото важи и за преостанатите делови од множествата B и C. Според тоа, едно решение на задачата е

$$(A\cap B\cap C)\cup(A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus(A\cup C))\cup(C\setminus(A\cup B)).$$

22. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,8,9\}$. Определи ги сите множества A, B и C кои ги задоволуваат условите $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\varnothing$,

$A \cup B \cup C = S$, множеството A има помалку елементи од множеството B, множеството B има помалку елементи од множеството C и збирот на елементите во секое од множествата A, B и C е еднаков.

Решение. Збирот на елементите на множеството S е

$$1+2+3+...+8+9=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=45.$$

Множествата A, B и C се по патови дисјунтни, па како збирот на нивните елементи е еднаков, добиваме дека збирот на елементите во секое од овие три множества е $45:3=15$. Бидејќи ниту едно од множествата A, B и C не може да има еден елемент, во спротивно збирот на елементите во тоа множество ќе биде најмногу 9, заклучуваме дека мниожеството A мора да има најмалку 2 елемент. Но, B има повеќе елементи од A, па затоа B мора да има најмалку 3 елементи, а од иста причина C мора да има најмалку 4 елементи. Но, $|S|=9$, па како $9=2+3+4$, заклучуваме дека $|A|=2, |B|=3, |C|=4$.

Понатаму, бројот 15 како збир на два едноцифрени броја може да се запише на два начини и тоа $15=9+6=8+7$, па затоа сите можни решенија на задачата се:

	A	B	C
Прво	6, 9	2, 5, 8	1, 3, 4, 7
Второ	6, 9	3, 4, 8	1, 2, 5, 7
Трето	6, 9	3, 5, 7	1, 2, 4, 8
Четврто	7, 8	1, 5, 9	2, 3, 4, 6
Петто	7, 8	2, 4, 9	1, 3, 5, 6
Шесто	7, 8	4, 5, 6	1, 2, 3, 9

23. Определи го бројот на тричлените подмножества на множеството $A=\{\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}\}$ кај кои збирот на најмалиот и најголемиот член е еднаков на 1?

Решение. Множеството A има три пара елементи чиј збир е еднаков на 1 и тоа: $\frac{1}{7}$ и $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{7}$ и $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$. Тричлени подмножества кои го задоволуваат условот на задачата и чии елементи се $\frac{1}{7}$ и $\frac{6}{7}$ се 4 (третиот елемент е некоја од дропките $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7}$). Тричлени подмножества кои го задоволуваат условот на задачата и чии елементи се $\frac{2}{7}$ и $\frac{5}{7}$ има 2

(третиот елемент е некоја од дропките $\frac{3}{7},\frac{4}{7}$). Нема тричлени подмножества кои го задоволуваат условот на задачата и чии елементи се $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$.

Според тоа, има $4+2=6$ тричлени подмножества кои го задоволуваат условот на задачата.

24. Определи го бројот на четиричлените подмножества на множеството $A=\{\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}\}$ кај кои збирот на најмалиот и најголемиот член е еднаков на 1?

Решение. Множеството A има три пара елементи чиј збир е еднаков на 1 и тоа: $\frac{1}{7}$ и $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{7}$ и $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$. Четиричлени подмножества чии два елементи се $\frac{1}{7}$ и $\frac{6}{7}$ има 6 бидејќи третиот и четвртиот елемент може да бидат: $\frac{2}{7},\frac{3}{7}$; $\frac{2}{7},\frac{4}{7}$; $\frac{2}{7},\frac{5}{7}$; $\frac{3}{7},\frac{4}{7}$; $\frac{3}{7},\frac{5}{7}$; $\frac{4}{7},\frac{5}{7}$. Четиричлени подмножества чии елементи се $\frac{2}{7}$ и $\frac{5}{7}$ има само едно и тоа ги содржи дропките $\frac{3}{7},\frac{4}{7}$, а не постои четворочлено подмножество чии елементи се $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$. Значи, имаме 7 подмножества на множеството A со саканото својство.

25. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,2008,2009\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A\cup B=S$, $A\cap B=\varnothing$ и збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B?

Решение. *Прв начин*. Множеството S содржи 1004 парни и 1005 непарни природни броеви. Збир на произволен број парни броеви е парен број, а збир на непарен број непарни броеви е непарен број. Според тоа, збирот на елементите на множеството S е непарен број, па затоа не може да се подели на две дисјунктни множества со еднаков збир на елементите кои ги содржат.

Втор начин. Збирот на елементите на множеството S е

$$\begin{aligned} m &= 1+2+3+...+2006+2007+2008+2009 \\ &= (1+2008)+(2+2007)+(3+2006)+...+(1004+1005)+2009 \\ &= 1004\cdot 2009+2009=1005\cdot 2009, \end{aligned}$$

што значи дека е непарен број. Затоа S не може да се подели на две дисјунктни множества со еднаков збир на елементите кои ги содржат

26. Дадени се множествата

$$S_1 = \{1\}, S_2 = \{2,3\}, S_3 = \{4,5,6\}, S_4 = \{7,8,9,10\}, \ldots$$

Определи го збирот на елементите на множеството S_{10}.

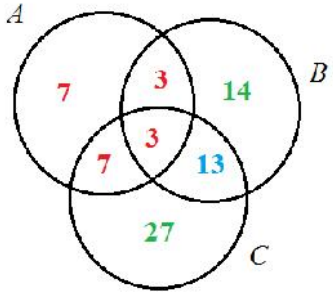
Решение. Множеството S_1 има 1 елемент, множеството S_2 има 2 елементи итн. множеството S_9 има 9 елементи. Според тоа, множествата S_1, S_2, ..., S_9 имаат $1+2+\ldots+9=45$ елементи, т.е. во нив се содржат броевите од 1 до 45. Понатаму, множеството S_{10} има 10 елементи, т.е. $S_{10} = \{46,47,48,\ldots,54,55\}$. Конечно, збирот на елементите на множеството S_{10} е:

$$46+47+48+\ldots+53+54+55 = (46+55)+(47+54)+\ldots+(50+51)$$
$$= 5\cdot 101 = 505.$$

27. Ана, Бранка и Вера играат игра со карти кои се нумерирани со броевите од 1 до 100. Прво Ана ги зема картите на кои се броевите деливи со 5. Потоа Бранка од преостанатите карти ги зема картите кои се деливи со 3 и на крајот Вера од преостанатите карти ги зема картите на кои се запишани парни броеви. Кое девојќе ќе има најмногу карти?

Решение. *Прв начин*. Ана ќе има 20 карти, бидејќи меѓу првите 100 броја има 20 кои се деливи со 5. Бранка ќе има 27 карти, бидејќи меѓу првите 100 броја имаа 33 кои се деливи со 3, но Ана веќе има 6 карти на кои се запишани броевите кои се деливи со 5 и со 3. Конечно, Вера исто така ќе земе 27 карти, бидејќи меѓу првите 100 броја има 50 парни, но секој петти е делив со 5 (такви има 10), а секој трет е делив со 3 (такви има 16, но 3 се деливи и со 5, па ќе останат 13) и сега $50-(10+13)=27$. Конено, Бранка и Вера ќе имаат еднаков број карти, по 27.

Втор начин. Со A да го означиме множеството броеви кои се деливи со 5, со B множеството броеви кои се деливи со 3 и со C множеството броеви кои се деливи со 2.



Множеството $A \cap B \cap C$ се броевите кои се деливи со 30 и такви се 3 броја,

множеството $A \cap B$ се броевите кои се делив со 15 и такви се 6 броја, множеството $B \cap C$ се броевите кои се деливи со 6 и такви се 16 броја, а множеството $C \cap A$ се броевите кои се делив со 10 и такви се 10 броја. Со помош на овие податоци го составуваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Ана ќе ги земе сите елементи од множеството A и тоа се $7+7+3+3=20$, Бранка ќе ги земе пресотанатите елементи од множеството B и тоа се $13+14=27$, а Вера ќе ги земе преостанатите елементи од множеството C, односно 27.

28. Определи ги множествата A и B за кои важи

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\},\ A \cap B = \{8,9,10,11,12\}$$

и збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B.

Решение. Бидејќи броевите 8, 9 ,10, 11 и 12 се заеднички за множествата A и B, збирот на преостанатите елементи од множествата A и B е еднаков на $1+2+3+4+5+6+7=28$. Но, множествата A и B треба да имаат еднаков збир на елементите, па затоа броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 треба да се распределени во множествата A и B така што збирот на елементите во секое множество ќе биде $28:2=14$. Значи задачата има повеќе решенија:

1) $A=\{1,6,7,8,9,10,11,12\},\ B=\{2,3,4,5,8,9,10,11,12\}$,
2) $A=\{2,5,7,8,9,10,11,12\},\ B=\{1,3,4,6,8,9,10,11,12\}$,
3) $A=\{3,4,7,8,9,10,11,12\},\ B=\{1,2,5,6,8,9,10,11,12\}$,
4) $A=\{1,2,4,7,8,9,10,11,12\},\ B=\{3,5,6,8,9,10,11,12\}$,
5) $A=\{2,3,4,5,8,9,10,11,12\},\ B=\{1,6,7,8,9,10,11,12\}$,
6) $A=\{1,3,4,6,8,9,10,11,12\},\ B=\{2,5,7,8,9,10,11,12\}$,
7) $A=\{1,2,5,6,8,9,10,11,12\},\ B=\{3,4,7,8,9,10,11,12\}$,
8) $A=\{3,5,6,8,9,10,11,12\},\ B=\{1,2,4,7,8,9,10,11,12\}$.

2. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Користејќи ги цифрите 0, 1, 2 и 7 запиши три различни четирицифрени броја чиј збир е делив со 100. Притоа, во секој од броевите употреби ги сите цифри.

   Решение. Еден број е делив со 100 ако последните две цифри се нули. Последната цифра на збирот е 0 , ако цифрата на единиците е 0 или пак 1, 2 и 7. Во првиот случај цифрите на десетките се 1, 2 и 7, а во вториот случај се 0, 2 и 7 или 1, 1 и 7.

   Во првиот случај бараните четирицифрени броеви, односно нивните збирови се:

   $$2710+1720+1270,\ 7210+1720+1270,\ 2710+7120+1270,$$
   $$2710+1720+2170,\ 7210+1720+2170,\ 2710+7120+2170,$$
   $$7210+7120+1270,\ 7210+7120+2170.$$

   Во вториот случај се :

   $$2701+1072+1027,\ 7201+1072+1027,\ 7021+1072+1207,$$
   $$7021+1072+2107,\ 2071+1702+1027,$$
   $$2017+7102+1027,\ 2071+7012+2017.$$

2. Стојан и Зоран бираат по четири броја, т.е.вкупно осум, од дадените девет броеви: 4, 12, 8, 13, 24, 14, 7, 5 и 23. Констатирале дека збирот на броевите кој ги избрал Стојан е три пати поголем од збирот на броевите кои ги избрал Зоран? Кој број не е избран?

   Решение. Нека x е збирот на броевите кои ги избрал Зоран. Тогаш $3x$ е збирот на броевите кои ги избрал Стојан. Збирот на броевите кои биле избрани е $4x$. Собирците во збирот $4x$ или се деливи со 4 или збирот на нивните остатоци при делење со 4 е делив со 4. Остатоците на 12, 8, 13, 24, 14, 7, 5, 23 при делење со 4 се 0, 0, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 3. Очигледно не е избран бројот кој при делење со 4 дава остаток 2, а тоа е бројот 14.

3. Дали е збирот на простите делители на бројот 2010 прост број?

   Решение. Прости делители на бројот 2010 се: 2, 3, 5 и 67. Нивниот збир е $2+3+5+67=77$ и не е прост број бидејќи $7 \mid 77$.

4. Дадени се неколку последователни прости броеви. Определи го нивниот збир ако производот на најмалиот и најголемиот од овие броеви е 589.

   Решение. Бројот 589 како производ на два броја може да се запише само на два начина и тоа: $589 = 1 \cdot 589 = 19 \cdot 31$. Бидејќи броевите 1 и 589 не се прости, двата прости броја се 19 и 31. Значи, последователните прости броеви се: 19, 23, 29 и 31. Нивниот збир е:

   $$19 + 23 + 29 + 31 = 102 .$$

5. Вистински делители на даден природен број се сите делители различни од самиот тој број, вклучувајќи го и бројот 1. За еден природен број велиме дека е совршен ако е еднаков на збирот на сите свои вистински делители. Определи ги совршените броеви во првата десетка природни броеви.

   Решение. Вистински делители на бројот 1 не постојат. Вистински делител на секој прост број е само бројот 1, па затоа ниту еден прост број не е совршен. Значи, броевите 2, 3, 5 и 7 не се совршени. Вистински делители на бројот 4 се 1 и 2, чиј збир е 3, па затоа тој не е совршен број. Вистински делители на бројот 8 се 1, 2 и 4 и нивниот збир е 7, па затоа тој не е совршен број, а не се совршени ниту броевите 9 и 10 (Провери!). Вистински делители на бројот 6 се 1, 2 и 3, а нивниот збир е $1 + 2 + 3 = 6$, што значи дека во првата десетка бројот 6 е единствениот свршен број.

6. а) Дали во втората десетка има совршени природни броеви?
   б) Определи ги совршените броеви во третата десетка природни броеви.

   Решение. а) Ниту еден прост број не е совршен. За сложените броеви од втората десетка имаме:

	Вистински делители	Збир	Да/не
12	1, 2, 3, 4, 6	16	не
14	1, 2, 7	10	не
15	1, 3, 5	9	не
16	1, 2, 4, 8	15	не
18	1, 2, 3, 6, 9	21	не
20	1, 2, 4, 5, 10	22	не

   б) Ниту еден прост број не е совршен. За сложените броеви од третата

десетка имаме:

	Вистински делители	Збир	Да/не
21	1, 3, 7	11	не
22	1, 2, 11	14	не
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12	36	не
25	1, 5	6	не
26	1, 2, 13	16	не
27	1, 3, 9	13	не
28	**1, 2, 4, 7, 14**	**28**	**да**
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15	42	не

Значи, единствен совршен број во третата десетка е бројот 28.

7. Дали може број запишан само со четворки да е делив со број запишан само со тројки (најмалку две тројки)? Дали број запишан само со тројки може да е делив со број запишан само со четворки (најмалку две четворки)?

Решение. Бидејќи бројот 444444 е делив со бројот 3 и со бројот 11, тој е делив со бројот 33, што значи дека одговорот на првото прашање е позитивен. Одговорот на второто прашање е негативен, бидејќи број запишан само со тројки е непарен број и не може да е делив со број кој е запишан само со четворки, бидејќи вториот број е парен.

8. Стојмен ги запишал сите броеви од 2012 до 1. Прво го пречкртал бројот 2012 и сите негови делители, потоа секој следен пат во низата го пречкртувал првиот непречкртан број и сите негови делители. Кој е бројот што Стојмен последен го пречкртал?

Решение. Кога го пречкртуваме бројот 2012 следниот најголем број пречкртан број е бројот 1006. Според тоа, сите броеви помали или еднакви на 1006 ќе бидат пречкртани, бидејќи се делители на некој број кој е поголем од 1007 и е помал од 2012. Значи, последен ќе биде пречкртан бројот 1007.

9. Трицифрениот број $\overline{abc}$ е делив со 5 и притоа $a+b=12$. Колку такви броеви има ако цифрите

а) не се задолжително различни,

б) се различни?

Решение. Од условот за деливост со 5 следува $c=0$ или $c=5$.Од $a+b=12$ добиваме

a	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3

а) Значи, постојат 7 различни можности за цифрите a и b, односно имаме 14 броеви со саканите својства.

б) Ако цифрите треба да се различни, тогаш броевите 575, 755, 660 и 665 не ги земаме предвид, па затоа имаме 10 броеви со саканите својства.

10. Четирицифрен број $\overline{abcd}$ е делив со 25 и притоа $a+b=10$. Колку има такви броеви ако:

а) цифрите не се задолжително различни,

б) ако цифрите се различни?

Решение. Од деливоста со 25 следува дека двоцифрениот завршеток $\overline{cd}$ прима вредности 00, 25, 50 и 75. Од условот $a+b=10$ следува:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2	1

а) Постојат 9 различни можности за цифрите a и b. Секоја од овие можности со секоја од можностите за двоцифрениот завршеток $\overline{cd}$ дава вкупно 36 можности за бараните четирицифрени броеви.

б) Ако цифрите на бројот $\overline{abcd}$ се различни, тогаш $\overline{cd}\neq 00$ и ниту броевите 2825, 8225, 5525, 5550, 5575, 3775, 7375 не се решенија. Значи, во овој случај има $3\cdot 9-7=20$ броеви кои ги задоволуваат условите на здачата.

11. Производот на два природни броја е запишан во вид на производ на прости множители: $2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^3$. Дали збирот на овие броеви може да е делив со:

а) 28, б) 8?

Решение. а) Природниот број е делив со 28 ако е делив со 4 и со 7. Два броја чиј производ е $2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^3$ може да се изберат така што двата во разложувањето на прости множители го содржат производот $2^2\cdot 7$. На пример такви се броевите $2^2\cdot 3\cdot 7^2=588$ и $2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7=840$.

б) Ако едниот множител (собирок) е делив со $2^k, k=0,1,2,3$, тогаш другиот множител (собирок) е делив со $2^{5-k}, k=0,1,2,3$. Тоа значи дека од двата множители (собирци) точно едниот е делив со 8, што

значи дека другиот не е делив со 8. Според тоа, збирот на двата множители не е делив со 8, т.е. одговорот на поставеното прашање е НЕ.

12. Со кој најмал природен број треба да се помножи бројот 63000 така што добиениот производ ќе биде точен квадрат?
Решение. Бројот 63000 го разложуваме на прости множители и добиваме
$$63000 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 7 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7. \qquad (1)$$
Еден број е точен квадрат на природен број, ако секој број кој се јавува во разложувањето на бројот на прости множители се среќава парен број пати, т.е. степеновиот показател на секој различен прост множител е парен број. Бидејќи се бара најмалиот природен број со кој треба дадениот број да се помножи, истиот го наоѓаме како производ на најмалку множители потребни за да сите степенови показатели се парни броеви. Сега, ако се земе предвид десната страна на (1), добиваме дека треба да имаме по еден множител еднаков на 2, на 5 и на 7. Значи, бараниот број $2\cdot 5\cdot 7 = 70$ и притоа добиваме
$$63000\cdot 70 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 7^2 = (2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7)^2 = 2100^2.$$

13. Дали постојат десет различни природни броеви такви што меѓу нив не постојат шест броеви чиј збир е делив со 6?
Решение. Да. Може да се најдат 10 различни природни броеви кои ги задоволуваат дадените услови. Доволно е да земеме пет броја кои при делење со 6 даваат остаток 1 и пет броја кои се деливи со 6. На пример, такви се броевите: 7, 13, 19, 25, 31, 6, 12, 18, 24 и 30. Провери!

14. Дали е можно да се најдат 14 различни природни броеви такви што меѓу нив не постојат осум броеви чиј збир е делив со 8?
Решение. Да. Ако избереме седум броеви кои при делење со 8 даваат остаток 1 и седум броеви кои се деливи со 8, тогаш имаме 14 броеви меѓу кои не постојат осум чиј збир е делив со 8. Пример за такви броеви се:
8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57.

15. Бројот x има повеќе од 20, а помалку од 30 цифри и сите негови цифри се 2. Определи го овој број ако е познато дека тој е делив со 7.
Решение. Со непосредна проверка се добива дека бројот 222222 е делив со 7 и при делењето се добива количник 31746. Сите броеви со

помал број двојки не се деливи со 7. Значи, при делење на шестцифрениот број 222222 со 7 се добива количник 031746 (цифрата 0 во првото делење не се пишува). Ова делење се повторува со секое шестцифрен дел на бројот x. Според тоа, бројот чии сите цифри се двојки е делив со 7 само ако бројот на цифрите е делив со 6. Единствениот таков број чиј број на цифри е поголем од 20, а е помал од 30 има 24 цифри.

16. Дали 7 е делител на бројот $\underbrace{888...88}_{72}$?

Решение. Имаме $888888:7=126984$. Сите броеви запишани со помал број осумки не се деливи со бројот 7. Според тоа, бројот $\underbrace{888...88}_{72}$ е делив со 7 ако бројот на неговите цифри е делив со 6. Сега, од $72=12\cdot 6$ следува дека бројот $\underbrace{888...88}_{72}$ е делив со 7.

17. Докажи дека бројот $2007^{2007}-3$ е делив со 10.

Решение. Имаме:

$$2007^1=2007,\quad 2007^2=...9,\quad 2007^3=...3,\quad 2007^4=...1,$$
$$2007^5=...7,\quad 2007^6=...9,\quad 2007^7=...3,\quad 2007^8=...1 \text{ итн.}$$

Според тоа, кога степеновиот показател е делив со 4, цифрата на единците ќе биде 1, кога е од видот $4k+1$ цифрата на единиците ќе биде 7, кога е од видот $4k+2$ ќе биде 9 и кога е од видот $4k+3$ ќе биде 3. Но, $2007=4\cdot 501+3$, па затоа цифрата на единиците на бројот 2007^{2007} ќе биде 3, т.е. бројот $2007^{2007}-3$ ќе има цифра на единиците 0, што значи дека ќе биде делив со 10.

18. Кој е

а) најголемиот б) најмалиот

природен број делив со 18 во чиј запис се употребени сите цифри точно по еднаш?

Решение. Збирот на сите цифри е 45, па бројот во чиј запис се користат сите цифри точно по еднаш е делив со 9. За да е бројот делив со 2 треба цифрата на единиците да е парна.

а) Најголемиот од таквите броеви е 9876543210.

б) Најмалиот од таквите броеви е 1023456798.

19. Кој е
    а) најголем, б) најмал
    природен број делив со 45 во чиј запис секоја цифра е употребена точно еднаш?
    Решение. Збирот на сите цифри е 45, па затоа број во чиј запис секоја цифра е употребена точно еднаш е делив со 9. За да бројот е делив со 45 треба уште да е делив со 5, што значи дека цифрата на единиците треба да е 0 или 5.
    а) Најголемиот од овие броеви 9876543210.
    б) Најмалиот од овие броеви е 1023467895.

20. На бројот 2009 од левата и од десната страна допиши му една иста цифра така што добиениот број ќе биде делив со 12.
    Решение. Нека од левата и од десната страна на бројот 2009 е запишана цифрата a. Така е добиен бројот $\overline{a2009a}$. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток е делив со 4, што значи дека двоцифрениот завршеток може да е 92 или 96. Значи, $a=2$ или $a=6$. За $a=2$ збирот на цифрите на бројот $\overline{a2009a}$ е $2a+2+9=15$ и тој е делив со 3, што значи дека бројот е делив со 3. За $a=6$ збирот на цифрите на бројот $\overline{a2009a}$ е $2a+2+9=23$ и тој не е делив со 3, што значи дека бројот не е делив со 3.
    Значи, единствено решение на задачата е бројот 220092.

21. На бројот 2013 допиши му од левата и од десната страна:
    а) по една иста цифра,
    б) по една цифра,
    така што добиениот шестцифрен број ќе биде делив со 12. Колку решенија има задачата?
    Решение. а) Нека x е бараната цифра. Бројот $\overline{x2013x}$ е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток на бројот е делив со 4, па затоа $x\in\{2,6\}$. Понатаму, од деливост со 3 следува дека збирот на цифрите на бројот $2x+6$ е делив со 3, од каде следува дека $x\in\{3,6,9\}$. Според тоа, $x\in\{3,6,9\}\cap\{2,6\}=\{6\}$. Значи, бараниот број е 620136 и задачата има едно решение.

б) Во овој случај цифрите може да се различни, па затоа бараните броеви се од видот $\overline{x2013y}$. Понатаму, од деливоста со 12 следува дека бројот е делив со 3 и со 4. Сега од деливоста со 4 добиваме $y \in \{2,6\}$. За $y=6$ бројот го добива видот $\overline{x20136}$, па сега од деливоста со 3 следува $x \in \{3,6,9\}$ и во овој случај решенија се броевите 320136, 620136 и 920136. За $y=2$ бројот го добива видот $\overline{x20132}$, па сега од деливоста со 3 следува $x \in \{1,4,7\}$ и во овој случај решенија се броевите 120132, 420132 и 720132. Значи, во овој случај задачата има шест решенија.

22. Кои цифри треба да се стават на местата на буквите a и b така што бројот $\overline{2a0a1b2b}$ ќе биде делив со 12?

Решение. За да бројот $\overline{2a0a1b2b}$ е делив со 12 треба да е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека цифрата b може да биде 0, 4 или 8.

Ако $b=0$, тогаш бројот е $\overline{2a0a1020}$. Сега, за да бројот е делив со 3 збирот на цифрите $5+2a$ треба да е делив со 3, па добиваме дека a е 2, 5 или 8.

Ако $b=4$, тогаш бројот е $\overline{2a0a1424}$. Сега, за да бројот е делив со 3 збирот на цифрите $13+2a$ треба да е делив со 3, па добиваме дека a е 1, 4 или 7.

Ако $b=8$, тогаш бројот е $\overline{2a0a1828}$. Сега, за да бројот е делив со 3 збирот на цифрите $21+2a$ треба да е делив со 3, па добиваме дека a е 0, 3, 6 или 9.

23. Определи ги цифрите a и b така да бројот $\overline{2a0b1a1b}$ е делив со 36.

Решение. Еден број е делив со 36, ако и само ако е делив со 4 и со 9. Од деливоста со 4 следува дека цифрата b мора да биде 2 или 6.

Ако $b=2$, го добиваме бројот $\overline{2a021a12}$. Сега, за да бројот е делив со 9 потребно и доволно е збирот да биде делив со 9,односно $8+2a$ да е делив со 9. Според тоа, $a=5$.

Ако $b=6$, го добиваме бројот $\overline{2a061a16}$. Сега, за да бројот е делив со 9 потребно и доволно е збирот да биде делив со 9,односно $16+2a$ да е делив со 9. Според тоа, $a=1$.

24. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{78a9b}$ ќе биде делив со 18.

Решение. Еден број е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Од деливоста со 2 следува дека $b \in \{0,2,4,6,8\}$, а од деливост со 9 следува дека збирот $7+8+9+a+b$ е делив со 9.

За $b=0$, имаме $a=3$, па се добива бројот 78390.

За $b=2$, имаме $a=1$, па се добива бројот 78192.

За $b=4$, имаме $a=8$, па се добива бројот 78498.

За $b=6$, имаме $a=6$, па се добива бројот 78696.

За $b=8$, имаме $a=4$, па се добива бројот 78498.

25. На бројот 2014 допиши му од левата и десната страна по една иста цифра така што добиениот шестцифрен број е делив со 36.

Решение. Нека x е бараната цифра. Бројот $\overline{x2014x}$ е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9. За да бројот $\overline{x2014x}$ биде делив со 4 потребно и доволно е неговиот двоцифрен завршеток да е делив со 4. Оттука следува $x \in \{0,4,8\}$. За да бројот $\overline{x2014x}$ е делив со 9 потребно и доволно е збирот на неговите цифри да е делив со 9, т.е. бројот $2x+7$ да е делив со 9. Последното е исполнето ако и само ако $x \in \{1\}$. Конечно, треба да се исполнети двата услови и како $\{0,4,8\} \cap \{1\} = \varnothing$, заклучуваме дека не постои цифра x така што бројот $\overline{x2014x}$ е делив со 36.

26. На бројот 2014 допиши му од левата и десната страна по една цифра така што добиениот шестцифрен број е делив со 36.

Решение. Нека x и y се бараните цифри. Бројот $\overline{y2014x}$ е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9. За да бројот $\overline{y2014x}$ биде делив со 4 потребно и доволно е неговиот двоцифрен завршеток да е делив со 4. Оттука следува $x \in \{0,4,8\}$. За да бројот $\overline{y2014x}$ е делив со 9 потребно и доволно е збирот на неговите цифри да е делив со 9, т.е. бројот $x+y+7$ да е делив со 9. Понатаму:

- ако $x=0$, тогаш $y=2$,
- ако $x=4$, тогаш $y=7$,
- ако $x=8$, тогаш $y=3$.

Конечно, задачата има три решенија и тоа се броевите: 220140, 720144 и 320148.

27. Замени ги * со соодветни цнфри така што вредноста на дропката $\frac{\overline{3*6*}}{36}$ е двоцифрен природен број. Колку решенија има задачата.

Решение. За да дропката $\frac{\overline{3*6*}}{36}$ е природен број потребно е броителот на дропката $\overline{3*6*}$ да е делив со 36. Од деливоста со 36 следува дека бројот $\overline{3*6*}$ е делив со 4 и е делив со 9. Од деливоста со 4 следува дека на местото на единиците мора да е една од цифрите 0, 4 или 8. Цифрата на местото на стотките ја определуваме така што збирот на цифрите $3+*+6+*$ е делив со 9. Така ги добиваме броевите 3060, 3960, 3564 и 3168. Сега имаме: $\frac{3060}{36}=85$, $\frac{3960}{36}=110$, $\frac{3564}{36}=99$ и $\frac{3168}{36}=88$. Од најдените решенија само бројот 110 не е двоцифрен, па затоа задачата има три решенија и тоа 3060, 3564 и 3168.

28. Замени ги * со соодветни цифри така што количникот на дропката $\frac{\overline{4*5*}}{45}$ и бројот 2 ќе биде двоцифрен број.

Решение. Имаме $\frac{\overline{4*5*}}{45}:2=\overline{ab}$, од каде добиваме $\overline{4*5*}=2\cdot 45\cdot\overline{ab}$, т.е. $\overline{4*5*}=90\cdot\overline{ab}$. Оттука следува дека бројот $\overline{4*5*}$ треба да е делив со 90, односно со 10 и со 9. Тоа значи дека цифрата на единиците е 0, а цифрата на десетките може да е 0 и 9. Значи, задачата има две решенија и тоа $\frac{4050}{45}:2=45$ и $\frac{4950}{45}:2=55$.

29. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 15 и се запишува само со цифрите 0 и 4.

Решение. Еден број е делив со 15 ако е делив со 3 и со 5. Број делив со 5 има цифра на единиците 0 или 5. Бидејќи цифрите се 0 и 4, бројот мора да има цифра на единиците 0. Еден број е делив со 3 ако збирот на цифрите е делив со 3. Најмалиот таков број од разгледуваниот вид е 4440.

30. Број запишан со три или повеќе цифри е делив со 8 ако и само ако неговиот трицифрен завршеток е делив со 8. Докажи!

Решение. Нека бројот е $\overline{a...bcde}$. Имаме, $\overline{a...bcde} = 1000 \cdot \overline{a...b} + \overline{cde}$. Понатаму, 1000 е делив со 8, па затоа бројот $1000 \cdot \overline{a...b}$ е делив со 8. Според тоа, $\overline{a...bcde}$ е делив со 8 ако и само ако $\overline{cde}$ е делив со 8.

31. Определи го најмалиот природен број делив со 72 чиј збир на цифри е 72.

Решение. Еден број е делив со 72 ако е делив со 8 и со 9. Ако збирот на цифрите е 72, тогаш тој е делив со 9. За да бројот биде најмал мора да има што е можно помалку цифри, што значи дека цифрите треба да се што е можно поголеми. За да бројот е делив со 8 треба трицифрениот завршеток $\overline{abc}$ да е делив со 8. Понатаму, при даден трицифрен завршеток за да бројот биде најмал треба да се изберат најголем можен број цифри 9 и првата цифра од лево да е најмала можна. Сега е јасно дека бараниот најмал трицифрен број се добива во случај кога збирот на цифрите на трицифрениот завршеток кој е делив со 8 е најголем.

Трицифрени броеви деливи со 8 се: 992, 984, 976, 968, 960, 952, 944, 936, 928, 920, 912, 904, 896, 888, 880, ... Како што можеме да видиме збировите на цифрите на овие броеви се 20, 21, 22, 23, 15, 16, 17, 18, 19, 11, 12, 13, 23, 24, 16, ... Јасно, понатаму секој следен број ќе има збир на цифри помал од 24, па затоа трицифрениот завршеток со најголем збир на цифри е 888. Тоа значи дека збирот на преостанатите цифри треба да е $72 - 24 = 48$, па како $48 = 9 \cdot 5 + 3$ најмалиот природен број делив со 72 чиј збир на цифри е 72 е бројот 399999888.

32. Определи ја цифрата x така што бројот $\overline{94x60}$ е делив со 56.

Решение. Бројот $\overline{94x60}$ е делив со 56 ако и само ако е делив со 8 и со 7, кои се заемно прости броеви. Од деливоста со 8 следува дека $\overline{94x60}$ е делив со 8 ако и само ако $\overline{x60}$ е делив со 8, па затоа $x \in \{1,3,5,7,9\}$. Со непосредна проверка се добива дека од петте броја кои се делив со 8 само бројот 94360 е делив со 7.

33. Определи ги цифрите x и y ако производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 15. Колку решенија има задачата?

Решение. Производот $\overline{12x} \cdot \overline{34y}$ е делив со 15 ако барем еден од множителите е делив со 15 или ако првиот множител е делив со 3, а

вториот со 5 или ако првиот множител е делив со 5, а вториот со 3.

1) Бројот $\overline{12x}$ е делив со 15 ако $x=0$. Во тој случај $y=0,1,2,...,9$, па задачата има 10 решенија.
2) Бројот $\overline{34y}$ е делив со 15 ако $y=5$. Во тој случај $x=0,1,2,...,9$, па добиваме уште 9 решенија на задачата, бидејќи решението $x=0$, $y=5$ веќе го добивме.
3) $\overline{12x}$ е делив со 3 за $x=0,3,6,9$, а $\overline{34y}$ е делив со 5 за $y=0,5$, па добиваме уште 3 решенија бидејќи решенијата $x=0, y=0$; $x=0$, $y=5$; $x=3, y=5$; $x=6, y=5$ и $x=9, y=5$ веќе ги добивме.
4) $\overline{12x}$ е делив со 5 за $x=0,5$, а $\overline{34y}$ е делив со 3 за $y=2,5,8$, па добиваме уште 2 решенија бидејќи решенијата $x=0, y=2$; $x=0$, $y=5$; $x=0, y=8$ и $x=5$, $y=5$ веќе ги добивме.

Конечно, задачата има $10+9+3+2=24$ решенија.

34. Определи ги цифрите x и y така што производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 12.

Решение. Производот на два трицифени броја е делив со 12 ако

а) еден од броевите е делив со 12. Ако $\overline{12x}$ е делив со 12, тогаш $x=0$ и затоа $y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, па имаме 10 решенија. Ако $\overline{34y}$ е делив со 12, тогаш $y=8$ и $x\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, па имаме уште 9 нови решенија, бидејќи решението $x=0, y=8$ е веќе најдено.

б) бројот $\overline{12x}$ е делив со 4, а $\overline{34y}$ е делив со 3. Тогаш $x\in\{0,4,8\}$ и $y\in\{2,5,8\}$, па имаме уште 4 нови решенија бидејќи решенијата $x=0, y\in\{2,5,8\}$ и $y=8, x\in\{0,4,8\}$ се веќе најдени.

в) бројот $\overline{12x}$ е делив со 3, а $\overline{34y}$ е делив со 4. Тогаш $x\in\{0,3,6,9\}$ и $y\in\{0,4,8\}$, па имаме уште 6 нови решенија бидејќи решенијата $x=0, y\in\{2,4,8\}$ и $y=8, x\in\{0,3,6,9\}$ се веќе најдени.

г) бројот $\overline{12x}$ е делив со 2, а $\overline{34y}$ е делив со 6. Тогаш $x\in\{0,2,4,6,8\}$ и $y\in\{2,8\}$, па имаме уште 2 нови и тоа $x=2, y=2$ и $x=6, y=2$.

г) бројот $\overline{12x}$ е делив со 6, а $\overline{34y}$ е делив со 2. Тогаш $x\in\{0,6\}$ и $y\in\{0,2,4,6,8\}$, па имаме уште 1 ново $x=6, y=6$.

Конечно, задачата има $10+9+4+6+2+1=32$ решенија.

35. Определи ви сите шестцифрени броеви $\overline{abcdef}$ кои се деливи со 9 и кај кои трицифрениот број $\overline{abc}$ е за 860 поголем од трицифрениот број $\overline{def}$.

Решение. Од $\overline{abc}=860+\overline{def}$ следува $d=1$, бидејќи за $d>1$ збирот на десната страна ќе биде четирицифрен број. Збирот $860+\overline{1ef}$ е поголем од 900, а е помал од 1000, па затоа $a=9$.

Кога ги собираме единиците на $\overline{def}$ и 860 добиваме $0+f=c$, па затоа $c=f$. Од збирот на десетките, бидејќи немаме пренос се добива $e+6=b$. Значи, $e\le 3$.

Според тоа, бараниот број е од видот $\overline{9bf1ef}$ при што $b=e+6$. Понатаму, еден број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9. Збирот на цифрите на бројот $\overline{9bf1ef}$ е еднаков на

$$9+b+f+1+e+f=9+e+6+f+1+e+f=16+2(e+f).$$

Сега $16+2(e+f)$ е делив со 9 ако $e+f=1$ или $e+f=10$, бидејќи $e+f<19$.

Ако $e+f=1$, тогаш:

- $e=1, f=0, b=e+6=7$, па се добива бројот 970110,
- $e=0, f=1, b=e+6=6$, па се добива бројот 961101.

Ако $e+f=10$, тоаш:

- $e=1, f=9, b=e+6=7$, па се добива бројот 979119,
- $e=2, f=8, b=e+6=8$, па се добива бројот 988128,
- $e=3, f=7, b=e+6=9$, па се добива бројот 997137.

36. Горјан ги разместил (испермутирал) цифрите на природниот број n и така добил три пати помал број m. Докажи дека бројот n е делив со 27.

Решение. Имаме $n=3m$, што значи дека бројот n е делив со 3. Значи, збирот на цифрите на бројот n е делив со 3. Но, бројот m е запишан со истите цифри, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3, т.е. тој е делив со 3. Според тоа, бројот n е делив со $3\cdot 3=9$, па и збирот на неговите цифри е делив со 9. Значи, збирот на цифрите на бројот m е делив со 9, што значи дека тој е делив со 9. Конечно, бројот n е

делив со $3 \cdot 9 = 27$.

37. Ако природниот број n се подели на 12 се добива остаток 11, а ако n се подели на 18 се добива остаток 5. Кој остаток се добива при делењето на n со 36?

Решение. Од условот на задачата следува дека $n = 12x + 11$ и $n = 18y + 5$. Според тоа, $3n = 36x + 33$ и $2n = 36y + 10$, па затоа

$$n = 3n - 2n = 36x + 33 - 36y - 10 = 36(x - y) + 23 .$$

Значи, при делење на n со 36 се добива остаток 23.

38. Збирот на два броја е 2013. Ако овие два броја ги поделиме со 23 се добиваат остатоци 5 и 7, а разликата на добиените количници е 1. Кои се тие броеви?

Решение. Ако од бројот 2013 го одземеме збирот на остатоците ќе добиеме број кој е делив со 23. Имаме $2013 - (5 + 7) = 2001$. Бидејќи $2001 : 23 = 87$, а количниците се разликуваат за 1 заклучуваме дека количниците се 43 и 44. Конечно, бараните броеви се $43 \cdot 23 + 5 = 994$ и $44 \cdot 23 + 7 = 1019$, или $43 \cdot 23 + 7 = 996$ и $44 \cdot 23 + 5 = 1017$.

39. Определи ги најмалиот трицифрен и најголемиот четирицифрен број такви што при делење со 3 даваат остаток 1,при делење со 4 даваат остаток 2, при делење со 5 даваат остаток 3, при делење со 6 даваат остаток 4 и при делење со 7 даваат остаток 5.

Решение. Нека a е број кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш бројот $a + 2$ е делив со 3, со 4, со 5, со 6 и со 7. Затоа $a + 2$ е делив со $\text{NZS}(3,4,5,6,7) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Според тоа, $a + 2 = 420k$, каде $k \in \mathbb{N}$. Значи, $a = 420k - 2$, па најмалиот таков трицифрен број се добива за $k = 1$ и тоа е бројот 418, а најголемиот таков четирицифрен број се добива за $k = 23$ и тоа е бројот $420 \cdot 23 - 2 = 9658$. Имено, за $k = 24$ се добива бројот 10078 кој е петцифрен број.

40. Трипун замислил три броја. Најголемиотзаеднички делител на првиот и вториот број е 12, на првиот и третиот е 8, а на вториот и третиот е 4. Кои се најмалите природни броеви кои Трипун можел да ги замисли?

Решение. Броевите кои Трипун ги замислил да ги означиме со a, b и c. Од $\text{NZD}(a,b) = 12$ следува дека броевите a и b може да бидат 12,

24, 36, 48, ..., а како $\text{NZD}(a,c)=8$ следува дека броевите a и c може да бидат 8, 16, 24, 32, 40, ... Разгледувајќи ги овие две низи гледаме дека најмалиот број кој се наоаѓа во двете низи е 24, па затоа $a=24$. Бидејќи $\text{NZD}(b,c)=4$, броевите b и c може да бидат 4, 8, 12, 16, ... Разгледувајќи ги соодветните низи, од првата и третата следува $b=12$ и од втората и третата следува $c=8$.

41. Весна замислила три броја. Најголемиот заеднички делител на првиот и вториот број е 8, на првиот и третиот е 4, и на вториот и третиот е 4. Кои се најголемите двоцифрен броеви кои Весна можела да ги замисли?

Решение. Со a,b,c да ги означиме првиот, вториот и третиот број кои ги замислила Весна. Имаме $\text{NZD}(a,b)=8$, па затоа двоцифрените броеви a и b се некои од броевите 96, 88, 80, 72, ... Ги бараме најголемите можни броеви, што значи дека $a=96$ и $b=88$. Сега, бидејќи $\text{NZD}(a,c)=\text{NZD}(b,c)=4$ најголемиот двоцифрен број кој ги задоволува условите на задачата е $c=92$.

42. Дедо и внук имаат роденден во ист ден. При прославата на еден роденден дедото констатирал дека бројот на неговите години е делив со бројот на годините на внукот и дека тоа ќе важи и за следните 5 родендени. Колку најмалку години можел да има дедото кога тоа го забележал?

Решение. Ако дедото има n години, тогаш од условот на задачата следува дека $n-1$ е делив со 2, 3, 4, 5 и 6. Според тоа, $n-1$ е делив со $\text{NZS}(2,3,4,5,6)=60$. Значи, за намалиот број n важи $n-1=60\cdot 1$, па затоа $n=61$.

43. На екранот на компјутерот е запишана реченицата

ТОМЕ СО СИНОТ И ЌЕРКАТА ОДИ ВО КИНО.

Секогаш кога на тастатурата ќе притиснеме „+“, компјутерот од секој збор првата буква ја преместува на последно место на тој збор. На пример, кога прв пат ќе притиснеме „+“, на екранот се појавува

ОМЕТ ОС ИНОТС И ЕРКАТАЌ ДИО ОВ ИНОК.

Кога втор пат ќе притиснеме „+“, на екранот се појавува

МЕТО СО НОТСИ И РКАТАЌА ИОД ВО НОКИ

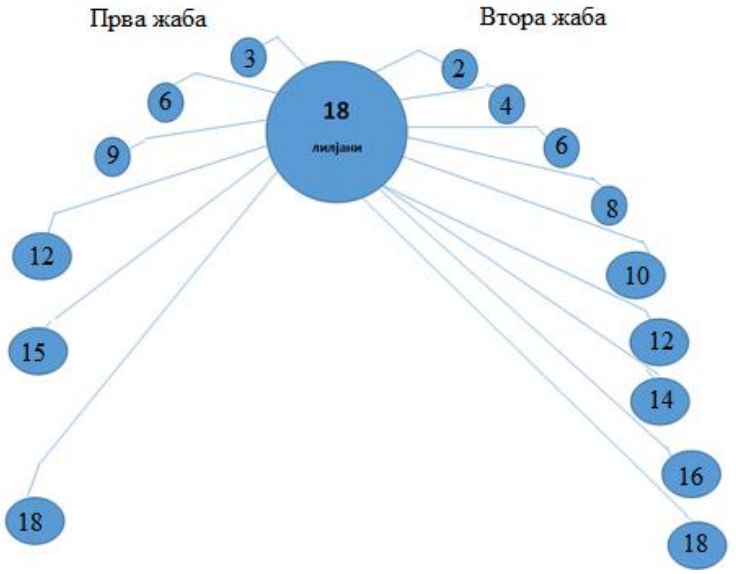
итн. Колку пати треба да се притисне „+“, за да на екранот за прв пат

повторно се добие почетната реченица?

Решение. За да еден збор во дадената реченица повторно се појави на екранот копчето „+“ треба да го притиснеме онолку пати колку што има букви разгледуваниот збор. Должините на зборовите во дадената реченица се: 4, 2, 5, 1, 7, 3, 2, 4, па затоа копчето „+“ треба да се притисне толку пати што секој од горните броеви ќе биде делител на бројот на пристискањата. Најмалиот таков број е еднаков на $\mathrm{NZS}(1,2,3,4,5,7)=420$. Значи, по 420 притискања на кочето „+“ на екранот за прв патќе се појави почетната реченица.

44. Две жаби во исто време го напуштаат брегот. Се движат по патека од 18 лилјани (барско растение). Првата скока на секој трет лилјан, а втората на секој втор лилјан. На колку исти лилјани ќе скокнат двете жаби и кои се тие?

Решение. *Прв начин.* Првата жаба ќе скокне на лилјаните 3, 6, 9, 12, 15 и 18, а втората жаба ќе скокне на лилјаните 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 и 18 (види цртеж). Според тоа, двете жаби на исти лилјани ќе сконат три пати и тоа на лилјаните со редни броеви 6, 12 и 18.



Втор начин. Двете жаби ќе скокнат на ист лилјан ако неговиот редн бро е делив со 2 и со 3, т.е. ако е содржател на 2 и 3. Бидејќи $\mathrm{NZS}(2,3)=6$ и $18:\mathrm{NZS}(2,3)=18:6=3$, заклучуваме дека двете жаби 3 пати ќе скокнат на сит лијан и тоа на лилјани со редни броеви 6, 12 и 18.

45. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9 и ако бројот 1200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Определи ги соодветните количници?

Решение. Нека x е бројот со кој се делат броевите 860 и 1200, и нека k_1 е количникот кој се добива при делење на 860 со x, а k_2 е количникот при делење на 1200 со x. Имаме,

$$860 = xk_1 + 9$$
$$xk_1 = 851$$

и

$$1200 = xk_2 + 13$$
$$xk_2 = 1184.$$

Според тоа, x е заеднички содржател на 851 и 1184, кој е поголем од 16. Но,

$$\begin{aligned}\text{NZD}(851,1184) &= \text{NZD}(1184-851,851) = \text{NZD}(333,851)\\ &= \text{NZD}(333,851-333) = \text{NZD}(333,518)\\ &= \text{NZD}(333,518-333) = \text{NZD}(333,185)\\ &= \text{NZD}(333-185,185) = \text{NZD}(148,185)\\ &= \text{NZD}(148,185-148) = \text{NZD}(148,37) = 37,\end{aligned}$$

бидејќи $37 \mid 148 = 37 \cdot 4$. Според тоа,

$$860 = 37 \cdot 23 + 9 \text{ и } 1200 = 37 \cdot 32 + 16,$$

што значи дека количникот при делење на 860 со 37 е 23, а при делење на 1200 со 37 е 32.

46. Определи ги сите парови природни броеви n и $2n+1$ такви што двата броја се прости и се помали од 100. Колку парови доби?

Решение. Прости броеви помали од 50 се 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47. Ако бројот n има цифра на единиците 7, тогаш бројот $2n+1$ е двоцифрен и има цифра на единиците 5, што значи дека е сложен број. Со непосредна проверка на преостанатите броеви: 2, 3, 5, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 41 и 43, добиваме дека паровите ки ги задоволуваат условите на задачата се:

$$(n, 2n+1) \in \{(2,5), (3,7), (5,11), (11,23), (23,47), (29,59), (41,83)\}.$$

Според тоа, добиени се 7 парови броеви кои ги исполнуваат условите на задачата.

47. Кој од броевите 2013, 3102 и 1032 има најмалку делители?

Решение. Дадените броеви ги разложуваме на прости множители:

$$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61, \quad 3102 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 47, \quad 1032 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 43.$$

Со помош на овие разложувања ги добиваме делителите на дадените броеви. Бројот 2013 има делители: 1, 3, 11, 61, $3 \cdot 11 = 33$, $3 \cdot 61 = 183$, $11 \cdot 61 = 671$ и $3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$. Значи, 2013 вкупно има 8 делители. Слично добиваме дека 3102 има 16 делители и 1032 има 16 делители. Конечно, најмалку делители има бројот 2013.

48. Со скратување на допката $\frac{n}{2010}$ се добива дропка чиј именител е прост број. Определи ги сите такви природни броеви n.

Решение. Бидејќи $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, дадената дропка е $\frac{n}{2010} = \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67}$, па затоа бараните именители се 2, 3, 5 и 67, бидејќи сите други именители кои може да се добијат се 1 или сложен број. Значи, бараните броеви се:

$$n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, n_2 = 2 \cdot 3 \cdot 67 = 402,$$
$$n_3 = 2 \cdot 5 \cdot 67 = 670, n_4 = 3 \cdot 5 \cdot 67 = 1005.$$

49. Определи ги сите природни броеви a и b такви што

$$\frac{2}{31} - \frac{1}{a} = \frac{2+b}{2015}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$130 - \frac{2015}{a} = 2 + b,$$

т.е. на равенката $b = 128 - \frac{2015}{a}$. Понатаму, бидејќи a и b се природни броеви од последната равенка следува $a \mid 2015$ и $128 - \frac{2015}{a} > 0$, односно $a \mid 2015$ и $a > \frac{2015}{128} > 15$. Сега, од $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ следува дека делители на 2015 кои се поголеми од 15 се: 31, 65, 155, 403 и 2015.

1) За $a = 31$ добиваме $b = 128 - \frac{2015}{31} = 63$.
2) За $a = 65$, добиваме $b = 128 - \frac{2015}{65} = 97$.
3) За $a = 155$, добиваме $b = 128 - \frac{2015}{155} = 115$.
4) За $a = 403$, добиваме $b = 128 - \frac{2015}{403} = 123$.
5) За $a = 2015$, добиваме $b = 128 - \frac{2015}{2015} = 127$.

50. Определи ги природните броеви a и b такви што $\frac{2}{a}+\frac{1}{13}=\frac{200-b}{2015}$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенката $\frac{4030}{a}+155=200-b,$ т.е. на равенката

$$b=45-\frac{4030}{a}.$$

Понатаму, бидејќи a и b се природни броеви од последната равенка следува $a\,|\,4030$ и $45-\frac{4030}{a}>0$, односно $a\,|\,4030$ и $a>\frac{4030}{45}>89$. Сега, од $4030=2\cdot5\cdot13\cdot31$ следува дека делители на 4030 кои се поголеми од 89 се: 130, 155, 310, 403, 806, 2015, 4030.

1) За $a=130$ добиваме $b=45-\frac{4030}{130}=45-31=14$.
2) За $a=155$, добиваме $b=45-\frac{4030}{155}=45-26=19$.
3) За $a=310$, добиваме $b=45-\frac{4030}{310}=45-13=32$.
4) За $a=403$, добиваме $b=45-\frac{4030}{403}=45-10=35$.
5) За $a=806$, добиваме $b=45-\frac{4030}{806}=45-5=40$.
6) За $a=2015$, добиваме $b=45-\frac{4030}{2015}=45-2=43$.
7) За $a=4030$, добиваме $b=45-\frac{4030}{4030}=45-1=44$.

51. Определи ги природниот број x и простиот број p за кои важи $\frac{2017-x}{2016}=\frac{1}{p}$.

Решение. Имаме $2016=2^5\cdot3^2\cdot7$, т.е.прости множители на бројот 2016 се 2, 3 и 7. Според тоа, $p=2$, $p=3$ или $p=7$.

За $p=2$ имаме $\frac{2017-x}{2016}=\frac{1}{2}$, од каде добиваме $x=1009$.

За $p=3$ имаме $\frac{2017-x}{2016}=\frac{1}{3}$, од каде добиваме $x=1345$.

За $p=7$ имаме $\frac{2017-x}{2016}=\frac{1}{7}$, од каде добиваме $x=1729$.

52. Определи ги природниот број x и простиот број y за кои важи $\frac{x+y}{2015}=\frac{1}{y}$.

Решение. Имаме $\frac{x+y}{5\cdot13\cdot31}=\frac{1}{y}$, па како y прост број можни се следниве случаи:

- $y=5$ и тогаш $\frac{x+5}{5\cdot13\cdot31}=\frac{1}{5}$, од каде добиваме $x+5=403$, однсоно $x=398$,
- $y=15$ и тогаш $\frac{x+13}{5\cdot13\cdot31}=\frac{1}{13}$, од каде добиваме $x+13=155$, однсоно $x=142$,
- $y=31$ и тогаш $\frac{x+31}{5\cdot13\cdot31}=\frac{1}{31}$, од каде добиваме $x+31=65$, однсоно $x=34$.

53. Определи ги сите прости броеви p за кои важи $2<\frac{p}{16}<3$.

Решение. Ако искористиме дека $\frac{2}{1}=\frac{32}{16}$ и $\frac{3}{1}=\frac{48}{16}$, даденото неравенсрво се трансформира во еквивалентното неравенство $\frac{32}{16}<\frac{p}{16}<\frac{48}{16}$. Значи, треба да ги определиме простите броеви p за кои важи $32<p<48$. Конечно, бараните прости броеви се: 37, 41, 43 и 47.

54. Определи ги сите прости природни броеви p за кои важи

$$\frac{33}{2013}<\frac{2}{p}<\frac{38}{2014}.$$

Решение. Имаме, $\frac{33}{2013}=\frac{33}{3\cdot11\cdot61}=\frac{1}{61}$ и $\frac{38}{2014}=\frac{38}{2\cdot19\cdot53}=\frac{1}{53}$. Значи, дадените неравенства се еквивалентни со неравенствата $\frac{1}{61}<\frac{2}{p}<\frac{1}{53}$, односно $\frac{2}{122}<\frac{2}{p}<\frac{2}{106}$. Следува, $106<p<122$, па затоа бараните прости броеви се 107, 109 и 113.

55. Определи го најмалиот прост број p и најголемиот прост број q такви што се исполнети неравенствата $\frac{1}{p}<\frac{31}{2010}<\frac{1}{q}$.

Решение. Од неравенството $\frac{1}{p}<\frac{31}{2010}<\frac{1}{q}$ следува $q<\frac{2010}{31}=64\frac{26}{31}<p$. Најмалиот прост број p кој го задоволува горното неравенство е $p=67$, а најголемиот прост број q е $q=61$.

56. Броителот и именителот на дропката $\frac{p}{q}$ се прости броеви. Определи ги простите броеви p и q ако збирот на дропката и нејзината реципрочна дропка е $\frac{130}{33}$.

Решение. Од $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=\frac{130}{33}$ заклучуваме дека $\mathrm{NZS}(p,q)=33=3\cdot 11$. Според тоа, бараните прости броеви се $p=3$ и $q=11$, па затоа збирот на дропките е $\frac{3}{11}+\frac{11}{3}=\frac{9+121}{33}=\frac{130}{33}$.

57. Дали постојат прости броеви p и q такви што $p+4q=2006$.

Решение. Десната страна на даденото равенство е парен број, па затоа мора да е и левата страна $p+4q$ парен број. Но, $4q$ е парен број, што значи дека мора да е p парен број. Единствен парен прост број е $p=2$, па затоа $2+4q=2006$, од каде добиваме $q=501$. Но, бројот 501 е делив со 3, што значи дека е сложен број, што значи дека не постојат прости броеви p и q такви што $p+4q=2006$.

58. Определи и сите прости броеви p и q такви што $2p+3q=100$.

Решение. Бидејќи броевите 100 и $2p$ се парни, мора да е и бројот $3q$ парен. Но, бројот q е прост број, па затоа мора да е $q=2$. Значи, $2p+6=100$, од каде наоѓаме $p=47$. Бидејќи 47 е прост број, задачата има единствено решение $p=47$ и $q=2$.

59. Определи ги сите прости броеви p,q,r такви што $2p+3q+4r=2006$.

Решение. Броевите $2p,4r$ и 2006 се парни, па затоа и $3q$ мора да е парен број. Значи, q е парен прост број, од каде следува $q=2$. Со замена во равенството добиваме $2p+4r=2000$, од каде следува $p+2r=1000$. Оттука следува дека и $p=2$, па затоа $2r=998$, од каде добиваме $r=499$. Бидејќи 499 е прост број, добиваме дека единствено решение на задачата е $p=q=2, r=499$.

60. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $p+pq=2010$.

Решение. Од даденото равенство добиваме $p(1+q)=2010$, што значи дека p е делител на 2010, т.е. е еден од простите делители на 2010.

Според тоа, $p \in \{2,3,5,67\}$.

Ако $p=2$, тогаш $2(1+q)=2010$, од каде добиваме $1+q=1005$, т.е. $q=1004$. Но, 1004 не е прост број, па затоа во овој случај немаме решение на задачата.

Ако $p=3$, тогаш $3(1+q)=2010$, од каде добиваме $1+q=670$, т.е. $q=669$. Но, 669 не е прост број, па затоа во овој случај немаме решение на задачата.

Ако $p=5$, тогаш $5(1+q)=2010$, од каде добиваме $1+q=402$, т.е. $q=401$. Сега, бидејќи 401 е прост број, во овој случај имаме решение на задачата.

Ако $p=67$, тогаш $67(1+q)=2010$, од каде добиваме $1+q=30$, т.е. $q=29$. Сега, бидејќи 29 е прост број, во овој случај имаме решение на задачата.

61. Определи ги сите прости броеви p,q,r такви што $p+pq+pqr=2010$.

Решение. Од равенството $p+pq+pqr=2010$ следува дека

$$p(1+q+qr)=2010,$$

т.е. левата страна на равенството е делива со. Според тоа, p е еден од простите делители на 2010. Значи, п $p \in \{2,3,5,67\}$.

Ако $p=2$, тогаш $2(1+q+qr)=2010$, т.е. $q+qr=1004=2\cdot 2\cdot 251$. Според тоа, q е некој од простите делители на 1004. Ако $q=2$, тогаш лесно се добива дека $r=501$ и во случајов немаме решение, бидејќи $3 \mid 501$. Ако $q=251$, тогаш лесно се добива дека $r=3$ и во случајов имаме решение, бидејќи 3 е прост број.

Ако $p=3$, тогаш $3(1+q+qr)=2010$, т.е. $q+qr=669=3\cdot 223$. Според тоа, q е некој од простите делители на 669. Ако $q=3$, тогаш лесно се добива дека $r=222$, па во случајов немаме решение бидејќи $2 \mid 222$. Ако $q=223$, тогаш лесно се добива дека $r=2$ и во случајов имаме решение, бидејќи 2 е прост број.

Ако $p=5$, тогаш $5(1+q+qr)=2010$, т.е. $q+qr=401$. Според тоа, q е некој од простите делители на 401 и $q(1+r)$ е сложен број. Но, 401 е прост број, па во случајов немаме решение.

Ако $p=67$, тогаш $67(1+q+qr)=2010$, т.е. $q+qr=29$. Според тоа, q е некој од простите делители на 29 и $q(1+r)$ е сложен број. Но, 29

е прост број, па во случајов немаме решение.
Конечно, решенијата се: $p=2, q=251, r=3$ и $p=3, q=223, r=2$.

62. Определи ги сите можни прости броеви a,b,c,d,e за кои важи

$$a+b=\frac{2563}{c\cdot d\cdot e}.$$

Решение. Дадениот израз е еквивалентен на изразот $(a+b)cde=2562$, односно на изразот $(a+b)cde=2\cdot 3\cdot 7\cdot 61$. Бидејќи a и b се прости броеви важи $a+b\neq 2$ и $a+b\neq 3$.

1) Ако $a+b=7$, тогаш $a,b\in\{2,5\}$, а $c,d,e\in\{2,3,61\}$. Решенија се:

a	b	c	d	e
2	5	2	3	61
2	5	2	61	3
2	5	3	2	61
2	5	3	61	2
2	5	61	2	3
2	5	61	3	2
5	2	2	3	61
5	2	2	61	3
5	2	3	2	61
5	2	3	61	2
5	2	61	2	3
5	2	61	3	2

2) Ако $a+b=61$, тогаш $a,b\in\{2,59\}$, а $c,d,e\in\{2,3,7\}$. Решенија се:

a	b	c	d	e
2	59	2	3	7
2	59	2	7	3
2	59	3	2	7
2	59	3	7	2
2	59	7	2	3
2	59	7	3	2
59	2	2	3	7
59	2	2	7	3
59	2	3	2	7
59	2	3	7	2
59	2	7	2	3
59	2	7	3	2

63. За нечиј роденден велиме дека е прост ако славеникот тој ден полни прост број години. Учителот Симон и неговиот син Рампо се родени во ист ден. Се покажало дека седум последователни прости родендени на учителот Симон истовремено биле прости родендени и на неговиот син Рампо. На следниот прост роденден на учителот Симон му се родил првиот внук. Колку најмалку години имал Симон кога станал дедо?

Решение. Низата прости броеви е

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...

Ако првиот заеднички прост роденден на Симон и Рампо е кога разликата во нивните години била k, треба да најдеме седум последователни прости броеви $p_i, i=1,2,3,4,5,6,7$ такви што е броевите $p_i-k, i=1,2,3,4,5,6,7$ се прости. Притоа е јасно дека k мора да е парен број, што значи дека на првиот заеднички прост роденден Рампо не можел да има 2 години (Зошто?).

Лесно се гледа дека првиот прост роденден на Симон кога и Рампо има прост роденден мора да е поголем од 23. Сега, ако кога Симон имал 29 години Рампо имал 3 години, тогаш $k=26$, па добиваме

$$31-26=5,\ 37-26=11,\ 41-26=15$$

и 15 не е прост број. Затоа, ако Симон имал 29 години, тогаш Рампо имал повеќе од 5 години. Понатаму, ако Рампо имал 5 години, тогаш $29-5=24$, па за последователните прости броеви 29, 31, 37, 41, 43, 47 и 53 имаме:

$$29-24=5,\ 31-24=7,\ 37-24=13,\ 41-24=17,$$
$$43-24=19,\ 47-24=23,\ 53-24=29,$$

па како броевите 5, 7, 13, 17, 19, 23 и 29 се прости заклучуваме дека најмалата низа прости броеви $p_i, i=1,2,3,4,5,6,7$ за кои постои k таков што броевите $p_i-k, i=1,2,3,4,5,6,7$ се прости е 29, 31, 37, 41, 43, 47 и 53, при што $k=24$. Конечно, бидејќи првиот прост број поголем од 53 е 59, кога Симон станал дедо тој имал 59 години.

64. Збирот на сите четирицифрени природни броеви деливи со 45 кај кои цифрата на десетките е три пати поголема од цифрата на стотките намали го за збирот на сите трицифрени природни броеви деливи со 18 кај кои цифрата на стотките е најголемиот прост едноцифрен број.

Решение. Еден број е делив со 45 ако и само ако е делив со 5 и со 9.

Број е делив со 5 ако и само ако цифрата на единиците му е 0 или 5, а број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9.

Бидејќи цифрата на десетките треба да е три пати поголема од цифрата на стотките, можни се следниве комбинации на овие две цифри:

- цифрата на стотките 0, цифрата на десетките 0,
- цифрата на стотките 1, цифрата на десетките 3,
- цифрата на стотките 2, цифрата на десетките 6,
- цифрата на стотките 3, цифрата на десетките 9.

Ако цифрата на единиците е 0, тогаш заради правилото за деливост со 9 ги добиваме следните четирицифрени броеви: 9000, 5130, 1260 и 6390.

Ако е цифрата на единиците 5, тогаш заради правилото за деливост со 9 ги добиваме следните броеви: 4005, 9135, 5265 и 1395.

Збирот на сите четирицифрени броеви кои ги задоволуваат дадените услови е: $9000+5130+1260+6390+4005+9135+5265+1395=41580$.

Еден број е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Бројот е делив со 2, ако и само ако цифрата на единиците му е: 0, 2, 4, 6 или 8, а е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9.

Бидејќи цифрата на стотките е најголемиот прост едноцифрен број добиваме дека цифрата на стотките е 7. Заради правилата за деливост со 9 и 2 бараните трицифрени броеви се: 720, 702, 792, 774, 756 и 738.

Збирот на овие броеви е: $720+702+792+774+756+738=4482$.

Конечно, бараната разлика е $41580-4482=37098$.

65. Пресметај ја аритметичката средина на првите 1000 природни броеви кои при делење со 14 даваат остаток 6.

Решение. Првите 1000 природни броеви кои при делење со 14 даваат остаток 6 се $14k+6, k=0,1,2,...,999$. Притоа за секој $k\in\{0,1,2,...,499\}$ важи

$$14k+6+14\cdot(999-k)+6=12+14\cdot 499=13998=6999+6999,$$

па собирањето на разгледуваните 1000 броеви дава ист збир како собирањето на 1000 броеви секој од кои е еднаков на 6999. Оттука следува дека бараната аритметичка средина е еднаква на 6999.

66. Определи го природниот број n таков што аритметичката средина на првите n природни броеви кои при делење со 23 даваат остаток 19 е еднаква на 2020.

Решение. Првите n природни броеви ки при делење со 23 даваат остаток 19 се $19+23k, k=0,1,2,....,n-1$. Аналогно како во претходната задача добиваме дека за секој $k=0,1,2,....,n-1$ важи

$$23k+19+23(n-1-k)+19=38+23(n-1).$$

Оттука следува дека аритметичката средина на овие броеви е еднаква на аритметичката средина на k – тиот и $(n-1-k)$ – тиот број. Значи,

$$(38+23(n-1)):2=2020,$$
$$38+23(n-1)=4040,$$
$$23(n-1)=4002,$$
$$n-1=174,$$
$$n=175.$$

3. АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

1. Едноцифрен број поголем од 1, помножен е со 27, а потоа добиениот производ е помножен со 37. Цифрата на единиците на добиениот број е 1. Кој е тој едноцифрен број?
   Решение. Бидејќи $27 \cdot 37 = 999$, а цифрата на единиците на производот е 1, потребно е производот на едноцифрениот број и бројот 9 да дава цифра на единиците 1. Единствена можност е едноцифрениот број да е 9.

2. На која цифра завршува бројот 9^9?
   Решение. Цифрата на единиците на бројот $9^2 = 81$ е 1. Цифрата на единиците на бројот 9^3 е 9, цифрата на единиците на бројот 9^4 е бројот 1 итн. Оттука заклучуваме дека сите степени на бројот 9 со непарен степенов показател имаат цифра на единиците 9, а со парен степенов показател е 1. Според тоа, цифрата на единиците на бројот 9^9 е 9.

3. Премести две цифри така што од
   $$25 \cdot 92 = 2592$$
   ќе добиеш точно равенство.
   Решение. Имаме $2592 = 9 \cdot 288 = 9 \cdot 9 \cdot 32 = 2^5 \cdot 9^2$, па затоа цифрите кои треба да ги преместиме се цифрите на единиците во двоцифрените множители на десната страна кои треба соодветно да станат степени на цифрите на десетките. Значи, $2^5 \cdot 9^2 = 2592$.

4. а) Определи го најмалиот природен број чиј збир на цифри е 2009.
   б) Дали постои природен број чиј збир и производ на цифри е 2009?
   Решение. а) Најмал природен број чиј збир на цифри е 2009 е бројот кој има најмалку цифри кои се подредени во опаѓачки редослед и притоа цифрата 9 е употребена најголем број пати. Од $2009 = 223 \cdot 9 + 2$ следува дека бараниот број е $2\underbrace{99...99}_{223}$.
   б) Имаме $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$, па затоа цифрите на бројот треба да се 1, 1,

..., 1, 7, 7, 41. Бидејќи 41 не е цифра, заклучуваме дека таков број не постои.

5. Во низата

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

збирот на паровите соседни броеви последователно е

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$$

и секој член на оваа низа е за 2 поголем од претходниот. Распореди ги броевите од 0 до 9, така што во низата која ќе ја добиеш на ист начин секој нејзин член е за 1 поголем од претходнио.

Решение. Ваквиот распоред е:

$$0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9.$$

6. Во изразот на левата страна стави загради

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9:10=7$$

така што ќе добиеш точно равенство.

Решение. Еве три решенија на задачата:

$$\begin{aligned} 7 &= ((((1:2):3):4):5):((((6:7):8):9):10) \\ &= 1:((2:(3:(((4:5):6):7))):((8:9):10)) \\ &= 1:((2:3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10))). \end{aligned}$$

7. Меѓу цифрите во низата

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

запиши знаци на основните аритметички операции така што вредноста на добиениот израз е 2008.

Решение. Едно од можните решенија е

$$1+2+345\cdot 6-7\cdot 8\cdot 9=2008.$$

8. Меѓу секои две цифри во низата

$$3\ 2\ 5\ 4\ 1$$

постави по еден знак од четирите основни операции така да вредноста на добиениот израз биде 25. Секоја операција треба да се употреби еднаш. Дозволено е да се користат загради.

Решение. Имаме:

$$(3:2+5)\cdot 4-1=25.$$

9. Меѓу некои цифри во низата

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0$$

стави знаци на основните операции за пресметување така што вредноста на добиениот израз ќе биде 2008. Дозволено е користење на загради.

Решение. Имаме

$$(987-654)\cdot 3\cdot 2+10=2008.$$

10. Меѓу секои две цифри во низата

1 2 3 4 5 6 7 8 9

стави знаци на некои од четирите основни аритметички операции и по потреба користи загради така што вредноста на добиениот израз ќе биде 2020.

Решение. Некои решенија на задачата се:

$$1+(2+3\cdot 4\cdot(5+6))\cdot(7+8)+9=2020,$$
$$1+2\cdot 3\cdot(4-5+6\cdot 7\cdot 8)+9=2020,$$
$$1+2-3-4\cdot(5-6-7\cdot 8\cdot 9)=2020.$$

11. Меѓу некои цифри во низата

9 9 9 9 9 9 9 9 9

стави знаци на основните операции за пресметување така што вредноста на добиениот израз ќе биде 2008.

Решение. Имаме

$$999+999+9:9+9=2008.$$

12. Дадени се природни броеви a,b и c такви што $a+b+c=2006$ и $a>b>c$. Определи за кои вредности на a,b и c изразот $a-b+c$ е:

а) најмал,

б) најголем.

Решение. а) Изразот $a-b+c$ е најмал ако изразот $a-b$ е најмал и c е најмал. Бидејќи $a>b$ најмалата можна вредност е $a-b=1$, а најмалата можна вредност е $c=1$. Според тоа, $a+b=2005$, па како е $a-b=1$, добиваме $a=1003$ и $b=1002$. Според тоа, најмалата можна вредност на $a-b+c$ е 2 и се добива за $a=1003$, $b=1002$ и $c=1$.

б) Изразот $a-b+c$ е најголем ако b е најмал. Бидејќи $b>c$ најмалата можна вредност е $b=2$. Притоа $c=1$ и $a=2003$. Значи, најголемата можна вредност на $a-b+c$ е 2002 и истата се достигнува за $a=2003$, $b=2$ и $c=1$.

13. Буквите замени ги со цифри така што ќе биде исполенто

$$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot F = 2016,$$
$$A < B < C < D < E < F.$$

Решение. Имаме $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, па затоа бројот 2016 може само на еден начин да се запише како производ на пет различни едноцифрени броеви поголеми од 1:

$$2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2016 .$$

Ако уште помножиме со 1 го добиваме решението

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2016 ,$$

при што важат и саканите неравенства.

14. Замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри, а истите букви со исти цифри) така што ќе важи

$$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E + F = 2017$$

и

$$A < B < C < D < E .$$

Решение. Цифрата F е од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, па затоа производот $A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E$ е од множеството

$$\{2017, 2016, 2015, 2014, 2013, 2012, 2011, 2010, 2009, 2008\}.$$

Со непосредна проверка се добива дека единствено бројот 2016 во своето разложување на прости множители има само едноцифрени множители, додека сите други имаат броеви со две и повеќе цифри. Според тоа, $F = 1$ и

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E = 2016 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2\cdot) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8, \end{aligned}$$

па затоа од $A < B < C < D < E$ следува $A = 2, B = 3, C = 6, D = 7, E = 8$.

15. Во бројниот ребус $\frac{R \cdot E \cdot B \cdot R \cdot A \cdot S \cdot T \cdot I}{B \cdot E \cdot L \cdot O}$ замени ги еднаквите букви со еднакви цифри, а различните букви со разли цифри, така што вредноста на дропката ќе биде најголемиот природен број кој може да се добие на овој начин.

Решение. Во ребусот $\frac{R \cdot E \cdot B \cdot R \cdot A \cdot S \cdot T \cdot I}{B \cdot E \cdot L \cdot O}$ имаме 9 различни букви кои треба да ги замениме со 9 различни цифри. По скратувањето на дропката добиваме $\frac{R \cdot E \cdot B \cdot R \cdot A \cdot S \cdot T \cdot I}{B \cdot E \cdot L \cdot O} = \frac{R \cdot R \cdot A \cdot S \cdot T \cdot I}{L \cdot O}$. Дропката $\frac{R \cdot R \cdot A \cdot S \cdot T \cdot I}{L \cdot O}$ е

најголема кога именителот е најмал, а броителот е најголем. Според тоа, $L=1, O=2$ и $R=9, A=8, S=7, T=6, I=5$, па останува $B=4$ и $E=3$. Значи, најголемиот природен број кој може да се добие на овој начин е 68040 и притоа $\frac{9\cdot3\cdot4\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot1\cdot2}=68040$.

16. Во бројниот ребус $\frac{M\cdot A\cdot T\cdot E\cdot M\cdot A\cdot T\cdot I\cdot \check{C}\cdot K\cdot I}{K\cdot V\cdot I\cdot Z}$ замени ги буквите со цифри (исти букви со исти цифри и различни букви со различни цифри) така што ќе се добие најголемиот можен природен број.

Решение. Во ребусот имаме девет различни букви, кои треба да се заменат со девет цифри. Јасно, цифрите се ненулти, бидејќи 0 не може да е цифра во именителот, а ако е во броителот тогаш се добива бројот 0. По скратување на ребусот добиваме

$$\frac{M\cdot A\cdot T\cdot E\cdot M\cdot A\cdot T\cdot I\cdot \check{C}\cdot K\cdot I}{K\cdot V\cdot I\cdot Z}=\frac{M\cdot A\cdot T\cdot E\cdot M\cdot A\cdot T\cdot I\cdot \check{C}}{V\cdot Z}.$$

Добиената дропка е најголема ако именителот е најмал, а броителот е најголем. Оттука следува дека V и Z треба да ги замениме со 1 и 2, а вредноста во броителот ќе биде најголема ако буквите кои се јавуваат по два пати ги заменуваме со најголемите можни цифри. Така добиваме $M=9, A=8, T=7, E=6, I=5, \check{C}=4, K=3, V=2, Z=1$ и ед-но решение е: $\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot9\cdot8\cdot7\cdot5\cdot4\cdot3\cdot5}{3\cdot2\cdot5\cdot1}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot9\cdot8\cdot7\cdot5\cdot4}{2\cdot1}=15240960$.

17. Дали постојат различни цифри A и B такви што $\overline{AAA}\cdot\overline{AB}=\overline{ABA}\cdot\overline{AA}$.

Решение. Бидејќи $A\neq0$, ако даденото равенство го поделиме со A добиваме $111\cdot\overline{AB}=\overline{ABA}\cdot11$, односно $1110A+111B=1111A+110B$, од каде добиваме $A=B$. Според тоа, не постојат различни цифри A и B за кои е задоволено даденото равенство.

18. Сите цифри на седумцифрреният број $\overline{abcdefg}$ се различни, при што $g\neq0$. Збирот на цифрите на овој број е 21. Кога овој број ќе се собере со бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед се добива број кај кој сите цифри се еднакви. Кој е најголемиот можен таков седумцифрен број?

Решение. Бидејќи $0+1+2+3+4+5+6=21$ цифрите на бројот $\overline{abcdefg}$ се 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Броевите $\overline{abcdefg}$ и $\overline{gfedcba}$ имаат исти цифри, при собирање на овие броеви најмалку три пати немаме пре-

нос, па како нивниот збир е број запишан со еднакви цифри заклучуваме дека при собирањето воопшто немаме преност. Оттука следува дека збирот на цифрите на $\overline{abcdefg}+\overline{gfedcba}$ е 42, па како цифрите на збирот се еднакви добиваме дека тој збир е 6666666. Но, цифрите 0 и 6 не може да се на прво и последно место, а цифрата 3 е на средината на бројот. Затоа најголемиот таков седумцифрен број е 5643201.

19. Секоја ѕвездичка замени ја со знак на некоја од основните перации и по потреба користи загради така што равенството

$$9*8*7*6*5*4*3*2*1=2018$$

ќе биде точно.

Решение. Некои решенија на бројниот ребус се:

$$9\cdot 8\cdot 7\cdot (6+5-4-3)+2\cdot 1=2018;$$
$$(9\cdot 8\cdot 7\cdot (6+5-4-3)+2)\cdot 1=2018;$$
$$9\cdot 8\cdot 7\cdot (6+5-4-3)+2:1=2018;$$
$$(9\cdot 8\cdot 7\cdot (6+5-4-3)+2):1=2018;$$
$$(9+(8\cdot 7-6)\cdot (5\cdot 4))\cdot (3-2+1)=2018;$$
$$(9\cdot 8\cdot 7+6-5)\cdot 4-(3-2+1)=2018;$$
$$(9+(8\cdot 7-6)\cdot (5\cdot 4))\cdot (3-2+1)=2018;$$
$$9\cdot (8+7))\cdot (6+5+4)-3\cdot 2-1=2018;$$
$$(9\cdot (8+7)\cdot 6\cdot 5-4\cdot 3):2-1=2018;$$
$$9\cdot 8\cdot 7\cdot (6-5)\cdot 4+3-2+1=2018.$$

20. Во записот

$$M*A*T*E*M*A*T*I*K*A=2018$$

замени ги буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри), а секоја ѕвездичка замени ја со знак на некоја од основните аритметички операции, така што добиеното равенство ќе биде точно.

Решение. Некои решенија на дадениот ребус се:

$$7\cdot 8\cdot 9+3\cdot 7\cdot 8\cdot 9+6+4-8=2018,$$
$$9\cdot 8\cdot 7+3\cdot 9\cdot 8\cdot 7+2\cdot 5-8=2018,$$
$$9\cdot 7\cdot 8+3\cdot 9\cdot 7\cdot 8+5+4-7=2018,$$
$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 4+9-8+7-3+5-8=2018,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4-8+9-7-3+2+9=2018,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4-8+9+7-0+3-9=2018,$$

$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4+8-9+7-0+5-9=2018,$$
$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 3+9\cdot 8\cdot 7-1-5+8=2018,$$
$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 3+9\cdot 8\cdot 7+0-6+8=2018,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4-8+9-7-2+1+9=2018,$$
$$6\cdot 3\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 3-8+2+5+3=2018,$$
$$3\cdot 2\cdot 1\cdot 7\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 8+0+2=2018,$$
$$4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 7+5-3=2018.$$

21. Дешифрирај го множењето:

$$*7\cdot 30=*0**.$$

Решение. Бидејќи 30 е делив со 3 и со 10, заклучуваме дека производот е делив со 3 и со 10. Значи, цифрата на единиците на производот е 0, т.е. $*7\cdot 30=*0*0$. Сега ако последното равенство го скратиме со 10, добиваме $*7\cdot 3=*0*$, па затоа во последното равенство цифрата на единиците на производот е еднаква на 1. Значи, даденото равенство го добива видот $*7\cdot 30=*010$. За да производот биде делив со 3 цифрата на илјадитите мора да е 2, 5 или 8. Но,

$$*7\cdot 30<100\cdot 30=3000,$$

па заклучуваме дека цифрата на илјадитите на производот е 2, односно $*7\cdot 30=2010$. Сега, од $2010:30=67$ заклучуваме дека равенството е $67\cdot 30=2010$.

22. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abba}$ такви што важи равенството $\overline{abba}\cdot 2=\overline{ccdd}$, каде a,b,c,d се различни цифри.

Решение. Јасно, $a<5$, бидејќи за $a\geq 5$ бројот $\overline{abba}\cdot 2=\overline{ccdd}$ ќе биде петцифрен. Бројот $\overline{ccdd}$ е парен, па затоа $d\in\{2,4,6,8\}$.

Ако $d=2$, тогаш $a=1$ и од $\overline{1bb1}\cdot 2=\overline{cc22}$, добиваме $1661\cdot 2=3322$.

Ако $d=4$, тогаш $a=2$ и од $\overline{2bb2}\cdot 2=\overline{cc44}$, добиваме $2772\cdot 2=5544$.

Ако $d=6$, тогаш $a=3$ и од $\overline{3bb3}\cdot 2=\overline{cc66}$, добиваме $3883\cdot 2=7766$.

Ако $d=8$, тогаш $a=4$ и од $\overline{4bb4}\cdot 2=\overline{cc88}$, добиваме $4994\cdot 2=9988$, што не е решение бидејќи цифрите b и c се еднакви, а по услов треба да се различни.

23. Здравко решавајќи задача направил две грешки така што при множење на три броја еден знак за множење изоставил, а другиот го запи-

шал на погрешно место. Така наместо $\overline{AB}\cdot\overline{C}\cdot\overline{DE}$ запишал $A\cdot\overline{BCDE}$. Дали е множно да важи

$$\overline{AB}\cdot\overline{C}\cdot\overline{DE}=A\cdot\overline{BCDE},$$

ако на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

Решение. Одговорот на прашањето е позитивен. Неколку решенија на дадениот броен ребус се

$$27\cdot 6\cdot 95=2\cdot 7695=15390,$$
$$34\cdot 7\cdot 60=3\cdot 4760=14280,$$
$$73\cdot 9\cdot 42=7\cdot 3942=27594,$$
$$82\cdot 4\cdot 60=8\cdot 2460=19680.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

24. Замени ги буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што двете равенства ќе бидат истовремено точни:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MA}=\overline{MIR}\ \text{ и }\ \overline{AM}\cdot\overline{AM}=\overline{RIM}$$

Решение. Од условот на задачата следува дека $0<M<4$, бидејќи во спротивно $\overline{MIR}$ ќе биде четирицифрен број. Од второто равенство $\overline{AM}\cdot\overline{AM}=\overline{RIM}$ следува дека $M=1$ и дека $0<A<4$, бидејќи во спротивно $\overline{RIM}$ ќе биде четирицифрен број. Јасно, $A\neq 1$. Ако $A=2$, тогаш добиваме $I=R=4$, што противречи на условот на задчата. За $A=3$, добиваме $I=6$ и $R=9$. Според тоа, задачата има единствено решение: $13\cdot 13=169$ и $31\cdot 31=961$.

25. Секоја буква замени ја со некоја цифра (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето

$$\overline{DVA}+\overline{TRI}=\overline{PET}$$

ќе биде точно и $\overline{PET}$ ќе биде најголемит можен број.

Решение. Забележуваме дека:

- потребни се осум различни цифри,
- збирот на два трицифрени броја е трицифрен број,
- на две места е буквата T,
- цифрите D,T и P се различни од 0.

Од условот на задачата следува дека бројот $\overline{PET}$ не може да е поголем од 987. Да провериме дали е можно $\overline{PET}=987$. За таа цел по-

требно е да важи $A+I=7$ и како цифрите A и I се помали или еднакви на 6, во случајот не е можно да има пренос при кој цифрата на единиците е 7, па затоа мора да е $V+R=8$. Слично, бидејќи цифрите V и R се помали од 6, не е можно да има пренос при кој цифрата на десетките ќе биде 8, па затоа $D+7=9$, од каде добиваме $D=2$. Од даденот равенство следува равенството $\overline{VA}+\overline{RI}=87$, при што треба да важи $A+I=7$, $V+R=8$ и $A,I,V,R\in\{0,1,3,4,5,6\}$. Сега лесно се добива дека единствени решенија на здачата се

$$231+756=987,\ 236+751=987,\ 251+736=987,\ 256+731=987.$$

26. Секоја буква замени ја со некоја цифра (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно:

$$\overline{ТРИ}+\overline{ТРИ}=\overline{ШЕСТ}$$

Решение. Во бројниот ребус имаме шест различни букви. Понатаму збирот на два трицифрени броја е четирицифрен број, па важи $Ш=1$ и $Т$ е цифра на единиците добиена како збир на две еднакви цифри на единиците, па затоа $Т$ е парна цифра поголема од 5. Значи, $Т=6$ или $Т=8$.

За $Т=6$ добиваме: $\overline{6РИ}+\overline{6РИ}=\overline{1ЕС6}$, од каде следува дека $И=3$ или $И=8$. Според тоа, решенија во овој случај се:

$$643+643=1286,$$
$$638+638=1276,$$
$$648+648=1296,$$
$$678+678=1356$$

За $Т=8$ добиваме $\overline{8РИ}+\overline{8РИ}=\overline{1ЕС8}$, од каде следува дека $И=4$ или $И=9$. Според тоа, решенија во овој случај се:

$$854+854=1708,$$
$$864+864=1728,$$
$$829+839=1658,$$
$$839+839=1678,$$
$$869+869=1738.$$

27. Секоја буква замени ја со цифра (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно:

$$\overline{UDAR}+\overline{UDAR}=\overline{DRAMA}.$$

Решение. Бидејќи збирот на два еднакви четирицифрени броеви е петцифрен број, добиваме $D=1$, односно $\overline{U1AR}+\overline{U1AR}=\overline{1RAMA}$ и A е парна цифра. Сега, од збирот на стотките заклучуваме дека единствена можност е $A=2$, па затоа лесно се добива единственото решение $8126+8126=16252$.

28. Определи го најголемиот број можни собирци на десната страна во равенството

$$\underbrace{\overline{PI}+\overline{PI}+\ldots+\overline{PI}}_{x}=\overline{PILE}$$

во кое на различни букви соодветствуваат различни цифри,а на исти букви исти цифри.

Решение. Равенството $\underbrace{\overline{PI}+\overline{PI}+\ldots+\overline{PI}}_{x}=\overline{PILE}$ ќе го запишеме во видот $x\cdot\overline{PI}=100\overline{PI}+\overline{LE}$, односно $(x-100)\cdot\overline{PI}=\overline{LE}$. Според тоа, проблемот се сведува на определување двоцифрени броеви $\overline{PI}$ и $\overline{LE}$ со различни цифри, така што количникот $\frac{\overline{LE}}{\overline{PI}}$ ќе биде најголем можен број. Најмалиот двоцифрен број запишан со различни цифри е бројот 12, а најголем негов двоцифрен содржател е 96 и тој има различни цифри. Според тоа, $x-100=\frac{96}{12}$, односно $x=108$. Значи, даденото равенство може да има најмногу 108 собирци.

29. Реши го бројниот ребус

$$\overline{DVA}+\overline{DVA}+\overline{DVA}+\overline{DVA}=\overline{BRAN},$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

Решение. Од равенството

$\overline{DVA}+\overline{DVA}+\overline{DVA}+\overline{DVA}=\overline{BRAN}$, т.е. од $4\cdot\overline{DVA}=\overline{BRAN}$

следува дека двоцифрениот завршеток на резултатот AN е делив со 4. Понатаму,

- D, A, O не може да се 0,
- D, A, N не може да се 1,
- N е парна цифра (0, 2, 4, 6 или 8),
- O може да е 1, 2 или 3.

Можни се следниве решенија:

$$432+432+432+432=1728,$$
$$483+483+483+483=1932,$$
$$516+516+516+516=2064,$$
$$716+716+716+716=2864,$$
$$816+816+816+816=3264,$$
$$549+549+549+549=2196.$$

30. Реши го бројниот ребус
$$\overline{LETO}+\overline{LETO}=\overline{POLET}$$
во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри и на исти букви соодветствуваат исти цифри.

Решение. Во дадениот ребус збирот на два четирицифрени броја е петцифрен број, па затоа $P=1$, $L\geq 5$ и T е парна цифра. Понатаму, заменувајќи за T редоследно 0, 2, 4, 6 и 8 и разгледувајќи ги преостанатите цифри добиваме едно решение $8947+8947=17894$.

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

31. Дали е можно во записот
$$\overline{LETO}+\overline{LETO}+\overline{LETO}=\overline{ODMOR}$$
да се заменат буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што добиеното равенство ќе биде точно.

Решение. Цифрата O може да биде 1 или 2.

1) Ако $O=1$, тогаш $R=3$ и $4\leq L\leq 6$. Сега, бидејќи збирот $T+T+T$ завршува на 1, мора да е $T=7$. Со непосредна проверка наоѓаме дека за $L=4$ и $L=5$ немаме решение. За $L=6$, добиваме $6071+6071+6071=18213$.
2) Ако $O=2$, тогаш $R=6$ и $7\leq L\leq 9$. Бидејќи $T+T+T$ завршува на 2 мора да е $T=4$. За $L=7$ имаме решенија
$$7842+7842+7842=23526 \text{ и } 7942+7942+7942=23826.$$
За $L=8$ имаме решение $8342+8342+8342=25026$.
За $L=9$ имаме решенија
$$9042+9042+9042=27126 \text{ и } 9342+9342+9342=28026.$$

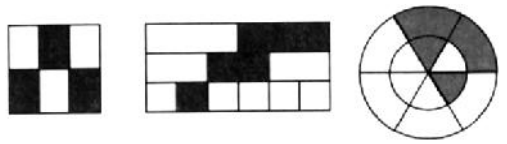
32. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви различни цифри:
$$\overline{ТАМТАМ}+\overline{МРАК}=\overline{КОШМАР}.$$

Решение. Подолу се дадени две решенија на бројниот ребус:

$$496496 + 6195 = 502691; \qquad 498498 + 8395 = 506893.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

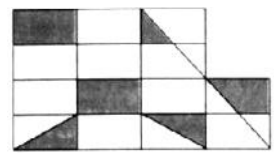
33. На долните цртежи квадратот е поделен на еднакви квадратчиња, трите ленти на правоаголникот се со еднаква ширина и секој е поделена на еднакви делови, а круговите се поделени на еднакви делови. На која фигура е обоена точно една третина од фигурата.



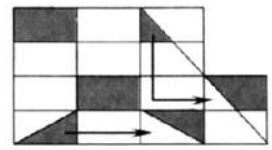
Решение. Квадратот е составен од шест еднакви квадратчиња, од кои се обоени 3. Значи обоено е $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ од квадратот. Правоаголникот е поделен на три еднакви ленти. Првата е поделена на два еднакви дела, втората на три еднакви дела и третата на шест еднакви дела. Секој дел во втората лена е еднаков на $6:3=2$ дела од третата лента, а секој дел од првата лента е еднаков на $6:2=3$ дела од третата лента. Според тоа, од правоаголникот се обоени $3+2+1=6$ дела од третата лента, т.е е обоена третата лента. Но, третата лента е еднаква на $\frac{1}{3}$ од правоаголникот.

Кругот е поделен на шест еднакви делови и секој дел има по 1 мал и 1 голем дел. Обоени се 2 мали и 2 големи делови, што значи дека се обоени 2 дела од кругот. Конечно, обоео е $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ од кругот.

34. На фигурата прикажана цртежот десно сите мали правоаголници се еднакви. Колкав дел од оваа фигура е осенчен?



Решение. Ако два од осенчените триаголници ги преместиме како што е прикажани на цртежот десно, тогаш од вкупно 14 еднакви правоаголници ќе бидат осенчени точно 4 правоаголници. Значи, осенчено е $\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$ од дадената фигура.



35. Определи која цифра се наоѓа на 2016-тото место по децималната

запирка, во децималниот запис на дропката:

а) $\frac{3}{7}$, б) $\frac{1711}{495}$.

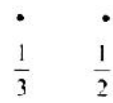
Решение. а) Имаме $\frac{3}{7}=3:7=0,428571428571...=0,\overline{428571}$. Значи, во децималниот запис имаме повторување на шест цифри. Сега, од $2016=6\cdot 336$ следува дека по децималната запирка на 2016-тото место е цифрата 1.

б) Имаме $\frac{1711}{495}=1711:495=3,45656565...=3,4\overline{56}$. Значи, во децималниот запис од втората цифра се повторуваат две цифри. Сега, од $2015=2\cdot 1005+1$ заклучуваме дека по децималната запирка на 2016-тото место е цифрата 5.

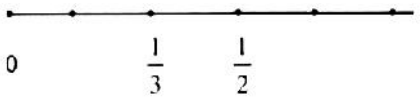
36. Пабло претставил некои дропки на бројната полуправа. По грешка избришал сè освен точките кои соодветствуваат на броевите $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$ (цртеж десно). Како Пабло ќе го определи почетокот на бројната полуправа?

Решение. Пабло знае дека $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, што значи дека меѓу дадените точки се наоѓа $\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}$ од единичната отсечка. Според тоа, отсечката која е определена со овие две точки ја пренесува шест пати на правата определена со овие две точки, со што се добива почетокот на бројната полуправа (види цртеж).

37. Андреј претставил некои дропки на бројната полуправа. По грешка избришал сè освен точките кои соодветствуваат на броевите $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Како Андреј ќе го определи почетокот на бројната полуправа?



Решение. Андреј знае дека $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, што значи дека меѓу точките кои му останале се наоѓа $\frac{1}{6}$ од единичната отсечка. Значи, кога отсечката определена со овие точки ја пренесеме два пати во лево на правата определена со овие точки ќе го добиеме почетокот на бројната полуправа.



38. Милка нацртала бројна права и означила некои дропки на неа. Нејзиниот помал брат Богдан го избришал почетокот на полуправата, па така останал делот од $\frac{2}{3}$ до $\frac{7}{8}$. Како Милка ќе го определи почеткот на полуправата, односно бројот 0, ако уште знае дека растојанието меѓу дропките $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{8}$ е еднакво на $5\,cm$?

Решение. Имаме $\text{NZS}(3,8)=24$, па затоа $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$ и $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$. Понатаму, $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{21}{24}-\frac{16}{24}=\frac{5}{24}$, па затоа $\frac{5}{24}$ се еднакви на $5\,cm$. Според тоа, $\frac{1}{24}$ е еднаква на $1\,cm$. Значи, бројот 0 е на продолжението на соодветната полуправа лево од бројот $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$ на растојание од $16\,cm$

39. На бројната права определи го местото на бројот $\frac{5}{7}$, ако знаеш каде се наоѓаат броевите $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{5}$, растојанието меѓу кои е еднакво на $1\,cm$.

Решение. Имаме $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}=\frac{21-20}{35}=\frac{1}{35}$. Ова значи дека на $\frac{1}{35}$ на бројната права соодветствува растојание од $1\,cm$. Сега, бидејќи $\frac{5}{7}-\frac{4}{7}=\frac{1}{7}=\frac{5}{35}$ добиваме дека бројот $\frac{5}{7}$ се наоѓа $5\,cm$ десно од бројот $\frac{4}{7}$, односно $4\,cm$ десно од бројот $\frac{3}{5}$.

40. Пресметај ја разликата $\frac{232323}{242424}-\frac{23}{24}$.

Решение. Бидејќи $232323:23=10101$ и $242424:24=10101$, добиваме

$$\frac{232323}{242424}-\frac{23}{24}=\frac{23\cdot 10101}{24\cdot 10101}-\frac{23}{24}=\frac{23}{24}-\frac{23}{24}=0.$$

41. Пресметај:

а) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{3}{2017\cdot 2020}$,

б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot 2020}$.

Решение. а) Ќе користиме дека за секој броеви n и k важи

$$\frac{k}{n\cdot(n+k)}=\frac{n+k-n}{n\cdot(n+k)}=\frac{n+k}{n\cdot(n+k)}-\frac{n}{n\cdot(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}.$$

Според тоа,

$$\frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\ldots+\frac{3}{2017\cdot2020}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2020}=1-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}.$$

б) Имаме

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot2020}=(\frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\ldots+\frac{3}{2017\cdot2020}):3=\frac{2019}{2020}:3=\frac{673}{2020}.$$

42. Дропката $\frac{277}{2007}$ запиши ја како збир како збир на две нескратливи дропки чии именители се заемно прости броеви.

Решение. Бидејќи $2007=3\cdot3\cdot223$, единствено решение е именителите на дропките да се 9 и 223. Според тоа, $\frac{277}{2007}=\frac{x}{9}+\frac{y}{223}=\frac{223x}{2007}+\frac{9y}{2007}$, од каде добиваме $223x+9y=277$. Во множеството природни броеви единствено решение на оваа равенка е $x=1, y=(277-223):9=6$. Според тоа, $\frac{277}{2007}=\frac{1}{9}+\frac{6}{223}$.

43. Користејќи некои прости броеви од првата стотка кои во својот запис ја содржат цифрата 7 и операциите собирање, одземање, множење и делење, запиши израз чија вредност е $\frac{1}{2}$.

Решение. Прости броеви од втората десетка во чиј запис учествува цифрата 7 се: 7, 17, 37, 47, 67, 71, 73, 79 и 97. Неколку решенија на задачата се:

$$\frac{17-7}{37-17}=\frac{1}{2},\ \frac{17-7}{67-47}=\frac{1}{2},\ \frac{97-67}{67-7}=\frac{1}{2},\ \frac{67-47}{47-7}=\frac{1}{2}.$$

44. Дропката $\frac{11}{15}$ запиши ја како збир на две нескратливи дропки чии именители се различни. Колку решенија има задачата?

Решение. Бидејќи делители на бројот 15 се 1, 3, 5 и 15, дропката $\frac{11}{15}$ можеме како збир на две нескартливи дропки чии именители се различни да ја запишеме на следниве три начини:

1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=\frac{11}{15}$ и тогаш $\frac{5x}{15}+\frac{3y}{15}=\frac{11}{15}$, т.е. $5x+3y=11$. Во множеството природни броеви последната равенка има единствено решение $x=1, y=2$, па затоа $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$.

2) $\frac{x}{3}+\frac{y}{15}=\frac{11}{15}$ и тогаш $\frac{5x}{15}+\frac{y}{15}=\frac{11}{15}$, т.е. $5x+y=11$. Во множеството природни броеви последната равенка има решенија $x=1, y=6$ и $x=2, y=1$. Но, дропката $\frac{6}{15}$ не е нескратлива, па затоа првото решение го отфрламе, а од второт решение добиваме $\frac{2}{3}+\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$.

3) $\frac{x}{5}+\frac{y}{15}=\frac{11}{15}$ и тогаш $\frac{3x}{15}+\frac{y}{15}=\frac{11}{15}$, т.е. $3x+y=11$. Во множеството природни броеви последната равенка има решенија $x=3, y=2$ или $x=2, y=5$ или $x=1, y=8$. Притоа второто решение отпаѓа бидејќи дропката $\frac{5}{15}$ не е нескратлива, а од првото и третото решение добиваме $\frac{3}{5}+\frac{2}{15}=\frac{11}{15}$ и $\frac{1}{5}+\frac{8}{15}=\frac{11}{15}$.

Според тоа, задачата има вкупно четири решенија и тоа:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15},\ \frac{2}{3}+\frac{1}{15}=\frac{11}{15},\ \frac{3}{5}+\frac{2}{15}=\frac{11}{15} \text{ и } \frac{1}{5}+\frac{8}{15}=\frac{11}{15}.$$

45. Ако $((x+23):7-17)\cdot 13=429$, пресметај ја вредноста на изразот $6x+62$.

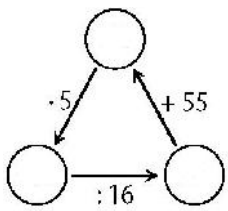
Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$\begin{aligned}
&((x+23):7-17)\cdot 13=429,\\
&(x+23):7-17=429:13,\\
&(x+23):7-17=33,\\
&(x+23):7=33+17,\\
&(x+23):7=50,\\
&x+23=350,\\
&x=350-23,\\
&x=327.
\end{aligned}$$

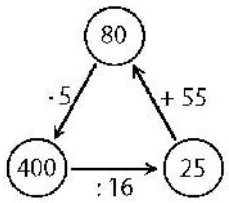
Според тоа,

$$6x+62=6\cdot 327+62=1962+62=2024.$$

46. Во кругчињата на шемата прикажана на цртежот десно запиши броеви така што пресметувањата ќе бидат точни.

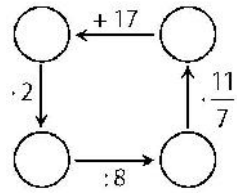


Решение. Нека непознатиот број во горното кругче е x. Тогаш во насока на стрелката во



следнот кругче е бројот $5x$, а во последното кругче е бројот $\frac{5x}{16}$. Сега, одејќи по третата стрелката добиваме равенката $\frac{5x}{16}+55=x$, од каде наоѓаме $55=x-\frac{5x}{16}$, односно $55=\frac{11x}{16}$. Според тоа, $x=80$. Значи, во кругчињата треба да се запишат броевите 80, 400 и 25.

47. Во кругчињата на шемата прикажана на цртежот десно запиши ги потребните броеви така што пресметувањата ќе бидат точни.



Решение. Нека непознатиот број во горниот лев кбадрат го означиме со x. Тогаш во следниот квадрат во правец на стрелката ќе биде запишан бројот $2x$, во следниот квадрат бројот $\frac{x}{4}$, и во последниот четврт квадрат бројот $\frac{x}{4}\cdot\frac{11}{7}=\frac{11x}{28}$. Затоа треба да важи $\frac{11x}{28}+17=x$, од каде наошаме $x-\frac{11x}{28}=17$. Значи, $\frac{17x}{28}=17$, односно $x=28$. Според тоа, во кругчињата се броевите 28, 56, 7 и 11.

48. Определи ги броевите a,b,c ако важи

$$a+b=\tfrac{23}{21},\ b+c=\tfrac{76}{63}\ \text{ и }\ c+a=\tfrac{13}{9}.$$

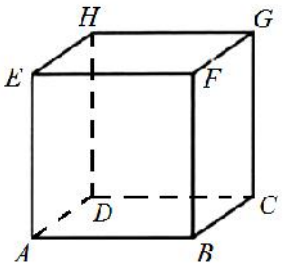
Решение. Ако ги собереме трите равенства, последователно добиваме

$$a+b+b+c+c+a=\tfrac{76}{63}+\tfrac{23}{21}+\tfrac{13}{9},$$
$$2(a+b+c)=\tfrac{76+23\cdot3+13\cdot7}{9\cdot7}$$
$$2(a+b+c)=\tfrac{236}{63},$$
$$a+b+c=\tfrac{118}{63}.$$

Според тоа,

$$a=\tfrac{118}{63}-(b+c)=\tfrac{118}{63}-\tfrac{76}{63}=\tfrac{42}{63}=\tfrac{2}{3},$$
$$b=\tfrac{118}{63}-(c+a)=\tfrac{118}{63}-\tfrac{13}{9}=\tfrac{27}{63}=\tfrac{3}{7},$$
$$c=\tfrac{118}{63}-(a+b)=\tfrac{118}{63}-\tfrac{23}{21}=\tfrac{49}{63}=\tfrac{7}{9}.$$

49. Маја ги означила темињата на коцката со букци, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа на буквите им дала вредности така што збировите на секои четири броја кои се темиња на било кој ѕид се еднакви. Нејзината сестра Матеа избришала некои броеви, па така знаеме дека $A=1,\ C=\frac{1}{3},$ $F=\frac{1}{2}, G=1, H=\frac{1}{4}$. Определи ги вредностите на B, D и E.



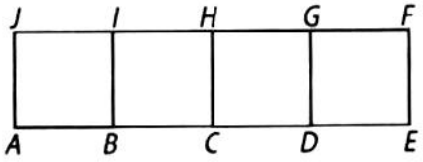
Решение. Имаме $B+C+F+G=E+H+F+G$ и затоа $B+\frac{1}{3}=E+\frac{1}{4}$, односно $E=B+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=B+\frac{1}{12}$. Слично, $C+D+G+H=E+F+G+H$ и затоа $\frac{1}{3}+D=B+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$, односно $D=B+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=B+\frac{1}{4}$. Понатаму, $A+B+C+D=E+F+G+H$, од каде последователно добиваме

$$1+B+\frac{1}{3}+B+\frac{1}{4}=B+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4},$$
$$B+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\frac{1}{2},$$
$$B=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$
$$B=\frac{1}{4}.$$

Сега, $E=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ и $D=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

50. Темињата на квадратите на цртежот десно се означени со буквите A,B,C,D,E,F,G,H,I,J и е познато дека

$$A=\frac{3}{4}, C=\frac{5}{6}, D=\frac{1}{4}, F=\frac{2}{3},$$
$$G=1, I=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{3}.$$



Определи ги вредностите на буквите B, E и H ако збировите на четирите броја запишани во темињата на секој квадрат се еднакви.

Решение. Од првиот и вториот квадрат добиваме $A+J=C+H$, т.е. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}+H$, па затоа $H=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{9+4-10}{12}=\frac{1}{4}$. Сега, од третиот квадрат добиваме $C+D+G+H=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}=\frac{7}{3}$. Затоа

$$E = \frac{7}{3} - F - G - D = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ и}$$
$$B = \frac{7}{3} - I - J - A = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

51. Најди ги сите решенија на следниот систем равенки:
$$a + b + c = 0,$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$
Решение. Ниту еден од трите броја не е еднаков на 0. Имаме:
$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{a+b}{ab} = \frac{c}{ab}, \text{ т.е. } ab = c^2 > 0.$$
Слично се добива дека: $ac = b^2 > 0$ и $bc = a^2 > 0$. Следува, броевите a, b, c имаат ист предзнак. Но, тогаш не е можно нивниот збир да биде 0. Значи, дадениот систем нема решенија.

52. Три различни дропки имаат својство нивниот збир да е природен број, но и збирот на нивните реципрочни вредности исто така да е природен број. Најди барем три такви дропки.
Решение. Како што знаеме $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ и како $\frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{6}{1} = 11$ заклучуваме дека дропките $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ се едно решение на задачата. Можни се и други решенија, на пример: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{1} = 3$ и $\frac{3}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = 5$.

53. Аритметичката средина на осум различни природни броеви е 15. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.
Решение. Нека броевите се $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$. Имаме $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_8}{8} = 15$, па затоа $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8 = 120$. Ако a_8 е најголемиот број, тогаш тој максимална вредност достигнува кога збирот на другите седум броја е најмал можен. Тоа е случај кога седумте броја се 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Имаме $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 7 = 28$, па затоа $a_8 = 120 - 28 = 92$.

54. Аритметичката средна на десет различни природни броеви е 12. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.
Решение. Нека дадените броеви се $n_1, n_2, ..., n_9, n_{10}$. Нивната аритметичка средина е

$$\frac{n_1+n_2+...+n_9+n_{10}}{10}=12,$$

од каде следува

$$n_1+n_2+...+n_9+n_{10}=120.$$

Значи, нивниот збир е 120, па бројот n_{10} ќе биде најголем можен ако збирот на преостанатите девет броја е најмал можен, т.е. броевите се најмали можни. Броевите се различни, па затоа најмалите можни броеви се 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а нивниот збир е $1+2+...+9=45$. Според тоа, $n_{10}=120-45=75$. Значи, најголемиот од десет различни природни броеви чија аритметичка средина е 12 може да е бројот 75.

55. Аритметичката средина на десет различни природни броеви е 18. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.

Решение. Нека броевите се $a_1,a_2,a_3,...,a_{10}$. Имаме $\frac{a_1+a_2+...+a_{10}}{10}=18$, па затоа $a_1+a_2+a_3+...+a_{10}=180$. Ако a_{10} е најголемиот број, тогаш тој максимална вредност достигнува кога збирот на другите девет броја е најмал можен. Тоа е случај кога деветте броја се 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Имаме $1+2+3+4+...+9=45$, па затоа $a_{10}=180-45=135$.

56. Аритметичката средина на дванаесет различни парни природни броеви е еднаква на 20. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот од овие броеви.

Решение. Нека дадените броеви се $n_1,n_2,...,n_{11},n_{12}$. Нивната аритметичка средина е

$$\frac{n_1+n_2+...+n_{11}+n_{12}}{12}=20,$$

од каде следува

$$n_1+n_2+...+n_{11}+n_{12}=240.$$

Значи, нивниот збир е 240, па бројот n_{12} ќе биде најголем можен ако збирот на преостанатите единаесет броја е најмал можен, т.е. броевите се најмали можни. Броевите се различни парни броеви, па затоа најмалите можни броеви се 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 и 22, а нивниот збир е $2+4+6+...+22=132$. Според тоа, $n_{12}=240-132=108$. Значи, најголемиот од дванаесет различни природни броеви чија аритметичка средина е 20 може да е бројот 132.

57. Што е поголемо $\frac{8}{119}$ или $\frac{133}{2010}$?

Решение. Имаме

$$\frac{8}{119} > \frac{8}{120} = \frac{1}{15} = \frac{134}{15 \cdot 134} = \frac{134}{2010} > \frac{133}{2010},$$

т.е. $\frac{8}{119} > \frac{133}{2010}$.

58. Спореди ги дропките $\frac{5}{67}$ и $\frac{149}{2010}$.

Решение. Дропките можеме да ги споредиме ако ги сведеме на заеднички именител. Бидејќи $67 \mid 2010$ имаме $\text{NZD}(67, 2010) = 2010$. Според тоа,

$$\frac{5}{67} = \frac{5 \cdot 30}{67 \cdot 30} = \frac{150}{2010} > \frac{149}{2010}.$$

59. Спореди ги дропките $\frac{12}{67}$ и $\frac{390}{2009}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{12}{67} < \frac{13}{67} = \frac{13 \cdot 30}{67 \cdot 30} = \frac{390}{2010} < \frac{390}{2009}.$$

60. Определи ги сите природни броеви x за кои е точна неравенката

$$\frac{701}{1011} < \frac{13x}{2022} < \frac{601}{674}.$$

Решение. Од $\frac{701}{1011} = \frac{1402}{2022}$ и $\frac{601}{674} = \frac{1803}{2022}$, следува $\frac{1402}{1011} < \frac{13x}{2022} < \frac{1803}{2022}$, па затоа $1402 < 13x < 1803$. Понатаму $1402 < 13x$, добиваме $108 \le x$, а од $13x < 1803$ добиваме $x \le 138$. Значи, $x \in \{108, 109, ..., 137, 138\}$.

61. Определи ги сите дропки $\frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ за кои важи

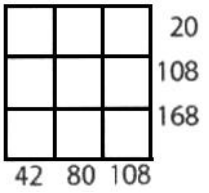
$$\frac{53}{2014} < \frac{1}{n} < \frac{61}{2013}.$$

Решение. Имаме,

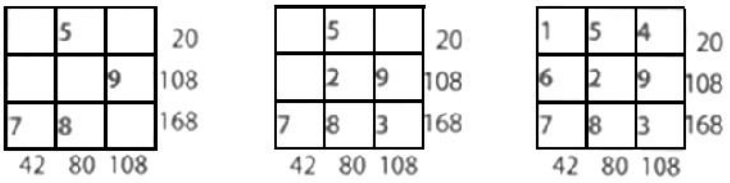
$$\frac{53}{2014} = \frac{53}{2 \cdot 19 \cdot 53} = \frac{1}{2 \cdot 19} \text{ и } \frac{61}{2013} = \frac{61}{3 \cdot 11 \cdot 61} = \frac{1}{3 \cdot 11}.$$

Според тоа, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{1}{2 \cdot 19} < \frac{1}{n} < \frac{1}{3 \cdot 11}$, односно со $\frac{1}{38} < \frac{1}{n} < \frac{1}{33}$. Значи, $33 < n < 38$, па бараните дропки се $\frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}$.

62. Пополни ја табелата со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што производот на броевите во секој ред ќе биде еднаков на бројот запишан на десната страна од тој ред, а производот на броевите во секоја колона ќе биде еднаков на бројот запишан под таа колона.

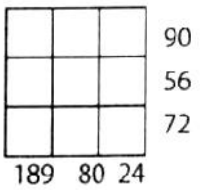


Решение. Единствени броеви кои се делив со 5 се броевите 20 и 80, па затоа бројот 5 го запишуваме во пресекот на првиот ред и втората колона. Понатаму, само бројот 108 е делив со 9, па затоа бројот 9 го запишуваме во пресекот на вториот ред и третата колона. Слично, само броевите 42 и 168 се деливи со 7, па затоа 7 е во пресекот на третиот ред и првата колона, а од исти причини 8 е во пресекот на тртеиот ред и втората колона. Така го добивме пополнувањето кое е дадено на долниот лев цртеж.



Понатаму, третиот број во третиот ред е $168:(7\cdot 8)=3$ и вториот број во втората колона е $80:(5\cdot 8)=2$, види го средниот цртеж. Конечно, на потполно ист начин за наоѓаат и преостанатите три број со што е добиена табелата прикажана горе на десниот цртеж.

63. Табелата прикажана на цртежот десно пополни ја со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така, што производот на броевите во секој ред е еднаков на бројот запишан на десната страна од тој ред, а производот на броевите во секоја колона е еднаков на бројот запишан под таа колона.



Решение. Имаме:

$$90=2\cdot 5\cdot 9=3\cdot 5\cdot 6,\ 56=1\cdot 7\cdot 8=2\cdot 4\cdot 7,\ 72=1\cdot 8\cdot 9=2\cdot 4\cdot 9=3\cdot 4\cdot 6,$$
$$189=3\cdot 7\cdot 9,\ 80=2\cdot 5\cdot 8,\ 24=1\cdot 4\cdot 6=2\cdot 3\cdot 4.$$

Од запишаните броеви само броевите 80 и 90 се деливи со 5, па затоа бројот 5 мора да биде запишан во пресекот на првиот ред и втората колона. Понатаму, само броевие 56 и 189 се деливи со бројот 7, па затоа бројот 7 мора да е запшан во пресекот на вториот ред и првата

колона. Сега во вториот ред другите два броја мора да се 1и 8, или 2 и 4, а во втората колона другите два броја мора да се 2 и 8. Значи, ако во централното поле е запишан бројот 8, тогаш третиот број во вториот ред е бројот 1, а третиот број во втората колона е 2 (табела долу лево), а ако е запишан бројот 2, тогаш третиот број во вториот ред е бројот 4, а третиот ред во втората колона е бројот 8 (табела долу десно).

Во левата табела не е запишан бројот 4, па како од бровите 189, 24 и 90 со бројот 4 е делив само бројот 72, заклучуваме дека бројот 4 мора да е во пресекот на третиот ред и третата колона. Сега, лесно се пополнуваат преостанатите три празни полиња во кои ги запишуваме броевите 3, 6 и 9.

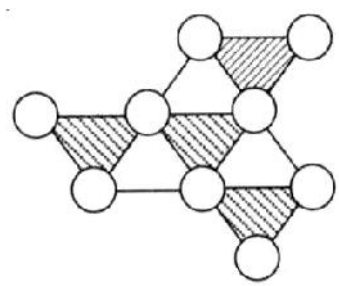
Во десната табела не е запишан бројот 6 и како тој не може да се запише во третиот ред, истиот го запишуваме во пресекот на првиот ред и третата колона. Сега, лесно се пополнуваат преостанатите три празни полиња во кои ги запишуваме броевите 1, 3 и 9.

3	5	6	90
7	8	1	56
9	2	4	72
189	80	24	

3	5	6	90
7	2	4	56
9	8	1	72
189	80	24	

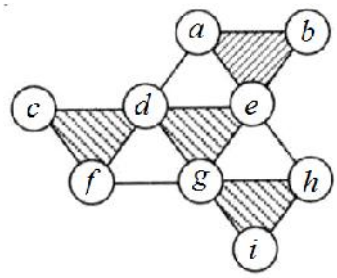
64. Броевите од 1 до 9 распореди ги во кругчињата на цртежот десно така што ќе бидат задоволени следниве услови:

1) Збирот на трите броја запишани во темињата на секој бел триаголник е еднаков,
2) Збирот на трите броја запишани во темињата на секој шрафиран триаголник е еднаков и е за 3 поголем од збирот на броевите запишани во темињата на секој бел триаголник.



Решение. Нека во во кругчињата се запишани броевите a,b,c,d,e,f,g,h и i (цртеж десно). Од 2) следува $b=d+3$, $c=g+3$, $d=h+3$, $g=a+3$, $e=f+3$ и $i=e+3$, па затоа

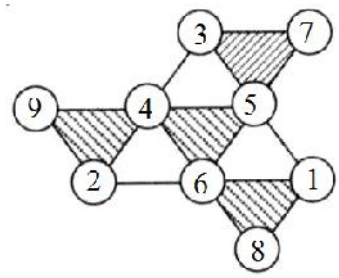
$$b=h+6,\ c=a+6 \text{ и } i=f+6.$$



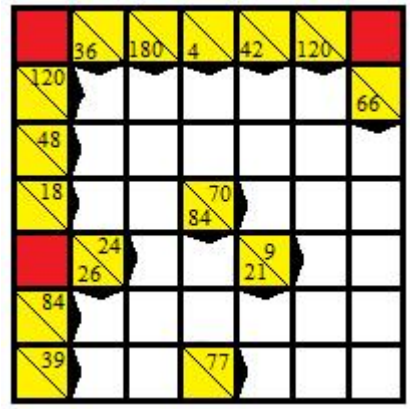
Понатаму, меѓу броевите од 1 до 9

постојат три пара броеви кои се разликуваат за 6, па затоа паровите $(h,b),(a,c),(f,i)$ се паровите (1,7), (2,8), (3,9) во некој редослед. Сега од $a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$, добиваме $d+e+g=15$, па затоа $a+d+e=12$, т.е. збирот на броевите во белите триаголници е 12, а збирот на броевите во штрафираните триаголници е 15.

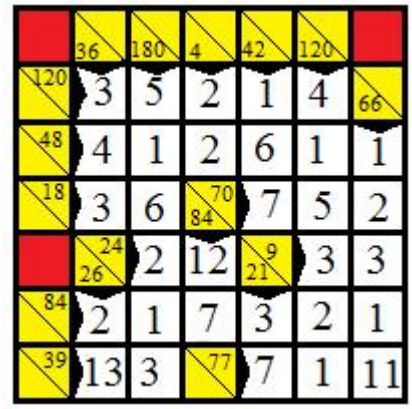
Од претходните разгледувања следува дека броевите d,e и g се броевите 4, 5 и 6, во некој редослед. Јасно, истите произволно можеме да ги распоредиме во централниот штрафиран траголник, а потоа од горните равенства ги определуваме броевите запишани во преостанатите кругчиња. Едно решение на задачата е прикажано на цртежот десно.



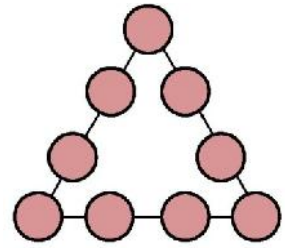
65. Пополни ја табелата прикажана на цртежот десно, ако броевте во жолтите полиња се еднакви на производите на броевите од соодвет-ните бели полиња во насока на стрелките.



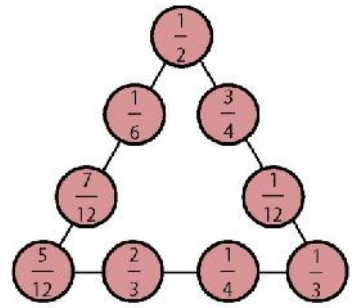
Решение. Од $26=2\cdot13$, $39=3\cdot13$ и 39 е непарен број следува дека последните два броја во втората колона се 2 и 13, а вториот и третиот број во последниот ред се 13 и 3. Понатаму, бидејќи $3\mid21$, $3\nmid77$, $11\nmid120$ и $11\mid66$, следува дека последните два броја во петтата колона се 3 и 7, а последните три броја во последниот ред се 7, 1 и 11. Продолжувајќи со аналогни размислувања добиваме дека бараното пополнување на дадената табела е како на цртежот десно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



66. Дропките $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12}$ подреди ги по големина, а потоа запиши ги во кругчињата на страните на триаголникот, така што збировите на дропките на сите страни ќе бидат еднакви.



Решение. Ако дадените дропки ги сведеме на заеднички именител, тогаш ги добиваме дропките $\frac{6}{12},\frac{4}{12},\frac{8}{12},\frac{3}{12},\frac{9}{12},\frac{2}{12},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12}$. Според тоа, дадениот триаголник треба да се пополни со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што збирот на броевите запишани во кругчињата на секоја страна е еднаков. Постојат повеќе решенија на задачата и едно е дадено на цртежот десно.



67. Дропките $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12}$ распореди ги во табела 3×3 така што збировите на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала се еднакви меѓусебно.

Решение. Заеничкиот именител на дропките е бројот 12, па затоа дропките се редоследно еднакви на

$$\frac{6}{12},\frac{4}{12},\frac{8}{12},\frac{3}{12},\frac{9}{12},\frac{2}{12},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12}.$$

Бидејќи именителите се еднакви, збирот на дропките сега зависи од броителите, каде се наоѓаат броевите од 1 до 9. Збирот на броителите е $1+2+...+9=45$. Бидејќи во секој ред збирот на броевите треба да е еднаков, добиваме дека тој е еднаков на $45:3=15$. Бројот 15 како збир на три броја можеме да го запишеме на следниве 8 начини:

$$1+5+9, 1+6+8, 2+4+9, 2+5+8, 2+6+7, 3+4+8, 3+5+7, 4+5+6.$$

Бидејќи табелата 3×3 има осум збира, во неа треба да се распоредени сите горни збирови. Понатаму, само средниот број од табелата учествува во 4 збира, а тоа во горните збирови е бројот 5, што значи дека тој треба да се наоѓа во централното поле на табелата. Понатаму, во аглите треба да се броевите кои се појавуваат во три збира, а тоа во нашиот случај се броевите 2, 4, 6 и 8. Конечно, едно од можните решенија е:

$\frac{8}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12}$

односно

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

Коментар. Во горното решение дадовме постапка за составување на магичен 3×3 квадрат во кој се запишани броевите од 1 до 9. Овде само ќе забележиме дека за секој природен број n може да се состави магичен $n\times n$ квадрат во кој се запишани броевите од 1 до n^2.

4. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Марко трицифрен природен број заокружил на најблиската десетка и го добил бројот 950. Петар трицифрен природен број заокружил на најблиската стотка и го добил бројот 800. Колкава е најголемата, а колкава е најмалата можна разлика меѓу двата почетни броја?
   Решение. Најмалиот број кој заокружен на најблиската десетка изнесува 950 е бројот 945. Најголемиот број кој заокружен на најблиската десетка изнесува 950 е бројот 954.
   Најмал број кој заокружен на најблиската стотка изнесува 800 е бројот 750. Најголем број кој заокружен на најблиската стотка изнесува 800 е бројот 849.
   Најголемата можна разлика меѓу двата броја е $954 - 750 = 204$.
   Најмалата можна разлика меѓу двата броја е $945 - 849 = 96$.

2. Определи го бројот на паровите природни броеви $n, 2n+1$ такви што двата броја се двоцифрени и n е непарен број.
   Решение. Најголемиот непарен двоцифрен број е 99 и како $2n+1 > n$ добиваме дека $2n+1 \le 99$, од каде добиваме $n \le 49$. Значи, бројот на паровите $n, 2n+1$ такви што двата броја се двоцифрени и n е непарен број е еднаков на бројот на непарните двоцифрени броеви кои се помали или еднакви на 49. Тоа се броевите 11, 13, 15, 17, ..., 47 и 49, што значи дека имаме 20 парови со саканото својство.

3. Колку цифри се потребни за да се нумерираат 425 страници од една книга? Првата страница е нумерирана со бројот 1.
   Решение. Првите 9 страници се нумерираат со едноцифрени броеви, т.е. потребни се 9 цифри. Следните 90 страници се нумерираат со двоцифрени броеви, т.е. потребни се $2 \cdot 90 = 180$ цифри. Следните $425 - 99 = 326$ страници се нумерираат со трицифрени броеви, па се потребни $3 \cdot 326 = 978$ цифри. Значи, за нумерирање на сите 425 страници потребни се $9 + 180 + 978 = 1167$ цифри.

4. Природните броеви од 1 до 2024 се запишани во низа еден по друг: 123456789101112...20232024. Која цифра се наоѓа точно во средина на оваа низа?

   Решение. Меѓу броевите од 1 до 2024 има 9 едноцифрени, 90 двоцифрени, 900 трицифрени и 1025 четирицифрени. Тие се запишуваат со $9+90\cdot 2+900\cdot 3+1025\cdot 4=6989$ цифри. Значи, треба да се определи цифрата која е на 3495-тото место во оваа низа. За исписот на едноцифрените, двоцифрените и трицифрените броеви се потребни 2889 цифри. Бидејќи $3495-2889=606$ и како $606=4\cdot 151+2$, заклучуваме дека на 3495-тото место е втората цифра на 152-риот четирицфрен број, т.е. на бројот 1151. Значи, бараната цифра е 1.

5. Природните броеви од 1 до 2015 се запишани еден по друг и така е добиен бројот 12345678910...20142015.

   а) Колку цифри има овој број?

   б) Која цифра е средна во овој број?

   Решение. а) За запишување на првите 2015 броеви се употребени $1\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1016=9+180+2700+4064=6953$ цифри.

   б) Средната цифра во овој број е цифрата која е 3477 по ред. Пред неа има 3476 цифри. Бидејќи едноцифрените, двоцифрените и трицифрените броеви се запишани со 2889 цифри, до средната цифра остануваат уште $3476-2889=587$ цифри кои припаѓаат на четирицифрените броеви. Имаме $587=4\cdot 146+3$, добиваме дека бараната цифра е последната цифра на 147-от четирицифрен број, т.е. на бројот 1146. Значи, бараната цифра е 6.

6. Марко запишал на лист еден трицифрен број. Ако пред цифрата на стотките се допише цифрата 9 се добива четирицифрен број кој што е 21 пат поголем од бројот кој го запишал Марко. Кој број го запишал Марко.

   Решение. Нека бараниот број е $\overline{abc}$. Ако пред цифрата на стотките се допише цифрата 9 се добива бројот $\overline{9abc}$. Од услвот на задачата имаме $\overline{9abc}=21\cdot\overline{abc}$, од каде добиваме $9000+\overline{abc}=21\cdot\overline{abc}$. Значи, $20\cdot\overline{abc}=9000$, односно $\overline{abc}=450$. Според тоа, Марко го запишал бројот 450.

7. Трицифрен број има цифра на единиците 2. Ако таа цифра се пре-

мести на местото на стотките, а другите две цифри го задржат редоследот се добива број кој е за 36 помал од почетниот број. Определи го збирот на цифрите на дадениот трицифрен број

Решение. Нека трицифрениот број е $\overline{ab2}$. Според условот на задачата важи $\overline{ab2} = \overline{2ab} + 36$, односно $10 \cdot \overline{ab} + 2 = 200 + \overline{ab} + 36$, од каде добиваме $9 \cdot \overline{ab} = 234$. Значи, $\overline{ab} = 26$ и бараниот број е 262. Конечно, збирот на цифрите е 10.

8. Цифрата на стотките во даден трицифрен број е 7. Ако таа цифра ја преместиме на местото на единиците, цифрата на десетките ја преместиме на местото на стотките и цифрата на единиците ја преместиме на местото на десетките, ќе се добие нов трицифрен број кој е за 567 помал од дадениот број. Најди го дадениот број.

Решение. Нека почетниот број е бројот $\overline{7xy}$, каде *x* и *y* се цифри. Од условот на задачата добиваме

$$\overline{7xy} = 567 + \overline{xy7}, \text{ т.е. } 700 + \overline{xy} = 567 + 10\overline{xy} + 7,$$

од каде наоѓаме $9\overline{xy} = 126$, т.е. $\overline{xy} = 14$. Конечно, бараниот број е 714.

9. Производот на еден едноцифрен и еден двоцифрен број се запишува само со помош на неколку цифри 2. Кои се тие броеви?

Решение. Производот на едноцифрен и двоцифрен број е двоцифрен или трицифрен број. Значи, бараниот производ е 22 или 222. Ако е двоцифрен број, тогаш решенија се $2 \cdot 11$ и $1 \cdot 22$, а ако е трицифрен број, тогаш бидејќи $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$ решенијата се $3 \cdot 74$ и $6 \cdot 37$.

10. Бројот 100 е помножен или со 3 или со 4, потоа добиениот резултат е зголемен или за 1 или за 2. На крајот добиениот број е поделен или со 3 или со 4, по што е добиен цел број. Кој е добиениот резултат на крајот?

Решение. Ако 100 се помножи со 3 или 4 и се додаде 1 или 2, ги добиваме следниве четири броја: 301, 302, 401 или 402. Од наведените четири броја ниту еден не е делив со 4, а само бројот 402 е делив со 3. Според тоа, добиен е бројот $402 : 3 = 134$.

11. Марко замислил еден број. Бројот го намалил за 12,12 и добиената разлика ја поделил со $\frac{1}{5}$, на добиениот резултат додал 1,85 и добие-

ниот збир го поделил со 0,1. Така го добил бројот 68,5. Кој број го замислил Марко?

Решение. *Прв начин.* Нека замисленият број е x. Според условот на задачата ја имаме равенката

$$((x-12{,}12):\tfrac{1}{5}+1{,}85):0{,}1=68{,}5,$$

шие решение е $x=13{,}12$. Значи, Марко го замислил бројот 13,12.

Втор начин. Бројот 68,5 е добиен по делењето на некој број со 0,1, што значи дека пред тоа Марко го добил бројот $68{,}5\cdot 0{,}1=6{,}85$. Овој број Марко го добил со додавање на бројот 1,85, па затоа претходниот број е $6{,}85-1{,}85=5$. Бројот 5 е добиен со делење на претходниот број со $\frac{1}{5}$, па затоа претходниот број е $5\cdot\frac{1}{5}=1$. Конечно, бројот 1 е добиен кога замисленият број е намален за 12,12, па затоа замисленият број е $1+12{,}12=13{,}12$.

12. Марко му вели на Иван: *Јас имам интересен број на телефон. Тоа е седумцифрен број чии први три цифри се меѓусебно еднакви и преостанатите четири се меѓусебно еднакви. Збирот на сите седум цифри е двоцифрен број чија прва цифра е еднаква на првата цифра на мојот телефонски број, а последната на последната. Кој е тој број*? Помогни му на Иван да го открие телефонскиот број на Марко.

Решение. Нека првата цифра е x, а последната е y. Тогаш од една страна збирот на цифрите е еднаков на $3x+4y$, а од друга страна на $10x+y$. Според тоа, $3x+4y=10x+y$, т.е. $7x=3y$. Од последното равенство следува $x=3,\ y=7$. Значи, бројот на телефонот на Марко е 3337777.

13. Збирот на четири броја е 147. Ако на првиот му се додаде 6, од вториот се одземе 6, третиот се помножи со 6 и четвртиот се подели со 6, се добива еден ист број. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека резултатот од неведените операции е $6x$. Тогаш првиот број е $6x-6$, вториот број е $6x+6$, третиот број е $6x:6=x$ и четвтиор број е $6\cdot 6x=36x$. Според тоа,

$$6x-6+6x+6+x+36x=147,$$
$$x=147:49,$$
$$x=3.$$

Значи, бараните броеви се $6x-6=12,\ 6x+6=24,\ x=3,\ 36x=108$.

14. Збирот на четири природни броја е еднаков на 2017. Третиот број е три пати помал од првиот број, за 3 е поголем од вториот број и е за 4 помал од четвртиот број. Кои се тие броеви?

Решение. Нека броевите се x, y, z, t. Од условот на здачата следува

$$x + y + z + t = 2017,\ x = 3z,\ y = z - 2 \text{ и } t = z + 4.$$

Ако замениме во првата равенка добиваме

$$3z + (z - 3) + z + (z + 4) = 2017,$$

од каде добиваме $6z + 1 = 2017$. Решението на последната равенка е $z = (2017 - 1) : 6 = 336$, бараните броеви се 1008, 333, 336 и 340.

15. Збирот на пет броја е 2017. Третиот број е двапати помал од петтиот број, за 2 помал од вториот број и за 1 поголем од првиот број. Третиот и четвртиот број се еднакви. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека броевите се x, y, z, u и v. Од условот на задачата следува

$$x + y + z + u + v = 2017,\ x = z - 1,\ y = z + 2,\ v = 2z \text{ и } u = z.$$

Според тоа,

$$(z - 1) + (z + 2) + z + z + 2z = 2017,$$

од каде добиваме $6z + 1 = 2017$, т.е. $z = 336$. Значи, $x = 335$, $y = 338$, $u = 336$ и $v = 672$. Според тоа, бараните броеви се 335, 338, 336, 336 и 672.

16. Збирот на педесет природни броеви е 8625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот број е за 5 поголем од третиот, ... , педесеттиот број е за 5 поголем од четириесет и деветтиот број. Определи ги најголемиот и најмалиот собирок во дадениот збир.

Решение. Нека x е првиот собирок. Тогаш вториот собирок е $x + 5$, третиот е $x + 5 + 5 = x + 2 \cdot 5$, четвртиот е $x + 2 \cdot 5 + 5 = x + 3 \cdot 5$, ..., педесеттиот собирок е $x + 49 \cdot 5$. Според тоа,

$$x + (x + 5) + (x + 2 \cdot 5) + (x + 3 \cdot 5) + \ldots + (x + 49 \cdot 5) = 8625,$$
$$50x + (5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + \ldots + 49 \cdot 5) = 8625,$$
$$50x + 5 \cdot (1 + 2 + \ldots + 49) = 8625,$$
$$10x + 1 + 2 + \ldots + 49 = 1725,$$
$$10x + \frac{49 \cdot (49+1)}{2} = 1725,$$

$$10x + 1225 = 1725,$$
$$10x = 500,$$
$$x = 50.$$

Значи, најмалиот собирок е 50, а најголемиот собирок е еднаков на $50 + 49 \cdot 5 = 295$.

17. Производот на два броја е 150. Ако првиот множител се зголеми за 5, тогаш производот е еднаков на 225. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните бреови се a и b. Од условот на задачата имаме $ab = 150$ и $a(b+5) = 225$, т.е. $ab + 5a = 225$. Според тоа, важи $150 + 5a = 225$, од каде добиваме $5a = 75$, односно $a = 15$. Конечно, $15b = 150$, т.е. $b = 10$

18. Количникот на два броја е 150. Ако дељеникот се намали за 500, тогаш количникот е еднаков на 100. Определи ги овие броеви.

Решение. *Прв начин*. Дељеникот е 150 пати поголем од делителот. Кога дељеникот ќе се намали за 500, тогаш тој број е 100 пати поголем од делителот. Според тоа, делителот зголемен за 50 пати е еднаков на 500. Значи, делителот е еднаков на $500 : 50 = 10$, а дељеникот е еднаков на $150 \cdot 10 = 1500$.

Втор начин. Нека a е дељеникот, а b е делителот. Од условот на здачата имаме

$$a = 150b \text{ и } a - 500 = 100b.$$

Значи, $150b - 500 = 100b$, од каде добиваме $50b = 500$, односно $b = 10$. Конечно, $a = 150 \cdot 10 = 1500$.

19. Петцифрениот број a може да се добие од еден двоцифрен и еден трицифрен број на два начина така што тие броеви се запишуваат еден по друг. Во првиот случај нивниот производ е 4020, а во вториот 10366. Определи го бројот a.

Решение. Бројот 4020 како производ на еден двоцифрен и еден трицифрен број може да се запише на следниве начини

$$4020 = 10 \cdot 402 = 12 \cdot 335 = 15 \cdot 268 = 20 \cdot 201 = 30 \cdot 134.$$

Од овие претставувања само третото соодветствува на условите на задачата $152 \cdot 68 = 10336$, па затоа бараниот број е 152268.

20. На таблата се запишани десет последователни природни броеви. Кога

еден од запишаните броеви е избришан, збирот на преостанатите броеви е 2009. Кој број е избришан?

Решение. Нека на таблата се запишани броевите $x, x+1, ..., x+9$ и нека е избришан бројот $x+k$. Тогаш

$$(x+x+1+x+2+...+x+9)-(x+k)=2009.$$

Според тоа, $10x+45-x-k=2009$, т.е. $9x=1964+k$. Бројот $1964+k$ треба да е делив со 9. Но, $1964=9\cdot 218+2$ и како $0\le k\le 9$ заклучуваме дека $k=7$. Значи, $x=1971:9=219$. Конечно, избришан е бројот $219+7=226$.

21. Андреј на таблата запишал 10 природни броја. Горјан за секои 9 запишани броеви го пресметал нивниот збир. Меѓу добиените збирови има 9 различни броеви:

86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95.

Кои броеви ги запишал Андреј?

Решение. Да го разгледаме збирот на 10 збирови по 9 од напишаните броеви. Бидејќи секој број се наоѓа во тој збир по 9 пати, тој збир ќе биде делив со 9. Збирот на деветте различни збирови е 813 и тој дава остаток 3 при делење со 9. Според тоа, непознатиот збир на 9 броеви дава остаток 6 при делење со 9. Од дадените 9 збирови само збирот 87 дава остаток 6 при делење со 9. Според тоа, збирот на дадените броеви е $(813+87):9=100$. Ако од бројот 100 ги одземеме дадените збирови добиваме дека Андреј ги запишал броевите: 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 13 и 14.

22. Определи ги броевите a,b,c ако $a+b=1,2$, бројот b е за 0,4 поголем од бројот a, а бројот c е за 1 поголем од аритметичката средина на броевите a,b и c.

Решение. Имаме $a+b=1,2$ и $b=a+0,4$, па затоа $a+a+0,4=1,2$, од каде добиваме $a=0,4$ и $b=0,8$. Понатаму, $c=\frac{a+b+c}{3}+1$, па затоа $3c=a+b+c+3$, односно $2c=a+b+3=1,2+3=4,2$, што значи дека $c=2,1$.

23. Збирот на броителот и именителот на една дропка е 95. По скратување на дропката добиена е дропката $\frac{7}{12}$. Одреди ја таа дропка.

Решение. Нека дропката е $\frac{a}{b}$. Од првиот услов на задачата имаме: $a+b=95$. Од вториот услов на задачата имаме: $\frac{a\cdot k}{b\cdot k}=\frac{7}{12}$ од каде $a=7k$ и $b=12k$. Ако во $a+b=95$ замениме за a и b, добиваме $7k+12k=95$, т.е. $k=5$. Броителот на дропката е 35, а именителот на дропката е 60. Значи бараната дропка е $\frac{35}{60}$.

24. Кој број треба да се одземе од броителот, а да се додаде на именителот на дропката $\frac{2023}{2024}$ за да се добие дропката $\frac{1}{2}$?

Решение. Нека бараниот број е x. Имаме $\frac{2023-x}{2024+x}=\frac{1}{2}$, од каде последователно добиваме

$$4046-2x=2024+x,$$
$$3x=2022,$$
$$x=674.$$

Значи, бараниот број е 374.

25. Дадена е дропката $\frac{7989}{2010}$. Кога од броителот на дадената дропка ќе се одземе бројот x, а на именителот ќе му се додаде бројот x се добива дропката $\frac{1}{8}$. Определи го x.

Решение. Збирот на броителот и именителот на дропката е еднаков на $7989+2010=9999$. Понатаму, кога на броителот ќе се одземе бројот x, а од именителот ќе се одземе бројот x нивниот збир ќе биде еднаков на $7989-x+2010+x=9999$. Но, тогаш дропката е $\frac{1}{8}=\frac{a}{8a}$, каде a е бројот со кој истата се крати, па затоа $a+8a=9999$, од каде добиваме $a=1111$. Конечно, од $7989-x=a$ следува $7989-x=1111$, односно $x=7989-1111=6878$.

26. Матеа почнала од бројот 2 да ги одзема дропките $\frac{1}{2011},\frac{2}{2011},\frac{3}{2011},\ldots$. Која е последната дропка која Матеа можела да ја одземе, а резултатот да биде поголем од 0?

Решение. Потребно е да се определи колку најмногу членови може да има збирот

$$\frac{1}{2011}+\frac{2}{2011}+\frac{3}{2011}+\ldots+\frac{n}{2011}$$

така што ќе биде помал од $2=\frac{4022}{2011}$. Значи,

$$\frac{1}{2011}+\frac{2}{2011}+\frac{3}{2011}+\ldots+\frac{n}{2011}<\frac{4022}{2011},$$
$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{2011}<\frac{4022}{2011},$$

односно

$$1+2+3+\ldots+n<4022,$$
$$\frac{n(n+1)}{2}<4022,$$
$$n(n+1)<8044.$$

Бидејќи $90\cdot 91=8190>8044$ и $89\cdot 90=8010<8044$, заклучуваме дека Матеа може да одземе 89 дропки, при што последната дропка е $\frac{89}{2011}$.

27. Матеа почнала да ги пишува дропките $\frac{1}{2012},\frac{2}{2012},\frac{3}{2012},\ldots$. Колку најмногу дропки може да запише Матеа така што нивниот збир ќе биде помал од 3?

Решение. Потребно е да се определи колку најмногу членови може да има збирот

$$\frac{1}{2012}+\frac{2}{2012}+\frac{3}{2012}+\ldots+\frac{n}{2012}$$

така што ќе биде помал од $3=\frac{6036}{2012}$. Значи,

$$\frac{1}{2012}+\frac{2}{2012}+\frac{3}{2012}+\ldots+\frac{n}{2012}<\frac{6036}{2012},$$
$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{2012}<\frac{6036}{2012},$$

односно

$$1+2+3+\ldots+n<6036,$$
$$\frac{n(n+1)}{2}<6036,$$
$$n(n+1)<12072.$$

Бидејќи $110\cdot 111=12210>12072$ и $109\cdot 110=11990<12072$, заклучуваме дека Матеа може да запише најмногу 109 дропки.

28. Збирот на $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ од некој број е за 9 поголем од половината од тој број. Кој е тој број?

Решение. Имаме $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}=\frac{16}{30}$ и $\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, па затоа $\frac{16}{30}-\frac{15}{30}=\frac{1}{30}$ од бараниот број е еднаква на 9. Последното значи дека бараниот број е

$30 \cdot 9 = 270$.

29. Збирот на $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ од некој број е за 48 помал од збирот на $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$ и $\frac{7}{12}$ на истиот тој број. Кој е тој број?

Решение. Збирот на $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ од бројот претставува $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}$ од бараниот број, додека збирот на $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$ и $\frac{7}{12}$ од бројот претставува $\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{7}{12}=\frac{13}{12}$ од бараниот број. Бидејќи разликата на двата збира е 48, добиваме дека $\frac{13}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{3}$ од бараниот број е еднаква на 48. Значи, бараниот број е $3 \cdot 48 = 144$.

30. Митра замислила три броја. Од најмалиот природен број кој е поголем од нив ја одзела секоја од дропките $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}$. Кои броеви ги замислила Митра, ако нивната аритметичка средина е $\frac{49}{36}$?

Решение. Најмалиот природен број кој се одзема од дропките да го означиме со a . Тогаш дропките кои Митра ги замислила се $a-\frac{2}{3}$, $a-\frac{5}{2}, a-\frac{7}{4}$, а нивниот збир е еднаков на $3a-\frac{59}{12}$. Бидејќи аритметичката средина на овие броеви е $\frac{49}{36}$, добиваме $(3a-\frac{59}{12}):3=\frac{49}{36}$. Решението на последната равенка е $a=3$, што значи дека бараните дропки се $\frac{7}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$.

31. Александра замислила три броја и ги собрала со најголемиот природен број кој е помал од нив. Така ги добила броевите $14,5; 12,2$ и $13\frac{2}{3}$. Кои броеви ги замислила Александра?

Решение. Нека најголемиот природен број помал од овие три броја е a . Бидејќи збирот на најмалиот од бараните броеви и бројот a е еднаков на 12,2, добиваме дека најмалиот од овие броеви е еднаков на $12,2-a$. Затоа важи $a \le 12,2-a$, па како a е најголемиот природен број за кој е исполнето последното неравенство добиваме дека $a=6$. Според тоа, Александра ги замислила броевите $8,5; 7\frac{2}{3}$ и $6,2$.

32. Определи ги нескратливите дропки $\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}, \frac{a}{b}<1$, такви што збирот на броителот и именителот е 37. Притоа, на дропките им соодветствува конечен децимален запис.

Решение. Дропката $\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}$ е нескратлива и помала од 1 ако a и b се заемно прости, простите множители на бројот b се 2 и 5 и $a<b$. Според условот на задачата $a+b=37$, па следува дека $a=5$, $b=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ или $a=12, b=5\cdot5$ или $a=17$, $b=2\cdot2\cdot5$. Преостанатите случаи не ги задоволуваат условите на задачата. Конечно, бараните дропки се $\frac{5}{32}, \frac{12}{25}$ и $\frac{17}{20}$.

33. Определи ги сите нескратливи дропки $\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}$ кај кои производот на броителот и именителот е еднаков на 220, а на дропките им соодветствува конечен дециналeн запис.

Решение. Дропката $\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}$ треба да е нескратлива и да има конечен децимален запис. Значи, броевите a и b треба да се заемно прости и простите множители на b да се броевите 2 или 5. Имаме $220=2\cdot2\cdot5\cdot11$, па затоа за именителот b имаме: $b=4, b=5$ или $b=20$, а соодветните вредности на a се: $a=55, a=44$ и $a=11$. Конечно, баранте дропки се $\frac{55}{4}, \frac{44}{5}$ и $\frac{11}{20}$.

34. Определи го природниот број x за кој дропката $\frac{20+x}{30}$ е помала од 0,75 и истата има бесконечен периодичен децимален запис. Која цифра се наоѓа на 2016-тото место по децималната запирка на децималниот запис на добиената дропка?

Решение. Според условот на задачата $\frac{20+x}{30}<0,75$, од каде добиваме $x<2,5$. Но, x е природен број, па затоа $x\in\{1,2\}$.

Ако $x=1$, тогаш $\frac{20+1}{30}=0,7$ е конечен дециналeн запис.

Ако $x=2$, тогаш $\frac{20+2}{30}=0,733...$ и тоа е бесконечен децимален запис во кој на 2016-тото место е цифрата 3.

35. Бојан имал шише од $1l$ кое било полно со сируп за сок од портокал. Првиот ден тој отпил шестина од содржината на шишето и шишето го

дополнил со вода. Вториот ден отпил третина од содржината на шишето и шишето го дополнил со вода. Третиот ден отпил половина од содржината на шишето и шишето го дополнил со вода. Четвртиот ден Бојан го испил целиот сок од шишето. Што во текот на четирите дена повеќе испил Бојан, вода или сируп за сок од портокал?

Решение. Бојан испил $1l$ сируп за сок од портокал и $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$ литар вода. Според тоа, Бојан испил еднакво количество сируп за сок од портокал и вода.

36. Во текот на ноќта паѓал снег и го покрил целиот двор на семејството Јакопетрески. Ако помалиот син Трајко го чисти дворот, нему му се потребни 6 часа да го исчисти целиот снег, неговиот постар брат ќе го исчисти снегот два пати побрзо, а нивниот татко може да исчисти како двајцата браќа заедно. Колку време е потребно за се исчисти целиот двор, ако чистат сите тројца заедно?

Решение. Трајко дворот го чисти за 6 часа, што значи дека тој за еден час чисти $\frac{1}{6}$ од дворот. Неговиот брат чисти два пати побрзо, па затоа тој го чисти дворот за 3 часа, т.е. за 1 час ќе исчисти $\frac{1}{3}$ од дворот. Таткото за 1 час ќе исчисти колку двајцата заедно, што значи дека тој ќе исчисти $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ од дворот. Според тоа, сите тројца заедно тие за 1 час ќе исчистат $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=(\frac{1}{6}+\frac{1}{3})+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ од дворот, т.е. целиот двор.

37. Пабло изедува цела пица за 15 минути, а Пабло и Матео заедно изедуваат цела пица за 6 минути. Колку време му е потребно на Матео сам да изеде цела пица?

Решение. *Прв начин*. За 1 час, т.е. за 60 минути Пабло сам изедува $60:15=4$ пици. За 1 час, Пабло и Матео заедно изедуваат $60:6=10$ пици. Според тоа, за1 час Матео сам изедува $10-4=6$ пици. Значи, Матео една пица сам изедува за $60:6=10$ минути.

Втор начин. Бидејќи цела пица Пабло изедува за 15 минути, тој за 1 минута сам ќе изеде $\frac{1}{15}$ пица. Пабло и Матео заедно цела пица јадат за 6 минути, па значи за 1 минута тие изедуваат $\frac{1}{6}$ од пицата. Оттука следува дека за 1 минута Матео сам изедува $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{5}{30}-\frac{2}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

од пицата, па целата пица ќе ја изеде за 10 минути.

38. Ацо изедува половина пица за 10 минути, а Ацо и Елена изедуваат една и половина пица за 18 минути. За колку време Елена сама ќе изеде една пица ако сите пици се еднакви и децата јадат рамномерно?
Решение. Ацо изедува цела пица за 20 минути, а Ацо и Елена изедуваат три пици за 36 минути. Според тоа, Ацо и Елена изедуваат една пица за 12 минути. Значи, Ацо за 1 минута изедува $\frac{1}{20}$ пица, а Ацо и Елена за 1 минута изедуваат $\frac{1}{12}$ пица. Според тоа, Елена за 1 минута изедува $\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{5-3}{60}=\frac{1}{30}$ пица. Конечно, Елена сама една пица изедува за 30 минути.

39. Ангелина изедува едно и пол чоколадо за 1 час, а Ангелина и Боркица заедно изедуваат третина чоколадо за 10 минути. Колку време ѝ е потребно на Боркица да изеде едно чоколадо? (Сите чоколади се еднакви и девојчињата јадат рамномерно.)
Решение. Бидејќи за 10 минути Ангелина и Боркица заедно изедуваат третина чоколадо, тие за 1 час изедуваат $6\cdot\frac{1}{3}=2$ чоколади. Но, Ангелина за 1 час сама изедува $1,5$ чоколади, па затоа Боркица за 1 час изедува $2-1,5=0,5$ чоколади. Конечно, за да изеде 1 чоколадо на Боркица и е потребно два пати подолго време, односно 2 часа.

40. Еден работник некоја работа ја завршил за 12 дена, друг за 15 дена, а трет за 20 дена. Колкав дел од работата ќе остане незавршен ако сите три работници заедно работат 4 дена.
Решение. За еден ден првиот работник завршува $\frac{1}{12}$ од работата, вториот завршува $\frac{1}{15}$ од работата, а третиот завршува $\frac{1}{20}$ од работата. Значи, за четири дена тројцата работејќи заедно завршуваат
$$4\cdot(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20})=4\cdot\frac{5+4+3}{60}=4\cdot\frac{12}{60}=\frac{4}{5}$$
од работата. Според тоа, ќе остане незавршено $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ од работата.

41. Киро една работа може да ја заврши за 12 дена, Мендо истата работа ја завршува за 15 дена, а на Рампо за да ја заврши истата работа му се потребни 20 дена. Киро завршил четвртина од работата, по што дошол

Мендо и со него работел три дена. Остатокот од работата го завршил Рампо. Колку дена работел Рампо?

Решение. За еден ден Киро завршува $\frac{1}{12}$, Мендо $\frac{1}{15}$ и Рампо $\frac{1}{20}$ од работата. Киро сам завршил $\frac{1}{4}$ од работата, а заедно со Мендо завршиле $3\cdot(\frac{1}{12}+\frac{1}{15})=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ од работата. Значи, на Рампо му преостанало да заврши $1-\frac{1}{4}-\frac{9}{20}=\frac{20-5-9}{20}=\frac{6}{20}$ од работата. Конечно, бидејќи Рампо за еден ден завршува $\frac{1}{20}$ од работата, тој работата ќе ја доврши за 6 дена.

42. Киро една работа може да ја заврши за 12 дена, Мендо истата работа ја завршува за 15 дена, а на Рампо за да ја заврши работата му се потребни 20 дена. Киро завршил четвртина од работата, по што дошол Мендо и сам работел три дена. Остатокот од работата го завршил Рампо. Колку дена работел Рампо?

Решение. За еден ден Киро завршува $\frac{1}{12}$, Мендо $\frac{1}{15}$ и Рампо $\frac{1}{20}$ од работата. Киро сам завршил $\frac{1}{4}$ од работата, а Мендо кој сам работел 3 дена завршил $3\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$ од работата. Значи, на Рампо му преостанало да заврши $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{20-5-4}{20}=\frac{11}{20}$ од работата. Конечно, бидејќи Рампо за еден ден завршува $\frac{1}{20}$ од работата, тој работата ќе ја доврши за 11 дена.

43. Еден молер молерисува $10\,m^2$ ѕид за 35 минути, а друг молер молерисува $10\,m^2$ за 42 минути. Двајцата истовремено започнале да молерисуваат две исти куќи. Кога првиот ја завршил работата на вториот му преотанале да молериса $75\,m^2$. Колку метри квадратни требало да молериса секој молер?

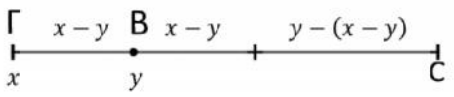
Решение. Со x да ја означиме плоштината на површината која треба да ја молериса секој од молерите. Првиот молер куќата ја молерисал за $\frac{35x}{10}$ минути, што е еднакво на времето за кое вториот молер молерисал $x-75\,m^2$, т.е. на $42\cdot\frac{x-75}{10}$. Значи, $\frac{35x}{10}=42\cdot\frac{x-75}{10}$, од каде

добиваме $35x = 42(x-75)$, т.е. $5x = 6x - 450$. Според тоа, $x = 450\ m^2$.

44. Вера, нејзината сестра и мајка пред 15 години заедно имале 45 години. Колку години тие имаат заедно денес?
Решение. Вера, нејзината сестра и мајка денес се постари за по 15 години од моментот кога трите зедно имале 45 години. Значи, денес тие заедно имаат $45 + 3 \cdot 15 = 90$ години.

45. Производот на годините на таткото и синот е 2015. Колкава е разликата на нивните години? (Се зема во предвид само природен број години.)
Решение. Имаме $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Единствена реална можност е производот да е $2015 = 65 \cdot 31$. Значи, таткото има 65, а синот има 31 година. Разликата на годините е $65 - 31 = 34$.

46. Горјан имал тројно повеќе години отколку што имала Виолета кога бил на нејзината сегашна возраст. Одреди го односот на годините на Горјан и Виолета.
Решение. Нека Горјан сега има x години, а Виолета y години. Кога Горјан бил на нејзината сегашна возраст, тој имал $x-(x-y)$ години, а таа имала $y-(x-y)$ години. Значи,



$$x-(x-y) = 3(y-(x-y)),$$

односно $3x = 5y$. Заклучуваме дека односот од годините на Горан и годините на Виолета е 5:3.

47. Во 2012 година Митко наполнил толку години колку што бил збирот на цифрите на годината кога се родил. Неговата мајка забележала дека тоа истото важи и за нејзиниот најстар син Стојан. Колку години е Митко помлад од Стојан?
Решение. Ако некој од браќата е роден во овој век, тогаш точно е равенството $2012 - \overline{20xy} = 2 + 0 + x + y$, од каде добиваме $11x + 2y = 10$. Броевите x и y се едноцифрени природни броеви, па од последното равенство следува $x = 0,\ y = 5$. Според тоа, само еден од браќата може да е роден во овој век. Јасно, тоа е Митко и тој има $2012 - 2005 = 7$

години.

Значи, Стојан е роден минатиот век, па тогаш е точно равенството $2012-\overline{19xy}=1+9+x+y$, од каде добиваме $102=11x+2y$. Броевите x и y се едноцифрени природни броеви, па од последното равенство следува $x=8, y=7$. Според тоа, Стојан е роден во 1987 година и тој има $2012-1987=25$ години.

Конечно, Стојан е постар од Митко $25-7=18$ години.

48. Дедо Јордан и неговиот внук Иван имаат роденден на ист ден. Годините на едниот и на другиот се пишуваат со истите цифри. „Разликата на нивните години е еднаква на бројот на твојата куќа“ - му рече Марко на Петар. Петар многу брзо пресмета колку години имаат Јордан и Иван. Колку се стари дедото и внукот?

Решение. Разликата од двоцифрените броеви $10a+b$ и $10b+a$ изнесува $9(a-b)$. Разликата $a-b$ е единствена, бидејќи a и b се цифри различни од 0, значи оваа разлика може да биде 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8. Според тоа, производот $9(a-b)$ е единствен. На Петар, за да ги пресмета a и b му е доволно што го знае бројот на својата куќа. Затоа разликата на годините на дедото и внукот е $9(a-b)=72$. Имено, за останатите случаи би имале барем две можности, па Петар не би можел да го определи решението. Навистина, на пример ако $a-b=6$, тогаш можни се три случаи $a-b=7-1=8-2=9-3$.

Значи, $a-9, b=1$, т.е. дедото Јордан има 91 година, а внукот Иван има 19 години.

49. Ивана на полноќ на дочекот на 2024. година рекла дека пред 2024 часови наполнила 11 години. Определи го точниот датум и час кога Ивана се родила.

Решение. Ивана своето тврдење го соопштила на 1. јануари 2024. година на полноќ. Бидејќи 11 години наполнила пред 2024 часови, а како $2024=24\cdot 84+8$, тоа е пред 84 дена и 8 часови. Бидејќи 84 дена и 8 часа пред 1. јануари 2024. година е 8. октомври 2023. година во 16 часот, добиваме дека Ивана е родена на 8. октомври 2012. година во 16 часот.

50. Ѓорѓи го сретнал математичарот Рампо и го прашал колку е часот. Рампо погледнал на часовникот и рекол: Кога ќе собереш четвртина

од досега поминатото време во денот со половина од половината време кое останува до крајот на денот ќе го добиеш точното време? Колку е часот?

Решение. Ако со x забележиме времето кое во текот на денот поминало до средбата, тогаш од средбата до крајот на денот преостанале $24-x$. Затоа времето кога се случила средбата е

$$a=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(24-x)=\frac{1}{4}x+\frac{24}{4}-\frac{1}{4}x=6.$$

Значи, Ѓорѓи и Рампо се сретнале во 6 часот наутро.

51. Горјан во текот на три дена читал книга. Додека читал, брзината на читањето му била постојана. Првиот ден тој читал $\frac{1}{32}$ од денот, а секој следен ден читал третина од времето помалку отколку претходниот ден. Колкав дел изразен во проценти, треба Горјан уште да прочита ако за читање на целата книга му требало 1 час и 40 минути?

Решение. На Горјан целата за читање на целата книга му требало $1\,h\ 40\ \text{min}=60+40\ \text{min}=100\ \text{min}$.

Првиот ден Горјан читал $\frac{1}{32}\cdot 24\ h=\frac{1}{32}\cdot 24\cdot 60\ \text{min}=45\ \text{min}$.

Една третина од $45\ \text{min}$ е $15\ \text{min}$, што значи дека вториот ден Горјан читал $45-15=30\ \text{min}$.

Една третина од $30\ \text{min}$ е $10\ \text{min}$, што значи дека третиот ден Горјан читал $30-10=20\ \text{min}$.

Според тоа, по три дена читање на Горјан му останало да чита уште $100-(45+30+20)=5\ \text{min}$. Изразено во проценти тоа е $\frac{5}{100}=5\%$, т.е. Горјан треба да прочита уште 5% од книгата.

52. Аритметичката средина на височините на 24 ученици во едно одделение е $151{,}3\ cm$ и мерењето било извршено кога Дијана не била на училиште. Колку е аритметичката средина на височините на сите ученици ако Дијана е висока $152{,}5\ cm$?

Решение. Збирот на височините на 24-те ученици во одделението е еднаков на $151{,}3\cdot 24=3631{,}2\ cm$. Заедно со Дијана овој збир е еднаков на $3631{,}2+152{,}5=3783{,}7\ cm$. Значи, е аритметичката средина на височините на сите ученици е $3783{,}7:25=151{,}348\ cm$.

53. Просечната височина на 30 ученици од една паралелка е $156,67\,cm$. На крајот од мерењето е констатирана грешка, т.е. Гордана ја мереле два пати, а Гвозден ниту еднаш. По исправката се покажало дека точната просечна височина на паралелката е $157,1\,cm$. За колку е Гвозден повисок од Гордана?

Решение. Од условот следува дека точната височина на сите ученици во паралелката е $30\cdot 157,1 = 4713\,cm$, а грешната вредност е еднаква на $30\cdot 156,67 = 4700,1\,cm$. Според условот на задачата разликата меѓу наведените точна и грешна вредност всушност ја дава разликата во височината меѓу Гвозден и Гордана. Имено,

$$4713 = 4700,1 + v_{Gv} - v_{Go},$$
$$v_{Gv} - v_{Go} = 4713 - 4700,1$$
$$v_{Gv} - v_{Go} = 12,9\,cm.$$

Значи, Гвозден е $12,9\,cm$ повисок од Гордана.

54. Хартиена лента по должина е превиткана на половина, потоа уште еднаш на половина и уште еднаш на половина. Вака добиената осумслојна лента е пресечена на едно место. Определи ја должината на лентата пред сечењето ако се знае дека две од дибиените парчиња имаат должини $9\,cm$ и $4\,cm$.

Решение. По сечењето може да се добијат три вида парчиња, при што должина на парчето од едниот вид е два пати поголема од должината на парчето од другиот вид. Овие должини да ги означиме со $x, 2y, y$ и целата должина на лентата со L. Тогаш $L = 8x + 4y = 4(2x + y)$. Сега ос условот на задачата следува дека се можни следниве варијанти:

1) $x = 4,\ y = 9$ и тогаш $L = 68\,m$,
2) $2x = 4,\ y = 9$ и тогаш $L = 52\,m$,
3) $x = 9,\ y = 4$ и тогаш $L = 88\,m$,
4) $y = 4,\ 2x = 9$ и тогаш $L = 52\,m$.

55. Возач на камион во еден момент погледнал на бројачот за поминати километри и видел дека бројачот покажува 25952. „Колку убав број километри сум поминал! Веројатно нема скоро да се повтори така убав симетричен број“ – помислил. Меѓутоа точно по еден час и 20 минуто бројачот го покажал следниот симетричен број. Со која брзина се движел камионот?

Решение. Следниот симетричен број (палиндром) е бројот 26062. Значи, возачот за $1\,h\,20\,\min = 80\,\min$ односно за $\frac{4}{3}$ часови поминал $26062 - 25952 = 110\,km$. Според тоа, каминот се движел со брзина од $110 : \frac{4}{3} = 82{,}5\,km/h$.

56. Петранка купила украсна трака. На својата мајка и дала $\frac{2}{5}$ од траката, а на сестра ѝ Матеа и дала $\frac{1}{3}$ од траката. Кога пресметала видела дека дала $14\,m$ трака повеќе отколку што и останало. Колкава била должината на траката која Петранка ја купила?

Решение. Петранка на мајката и сестрата вкупно има дала $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$ од траката. Значи нејзи и останале $\frac{4}{15}$ од траката. Мајката и сестрата добиле повеќе $\frac{7}{15}$ трака повеќе од Петранка. Ако должината на траката ја означиме со x, тогаш од условот на задачата следува $\frac{7}{15}x = 14$, односно $x = 30\,m$. Значи, Петранка купила $30\,m$ трака.

57. Велосипедист првиот ден поминал $\frac{1}{4}$ од патот, вториот ден поминал $\frac{1}{3}$ од остатокот од патот, третиот ден $\frac{4}{5}$ од новиот остаток, а четвртиот ден ги поминал преостанатите $84\,km$. Колку километри велосипедистит поминал за 4 дена?

Решение. *Прв начин*. Последните $84\,km$ се еднакви на $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ од остатокот по вториот ден. Според тоа, остатокот по вториот ден е $5 \cdot 84 = 420\,km$. Овие $420\,km$ се еднакви на $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ од остатокот по првиот ден, што значи дека по првиот ден на велосипедистот му останале $\frac{3}{2} \cdot 420 = 630\,km$. Овие $630\,km$ се еднакви на $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ од целиот пат, што значи дека целиот пат е $\frac{4}{3} \cdot 630 = 840\,km$.

Втор начин. Нека велосипедистот на 4 дена поминал x километри. Првиот ден поминал $\frac{1}{4}x$ километри и му преостанале $\frac{3}{4}x$ километри. Вториот ден поминал $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$ километри и му пресотанале

$\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}x$ километри. Третиот ден поминла $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{2}{5}x$ километри и му преостанале $\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}x=\frac{1}{10}x$ километри. Значи, $\frac{1}{10}x=84$, односно $x=840$. Конечно, велосипедистот за 4 дена поминал $840\,km$.

58. Во акција за собирање стара хартија учениците од 6^a одделение собрале $178\,kg$ хартија, од 6^b одделение собрале $47\,kg$ повеќе од 6^a, од 6^c собрале $36\,kg$ помалку од 6^b, а од 6^d собрале колку што собрале заедно 6^a и 6^b. Колку хартија недостасува за сите заедно да соберат еден тон хартија?

Решение. Имаме:

- 6^a собрале $178\,kg$ хартија,
- 6^b собрале $178+47=225\,kg$ хартија,
- 6^c собрале $225-36=189\,kg$ хартија,
- 6^d собрале $178+225=403\,kg$ хартија.

Сите заедно собрале $178+225+189+403=995\,kg$ хартија, па како 1 тон има $1000\,kg$, потребно е уште да соберат $1000-995=5\,kg$ хартија.

59. Матеја од полн бокал лимунада може да наполни 7 чаши. Полниот бокал има маса $1\,kg$, а по полнењето на две чаши масата на бокалот со преостанатата лимонада е $\frac{3}{4}\,kg$. Определи ја масата на празниот бокал.

Решение. Масата на лимонадата која е во две чаши е еднаква на $\frac{1}{4}\,kg$, па затоа масата на лимонадата во една чаша е $\frac{1}{8}\,kg$. Според тоа, масата на лимонадата во седум чаши е $\frac{7}{8}\,kg$, па затоа масата на празниот бокал е $1-\frac{7}{8}\,kg=\frac{1}{8}\,kg=125\,g$.

60. Пет кутии имаат различни маси. Ако за секои две кутии го пресметаме збирот на нивните маси во килограми, ги добиваме следниве 10 броеви: 114, 85, 122, 74, 133, 118, 147, 99, 107 и 93. Колкава е масата на

секоја од петте кутии?

Решение. Нека масите на кутиите се a,b,c,d и e при што важи $a<b<c<d<e$. При собирањето по две кутии, ги добиваме следниве 10 збирови:

$$a+b,\ a+c,\ a+d,\ a+e,\ b+c,\ b+d,\ b+e,\ c+d,\ c+e,\ d+e.$$

Забележуваме дека секој број во збировите се појавува во точно 4 збира. Затоа збирот на дадените 10 броја е еднаков на $4(a+b+c+d+e)$. Сега, бидејќи

$$114+85+122+74+133+118+147+99+107+93=1092,$$

добиваме

$$4(a+b+c+d+e)=1092,\ \text{т.е. } a+b+c+d+e=273.$$

Најмалиот збир соодветствува на најмалите два броја, а тоа се a и b, а најголемиот на најголемите два броја, т.е. на d и e. Според тоа, $a+b=74$ и $d+e=147$. Сега,

$$c=273-(a+b+d+e)=273-(74+147)=52.$$

Вториот по големна број соодветствува на збирот на најмалиот и третиот по големина број, па затоа $a+c=85$. Значи, $a=85-52=33$. Но, $a+b=74$, па затоа $b=74-33=41$.

Слично, претпоследниот по големина збир е еднаков на збирот на броевите c и e, односно $c+e=133$. Значи, $e=133-52=81$, па како $d+e=147$ добиваме $d=147-81=66$.

Кнечно, масите на кутиите се: 33 *kg*, 41 *kg*, 52 *kg*, 66 *kg* и 81 *kg*

61. Определи го минималниот број камиони со носивост 7,5 тони со кои може одеднаш да се превезат 50 контејнери со маси:

$$925\ kg, 930\ kg, 935\ kg, ..., 1165\ kg, 1170\ kg.$$

Решение. Вкупната маса на осумте контејнери со најмала маса е поголема од 7500 килограми, па затоа не се доволни 7 камиони за превоз на сите 50 контејнери. Од друга страна 8 камиони се доволни што следува од следниве разгледувања: Масата на било кои 6 контејнери е помала од 7500 килограми, бидејќи вкупната маса на шесте контејнери со најголема маса е 6945 килограми. Од друга страна, масата на било кои 7 од 14 контејнери со најмали маси е помала од 7500 килограми. Според тоа, на два камиони ќе натовариме по 7 од оние 14 контејнери со најмали маси, а на другите 6 камиони по 6 контејнери од преостанатите 36 контејнери.

62. Четири слона и осум зебри дневно изедуваат еден тон храна. Секој слон дневно изедува $214\,kg$ храна повеќе од една зебра. Ако на зебрата и требаат 24 минути да изеде $1\,kg$ храна, колку време и треба да го изеде своето дневно количество храна?

Решение. Еден слон изедува $214\,kg$ килограми храна повеќе од една зебра. Значи, четирите слона дневно изедуваат $214\cdot 4=856\,kg$ повеќе храна од зебрите. Тоа значи дека дванаесет зебри дневно изедуваат $100-856=144\,kg$ храна. Според тоа, една зебра дневно изедува $144:12=12\,kg$ храна и за тоа и се потребни $12\cdot 24=288\,\min$, односно $4\,h\,48\,\min$.

63. Ако свежото грозје содржи 75% вода, а сувото грозје содржи 5% вода, колку килограми свежо грозје се потребни за да се добијат $130\,kg$ суво грозје?

Решение. Со x да го означиме количеството свежо грозје кое е потребно за да се добијат $130\,kg$ суво грозје. Во $130\,kg$ суво грозје има 95% сува материја, што значи дека во $130\,kg$ суво грозје има $\frac{95\cdot 130}{100}=123,5\,kg$ сува материја. Бидејќи во свежото грозје има 75% вода, во него има 25% сува материја. Но, сувата материја не ја менува масата при сушењето, па затоа во x килограми суво грозје треба да има $123,5\,kg$ сува материја. Конечно, од

$$\frac{25x}{100}=123,5$$

добиваме дека $x=494\,kg$.

64. Три другарки Косара, Ленка и Марија купиле заеднички поклон за својот другар Доротеј. Поклонот чинел 6600 денари. Ако Косара и Марија заедно дале 600 денари повеќе отколку Ленка, а Марија дала два пати повеќе од Косара, колку пари дало секое девојче за поклонот?

Решение. Нека Косара дала x денари. Тогаш Мара дала $2x$ денари, а Ленка дала $x+2x-600=3x-600$ денари. Според тоа,

$$\begin{aligned} x+3x-600+2x&=6600,\\ 6x-600&=6600,\\ 6x&=7200,\\ x&=120. \end{aligned}$$

Значи, Косара дала 1200 денари, Ленка дала 3000 денари и Марија дала 2400 денари.

65. Три другарки Кирјана, Лимонка и Маја за роденденот на Павел купиле заеднички поклон. Кирјана дала два пати повеќе пари од Лимонка, а Маја дала четири пати повеќе пари од Лимонка и 2400 денари повеќе од Кирјана. Колку пари дало секое девојќе и колку чинел поклонот?

Решение. Нека Лимонка дала x денари. Тогаш Кирјана дала $2x$ денари, а Маја дала $4x$ денари, односно $2x+2400$ денари. Според тоа, $4x=2x+2400$, од каде добиваме $x=1200$. Значи, Лимонка дала 1200 денари, Кирјана дала 2400 денари и Маја дала 4800 денари. Конечно, поклонот чинел 8400 денари.

66. Лонец со поклопец чини 2000 денари денари, при што лонецот е 900 денари поскап од поклопецот. Колку чини лонецот без поклопец?

Решение. *Прв начин*. Нека a е цената на поклопецот. Тогаш цената на лонецот е $900+a$. Според тоа, цената на лонец со поклопец е $900+2a$, па затоа $900+2a=2000$, од каде добиваме $a=550$. Значи, поклопецот чини 550 денари, а лонецот чини $900+550=1450$ денари.

Втор начин. Нека x е цената на лонецот, а y е цената на поклопецот. Тогаш $x+y=2000, x=y+900$. Ако од втората равенка замениме во првата, добиваме $(y+900)+y=2000$, т.е. $2y+900=2000$, од каде наоѓаме $y=550$ и затоа $x=550+900=1450$. Значи, поклопецот чини 550 денари, а лонецот чини 1450 денари.

67. Матеј за својот роденден сакал да ги почести своите другари со сок. Купил $8\,l$ сок од јаболка и $5\,l$ сок од портокал, за што платил 880 денари. Колку чини по литар од овие сокови ако $4\,l$ сок од јаболка чинат колку $3\,l$ сок од портокал?

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $4\,l$ сок од јаболка чинат колку $3\,l$ сок од портокал, заклучуваме дека $8\,l$ сок од јаболка чинат колку $6\,l$ сок од портокал. Според тоа, $8\,l$ сок од јаболка и $5\,l$ сок од портокал чинат колку $6+5=11\,l$ сок од портокал. Значи, $11\,l$ сок од портокал чинат 880 денари, па затоа $1\,l$ сок од портокал чини $880:11=80$ денари. Конечно, $8\,l$ сок од јаболка чини $880-5\cdot 80=480$ денари, па

затоа $1l$ сок од јаболка чини $480:8=60$ денари.

Втор начин. Нека цената на $1l$ сок од јаболка е x денари, а цената на $1l$ сок од портокал е y денари. Од условот на задачата следува $8x+5y=880$ и $4x=3y$. Решението на последниот систем равенки е $x=60, y=80$ што значи дека $1l$ сок од јаболка чини 60 денари, а $1l$ сок од портокал чини 80 денари.

68. Митре на пазар продавал јаготки. На првиот купувач му продал $\frac{5}{36}$ од вкупното количество јаготки, а на вториот $\frac{1}{9}$. Кога ги измерил јаготките, видел дека му преостанале $25\,kg$ јаготки повеќе од тоа што продал. Колку пари заработил Митре од првите двајца купувачи ако килограм јаготки чинел 90 денари?

Решение. Митре на првите двајца купувачи им продал $\frac{5}{36}+\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$ од вкупното количество јаготки, а му преостанале $\frac{3}{4}$ од вкупното количество јаготки. Значи, ако Митре на пазар понел x килограми јаготки, тогаш му преостанале $\frac{3}{4}x$, а продал $\frac{1}{4}x$ килограми јаготки. Затоа $\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x=25$, од каде добиваме $x=50\,kg$. Според тоа, од првите двајца купувачи Митре заработил $(50:4)\cdot 90=1125$ денари.

69. Бојан првиот ден од месецот потрошил $\frac{1}{15}$ од својот џепарлак. Истиот ден неговата баба му дала 50 денари, кои ги додал на џепарлакот, па сега имал $\frac{19}{20}$ од џепарлакот. Колку пари добива Бојан за џепарлак?

Решение. Бојан потрошил $\frac{1}{15}$, па му останале $\frac{14}{15}$ од џепарлакот. Ако со x го означиме џепарлакот на Бојан, тогаш $\frac{14}{15}x+50=\frac{19}{20}x$, од каде добиваме $\frac{56}{60}x+50=\frac{57}{60}x$, односно $\frac{1}{60}x=50$, па затоа $x=3000$. Значи, Бојан има џепарлак од 3000 денари.

70. Богдан првиот ден од месецот потрошил 100 денари од својот џепарлак. По 10 дена добил $\frac{1}{4}$ од сумата која ја имал во тој момент и потрошил 100 денари. По 10 дена повторно добил $\frac{1}{4}$ од сумата која ја имал

во тој момент и потрошил 100 денари. На крајот Богдан имал 800 денари повеќе пари отколку на почетокот на месецот. Колку пари бил џепарлакот на Богдан на почетокот на месецот?

Решение. Нека Богдан на почетокот на месецот имал џепарлак x денари. По првиот ден му останале $x-100$ денари. По 10 дена добил $\frac{1}{4}(x-100)$ денари, па затоа имал $x-100+\frac{1}{4}(x-100)=\frac{5}{4}(x-100)$ денари. Откако по втор пат потрошил 100 денари, на Богдан му останале $\frac{5}{4}(x-100)-100=\frac{5}{4}x-225$ денари. Кога по втор пат добил $\frac{1}{4}$ од сумата која ја имал во тој момент, имал $\frac{5}{4}x-225+\frac{1}{4}(\frac{5}{4}x-225)=\frac{25}{16}x-\frac{1125}{4}$ денари. Но кога потрошил 100 денари му останале $\frac{25}{16}x-\frac{1425}{4}$ денари. Оваа сума е 800 денари поголема од парите што ги имал на почетокот, па затоа $\frac{25}{16}x-\frac{1425}{4}-x=800$, од каде добиваме $\frac{9}{16}x=\frac{4725}{4}$, односно $x=2100$. Значи, на почетокот Богдан имал 2100 денари.

71. Ацо, Бојан и Цане поделиле 1650 денари така што Бојан добил $\frac{2}{3}$ од парите што ги добил Ацо, а Цане добил $\frac{3}{8}$ од парите што заедно ги добиле Ацо и Бојан. Кое дете добило најмногу пари и колку?

Решение. Со a,b и c да ги означиме сумите кои редоследно ги добиле Ацо, Бојан и Цане. Тогаш

$$b=\frac{2}{3}a,\ c=\frac{3}{8}(a+\frac{2}{3}a)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{8}a \text{ и } a+b+c=1650.$$

Значи, $a+\frac{2}{3}a+\frac{5}{8}a=1650$, од каде добиваме $a=720$, па затоа $b=480$ и $c=450$. Според тоа, Ацо добил најмногу, т.е. 720 денари, Бојан 480 и Цане 450 денари.

72. Три ученици се договориле за ужинка да си поделат 11 еднакви кифлички. За таа прилика Трајко донел 5 кифлички, Вангел донел 6 кифлички, а Јордан донел 11 денари. Како овие 11 денари треба да ги распределат меѓу себе Трајко и Вангел, за тројцата ученици рамноправно да учествуваат во трошоците за ужинката?

Решение. Бидејќи Јордан си го платил својот дел од ужинката, ужинката на тројцата вреди 33 денари. Значи, секоја кифличка вреди 3 денари. Следствено, петте кифлички на Трајко вредат 15 денари, а тој ужинал за 11 денари. Заклучуваме дека Трајко треба да земе 4 денари,

а Вангел преостанатите 7 денари.

73. Илија отворил менувачница во која менувал валути по следнава шема: За 2 евра дава 3 долари и една бомбона како поклон, а за 5 долари дава 3 евра и повторно една бомбона како поклон. Кога Марко влегол во мунувачницата, имал само долари, а по излегувањето имал помалку долари, повторно немал евра, но затоа имал 50 бомбони. Колку долари го чинеле Марко овие 50 бомбони?
Решение. Бидејќи Марко добил 50 бомбони, тој направил точно 50 размени на валути. Притоа сите добиени евра ги заменил за долари. Затоа на секои три размени од првиот тип имало две размени од вториот тип. Понатаму, од $2+3=5$ следува дека Марко $3\cdot 10=30$ пати добил по 3 долари и $2\cdot 10=20$ пати дал по 5 долари. Според тоа, тој потрошил $20\cdot 5-30\cdot 3=10$ долари.

74. Еден трговец на крајот на секој месец го пресметува приходот и расходот на фирмата. Тој констатирал дека за секој период од пет последователни месеци во текот на годината приходот бил поголем од расходот, а за целата година расходот бил поголем од приходот. Дали е тоа можно?
Решение. Да. Нека, на пример, во март, мај, август и октомври, секој месец приходот бил поголем од расходот за 8 денари. Од друга страна, нека во секој од преостанатите 8 месеци расходот бил поголем од приходот за 5 денари. Значи, во текот на целата година разликата на приходот и расходот е $4\cdot 8-8\cdot 5=-8$, а во секој пет последователни месеци имаме два месеци со поголем приход и три месеци со поголем расход, па затоа разликата е $2\cdot 8-3\cdot 5=1$ денар.

75. Во едно одделение има 27 ученици и нивните омилени предмети се математика и биологија. Три ученици ги сакаат двата предмети, а преостанатите само по еден. Притоа, бројот на учениците кои сакаат само математика е два пати поголем од бројот на учениците кои сакаат само биологија. Колку ученици сакаат математика?
Решение. Во одделението само математика или само биологија сакаат $27-3=24$ ученици. Ако со x го означиме бројот на учениците кои сакаат само биологија, тогаш бројот на учениците кои сакаат само математика е $2x$. Затоа $x+2x=24$, од каде добиваме $x=8$. Значи, бројот на учениците кои сакаат само математика е $2x=16$, па бројот

на учениците кои сакаат математика е $16+3=19$.

76. Во едно одделение има 30 ученици и нивни омилени предмети се музичко и биологија. Пет ученици ги сакаат двата предмети, четири не сакаат ниту еден, а преостанатите сакаат по еден предмет. Притоа, бројот на учениците кои сакаат само биологија е за 3 помал од бројот на учениците кои сакаат само музичко. Колку ученици сакаат биологија?
Решение. Барем еден предмет сакаат $30-4=26$ ученици. Понатаму, точно еден предмет сакаат $26-5=21$ ученик. Бидејќи 3 ученици повеќе сакаат музичко од биологија, добиваме дека $(21-3):2=9$ ученици сакаат биологија. Според тоа, музичко сакаат $9+3+5=17$ ученици.

77. На една математичка школа учествувале 672 ученика. Во секое одделение имало точно по 24 ученици. Секое одделение пет дена од неделата има точно по пет часа, а секој наставник треба да одржи точно по 4 часа дневно. На секој час присуствува едно одделение и еден наставник. Колку наставници има на оваа школа?
Решение. Математичката школа има $672:24=28$ паралелки. Вкупниот број часови кои во текот на пет дена треба да се одржат е еднаков на $28\cdot 5\cdot 5=700$. Секоја наставник во текот на пет дена одржува $5\cdot 4=20$ часови, па затоа во школата работат $700:20=35$ наставници.

78. Група деца треба со чамци да се префрлат од еден на друг брег на реката Вардар. Ако во секој чамец има по едно дете, за 5 деца нема чамци. Ако во секој чамец има по 2 деца, тогаш 2 чамци ќе останат празни. Колку деца има на брегот на реката и колку чамци се во реката?
Решение. Нека во реката има x чамци. Бидејќи кога во секој чамец има по едно дете за 5 деца нема чамци, заклучувамедека на брегот има $x+5$ деца. Понатаму, ако бидејќи кога во чамец има по 2 деца точно 2 чамци остануваат празни, добиваме дека $x+5$ се по 2 деца сместени во $x-2$ чамци, па затоа $x+5=2(x-2)$, од каде добиваме $x=9$. Значи, во реката има 9 чамци и на брегот има $9+5=14$ деца.

79. Група момчиња треба да се префрлат од едниот на другиот брег на една река. Ако во секој чамец има по 2 момчиња, тогаш за 3 момчиња

нема да има чамец. Ако во секој чамец има по 3 момчиња, тогаш два чамци остануваат празни. Колку момчиња има на брегот и колку чамци во реката?

Решение. Нека во реката има x чамци. Тогаш бројот на децата од една страна е $2x+3$, а од друга страна е $3(x-2)$. Значи, $2x+3=3(x-2)$ од каде добиваме $2x+3=3x-6$, т.е. $x=9$. Значи, во реката има 9 чамци и $2\cdot 9+3=21$ момче.

80. Во продавница за спортска опрема стигнале 138 фудбалски топки, кои биле запакувани во мрежи со по 10 или 17 топки. Колку мрежи биле со 10, а колку со 17 топки?

Решение. Нека имаме x мрежи со 10 топки и y мрежи со 17 топки. Тогаш $10x+17y=138$. Бројот $10x$ има цифра на единиците 0, па затоа цифрата на единиците на бројот $17y$ мора да е 8. Оттука следува дека $y=4$, бидејќи $14\cdot 17>138$. Според тоа, $10x+68=138$, од каде добиваме $x=7$.

81. На една ливада паселе 25 животни: крави, коњи, овци и кози. Крави имало три пати повеќе од коњи, а овци имало два пати повеќе од кози. Колку животни од кој вид имало на ливадата, ако сите коњи не биле истобојни?

Решение. Нека на ливадата имало x коњи и y кози. Значи, бројот на кравите бил $3x$, а бројот на овците бил $2y$. Според тоа, $4x+3y=25$. Но, сите коњи не биле истобојни, па затоа бројот на коњите е поголем од 1. Јасно, бројот на коњите е помал од 7, бидејќи во спротивно $4\cdot 7=28>25$, т.е. на ливадата ќе има повеќе од 25 животни. Со непосредна проверка се добива дека само за $x=4$ добиваме целобројно решение $y=3$. Значи, на ливадата имало 4 коњи, 12 крави, 3 кози и 6 овци.

82. На група од дванаесет луѓе, во која има и мажи и жени и деца, им се дадени дванаесет сомуни леб, што тие ги изеле. Притоа, секој маж изел по сомун и пол леб, секоја жена изела по половина сомун леб, и секое дете изело по четвртина сомун леб. Колку биле мажи, колку жени и колку деца во таа група?

Решение. Нека во групата имало x мажи, y жени и z деца. Од условот на задачата следува

$$x+y+z=12 \text{ и } \frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z=12.$$

Од првата равенка имаме $x=12-y-z$ и ако замениме во втората добиваме

$$\frac{3}{2}(12-y-z)+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z=12, \text{ т.е. } y=6-\frac{5}{4}z.$$

Бидејќи *x*, *y*, *z* се природи броеви, единствена можност е $z=4$, од каде добиваме $y=6-\frac{5}{4}\cdot 4=1$ и $x=12-1-4=7$.

Значи во групата биле седум мажи, една жена и четири деца.

83. Дамјан пет дена (од понеделни до петок) му помагал на дедо му да продава лубеници. Во табелата десно се дадени податоци за продажбата на лубениците одредени денови во текот на петдневниот период. Колку лубеници Дамјан и дедо му продале во вторникот?

Понеделник, вторник и среда	115
Среда и четврток	85
Вторник и четврток	90
Понеделник и петок	70
Четврток и петок	80

Решение. Од првиот и четвртиот ред следува дека сите пет дена Дамјан и неговиот дедо продале $115+80=195$ лубеници. Понатаму, од вториот и четвртиот ред следува дека во понеделникот, средата,четвртокот и петокот тие продале $85+70=155$ лубеници. Конечно, во вторникот продале $195-155=40$ лубеници.

Забелешка. Очигледно податокот од третиот ред во табелата не ни е потребен за да одговориме на поставеното прашање. Меѓутоа, ако сакаме да определиме колку лубеници биле продадени секој ден, тогаш мора да го имаме и овој податок. Обиди се да определиш колку лубеници биле продадени секој ден.

84. На натпревар по математика биле зададени 10 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат по 4 поени, а за секоја задача која не е решена или е неточно решена се губат по 3 поени. Колку задачи точно решил Андреј, ако тој освоил 19 поени?

Решение. *Прв начин*. Ако Андреј точно ги решил сите задачи, тој ќе освоел $10\cdot 4=40$ поени. Значи, Андреј изгубил $40-19=21$ поен. За секоја неточно решена задача Андреј губи $4+3=7$ поени (4 кои не ги освојува и 3 кои му се одземаат). Бидејќи $21:7=3$, Андреј неточно решил 3 задачи, што значи дека точно решил 7 задачи.

Втор начин. Нека Андреј точно решил x задачи. Тогаш неточно решил $10-x$ задачи, па затоа $4x-3(10-x)=19$, од каде добиваме $4x-30+3x=19$, односно $7x=49$, па затоа $x=7$. Значи, Андреј точно решил 7 задачи и неточно решил 3 заадачи.

85. Матеа тргнала од дома броејќи чекори. Прво одела 10 чекори напред па 3 назад, потоа 10 чекори напред па 2 чекори назад, потоа 10 чекори напред па 1 назад. Оваа постапка Матеа ја повторува при чекорењето. Колку чекори мора да направи Матеа за да од дома се оддалечи 2038 чекори?

Решение. При повторувањата на една цела постапка, Матеа од дома се одалечува $(10-3)+(10-2)+(10-1)=24$ чекори и притоа вкупно прави $10+3+10+2+10+1=36$ чекори. Бидејќи $2038=24\cdot 84+22$ Матеа мора да направи 84 повторувања на постапката, по што таа од дома ќе биде оддалечена $84\cdot 24=2016$ чекори и вкупно ќе направи $84\cdot 36=3024$ чекори. Сега треба да се оддалечи уште 22 чекори, па како $(10-3)+(10-2)+7=22$ за да од дома се оддалечи 2038 чекори Матеа треба да направи уште $10+3+10+2+7=32$ чекори или вкупно $3024+32=3056$ чекори.

86. Баба Цанка ја затворила славината за вода над кадата, но заборавила да ја затне кадата. Таа се сетила да ја затне кадата по 12 минути откако ја отворила славината. Ако е познато дека затната када се полни до горе за 10 минути, а полна када се празни за 20 минути, дали за тие 12 минути кадата се преполнила?

Решение. Затната када се полни за 10 минути, па затоа за 1 минута е полна $\frac{1}{10}$ од кадата. Кадата се празни за 20 минути, па затоа за 1 минута се празни $\frac{1}{20}$ од кадата. Според тоа, по 12 минути ќе бидат наполнети само $12\cdot(\frac{1}{10}-\frac{1}{20})=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ од кадата, што значи дека кадата не се преполнила.

87. Марија имала неколку сликички со животни. Половина од сликичките и ги дала на другарката Јована. Третина од преостанатите сликички и ги дала на другарката Кристина, а четвртина и петтина од преостанатите сликички му ги дала на својот брат Марко. Така на Марија и останале 11 сликички. Колку сликички имала Марија на почетокот?

Решение. Марко добил четвртина и петтина од преостанатите сликички. Тоа значи дека тој добил $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ од преостанатите сликички, па затоа на Марија и останале $\frac{11}{20}$ од сликичките, а тоа се 11 сликички. Според тоа, Марија пред да му даде сликички на Марко имала 20 сликички. Јована добила третина од сликичките, па затоа преосатанатите 20 сликички се две третини, односно Кристина добила 10 сликички, а Марија пред да и даде сликички на Кристина имала 30 сликички. Бидејќи на Јована и дала половина од сликичките кои ги имала на почетонот заклучуваме дека Марија на почетокот имала 60 сликички.

88. Марко, Жарко и Дарко собирале албум со сликички. Тие заедно собрале 1650 сликички. Жарко собрал $\frac{2}{3}$ од бројот на сликичките што ги собрал Марко, а Дарко собрал $\frac{3}{8}$ од бројот на сликичките кои што заедно ги собрале Марко и Жарко. Колку сликички собрало секое дете?

Решение. Ако Марко собрал x сликички, тогаш Жарко собрал $\frac{2}{3}x$ сликички и Дарко собрал $\frac{3}{8}(x+\frac{2}{3}x)$ сликички. Затоа

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{8}(x+\frac{2}{3}x)=1650,$$
$$x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x=1650,$$
$$\frac{24x+8x+9x+6x}{24}=1650,$$
$$\frac{55x}{24}=1650,$$
$$x=720.$$

Значи, Марко собрал 720 сликички, Жарко собрал $\frac{2}{3}\cdot 720=480$ и Дарко собрал $\frac{3}{8}(720+480)=450$ сликички.

89. Бабата Илина за своите внуци им ги испекла омилените слатки *орасници*. Внукот Филип прв стигнал дома и изел четвртина и осмина од орасниците. Потоа стигнал внукот Андреј кој изел половина и шестина од преостанатите орасници. На крајот најмалиот внук Матео ги изел преостанатите 5 орасници. Колку орасници изел Филип, а колку Андреј?

Решение. Андреј изел половина и шестина од орасниците кои останале по Филип, што значи дека тој изел $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{2}{3}$ од преостанатите орасници. Значи, орасниците кои ги изел Матео се $\frac{1}{3}$ од бројот на орасниците кои ги затекнал Андреј. Според тоа, Андреј затекнал $3\cdot 5=15$ орасници, т.е. тој изел $15-5=10$ орасници. Понатаму, Филип изел една четвртина и една осмина од вкупниот број орасници. Значи, Филип изел $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ од вкупниот број орасници, па оние 15 орасници кои останале се $\frac{5}{8}$ од вкупниот број орасници, Значи, баба Илина испекла $\frac{8}{5}\cdot 15=24$ орасници, а Филип изел $24-15=9$ орасници.

90. Иван првиот ден прочитал $\frac{1}{4}$ од една книга, вториот ден прочитал $\frac{4}{9}$ од остатокот, а третиотден ги прочитал преостанатите 50 страници. Колку стриници има книгата која ја прочитал Иван?

Решение. *Прв начин*. Нека книгата има x страници. Иван првиот ден прочитал $\frac{1}{4}x$, вториот ден прочитал $\frac{4}{9}(x-\frac{1}{4}x)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{1}{3}x$ и третиот ден прочитал 50 страници. Според тоа, $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x+50=x$, од каде добиваме $\frac{7}{12}x+50=x$. Значи, $\frac{5}{12}x=50$, односно $x=120$. Според тоа, книгата имала 120 страници.

Втор начин. Оние 50 страници се $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ од страниците кои на Иван му преостанале за читање по првиот ден. Според тоа, Иван по првиот ден требало да прочита $\frac{9}{5}\cdot 50=90$ страници. Овие 90 страници се $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ од книгата. Значи, книгата имала $\frac{4}{3}\cdot 90=120$ страници.

91. На регионалниот натпревар по математика се пласирале $\frac{3}{40}$ од учесниците на општинскиот натпревар. Од овие ученици на регионалниот натпревар точно $\frac{2}{9}$ добиле награда или пофалница. Еден ученик добил прва, еден добил втора и двајца добиле трета награда. Пофалница добиле 4 натпреварувачи. Колку ученици улествувале на општинскиот натпреевар?

Решение. Награда или пофалница на регионалниот натпревар добиле $1+1+2+4=8$ ученици. Тоа е $\frac{2}{9}$ од учесниците на натпреварот, што значи дека на регионалниот натпревар учествувале $8\cdot\frac{9}{2}=36$ ученици. Овие 36 ученици се $\frac{3}{40}$ од учесниците на општинскиот натпревар, што значи дека на општинскиот натпревар учествувael $36\cdot\frac{40}{3}=480$ ученици.

92. За една кино претстава половината од гледачите и уште едно лице биле деца. Мајки имало за 2 повеќе од четвртина од гледачите, а татковци имало за 3 повеќе од третина од посетителите. Други луѓе немало во киното. Колку мајки, татковци и деца имало на оваа претстава?

Решение. Нека x е бројот на гледачите. Тогаш деца имало $\frac{x}{2}+1$,мајки имало $\frac{x}{4}+2$ и татковци имало $\frac{x}{3}+3$. На претставата немало други гледачи, па затоа бројот на гледачите бил $\frac{x}{2}+1+\frac{x}{3}+2+\frac{x}{3}$, односно $\frac{11}{12}x+6$. Според тоа, 6 лица се $\frac{1}{12}$ од сите гледачи, што значи дека претставата ја гледале $6\cdot12=72$ посетители.

93. Михаил и Мартин живеат на иста оддалеченост од училиштето и истовремено тргнале кон училиштето. Чекорот на Михаил е за 10% пократок од чекорот на Мартин, но Михаил за исто време направил 10% повеќе чекори од Мартин. Кој од нив стигнал прв во училиште?

Решение. Нека должината на чекорот на Мартин е x. Бидејќи 10% од x е $0{,}1x$, добиваме дека чекорот на Михаил е долг $0{,}9x$. Понатаму, ако Мартин направил y чекори, бидејќи 10% од y е $0{,}1y$, Михаил направил $1{,}1y$ чекори. Според тоа, кога Мартин поминува пат со должина xy, тогаш Михаил поминува пат со должина

$$0{,}9x\cdot1{,}1y=0{,}99xy<xy,$$

што значи дека Мартин прв стигнал на училиште.

94. За одење во театар се пријавиле $\frac{2}{9}$ повеќе ученици отколку што е планирано. На денот на претставата заради болест $\frac{3}{11}$ од пријавените не

отишле во театар, па во театар отишле 5 ученици помалку отколку што било планирано. Колку ученици биле во театар?

Решение. Нека е планирано во театар да одат x ученици. Се пријавиле уште $\frac{2}{9}x$ ученици, па затоа вкупниот број пријавени е $x+\frac{2}{9}x=\frac{11}{9}x$ ученици. Од нив се откажале $\frac{3}{11}\cdot\frac{11}{9}x=\frac{3}{9}x$, што значи дека на театар отишле $\frac{11}{9}x-\frac{3}{9}x=\frac{8}{9}x$ ученици. Бидејќи отишле 5 ученици помалку од планираниот број, добиваме $x-\frac{8}{9}x=5$, од каде наоѓаме $x=45$. Значи, на театар биле 40 ученици.

95. За одење на излет се пријавиле $\frac{3}{11}$ помалку ученици отколку што е планирано. На денот на одењето на излетот дошле уште $\frac{1}{4}$ од бројот на пријавените, па на излетот отишле 2 ученика помалку отколку што било планирано. Колку ученици биле планирано да одат на изет?

Решение. Нека било планирано на излет да одат x ученици. За излетот се пријавиле помалку $\frac{3}{11}x$ ученици, што значи дека се пријавиле $x-\frac{3}{11}x=\frac{8}{11}x$ ученици. Дополнително дошле $\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{11}x=\frac{2}{11}x$ ученици, па на излетот отишле $\frac{8}{11}x+\frac{2}{11}x=\frac{10}{11}x$ ученици. Според тоа, $x-2=\frac{10}{11}x$, од каде добиваме $x=22$. Значи, било планирано на излетот да одат 22 ученика.

96. Учениците од едно одделение правеле писмена работа. Бројот на учениците кои добиле оценка 4 е еднаков на бројот на учениците кои добиле оценка 2. Бројот на учениците кои добиле оценка 5 е за 2 помал од бројот на учениците кои добиле оценка 3, а бројот на учениците кои добиле оценка 3 е за 1 поголем од бројот на учениците кои добиле оценка 2. Еден ученик добил оценка 1. Колку ученици има во оваа одделение ако просечната оценка од писмената работа била 3,25?

Решение. Со x да го означиме бројот на учениците кои добиле оценка 5. Тогаш оценка 4 добиле $x+2$, оценка 3 добиле $x+3$, оценка 2 добиле $x+2$ и оценка 1 добил 1 ученик. Значи, во одделението вкупно имало $x+x+2+x+3+x+2+1=4x+8$ ученици.

Од една страна вкупниот збир на оценките бил $3,25\cdot(4x+8)$, а од друга страна тој збир е еднаков на

$$5x+4(x+2)+3(x+3)+2(x+1)+1\cdot 1=14x+22,$$

па затоа $3,25\cdot(4x+8)=14x+22$, од каде добиваме $13x+26=14x+22$, односно $x=4$. Значи, во одделението имало $4\cdot 4+8=24$ ученици.

97. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во:
а) 8 часот, б) 8 часот и 15 минути.

Решение. а) На часовникот кружницата е поделена на 12 еднакви кружни лаци кои соодветствуваат на агол од $360^\circ:12=30^\circ$. Во 8 часот малата стрелка се наоѓа на бројот 8, а големата на бројот 12, што значи дека тие зафаќаат 4 од споменатите кружни лаци. Значи, во 8 часот аголот меѓу стрелките на часовникот е $4\cdot 30^\circ=120^\circ$.

б) Големата стрелка за 1 час поминува цел круг, односно 360°. Спо-ред тоа, таа за 15 минути минува $360^\circ:4=90^\circ$. Малата стрелка за 1 час минува 30°, што значи дека таа за 15 минути минува $30^\circ:4=7^\circ 30'$. Аголот меѓу стрелките на часовникот во 8 часот е 120° и затоа во 8 часот и 15 минути ќе биде $120^\circ+90^\circ-7^\circ 30'=202^\circ 30'$, односно $360^\circ-202^\circ 30'=157^\circ 30'$.

98. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во:
а) 5 часот и 45 минути, б) 9 часот и 30 минути.

Решение. а) Минутната стрелка за 5 часа и 45 минути минува пет полни круга и $45\cdot 6^\circ=270^\circ$, а часовната стрелка за 5 часа 45 минути минува $5\cdot 30^\circ+45\cdot 30'=172^\circ 30'$. На почетокот стрелките на часовникот се поклопуваат, па затоа по 5 часа и 45 минути тие ќе зафаќаат агол од $270^\circ-172^\circ 30'=97^\circ 30'$.

б) Минутната стрелка за 9 часа и 30 минути минува девет полни круга и $30\cdot 6^\circ=180^\circ$, а часовната стрелка за 9 часа 30 минути минува $9\cdot 30^\circ+30\cdot 30'=285^\circ$. На почетокот стрелките на часовникот се поклопуваат, па затоа по 9 часа и 30 минути тие ќе зафаќаат агол од $285^\circ-180^\circ=105^\circ$.

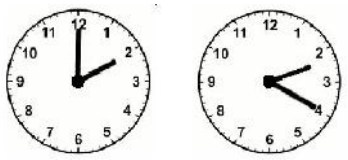
99. Кога прв пат по 12 часот стрелките на часовникот ќе зафаќаат прав агол?

Решение. Еден час има 3600 секунди при што минутната стрелка

прави круг од 360°. Според тоа, за 10 секунди минутната стрелка ќе помине 1°. Од друга страна за исто време часовната стрелка поминува дванаесет пати помал лак од минутната. Тоа значи дека додека часовната стрелка помине 1° минутната поминува 12°. Според тоа, за 120 секунди, односно 2 минути, аголот меѓу стрелките се зголемува за 11°. За да се добие агол од 90°, времето од 2 минути треба да се зголеми $\frac{90}{11}$ пати, односно потребното време е $\frac{90}{11}\cdot 2=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$ минути.

100. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 14 часот и 20 минути.

Решение. Во 14 часот минутната стрелка е на 12, а часовната е на 2 и зафаќаат агол од 60°. За 20 минути минутната стрелка прави агол од $20\cdot 6^\circ=120^\circ$, а часовната $20\cdot 30'=600'=10^\circ$. Значи, во 14 часот и 20 минути стрелките на часовникот ќе зафаќаат агол еднаков на $120^\circ-60^\circ-10^\circ=50^\circ$



101. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 13 часот и 30 минути.

Решение. Во 12 часот стрелките на часовникот се поклопуваат, т.е. зафаќаат агол од 0°. За 1 час часовната стрелка минува $360:12=30^\circ$, што значи дека до 13 часот и 30 минути таа ќе помине $30+30:2=45^\circ$.

Понатаму, минутната стрелка за 1 час минува 360°, па затоа во 13 часот и 30 минути таа во однос на почетната положба ќе зафаќа агол од $360:2=180^\circ$. Конечно, во 13 часот и 30 минути стрелките на часовникот ќе зафаќаат агол од $180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

102. Дали еднаков агол зафаќаат стрелките на часовникот во 12:15 и во 13:20?

Решение. За еден час малата срелка поминува $\frac{1}{12}$ од кругот, па за 15

минути таа поминува четири пати помалку, односно $\frac{1}{48}$ од кругот, што е $7^\circ 30'$. За 15 минути големата стрелка поминува $\frac{1}{4}$ од кругот, што е 90°. Според тоа, аголот меѓу стрелките на часовникот во 12:15 е еднаков на $90^\circ - 7^\circ 30' = 82^\circ 30'$. За 20 минути малата стрелка поминува $\frac{1}{36}$ од кругот, што е 10°, а од 12:00 до 13:00 веќе поминала $\frac{1}{12}$ од кругот, односно 30°. Значи, во 13:20 малата стрелка поминала $30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$. За 20 минути гоеата стрелка поминува $\frac{1}{3}$ од кругот, што е 120°. Според тоа, аголот меѓу стрелките на часовникот во 13:20 ќе биде $120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$. Значи, во 12:15 и 13:20 часот стрелките на часовникот не зафаќаат еднаков агол.

103. а) Определи го аголот меѓу стрелките на часовникот ако се знае дека тие по 20 минути ќе зафаќаат исто толкав агол.
б) Колку пати во текот на денот стрелките на часовникот се наоѓаат во таква положба?

Решение. а) Нека бараниот агол е $\sim$. За 20 минути минутната стрелка поминува агол од 120°, а часовната стрелка агол од 10°. Еднаквоста на аглите споменета во формулацијата на задачата значи дека по 10 минути минутната стрелка се поклопила со часовната, или со нејзиното продолжување во спротивна насока. За овие 10 минути минутната стрелка опишала агол од 60°, а часовната агол од 5°.

Во првиот случај (кога минутната стрелка по 10 минути се поклопила со часовната), аголот меѓу стрелките на часовникот на почетокот бил $\sim = 60^\circ - 5^\circ = 55^\circ$.

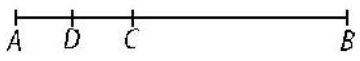
Во вториот случај (кога минутната стрелка по 10 минути се поклопила со продолжението на часовната), аголот меѓу стрелките на часовникот на почетокот бил $\sim = 120^\circ + 5^\circ = 125^\circ$.

б) Онолку пати колку пати минутната стрелка во текот на денот се поклопува со часовната или со нејзиното продолжение. Овој момент настапува 10 минути пред секое од тие поклопувања. Секое од тие поклопувања се случува 11 пати во интервал од 12 часа, што значи дека положбите за кои станува збор се случуваат 44 пати.

4. ГЕОМЕТРИЈА

1. Отсечката AB со точката C е поделена на два дела чии должини се разликуваат за $2\,cm$. Ако средината на отсечката AC е четири пати поблиска до точката A отколку до точката B, определи ја должината на отсечката AB.

   Решение. Нека D е средината на отсечката AC. Да означиме $\overline{AD} = x$.

   Од $\overline{DB} = 4\overline{AD}$ следува $\overline{DB} = 4x$, па затоа $\overline{AB} = 5x$. Бидејќи D е средината на отсечката AC добиваме $\overline{AD} = \overline{DC}$. Според тоа, $\overline{AC} = 2x$ и затоа $\overline{CB} = 3x$. Сега, бидејќи $\overline{BC} - \overline{AC} = 2$, добиваме $3x - 2x = 2$, односно $x = 2cm$. Конечно, $\overline{AB} = 5 \cdot 2 = 10\,cm$.

2. Отсечката AB е поделена со точката C на два нееднакви дела. Растојанието меѓу средините на отсечките AC и CB е $5\,cm$, а точката C е 4 пати поблиску до средината на отсечката BC отколку до средината на отсечката AC. На кое растојание од точката A е точката C.

   Решение. Нека точката D е средина на AC и E е средина на CB.

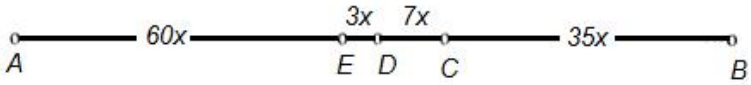
   

   Да ставиме $\overline{CE} = x$. Тогаш $\overline{DC} = 4x$, па затоа $\overline{DE} = 5x$. Сега, од $\overline{DE} = 5\,cm$, добиваме $5x = 5\,cm$, односно $x = 1\,cm$. Значи, $\overline{DC} = 4\,cm$, па како D е средина на AC добиваме $\overline{AC} = 2\overline{DC} = 8\,cm$. Значи, растојанието од точката A до точката C е $8\,cm$.

3. Точката C ја дели отсечката AB во однос $2:1$, точката D во однос $3:2$, а точката E во однос $4:3$. Во кој однос точката D ја дели отсечката CE?

   Решение. При поделбата со C се добиваат 3 дела, при поделбата со D се добиваат 5 дела и при поделбата со E се добиваат 7 дела. Бидејќи $\text{NZS}(3,5,7) = 105$ отсечката AB ќе ја поделиме на 105 дела со должина x. Тогаш

   $$\overline{AC} = 70x,\ \overline{AD} = 63x \text{ и } \overline{AE} = 60x.$$



Оттука добиваме

$$\overline{CD} = 70x - 63x = 7x \text{ и } \overline{ED} = 63x - 60x = 3x,$$

па затоа $\overline{CD} : \overline{DE} = 7:3$.

4. Точката C ја дели отсечката AB во однос $2:1$, точката D во однос $3:1$, а точката E во однос $4:1$. Во кој однос точката D ја дели отсечката CE?

Решение. Во првиот случај отсечката е поделена на 3 дела, во вториот на 4 дела и во третиот на 5 дела. Бидејќи $\text{NZS}(3,4,5) = 60$, отсечката ќе ја поделиме на 60 еднакви делови, т.е. нека $\overline{AB} = 60x$. Тогаш од условот на задачата следува дека $\overline{AC} = 40x$, $\overline{AD} = 45x$ и $\overline{AE} = 48x$. Оттука добиваме дека $\overline{CD} = 5x$ и $\overline{DE} = 3x$, па затоа $\overline{CD} : \overline{DE} = 5:3$.

5. Дадена е отсечка $\overline{AB} = 3012\,cm$. Точките O, M, K се на оваа отсечка такви што отсечката AM е два пати пократка од отсечката MB и $\overline{AO} = \overline{KB} = 2014\,cm$. Каков е распоредот на точките A, B, O, M, K и колкаво е растојанието меѓу соседните точки?

Решение. Од $\overline{MB} = 2\overline{AM}$, следува $\overline{AM} = 3012:3 = 1004\,cm$, односно $\overline{MB} = 2008\,cm$. Понатаму, од условот на здачата следува распоредот на точките $A - K - M - O - B$ и

$$\overline{AK} = 3012 - 2014 = 998\,cm, \overline{KM} = 1004 - 998 = 6\,cm,$$
$$\overline{MO} = 2014 - 1004 = 1010\,cm, \overline{OB} = 3012 - 2014 = 998\,cm.$$

6. Дадена е отсечка $\overline{AB} = 3012\,cm$. Точките O, M, K на оваа отсечка се такви што отсечката AM е два пати подолга од отсечката MB и $\overline{AO} = \overline{KB} = 1014\,cm$. Каков е распоредот на точките A, B, O, M, K и колкави се растојанијата меѓу соседните точки?

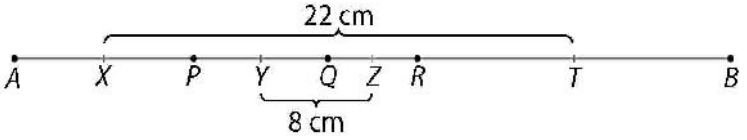
Решение. Од $\overline{AM} = 2\overline{MB}$ следува $\overline{MB} = 3012:3 = 1004\,cm$, односно $\overline{AM} = 2008\,cm$. Понатаму, од условот на задачата следува дека распоредот на точките е $A - O - K - M - B$ и дека

$\overline{AO} = 1014\,cm,$ $\overline{OK} = 3012 - 2\cdot 1014 = 984\,cm,$

$\overline{KM} = 1014 - 1004 = 10\,cm,$ $\overline{MB} = 1014\,cm.$

7. На отсечката AB се дадени точки P, Q и R такви што $A - P - Q - R - B$. Растојанието меѓу средините на отсечките PQ и QR е $8\,cm$, а меѓу средините на отсечките AP и RB е $22\,cm$. Определи ја должината на отсечката AB.

Решение. Нека X, Y, Z, T се редоследно средините на отсечките AP, PQ, QR, RB (види цртеж).



Бидејќи $\overline{YZ} = \overline{YQ} + \overline{QZ} = 8\,cm$, добиваме

$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} = 2\overline{YQ} + 2\overline{QZ} = 2(\overline{YQ} + \overline{QZ}) = 2\overline{YZ} = 16\,cm.$$

Бидејќи $\overline{XT} = \overline{XP} + \overline{PR} + \overline{RT} = 22\,cm$, добиваме $\overline{XP} + \overline{RT} = 6\,cm$. Сега, $\overline{AP} + \overline{RB} = 2(\overline{XP} + \overline{RT}) = 12\,cm$, па затоа $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{RB} + \overline{PR} = 28\,cm$.

8. Определи го аголот кој е за $20^\circ 17'$ поголем од својот комплементен агол.

Решение. Нека бараниот агол е $\sim$, а неговиот комплементен агол е . Тогаш $\sim =$ $+ 20^\circ 17'$, па затоа $+$ $+ 20^\circ 17' = 90^\circ$, од каде добиваме $= 34^\circ 51' 30''$. Според тоа, бараниот агол е $\sim = 55^\circ 8' 30''$.

9. Определи го аголот кој е $20^\circ 16'$ помал од својот суплементен агол.

Решение. Нека бараниот агол е $\sim$. Тогаш $\sim = 180^\circ - (\sim + 20^\circ 16')$. Значи, $2\sim = 159^\circ 44'$, односно $\sim = 99^\circ 52'$

10. Разликата на два комплементни агли е еднаква на $2007'$. Кои се мерните броеви на овие агли?

Решение. Нека аглите ги означиме со $\sim$ и , ($\sim >$). Од условот на задачата следува $\sim +$ $= 90^\circ$ и $\sim -$ $= 2007'$, односно $\sim -$ $= 33^\circ 27'$.

Од $\sim + \quad = 90^\circ$ и $\sim - \quad = 33^\circ 27'$ следува $2\sim = 123^\circ 27'$, од каде добиваме $\sim = 61^\circ 43'30''$. Значи, $\quad = 90^\circ - 61^\circ 43'30'' = 28^\circ 16'30''$.

11. Аглите $\sim$ и $\quad$ се комплементни, а аглите $\sim$ и $9 \quad$ се суплементни. Определи ги мерните броеви на аглите $\sim$ и $\quad$.

Решение. Од условот на задачата следува $\sim + \quad = 90^\circ$, $\sim + 9 \quad = 180^\circ$. Според тоа, $180^\circ = \sim + 9 \quad = \sim + \quad + 8 \quad = 90^\circ + 8 \quad$, од каде добиваме $8 \quad = 90^\circ$. Значи,

$$= 90^\circ : 8 = 88^\circ 120' : 8 = 11^\circ 15' \text{ и } \sim = 90^\circ - 11^\circ 15' = 78^\circ 45'.$$

12. Аглите $\sim$ и $\quad$ се суплементни. Разликата на половина од аголот $\sim$ и третина од аголот $\quad$ е еднаква на $2011'$. За колку е аголот $\sim$ поголем од аголот $\quad$?

Решение. Имаме, $2011' = 33^\circ 31'$. Да ставиме $\sim = 2x$ и $\quad = 3y$. Тогаш $2x + 3y = 180^\circ$ и $x = y + 33^\circ 31'$. Според тоа, $2(y + 33^\circ 31') + 3y = 180^\circ$, од каде добиваме $y = 22^\circ 35'36''$. Според тоа, $\quad = 3y = 67^\circ 46'48''$ и $\sim = 180^\circ - \quad = 112^\circ 13'12''$. Значи, аголот $\sim$ е за $44^\circ 26'24''$ поголем од аголот $\quad$.

13. Збирот на половината, третината и шестината на аголот $\sim$ е за $2012'$ поголем од неговиот суплементен агол. Определи го аголот $\sim$.

Решение. Шестината на аголот $\sim$ да ја означиме со x. Тогаш аголот $\sim$ е еднаков на $6x$, половината од аголот $\sim$ е еднаква на $3x$ и третината од аголот $\sim$ е еднаква на $2x$. Според тоа,

$$3x + 2x + x = 2012' + 180^\circ - 6x, \text{ т.е. } \sim = 33^\circ 32' + 180^\circ - \sim .$$

Значи, $\sim = 106^\circ 46'$.

14. Аголот $\sim$ е за $2015'$ помал од својот комплементен агол. Пресметај го суплементниот агол на аголот $\sim$.

Решение. Имаме, $2015' = 33 \cdot 60' + 35' = 33^\circ 35'$. Сега, ако $\quad$ е комплементниот агол на аголот $\sim$, тогаш $\sim + \quad = 90^\circ$ и $\quad = \sim + 33^\circ 35'$. Отту-

ка добиваме $2\sim + 33^\circ 35' = 90^\circ$, па затоа $\sim = 28^\circ 12' 30''$. Конечно, суплементниот агол на аголот $\sim$ и $¥ = 180^\circ - \sim = 151^\circ 47' 30''$.

15. Од два комплементни агли едниот е три пати поголем од другиот. Определи го аголот кој е суплементен на помалиот агол?

Решение. Бидејќи $\sim$ и се комплементни, добиваме $\sim + = 90^\circ$. Според условот $\sim = 3$, па затоа $3 + = 90^\circ$, од каде добиваме $= 22^\circ 30'$. Аголот $\sim = 3 \cdot 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$, па затоа $\sim >$. Конечно, бараниот агол е суплементниот агол на и тоа е еднаков на $180^\circ - = 180^\circ - 22^\circ 30' = 157^\circ 30'$.

16. Аглите $\sim$ и се комплементни. Определи ги овие агли, ако нивната разлика е еднаква на третина од поголемиот агол.

Решение. Нека $\sim >$. Аглите се комплементни, па затоа $\sim + = 90^\circ$. Понатаму, третина од поголемиот агол е еднаква на разликата на аглите, што значи дека поголемиот агол е три пати поголем од разликата на аглите, односно $\sim = 3(\sim -)$, т.е. $2\sim = 3$. Значи,

$$180^\circ = 2 \cdot 90^\circ = 2\sim + 2 = 3 + 2 ,$$

од каде добиваме $= 36^\circ$. Значи, $\sim = 90^\circ - = 54^\circ$.

17. Аголот е суплементен на аголот $2\sim$, а аголот $¥$ е комплементен на аголот $\sim$. Ако $+¥ = 120^\circ$, определи го аголот $\sim$.

Решение. Од условот на задачата следуваат равенствата

$$= 180^\circ - 2\sim \text{ и } ¥ = 90^\circ - \sim .$$

Со замена во $+¥ = 120^\circ$ добиавме

$$180^\circ - 2\sim + 90^\circ - \sim = 120^\circ, \text{ т.е. } \sim = 50^\circ .$$

18. Аголот е суплементен со аголот $3\sim$, а е комплементниот агол на $2\sim$ е аголот $¥$. Ако $+¥ = 100^\circ$, определи го аголот $\sim$.

Решение. Имаме $+3\sim = 180^\circ$ и $2\sim + ¥ = 90^\circ$. Значи, $= 180^\circ - 3\sim$ и $¥ = 90^\circ - 2\sim$, па затоа $180^\circ - 3\sim + 90^\circ - 2\sim = 100^\circ$, од каде следува

$270^\circ - 5\sim = 100^\circ$, па затоа $5\sim = 170^\circ$, односно $\sim = 34^\circ$.

19. Аглите $\sim$ и $\ $ се комплементни, а аглите $\ $ и ¥ се суплементни. Определи ги аглите $\sim$, $\ $ и ¥ ако разликата на најголемиот и најмалиот од нив е еднаква на 102°.

Решение. Аглите $\sim$ и $\ $ се комплементни, па затоа тие се остри агли. Бидејќи $\ $ и ¥ се суплементни, $\ $ е остар агол, добиваме дека ¥ е тап агол. Значи, најголем агол е ¥. Од $\ +¥ = 180^\circ$ и $\sim + \ = 90^\circ$, следува дека $¥ - \sim = 90^\circ$. Според тоа, $¥ - \ = 102^\circ$. Според тоа,

$$¥ + \ + ¥ - \ = 180^\circ + 102^\circ,$$
$$2¥ = 282^\circ,$$
$$¥ = 141^\circ,$$

и затоа $\ = 180^\circ - 141^\circ = 39^\circ$ и $\sim = 90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$.

20. Аглите $\sim$ и $\ $ се комплементни, а аглите $\ $ и ¥ се суплементни. Определи ги аглите $\sim$, $\ $, ¥, ако збирот на аглите $\sim$ и ¥ е еднаков на 145°.

Решение. Од условите на задачата следуваат равенствата

$$\sim + \ = 90^\circ, \quad \ +¥ = 180^\circ, \quad \sim +¥ = 145^\circ.$$

Ако ги собереме дадените равенства, добиваме $2(\sim + \ +¥) = 415^\circ$, од каде наоѓаме $\sim + \ +¥ = 207^\circ 30'$. Според тоа,

$$\sim = 207^\circ 30' - 180^\circ = 27^\circ 30',$$
$$\ = 207^\circ 30' - 145^\circ = 62^\circ 30'$$
$$¥ = 207^\circ 30' - 90^\circ = 117^\circ 30'.$$

21. Разликата на два суплементни агли е еднаква на половината од помалиот агол. Определи ги мерните броеви на овие агли.

Решение. Не аглите се $\sim$ и $\ $. Од условот на задачата следува $\sim + \ = 180^\circ$ и $\sim - \ = \frac{1}{2}\ $. Ако ставиме $\sim - \ = k$, добиваме $\ = 2k$ и $\sim = 3k$. Според тоа, $3k + 2k = 180^\circ$, од каде наоѓаме $5k = 180^\circ$, т.е.

$k = 36^\circ$. Конечно, ~ $= 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$ и $= 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$.

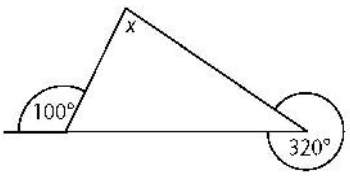
22. Аголот ~ е еднаков на збирот на неговиот комплементен агол и на својата третина. Определи го суплементниот агол на аголот ~ .
Решение. Нека ~ $= 3x$. Тогаш неговиот комплементен агол е еднаков на $90^\circ - 3x$, а неговата третина е x. Затоа $3x = 90^\circ - 3x + x$, од каде добиваме $5x = 90^\circ$, односно $x = 18^\circ$. Според тоа, ~ $= 3x = 54^\circ$, па бараниот суплементен агол е $180^\circ -$ ~ $= 126^\circ$.

23. Аглите ~, и ¥ имаат паралелни краци. Определи ги аглите ~, и ¥, ако аголот ¥ е еднаков на збирот на аглите ~ и .
Решение. Бидејќи аглите ~, и ¥ имаат паралелни краци, тие се или еднакви или се суплементни. Од тоа што ~ + =¥ следува дека ~ = <¥ и ¥ $= 180^\circ -$ ~ . Според тоа, ¥ $= 2$~ и 2~ $= 180^\circ -$ ~ , па затоа ~ = $= 60^\circ$ и ¥ $= 120^\circ$.

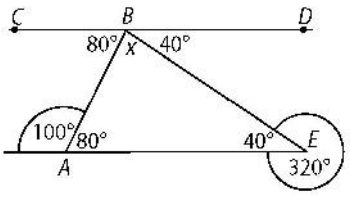
24. Определи го мерниот број на аголот ~ чиј комплементен агол е три пати помал од неговиот суплементен агол.
Решение. Од условот на задачата следува

$$3 \cdot (90^\circ - \sim) = 180^\circ - \sim,$$
$$270^\circ - 3\sim = 180^\circ - \sim,$$
$$\sim = 45^\circ.$$

25. Определи го аголот x прикажан на цртежот десно.

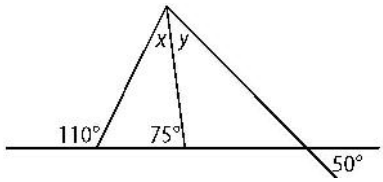


Решение. Дадениот триаголник да го означиме со ABE (види цртеж).
Низ темето B повлекуваме права CD која е паралелна со AE. Имаме $\measuredangle BAE = 80^\circ$, како сумплементен агол на агол еднаков на 100°. Понатаму, $\measuredangle AEB = 40^\circ$, бидејќи го дополнува аголот од 320° до полен агол. Поната-

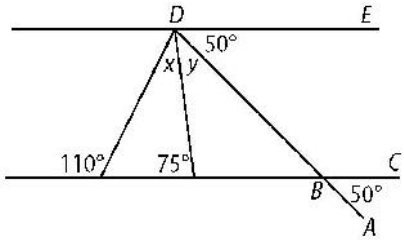


му, $\measuredangle ABC = \measuredangle EAB$ како остри агли со паралелни краци и $\measuredangle EBD = \measuredangle AEB$ како остри агли со паралелни краци. Конечно, $x = \measuredangle ABE = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$.

26. Определи ги аглите x и y прикажани на цртежот десно.



Решение. Да означиме како на цртежот долу лево, при што правата DE е паралелна со правата BC.



Тогаш $\measuredangle BDE = \measuredangle ABC = 50^\circ$ (агли со паралелни краци). Понатаму, како агли со паралелни краци добиваме дека $y + 50^\circ = 75^\circ$, од каде наоѓаме $y = 25^\circ$. На ист начин имаме $x + y + 50^\circ = 110^\circ$, па затоа $x = 110^\circ - 50^\circ - 25^\circ = 35^\circ$.

27. Аглите ~ и се комплементни, а аглите ~ и ¥ се суплементни. Ако аголот ¥ е десет пати поголем од аголот , определи ги овие агли.

Решение. Имаме ~ + $= 90^\circ$, ~ +¥ $= 180^\circ$ и ¥ $= 10$. Со замена за ¥ $= 10$ добиваме ~ $+ 10$ $= 180^\circ$. Во последното равенство заменуваме ~ + $= 90^\circ$ и добиваме $90^\circ + 9$ $= 180^\circ$, од каде добиваме 9 $= 90^\circ$, т.е. $= 10^\circ$. Сега лесно наоѓаме дека ~ $= 80^\circ$ и ¥ $= 100^\circ$.

28. Две прави, a и b, се сечат во точка O, под агол $56^\circ 35'$. Во областа на овој агол се наоѓа произволна точка T. Точката T со оска симетрија се пресликува во однос на правите a и b, при што се добиени сликите T_1 и T_2. Пресметај го $\measuredangle T_1OT_2$.

Решение. Заради осната симетрија по пресликувањето правата a е симетрала на $\measuredangle TOT_1$, а правата b е симетрала на $\measuredangle TOT_2$. Според тоа, бараниот агол $\measuredangle T_1OT_2$ е два пати поголем од аголот кој го зафаќаат правите a и b, односно $\measuredangle T_1OT_2 = 2 \cdot 56^\circ 35' = 113^\circ 10'$.

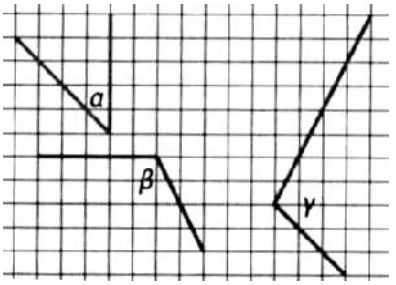
29. Две прави се сечат во точка O и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е за половина од правиот агол помал од еден од накрсните тапи агли. Определи ги овие четири агли.

Решение. Нека $\sim$ е еден од накрсните остри агли. Тогаш еден од тапите накрсни агли е $180^\circ - \sim$. Од условот на задачата следува дека $\sim + \sim = 180^\circ - \sim - 45^\circ$, од каде следува $3\sim = 135^\circ$, односно $\sim = 45^\circ$. Значи, два агли се по 45° и два агли се по 135°.

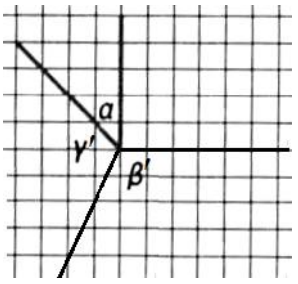
30. Две прави се сечат во точката O и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е четири пати помал од едниот од накрсните тапи агли. Определи ги овие агли.

Решение. Нека $\sim$ е накрсниот оста агол. Тогаш едниот негов тап агол е $180^\circ - \sim$. Од условот на задачата следува $4(\sim + \sim) = 180^\circ - \sim$, од каде добиваме $9\sim = 180^\circ$. Значи, $\sim = 20^\circ$, па затоа два агли се по 20° и два агли се по 160°,

31. Определи го збирот на аглите прикажани на долниот цртеж.



Решение. Нека аголот ¥’ е централносиметричен на аголот ¥ во однос на темето на ¥, а ’ е аголот кој е односиметричен на аголот во однос вертикалната права на мрежата која менува низ темето на . Од својствата на осната и централната симетрија следува ¥’=¥ и ’= . Сега ако ги транслатираме ¥’ и ’ така што нивните темиња се совпаднат со темето на аголот $\sim$ го добиваме десниот цртеж. Според тоа,



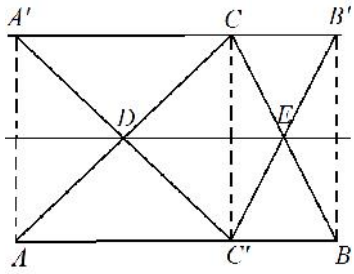
$$\sim + \quad + ¥ = \sim + \quad ' + ¥' = 270^\circ.$$

32. Во областа на $\measuredangle AOB$ е повлечена полуправа OC така што $\measuredangle AOC$ е за 40° помал од $\measuredangle COB$ и е еднаков на една тгретина од $\measuredangle AOB$. Определи го $\measuredangle AOB$.

Решение. Нека $\measuredangle AOC = x$ и $\measuredangle COB = y$. Тогаш $\measuredangle AOB = x + y$ и важи $x = y - 40^\circ$ и $x = \frac{1}{3}(x + y)$. Ако од првата равенка замениме во втората, добиваме $y - 40^\circ = \frac{1}{3}(y - 40^\circ + y)$, од каде следува $3y - 120^\circ = 2y - 40^\circ$ и затоа $y = 80^\circ$. Конечно, $x = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$.

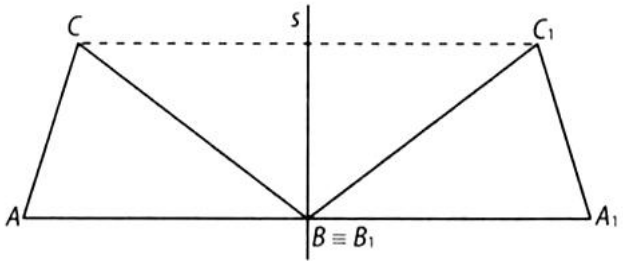
33. Даден е разностран триаголник ABC. Точките A и C се централно симетрични во однос на центар на симетрија D, а точките B и C се централно симетрични во однос на центар на симетрија E. Конструирај ја сликата на триаголникот ABC при осна симетрија со оска на симетрија DE.

Решение. Точките A и C се централно симетрични во однос на центарот на симетрија D, па затоа D е среди-ната на страната AC. Аналогно E е средината на страната BC. Останува да ги конструираме точките A', B', C' кои се симетрични на точките A, B, C во однос на правата DE (цртеж десно).

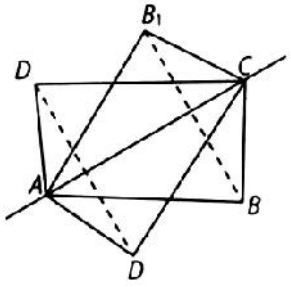


34. Даден е триаголник ABC и права s, која минува низ точката B и е нормална на правата AB. Определи ја сликата на триаголникот ABC при осна симетрија со оска на симетрија правата s.

Решение. На долниот цртеж е прикажана сликата $A_1B_1C_1$ на триаголникот ABC при дадената осна симетрија.



35. Даден е правоаголник $ABCD$, чии страни се $\overline{AB} = 7\,cm$ и $\overline{BC} = 4\,cm$. Определи ја сликата на правоаголникот $ABCD$ при осна симетрија со оска на симетрија правата AC.



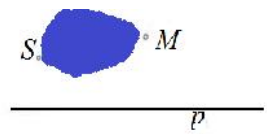
Решение. Точките A и C припаѓаат на оската на симетрија, па затоа нивните слики се самите тие точки. Останува само да ги пресликаме точките B и D (види цртеж десно).

36. Точките B и C се наоѓаат на различни страни на правата a. Конструирај прави m_1 и m_2 симетрични во однос на правата a такви што m_1 ја содржи B, а m_2 ја содржи C.

Решение. Правите m_1 ја содржи точката B и како правата m_2 е симетрична на правата m_1 во однос на правата a, заклучуваме дека симетричната точка B' на точката B во однос на правата a припаѓа на правата m_2. Аналогно, симетричната точка C' на точката C во однос на правата a припаѓа на правата m_1.

Значи, прво ги конструираме точките B' и C' симетрични на точките B и C во однос на правата a. Сега ја повлекуваме правата m_1 низ точките B и C', па ја повлекуваме правата m_2 низ точките B' и C, кои се баранитре прави.

37. Меѓу млекарата M и селото S се наоѓа езеро, па не е можно млекото директно да се носи од селото S до млекарата M. Затоа директорот на млекарата решил на магистралниот пат p да направи откупна станица O во која сточарите од селото S ќе го носат млекото (види цртеж). Каде треба да се направи откупната станица O за да патот од селото S до млекарата M, преку откупната станица S, биде најкраток?



Решение. Најкратко растојание меѓу две точки е отсечката чии крајни точки се двете дадени точки. Ако S' е осносиметрична на S во однос

на p и ако O е пресекот на правите $S'M$ и p, тогаш $\overline{SO} = \overline{S'O}$, па затоа $\overline{SO} + \overline{OM} = \overline{S'O} + \overline{OM} = \overline{S'M}$, што е најкраткото растојание меѓу точките S' и M, па затоа и меѓу точките S и M преку точката O.

38. Покрај две села A и B тече чиста река чиј брег е права линија. Селата се наоѓаат од иста страна на реката. Определи каде на реката треба да се уреди плажа, така што таа ќе биде еднакво оддалечена од двете села.

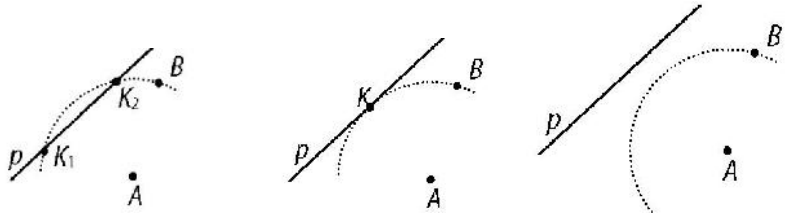
Решение. За да плажата P биде еднакво оддалечена од селата A и B таа мора да припаѓа на симетралата s на отсечката AB. Имаме два случаја:

1) Ако симетралата s не е паралелна со брегот на реката, тогаш плажата P е во пресекот на симетралата s и брегот на реката.
2) Ако симетралата s е паралелна со брегот на реката, тогаш задачата нема решение.

39. Населбата A и базенот B се од иста страна на реката p која тече по права линија. Определи каде на брегот на реката треба да се направи плажа, така што населбата A (која не е на брегот на реката) ќе биде еднакво оддалечено од плажата и од базенот B.

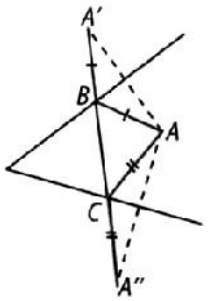
Решение. Бидејќи населбата A треба да е еднакво оддалечена и од плажата K и од базенот B, K и B ќе бидат на кружница чиј центар е A, а радиусот е $\overline{AB}$. Така имаме три случаи.

1) Ако кружницата $k(A, \overline{AB})$ ја сече правата p во две точки K_1 и K_2, тогаш задачата има две решенија (цртеж лево).
2) Ако кружницата $k(A, \overline{AB})$ ја допира правата p во точката K, тогаш задачата има единствено решение (цртеж средина).
3) Ако кружницата $k(A, \overline{AB})$ и правата p немаат заеднички точки, тогаш задачата нема решение (цртеж десно).



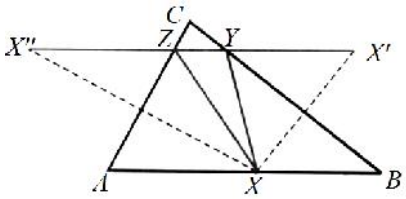
40. Во внатрешноста на остар агол е дадена точка A. Конструирај триаголник ABC, чии темиња B и C се наоѓаат на краците на аголот така што триаголникот ABC ќе има најмал периметар.

Решение. Да ја пресликаме точката A со осни симетрии кај кои оски на симетрија се краците на аголот. Нека се добиени сликите A' и A'' (цртеж десно). Ја повлекуваме правата $A'A''$ која краците на аголот ги сече во точните B и C. Од својствата на осната симетрија следува дека $\overline{AB} = \overline{AA'}$ и $\overline{AC} = \overline{AA''}$. Понатаму, должината на отсечката AA' е еднаква на периметарот на триаголникот ABC и тој е најмал бидејќи отсечката која поврзува две точки е најкраткото растојание меѓу тие две точки.



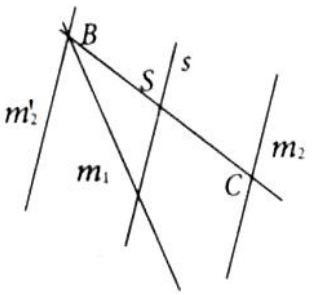
41. На страната AB на остроаголниот триаголник ABC е дадена точката X. На страните BC и CA соодветно определи точки Y и Z такви што добиениот троиаголник XYZ има најмал можен периметар.

Решение. Точка X ја пресликуваме со осни симетрии чии оски на симетрии се правите BC и AC, при што ги добиваме точките X' и X''. Ја повлекуваме правата $X'X''$ и нека таа ги сече страните BC и AC редоследно во точките Y и Z (цртеж десно). Конечно, XYZ е бараниот триаголник. Докажи!



42. Нека m_1 и m_2 се две прави кои не се паралелни и точката S не припаѓа на правите m_1 и m_2. Конструирај точки B и C кои припаѓаат соодветно на правите m_1 и m_2 и се такви што S е средина на отсечката BC.

Решение. *Прв начин*. Низ точката S повлекуваме права s која е паралелна на правата m_2. Потоа конструираме права m_2' симетрична на правата m_2 во однос на правата s. Правите m_1 и m_2' се сечат во точката B. Правата SB ја сече прав-



ата m_2 во точката C. Од својствата на осната симетрија следува дека $\overline{SB} = \overline{SC}$.

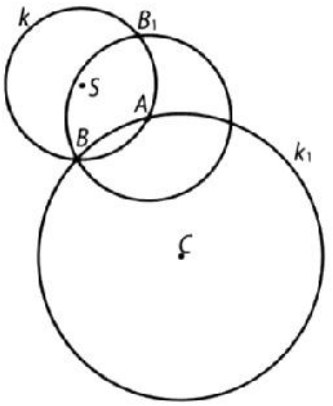
Втор начин. Конструираме права m_2' која е централно симетрична на правата m_2 во однос на точката S (направи цртеж). Правите m_1 и m_2' се сечат во точката B. Правата SB ја сече правата m_2 во точката C. Од својствата на централната симетрија следува дека $\overline{SB} = \overline{SC}$.

43. Дадена е кружница $k(S, 2\,cm)$ и на кружницата точка A.

а) Конструирај тетива AB на дадената кружница, така што нејзината должина е $2{,}5\,cm$.

б) Конструирај кружница k_1 која минува низ точките A и B и чиј радиус е $r = 3\,cm$. Колку решенија има задачата?

Решение. а) Во точката A конструираме кружница со радиус $2{,}5\,cm$. Таа ја сече дадената кружница $k(S, 2\,cm)$ во две точки B и B_1. Јасно, тетивите AB и AB_1 се со должина $2{,}5\,cm$. Според тоа, во овој случај задачата има две решенија.

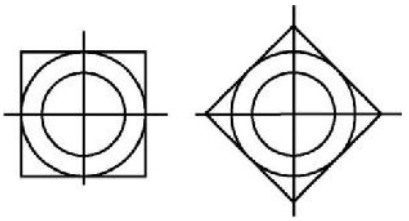


б) Центарот C на кружницата k_1 е во пресекот на кружниците со центри A и B и радиус $r = 3\,cm$. Затоа задачата има четири решенија, т.е. се добиваат по две решенија над тетивите AB и AB_1.

44. Во рамнината конструирај фигура составена од две прави, две кружници со радиуси $2\,cm$ и $3\,cm$ и квадрат со страна $6\,cm$, така што сите фигури се пресликуваат сами во себе ако било која од двете прави е оска на симетрија.

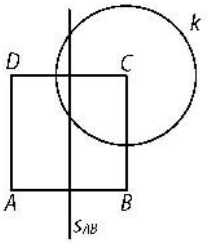
Решение. За да права со осна симетрија се пресликува сама во себе, таа мора да е нормална на оската на симетрија или да се совпаѓа со неа. Оттука следува дека правите мора да се заемно нормални. За да кружница при осна симетрија се пресликува само во себе потребно е центарот на кружницата да припаѓа на оската на симетрија. Тоа значи дека центрите на двете кружници се совпаѓаат со пресечната точка на

двете прави. Бидејќи квадратот има четири оски на симетрија (две минуваат низ средините на спротивните страни и две кои ги содржат дијагоналите на квадратот), заклучуваме дека задачата има две решенија, кои се дадени на цртежите десно.



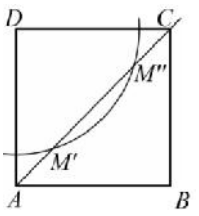
45. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $5\,cm$. Конструирај точка M која е еднакво оддалечена од темињата A и B и која од темето C е оддалечена $3\,cm$. Колку решенија има задачата?

Решение. Бараната точка лежи на симетралата s_{AB} на страната AB и на кружницата $k(C,3\,cm)$, цртеж десно. Според тоа, задачата има две решенија.



46. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $5\,cm$. Конструирај точка M која е еднакво одалечена од страните AB и AD и која од темето D е оддалечена $4\,cm$. Колку решенија има задачата?

Решение. Точките кои се еднакво оддалечени од страните AB и AD лежат на симетралата на $\angle BAD$, односно на правата која ја содржи дијагоналата AC. Точките кои од темето D се оддалечени $4\,cm$ се наоѓаат на кружницата $k(D,4\,cm)$. Бараните точки се наоѓаат во пресекот на правата AC и кружницата $k(D,4\,cm)$. Тоа се точките M' и M''. Задачата има две решенија.

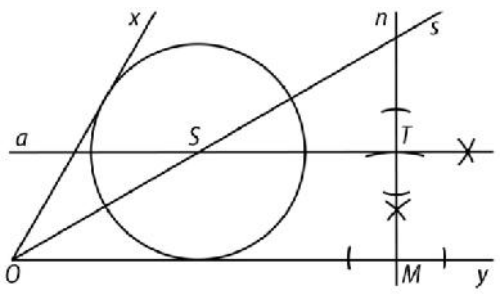


47. Конструирај кружница со радиус $r = 2,5\,cm$ која ги допира краците на остриот $\angle xOy = 60^\circ$.

Решение. *Анализа*. Бараната кружница ги допира краците на $\angle xOy = 60^\circ$, па затоа нејзиниот центар лежи на симетралата на овој агол. Понатаму, нејзиниот радиус е $r = 2,5\,cm$, па затоа нејзиниот центар од

краците на аголот е оддалечен $2,5\,cm$.

Конструкција. Конструираме $\measuredangle xOy = 60^\circ$ и ја повлекуваме неговата симетрала s (види цртеж). Во произволна точка M на кракот Oy конструираме нормала n на Oy. Потоа



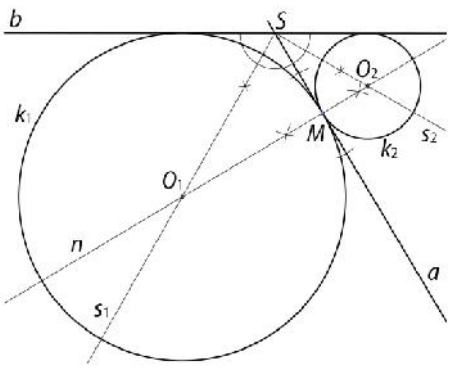
определуваме точка T на n, на онаа страна на која е кракот Ox, таква што $\overline{MT} = 2,5\,cm$. Во точката T повлекуваме нормала a на n. Во пресекот на s и a го наоѓаме центарот S на кружницата. Кружницата $k(S, 2,5\,cm)$ е бараната кружница.

Доказ. Следува од анализата и конструкцијата.

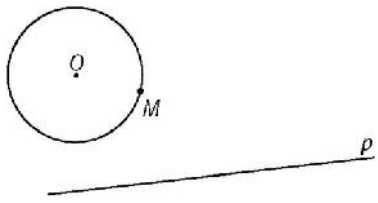
Дискусија. Задачата има единствено решение.

48. Нацртај прави a и b кои се сечат во точка S. На правата a избери точка M. Конструирај кружница k која ги допира правите a и b и ја содржи точката M.

Решение. Бидејќи кружницата ги допира правите a и b нејзиниот центар се наоѓа на симетралите s_1 или s_2 на паровите накрсни агли определени со правите a и b. Кружницата треба да минува низ точката M, па затоа нејзиниот центар се наоѓа на правата n која е нормална на правата a во точката M. Значи, центарот O е во пресекот на s_1 и n, или во пресекот на s_2 и n. Задачата има две решенија $k_1(O_1, \overline{O_1M})$ и $k_2(O_2, \overline{O_2M})$.

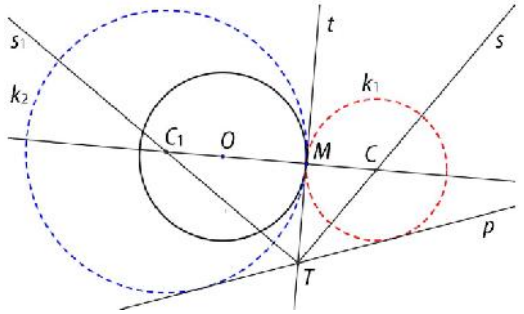


49. Дадени се кружница $k(O, 2,5\,cm)$, точка M на кружницата и права p која нема заеднички точки со кружницата (цртеж десно). Конструирај кружница



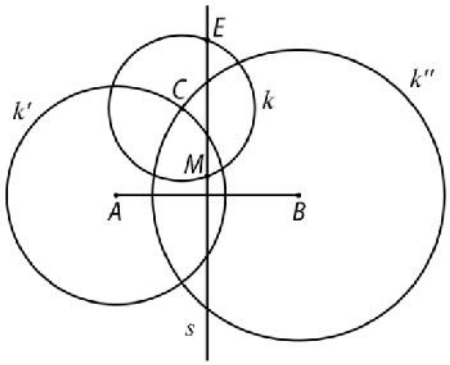
k_1 која ги допира правата p и кружницата k во точката M.

Решение. Ја повлекуваме правата OM и во точката M конструираме нормала на OM, т.е. тангента t (види цртеж). Нека T е пресечната точка на правите p и t. Конструираме симетрала s на остриот $\measuredangle tTp$. Во пресекот на правата OM и симетралата s ја наоѓаме точката C која е центар на бараната кружница k_1 чиј радиус е отсечката CM. Задачата има две решенија. Имено симетралата s_1 на тапиот агол $\measuredangle tTp$ ја сече правата OM во точка C_1 која е центар на бараната кружница k_2 чиј радиус е отсечката C_1M.



50. Нацртај отсечка AB со должина $5\,cm$, па конструирај точка C која од точката A е на растојание $3\,cm$, а од точката B е на растојание $4\,cm$. Потоа конструирај точка M која е еднакво оддалечена од точките A и B и од точката C е на растојание $2\,cm$.

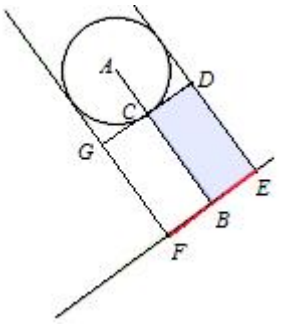
Решение. Цртаме отсечка $\overline{AB} = 5\,cm$. Потоа, конструираме кружници $k'(A, 3\,cm)$ и $k''(B, 4\,cm)$. Кружниците се сечат во две точки од кои едната ја означуваме со C. Потоа конструираме симетрала s на отсечката AB и кружница $k(C, 2\,cm)$. Пресечните точки на симетралата s и кружницата k ги означуваме со M и E. Јасно, точките M и E ги задоволуваат условите на задачата.



51. Дадени се кружница $k(A, 2\,cm)$ и права која од центарот на кружница-

та е оддалечена $6\,cm$. Конструирај правоаголник чија една страна се наоѓа на правата и кој ја допира кружницата таков што едната страна на правоаголникот е два пати пократка од другата и должините на страните на правоаголникот се најмали можни.

Решение. Бидејќи должините на страните на правоаголникот треба да се најмали можни должината на подолгата страна на правоаголникот ќе биде еднаква на најкраткото растојание меѓу кружницата и правата. Ова растојание е еднакво на отсечката која се наоѓа на нормалата од центарот на кружницата на правата и тоа е еднакво на $6-2=4\,cm$. Понатаму, бидејќи втората страна на правоаголникот е два пати пократка добиваме дека должината на втората страна е еднаква на $4:2=2\,cm$. Сега, бидејќи страната мора да лежи на дадената права, за да спротивната страна ја допира кружницата, едното теме на правоаголникот мора да припаѓа на делот од правата означен со црвена боја. Конечно, лесно се конструира правоаголник со саканите својства.



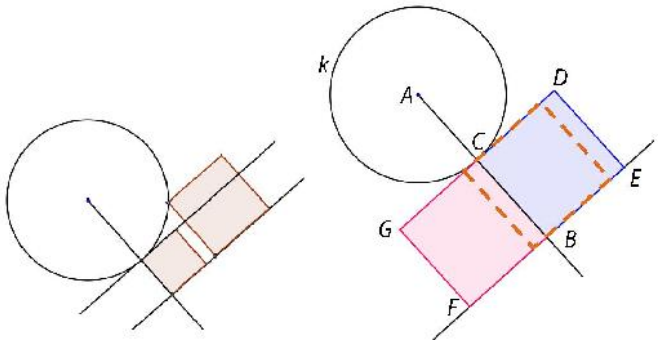
Низ центарот на кружницата повлекуваме права нормална на дадената права, а потоа ги коструираме тангентите на кружницата кои се паралелни со правата низ центарот. Со тоа на дадената права го добиваме црвениот дел од истата. Бараниот правоаголник може да се конструира лево или десно од нормалата повлечена од точката A на дадената права (правоаголниците $CBED$ и $BCFG$). Но, ова не се единствените две решенија. Пократката страна на правоаголникот кој треба да се конструира може да се наоѓа било каде на отсечката EF, бидејќи во тој случај спротивната на неа страна ќе ја допира кружницата.

52. Нацртај кружница $k(A,2\,cm)$ и права која од центарот на кружницата е оддалечена $5\,cm$. Конструирај квадрат со најмала должина на страната, таков што една негова страна се наоѓа на правата и кој ја допира кружницата.

Решение. Бидејќи квадратот треба да има најкратка страна, таа ќе биде еднаква на најкраткото растојание меѓу кружницата и правата.

Ова растојание е еднакво на отсечката која се наоѓа на нормалата од центарот на кружницата на правата. Секое друго растојание е поголе-

мо (цртеж лево). Бараниот квадрат може да се конструира лево или десно од нормалата повлечена од точката A на дадената права (квадратите $CBED$ и $BCFG$) . Но, ова не се единствените две решенија. Страната на квадратот кој треба да се конструира може да се наоѓа било каде на отсечката EF , бидејќи во тој случај спротивната на неа страна ќе ја допира кружницата. На цртежот десно еден таков квадрат е нацртан со испрекинати линии.



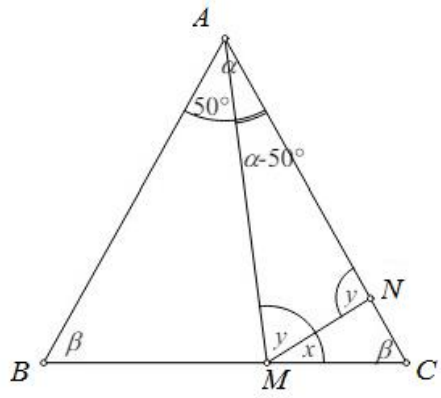
53. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$) таков што $\angle BAC > 50^\circ$. На страната BC е избрана точка M , таква што $\angle BAM = 50^\circ$ и на страната AC е избрана точка N таква што $\overline{AM} = \overline{AN}$. Определи ја мерката на $\angle CMN$.

Решение. Во $\triangle AMB$ имаме да е $\angle CMA$ надворешен агол, па затоа важи $x + y = \ + 50^\circ$. Понатаму, $\angle ANM$ е надворешен за $\triangle MCN$, па затоа $y = \ + x$. Ако од второто равенство замениме во првото добиваме

$$x + x + \ = \ + 50^\circ,$$

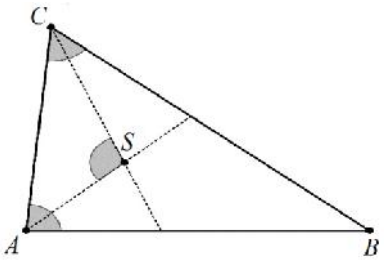
т.е. $2x = 50^\circ$.

Значи, $\angle CMN = x = 25^\circ$.



54. Во $\triangle ABC$ симетралите на $\angle BAC$ и $\angle ACB$ се сечат во точката S . Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$ ако $\angle ASC = 110^\circ$ и $\angle BAC$ е три пати поголем од $\angle ABC$.

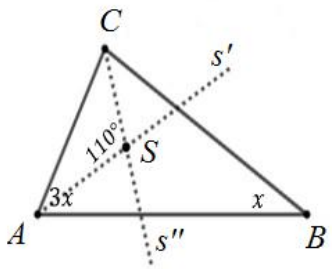
Решение. *Прв начин.* Нека $x = \measuredangle SAC$ и $y = \measuredangle SCA$. Но, $\measuredangle ASC = 110^\circ$ па од $\triangle ASC$ следува $x + y + 110^\circ = 180^\circ$, односно дека $x + y = 70^\circ$. Понатаму, $\measuredangle BAC = 3\measuredangle ABC$, па како $\measuredangle BAC = 2x$ добиваме $\measuredangle ABC = \frac{2x}{3}$. Но, $\measuredangle ACB = 2y$,



па затоа $2x + 2y + \frac{2x}{3} = 180^\circ$. Со замена $x + y = 70^\circ$, добиваме $140^\circ + \frac{2x}{3} = 180^\circ$, па затоа $\frac{2x}{3} = 40^\circ$, т.е. $x = 60^\circ$. Според тоа, $y = 70^\circ - x = 10^\circ$, па затоа $\measuredangle BAC = 120^\circ$, $\measuredangle ACB = 20^\circ$ и $\measuredangle ABC = 40^\circ$.

Втор начин. Да ставиме $\sim = 3x$. Тогаш $= x$ и $¥ = 180^\circ - 4x$. Имаме

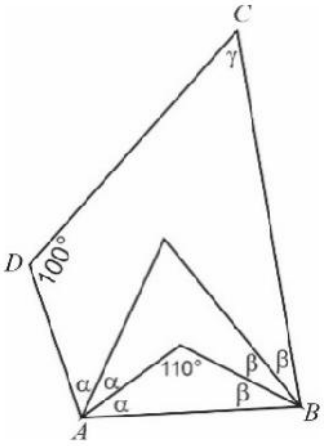
$$\frac{\sim}{2} + \frac{¥}{2} + 110^\circ = 180^\circ,$$
$$\sim + ¥ = 140^\circ,$$
$$3x + 180^\circ - 4x = 140^\circ,$$
$$x = 40^\circ.$$



Според тоа,

$$\sim = 120^\circ, \quad = 40^\circ, ¥ = 20^\circ.$$

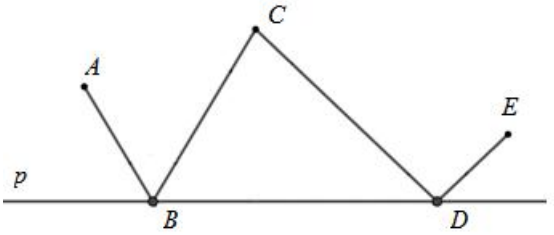
55. Даден е четириаголникот *ABCD* кој е прикажан на цртежот десно. Определи ја вредноста на аголот ¥.



Решение. Јасно, $\sim + \quad + 110^\circ = 180^\circ$, од каде добиваме $\sim + \quad = 70^\circ$. Понатаму, збирот на аглите на произволен конвексен четириаголник е 360°, па затоа $3\sim + 3 \quad + ¥ + 100^\circ = 360^\circ$, од каде последователно добиваме

$$3(\sim + \quad) + ¥ + 100^\circ = 360^\circ,$$
$$3 \cdot 70^\circ + ¥ + 100^\circ = 360^\circ,$$
$$¥ = 50^\circ.$$

56. Искршената линија $L = ABCDE$ не преминува под правата p со која има точно две заеднички точки: B и D. Притоа, од сите такви искршени линии за кои прво, трето и петто теме се редоследно дадените точки A,C и E, линијата L е со најмала можна должина



Докажи дека

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDE = 2\measuredangle BCD\,.$$

Решение. Нека C' е точката што е симетрична на C во однос на правата p. Тогаш B е пресечната точка на правите AC' и p. Слично, D е пресечната точка на правите EC' и p. Имено, во овој случај искршената линија $L = ABCDE$ има најмала должина, бидејќи $\overline{BC} = \overline{BC'}$ и $\overline{DC} = \overline{DC'}$. Имаме:

$$\measuredangle C'BD + \measuredangle CBD + \measuredangle ABC = 180^\circ;$$

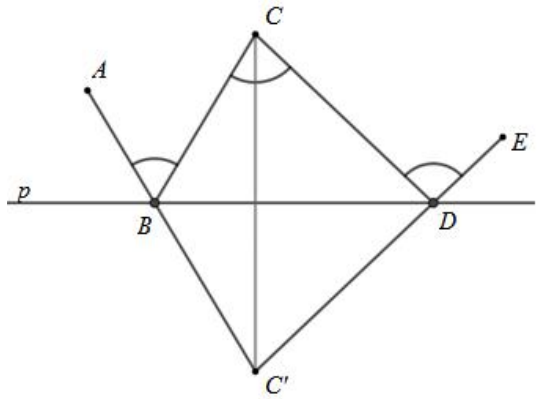
$$\measuredangle C'DB + \measuredangle BDC + \measuredangle CDE = 180^\circ$$

Од $\triangle BDC$ имаме:

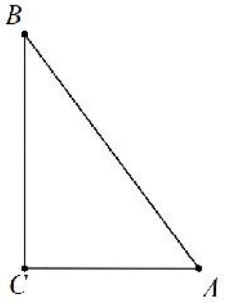
$$\measuredangle CBD + \measuredangle BCD + \measuredangle BDC = 180^\circ,$$

па затоа

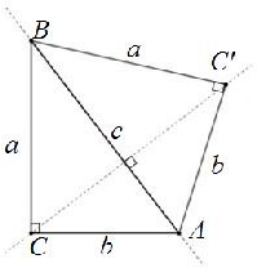
$$\measuredangle ABC + \measuredangle EDC = 2\measuredangle BCD\,.$$



57. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C (цртеж десно). Должината на страната AC е $\frac{3}{4}$ од должината на страната BC, а должината на страната AB е за 25% поголема од дожината на страната BC. Нека C' е точката добиена при осна симетрија на точката C во однос на страната AB. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако периметарот на четириаголникот $CAC'B$ е еднаков на $16,8\,cm$.



Решение. Нека $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ \overline{AB}=c$ се должините на страните на триаголникот ABC. Од условот на заадачата следува $b=\frac{3}{4}a=0,75a$ и $c=a+\frac{25}{100}a=1,25a$. Понатаму, ако точката C' е симетрична на точката C во однос на правата AB, тогаш од својствата на осната симетрија следува $\overline{BC'}=\overline{BC}=a$ и $\overline{AC'}=\overline{AC}=b$ (цртеж десно). Периметарот на четириаголникот $CAC'B$ е еднаков на $16,8\,cm$,па затоа $2a+2b=16,8$. Со замена за $b=0,75a$ добиваме $2a+2\cdot 0,75a=16,8$, односно $3,5a=16,8$, па затоа $a=4,8\,cm$. Според тоа,



$$b=0,75a=0,75\cdot 4,8=3,6\,cm \text{ и } c=1,25a=1,25\cdot 4,8=6\,cm.$$

Значи, периметарот на триаголникот ABC е $L=a+b+c=14,4\,cm$.

Забелешка. Триаголникот ABC навистина е правоаголен, но при решавањето на задачата овој услов никаде не го искористивме.

58. На хоризонтална права која ја дели рамнината на горна и долна полурамнина, нацртана е отсечка AB со должина $72\,cm$. Користејќи ги крајните точки на отсечката, во горната полурамнина се нацртани правилен (рамностран) триаголник AM_1M_2 и правилен петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$, а во долната полурамнина се нацртани правилен четириаголник (квадрат) $M_2M_3M_4M_5$ и правилен шестаголник $M_9M_{10}M_{11}\,M_{12}M_{13}B$. Притоа, M_2, M_5 и M_9 се на отсечката AB, точката M_2 е меѓу A и M_5 и точката M_9 е меѓу M_5 и B. Должините на страните на правилните многуаголници се однесуваат како соодветните броеви на нивните страни. Пресметај ја должината на искр-

шената линија

$$L \equiv AM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B\,.$$

Решение. Нека страната на рамностраниот триаголникот AM_1M_2 ја означиме со a, страната на квадратот $M_2M_3M_4M_5$ со b, страната на правилниот петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$ со c и страната на правилниот шестаголник $M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B$ со d.

Од условот на задачата следува дека $a:b:c:d=3:4:5:6$, односно

$$a=3k, b=4kc=5k, d=6k\,.$$

Имаме $72=a+b+c+d$, па затоа $72=3k+4k+5k+6k$, т.е. $k=4$.

Должината на искршената линија L е:

$$2a+3b+4c+5d=6k+12k+20k+30k=68k=68\cdot 4=272\,cm\,.$$

59. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 3 *dm*. Пресметај го неговиот крак b, ако неговата основа е страна на рамностраниот триаголник со периметар 18 *cm*.

Решение. Должината на страната на рамностран триаголник со периметар $18\,cm$ е $18:3=6\,cm$. Значи, основата на рамнокракиот триаголник е $a=6\,cm$. Сега, ако со b го означиме кракот на рамнокракиот триаголник, тогаш неговиот периметар е $L=a+2b$, па бидејќи $a=6\,cm$ и $L=3\,dm=30\,cm$, добиваме

$$30=6+2b\text{, т.е. } b=(30-6):2=12\,cm\,.$$

60. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни природни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е 12 *dm*. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.

Решение. Нека страните на триаголникот се последователните природни броеви $n-1,n,n+1$. Тогаш $n-1+n+n+1=13$, па затоа $n=4\,dm$. Според тоа, должините на страните на триаголникот се 3 *dm*, 4 *dm* и 5 *dm*. Плоштината на правоаголниот триаголникот е еднаква на половина од плоштината на правоаголникот со страни 3 *dm* и 4 *dm*, што значи дека таа еднаква на $(3\cdot 4):2=6\,dm^2$. Плоштините на конструираните квадрати се еднакви на $3\cdot 3=9\,dm^2$, $4\cdot 4=16\,dm^2$ и $5\cdot 5=25\,dm^2$. Конечно, плоштината на добиената фигура е еднаква на

$6+9+16+25=56\ dm^2$.

61. Триаголниците ABC и MNP припаѓаат на рамнината ~ . Кои множества точки може да се добијат како пресек на триаголниците ABC и MNP ?

Решение. Пресекот на два триаголника може да биде: празно множество, точка, отсечка, триаголник, четириаголник, петаголник и шестаголник. За секој од овие случаи нацртај соодветен цртеж.

62. Квадратите $ABCD$ и $MNPQ$ припаѓаат на рамнината ~ . Кои множества точки може да се добијат како пресек на дадените квадрати?

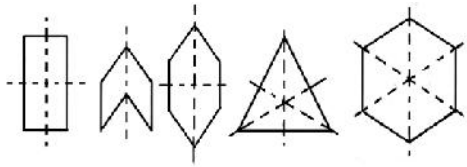
Решение. Пресекот на два квадрати може да биде: празно множество, точка, отсечка, триаголник, четириаголник, петаголник, шестаголник, седумаголник и осумаголник. Секој од наведените случаи прикажи го со цртеж.

63. Колку заеднички оски на симетрија имаат два круга со:
а) еднакви, б) различни
радиуси, ако нивните центри се различни точки.

Решение. а) Два круга со еднакви радиуси чии центри се различни точки имаат две оски на симетрија (направи цртеж).
б) Два круга со различни радиуси чии центри се различни точки имаат една оска на симетрија (направи цртеж).

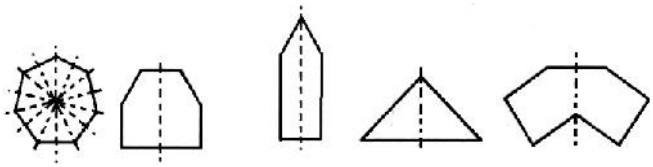
64. Со помош на
а) 6 еднакви кибритени чкорчиња,
б) 7 еднакви кибритени чкорчиња,
состави најмалку 4 фигури (затворени искршени линии без самопресекување) кои се осносиметрични. Кај секоја фигура определи ги оските на симетрија.

Решение. а) На должните цртежи се прикажани пет фигури и се дадени нивните оски на симетрии.



б) На должните цртежи се прикажани пет фигури и се дадени нивните

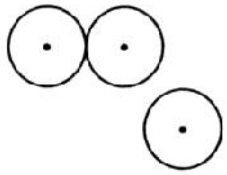
оски на симетрии.



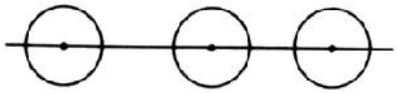
65. Колку заеднички оски на симетрија имаат три круга со:
а) еднакви, б) различни
радиуси, ако нивните центри се три различни точки.

Решение. а) Два круга со еднакви радиуси секогаш имаат две оски на симетрија.

1) Центарот на третиот круг на припаѓа на ниту една од двете оски на симетрика на два круга. Тогаш трите круга немаат оска на симетрија (цртеж десно).



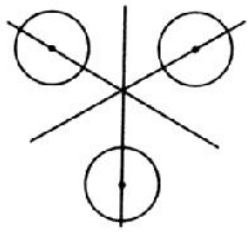
2) Центарот на третиот круг припаѓа на оската на симетрија на двата круга која минува низ нивните центри, но не припаѓа на двете оски на симетрија на двата круга. Тогаш трите круга имаат една оска на симетрија (цртеж долу).



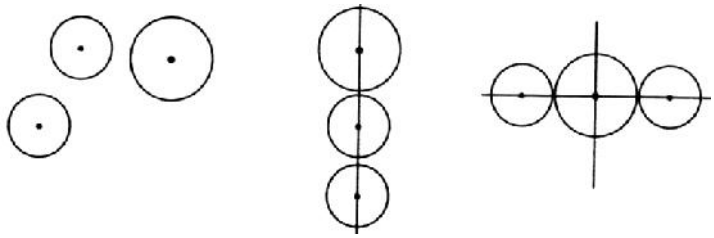
3) Центарот на кругот припаѓа на оската на симетрија која е нормална на правата која ги поврзува другите два круга, но не припаѓа на двете оски на симетрија. Тогаш трите круга имаат една оска на симетрија.

4) Центарот на третиот круг припаѓа на двете оски на симетрија на другите два круга. Тогаш трите круга имаат две оски на симетрија.

5) Центрите на трите круга се темиња на рамностран триаголник. Тогаш трите круга имаат три оски на симетрија (цртеж десно).

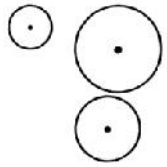


б) Три круга со различни радиуси кај кои два радиуси се еднакви, а третиот е различен може да имаат:
0 оски на симетрија 1 оска на симетрија 2 оски на симетрија

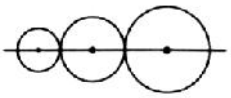


Три круга кај кои сите радиуси се меѓусебно различни може да имаат

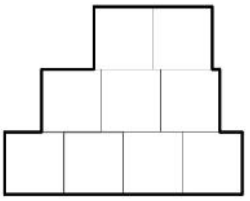
0 оски на симетрија



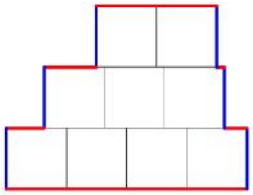
1 оска на симетрија



66. Лазо нацртал фигура која се состои од 9 еднакви квадрати (цртеж десно). Периметарот на фигурата е еднаков на $28\,cm$. Определи ја плоштината на еден квадрат.

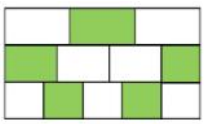


Решение. Периметарот на фигурата која ја нацртал Лазо се состои од црвени и сини отсечки (цртеж лево).



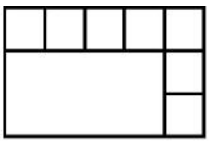
Збирот на должините на црвено обоените отсечки е еднаков на $8a$ каде со a е означена должината на страната на еден квадрат. Збирот на должините на сино обоените отсечки е $6a$. Според тоа, $8a+6a=28$, односно $a=2\,cm$. Конечно, плоштината на еден квадрат е $P=2\cdot 2=4\,cm^2$.

67. Јанко нацртал предлог за знаме на својот клуб. Знамето се состои од три правоаголници со еднакви ширини. Правоаголниците ги поделил на 3, 4 односно 5 еднакви делови и ги обоил (цртеж десно). Колкав дел од знамето обоил Јанко?

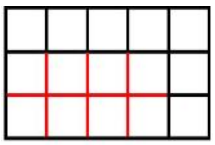


Решение. Во горниот ред е обоена $\frac{1}{3}$ од лентата, во среднот ред е обоена $2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ од лентата и во долниот ред се обоени $2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ од лентата. Секој ред е еднаков на $\frac{1}{3}$ од знамето, па затоа се обоени $\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5})=\frac{1}{3}\cdot\frac{10+15+12}{30}=\frac{37}{90}$ од знамето.

68. Пабло нацртал предлог знаме за својот клуб. Знамето се состои од седум еднакви квадрати и еден правоаголник (цртеж десно). Треба да се обојат $\frac{2}{3}$ од знамето, но само цели делови. На колку начини тоа може да се направи?



Решение. Помалиот правоаголн дел од знамето е составен од 8 квадратчиња, што значи дека знамето вкупно и 15 еднакви квадратчиња (цртеж десно). Тоа значи дека треба да се обои плоштина еднаква на $(15:3)\cdot 2=10$ мали квадратчиња. Бидејќи е дозволено да се бојат само цели делови, мора да се обои малиот правоаголник и уште 2 мали квадратчиња. Бидејќи имаме 7 мали квадратчиња, 2 мали квадратчиња може да се изберат на $(7\cdot 6):2=21$ начин. На долните цртежи се прикажани три од можните 21 боење.



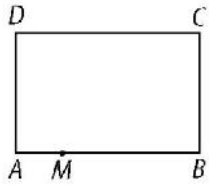
69. Три еднакви квадрати се составени без да се преклопуваат така што формираат правоаголник со периметар $10\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на еден квадрат.

Решение. Со три квадрати можеме да направиме правоаголник само на еден начин (цртеж десно). Ако a е должината на страната на еден квадрат, тогаш должините на страните на правоаголникот се $3a$ и a. Периметарот на правоаголникот е $8a$, па затоа $8a=10$, односно $a=1,25\,cm$. Конечно, периметарот и плоштината на еден од квадратите е $L=4\cdot 1,25=5\,cm$ и $P=1,25\cdot 1,25=1,5625\,cm^2$.

70. Даден е правоаголник $ABCD$ со периметар $40\,cm$. На страната AB е дадена точка M таква што должината на отсечката AM е за $5\,cm$ пократка од олжината на страната BC. Ако $\overline{MB}=3\overline{AM}$ определи ја плоштината на дадениот правоаголник.

Решение. Нека $\overline{AM}=x$. Тогаш

$\overline{MB} = 3x$, $\overline{AB} = 4x$ и $\overline{BC} = x + 5$.



Според тоа, периметарот на правоаголникот $ABCD$ е

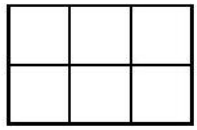
$$2 \cdot (4x + x + 5) = 40,$$

од каде добиваме $10x + 10 = 40$.

Според тоа, $x = 3\,cm$, па затоа $\overline{AB} = 12\,cm$ и $\overline{BC} = 8\,cm$. Конечно, плоштината на правоаголникот е $P = 8 \cdot 12 = 96\,cm^2$.

71. Шест еднакви квадрати се наредени така што е добиен правоаголник со периметар $21\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на еден од дадените квадрати.

Решение. Со шест еднакви квадрати може да се состави правоаголник на два начина (види ги долните цртежи).



Нека должината на страната на еднаквите квадрати е a.

За левиот правоаголник периметарот е еднаков на $14a$, па добиваме $14a = 21$, односно $a = 1{,}5\,cm$. Според тоа, во овој случај периметарот е $L = 4a = 6\,cm$, а плоштината е $P = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25\,cm^2$.

За десниот правоаголник периметарот е еднаков на $10a$, па добиваме $10a = 21$, односно $a = 2{,}1\,cm$. Според тоа, во овој случај периметарот е $L = 4a = 8{,}4\,cm$, а плоштината е $P = 2{,}1 \cdot 2{,}1 = 4{,}41\,cm^2$.

72. Даден е правоаголник $ABCD$ чија страна AB е два пати подолга од страната BC. Нека M е средина на страната AB. Отсечката MC го дели правоаголникот на четириаголник $AMCD$ и триаголник MBC чии периметри се разликуваат за $20\,cm$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Нека $\overline{AM} = x$. Тогаш $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{MB} = \overline{AM} = x$ и $\overline{DC} = 2x$. Според тоа, $4x + \overline{MC} - (2x + \overline{MC}) = 20$, па затоа $2x = 20$, односно $x = 10\,cm$. Значи страните на правоаголникот се $\overline{AB} = 2x = 20\,cm$ и $\overline{BC} = x = 10\,cm$, па затоа неговата плоштина е

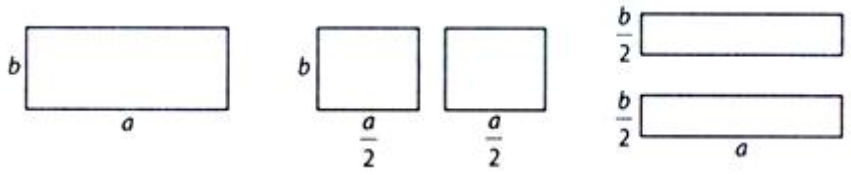
$$P = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 20 \cdot 10 = 200\ cm^2 .$$

73. Даден е правоаголник $ABCD$ чија една страна е долга $42\ cm$, а другата е пет пати пократка од првата. Пресметај ја плоштината на квадратот $EFGH$ чиј периметар е три пати помал од периметарот на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Нека должината на едната страна на правоаголникот $ABCD$ е $a = 42\ cm = 42 \cdot 10\ mm = 420\ mm$. Тогаш должината на другата страна е $b = 420 : 5 = 84\ mm$. Значи, периметарот на правоаголникот $ABCD$ е $L = 2 \cdot (420 + 84) = 1008\ mm$. Периметарот на квадратот $EFGH$ е трипати помал од периметарот на правоаголникот $ABCD$, т.е. тој е $L' = 1008 : 3 = 336\ mm$. Тоа значи дека должината на страната на квадратот $EFGH$ е $336 : 4 = 84\ mm$. Конечно, плоштината на квадратот $EFGH$ е $P = 84 \cdot 84 = 7056\ mm^2$.

74. Зоран и Ана пресекле секој по еден од два складни (еднакви) правоаголници. Притоа направиле по едно сечење паралелно на еден пар страни на правоаголникот. Зоран добил два правоаголника чии периметри се по $110\ cm$, а Ана добила два правоаголника чии периметри се по $130\ cm$. Определи го периметарот на почетните правоаголници.

Решение. Со сечење на правоаголниците според условите на задачата може да се добијат два случаја: едно е сечење паралелно со страната b и се добиваат два складни правоаголници со страни $\frac{a}{2}$ и b, а друго е сечење паралелно со страната a и се добиваат два складни правоаголници со страни a и $\frac{b}{2}$.



Ако Зоран сечел како во првиот случај, тогаш периметарот на еден мал правоаголник ќе биде $2 \cdot \frac{a}{2} + 2b = 110$, а Ана тогаш морала да сече како во вториот случај, па периметарот на нејзиниот еден дел е $2 \cdot \frac{b}{2} + 2a = 130$. Ако ги собереме добиените равенства наоѓаме

$3a+3b=240$, од каде добиваме $a+b=80$. Според тоа, $2(a+b)=160$, т.е. периметарот на почетниот правоаголник е $160\,cm$.

75. Ана ги собрала должините на три страни на еден правоаголник и добила $35\,cm$ Бојан собрал должини на три страни на истиот правоаголник и добил $40\,cm$. Определи ја плоштината на овој правоаголник.

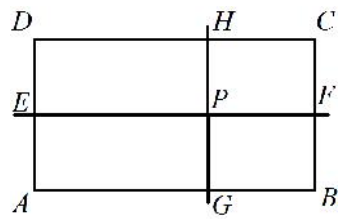
Решение. Нека должините на страните на правоаголникот се a и b. Од условот на задачата следува $2a+b=35$ и $a+2b=40$. Ако ги собереме двете равенства добиваме $3a+3b=75$, односно $a+b=25$. Според тоа,

$$a=35-(a+b)=30-25=10\,cm \text{ и } b=40-(a+b)=40-25=15\,cm.$$

Конечно, плоштината на правоаголникот е $10\cdot 15=150\,cm^2$.

76. Правоаголник со две заемно нормални прави паралелни на неговите страни е поделен на четири помали правоаголници. Периметрите на три мали правоаголници се 100, 70 и 50. Определи ја:
а) најмалата, б) најголемата,
можна вредност која може да ја има периметарот на четвртиот правоаголник.

Решение. Нека правоаголникот $ABCD$ е поделен на четири помали правоаголници со две заемно нормални прави EF и GH кои се сечат во точката P (види цртеж). Нека p,a,b,c,d редоследно се периметрите на правоаголниците $ABCD, AGPE, GBFP, PFCH, PHDE$. Лесно се гледа дека $p=a+c=b+d$, од каде добиваме $d=a+c-b$. Сега најголемата можна вредност на четвртиот правоаголник е кога збирот $a+c$ е најголем, т.е. кога b прима најмала вредност, а тоа е



$$d=100+70-50=120.$$

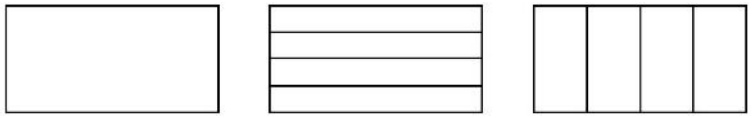
Аналогно, најмалата можна вредност е кога $a+c$ е најмал можен збир, а b прима најголема можна вредност, атоа е

$$d=70+50-100=20.$$

77. Должините на страните на правоаголникот се $20\,cm$ и $8\,cm$. Овој

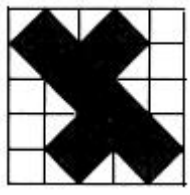
правоаголник е поделен со отсечки, паралелни на еден пар негови страни, на неколку складни (еднакви) помали правоаголници. Збирот на периметрите на добиените правоаголници е еднаков на $120\,cm$. Должините на страните на секој од овие правоаголници се природни броеви изразени во сантиметри. Пресметај ја плоштината на еден од малите правоаголници.

Решение. Со сечење на правоаголникот, со страни $20\,cm$ и $8\,cm$, според условот на задачата можни се два случаја.



1) Сечење на правоаголникот паралелно со страната еднаква на $20\,cm$, при што се добиваат складни правоаголници со страни $20\,cm$ и $\frac{8}{n}\,cm$, каде n е бројот на помалите правоаголници. Притоа за збирот на периметрите на добиените правоаголници имаме $n\cdot 2\cdot 20+n\cdot 2\cdot\frac{8}{n}=120$, од каде добиваме $40n=104$. Бидејќи n е природен број (бројот на малите правоаголници), заклучуваме дека таков n не постои, т.е. во овој случај задачата нема решение.
2) Сечење на правоаголникот паралелно со страната еднаква на $8\,cm$ и тогаш се добиваат складни правоаголници со страни $8\,cm$ и $\frac{20}{m}\,cm$, каде m е бројот на помалите правоаголници. Притоа за збирот на периметрите на добиените правоаголници имаме $m\cdot 2\cdot 8+m\cdot 2\cdot\frac{20}{m}=120$, од каде добиваме $16m=80$, т.е. $m=5$. Според тоа, сечењето е паралелно со страната долга $8\,cm$ и притоа се добиваат 5 правоаголници со страни $8\,cm$ и $4\,cm$. Значи, плоштината на еден мал правоаголник е $P=8\cdot 4=32\,cm^2$.

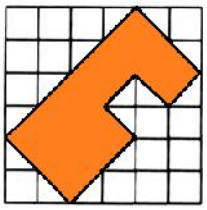
78. Андреј нацртал фигура во квадратна мрежа како на цртежот десно. Колкав е периметарот на оваа фигура ако дијагоналата на големиот квадрат е еднаква на $10\,cm$? А колкава е плоштината на оваа фигура.



Решение. Дијагоналата на големиот квадрат е составена од 5 дијагонали на малите квадратчиња. Но, дијагоналата на големиот квадрат е

$10\,cm$, дијагоналата на едно мало квадратче е еднаква на $10:5=2\,cm$. Плоштината на фигурата е збир на 6 квадрати со должина на страна $2\,cm$, па затоа таа е $P=6\cdot 2\cdot 2=24\,cm^2$. Периметарот на фигурата се состои од 14 дијагонали на малите квадрати и затоа $L=14\cdot 2=28\,cm$.

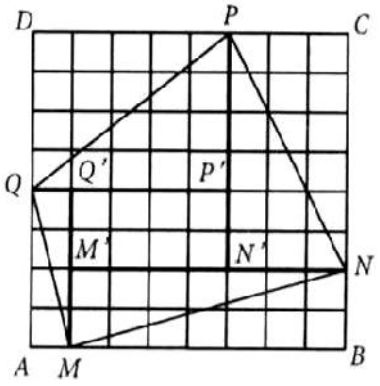
79. Квадрат чија дијагонала е долга $6\,cm$ е поделен на 36 еднакви квадрати. Определи ги периметарот и плоштината на обоената фигура.



Решение. На дијагоналата на големиот квадрат има 6 мали квадрати, што значи дека должината на дијагоналата на еден мал квадрат е $6:6=1\,cm$. Периметарот на обоената фигура се состои од 16 дијагоали на малите квадрати, па затоа тој е еднаков на $16\cdot 1=16\,cm$. Обоената фигура е правоаголник кој се добива кога од правоаголник со страни $4\,cm$ и $2\,cm$, се одземе плоштината на квадрат со страна $1\,cm$. Значи, плоштината на обоената фигура е $4\cdot 2-1\cdot 1=7\,cm^2$.

80. Квадратот BCD чија страна е еднаква на $8\,cm$ е поделен на квадратни сантиметри. На страните AB, BC, CD и DA соодветно се дадени точки M, N, P и Q такви што $\overline{AM}=1\,cm$, $\overline{BN}=2\,cm$, $\overline{CP}=3\,cm$ и $\overline{DQ}=4\,cm$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

Решение. Нека M', N', P', Q' се темиња на правоаголниците $MBNM'$, $NCPN'$, $PDQP'$, $QAMQ'$.



Плоштините на овие правоаголници соодветно се:

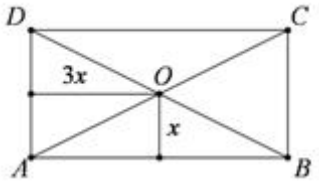
$$7\cdot 2=14\,cm^2,\quad 6\cdot 3=18\,cm^2,$$
$$5\cdot 4=20\,cm^2,\quad 4\cdot 1=4\,cm^2.$$

Понатаму, плоштините на триаголниците MBN, NCP, PDQ и QAM се еднакви на половина од плоштините на соодветните правоаголници, односно на $7\,cm^2, 9\,cm^2$, $10\,cm^2$ и $2\,cm^2$. Конечно, плоштината на четириаголникот $MNPQ$ се

добива кога од плоштината на квадратот $ABCD$ се одземат плоштините на триаголниците MBN, NCP, PDQ и QAM. Значи, плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е: $64-(7+9+10+2)=36\,cm^2$.

81. Во правоаголникот $ABCD$ отсечките AC и BD се сечат во точката O. Одреди ја плоштината на правоаголникот, ако растојанието од точката O до поголемата страна е 3 пати помало од растојанието од точката O до помалата страна, а периметарот на правоаголникот изнесува 128 cm.

Решение. Нека растојанието од точката O до поголемата страна е x. Тогаш растојанието од точката O до помалата страна е $3x$. Оттука се добива дека страните на правоаголникот се $6x$ и $2x$. Значи, $8x=64$, т.е. $x=8$. Според тоа, страните на правоаголникот се 48 cm и 16 cm, па плоштината изнесува $48\cdot 16=768\,cm^2$.



82. Во квадрат со плоштина $16\,dm^2$, две паралелни страни се продолжени при што се добил правоаголник со плоштина $28\,dm^2$. Одреди ги страните на правоаголникот.

Решение. Од формулата за плоштина на квадрат $P=a^2$ добиваме $a^2=16\,dm^2$, па затоа $a=4\,dm$. Едната страна на правоаголникот е $a=4\,dm$, па ако страната која е добиена со продолжувањето ја означиме со b добиваме $ab=28\,dm^2$, од каде наоѓаме $4b=28$, односно $b=7\,dm$.

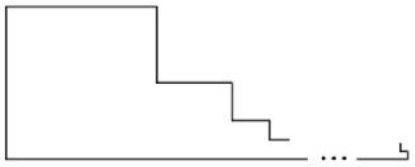
83. Даден е правоаголник со должини на страни $2023\,cm$ и $1309\,cm$. Правоаголникот е поделен на еднакви квадрати со најголема можна страна чија должина изразена во сантиметри е природен број. Определи го збирот на периметрите на делбените квадрати.

Решение. Јасно, должината на страната страната a на делбените квадрати мора да е делител на 2023 и на 1309. Но, должината на страната a треба да е најголема можна, па затоа $a=\text{NZD}(2023,1309)=119\,cm$.

Понатаму, $2023:119=17$ и $1309:119=11$, што значи дека правоаголникот е поделен на $17\cdot 11=187$ квадрати со страна $a=119\,cm$. Конечно, збирот на периметрите на делбените квадрати е

$$L=187\cdot 4a=187\cdot 4\cdot 119=89012\,cm$$

84. Во рамнината е даден квадрат со должина на страна $1024\,cm$. До дадениот квадрат е нацртан квадрат со два пати пократка страна и така се продолжува со цртање на квадрати се додека должините на страните изразени во сантиметри се природни броеви (види цртеж десно).



а) Определи го периметарот на фигурата добиена на погоре опишаниот начин.

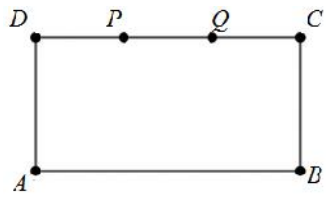
б) Пресметај ја плоштината на квадратот кој се наоѓа во средината на вака добиената низа квадрати.

Решение. а) Ако ги собереме должините на десните вертикални отсечки, ќе ја добиеме должината на страната на почетниот квадрат. Затоа периметарот на добиената фигура се состои од две должини на страната на почетниот квадрат и двојниот збир на должините на сите хоризонтални страни на квадратите кои се нацртани. Должините на страните на сите нацртани квадрати се: $1024\,cm$, $512\,cm$, $256\,cm$, $128\,cm$, $64\,cm$, $32\,cm$, $16\,cm$, $8\,cm$, $4\,cm$, $2\,cm$ и $1\,cm$, па затоа периметарот на добиената фигура е

$$L=2\cdot 1024+2(1024+512+256+128+68+32+16+8+4+3+2+1)$$
$$=2048+2\cdot 2047=6142\,cm.$$

б) Во низата има нацртано 11 квадрати и должината на страната на средниот квадрат е еднаква на $32\,cm$. Според тоа, плоштината на средниот квадрат е $P=32\cdot 32=1024\,cm^2$.

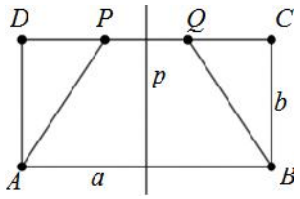
85. Даден е правоаголник $ABCD$. Со точките P и Q едната од поголемите страни е поделена на три еднакви дела (види цртеж).



а) Докажи дека трепезот $ABQP$ е рамнокрак.

б) Одреди го односот меѓу плоштините на правоаголникот и трапезот.

Решение. а) Нека p е симетралата на страните AB и CD. Бидејќи правата p е оска на симетрија на правоаголникот и $\overline{CQ}=\overline{QP}=\overline{PD}$, заклучуваме дека правата p е оска на симетрија на отсечката PQ, Сега, од својствата на осната симетрија следува $\overline{AP}=\overline{BQ}$ што значи дека трапезот $ABQP$ е рамнокрак.



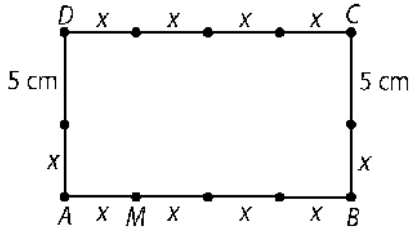
б) Плоштината на правоаголникот е ab, а плоштината на рамнокракиот трапез е $\frac{1}{2}(a+\frac{a}{3})b=\frac{2}{3}ab$. Според тоа, бараниот однос е

$$ab:(\tfrac{2}{3}ab)=3:2.$$

86. Даден е правоаголник $ABCD$ со периметар $40\,cm$. На страната AB е дадена точка M таква што отсечката AM е за $5\,cm$ пократка од отсечката BC. Ако отсечката MB е три пати подолга од отсечката AM, пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

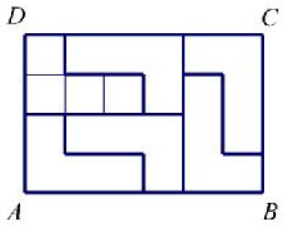
Решение. Од условот на задачата следува $\overline{BC}=\overline{AM}+5$ и

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{AM}+\overline{MB}\\&=\overline{AM}+3\overline{AM}\\&=4\overline{AM}.\end{aligned}$$



Ако ставиме $\overline{AM}=x$, добиваме $10x+10=40\,cm$, од каде наоѓаме $x=3\,cm$. Според тоа, $\overline{AB}=12\,cm$ и $\overline{BC}=8\,cm$, па плоштината на правоаголникот $ABCD$ е $P=12\cdot 8=96\,cm^2$.

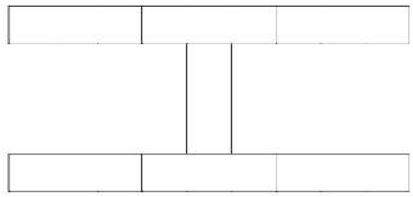
87. Правоаголникот $ABCD$ е составен од 6 исти фигури во форма на буквата „L“, а секоја буква „L“ е составена од 4 еднакви квадрати (види цртеж). Ако збирот на периметрите на сите букви „L“ е еднаков на $1200\,mm$, пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголникот $ABCD$



Решение. Периметарот на една буква „L“ е еднаков на $1200:6=$

$200\,mm$. Ако a е должината на страната на еден од квадратите од кои е составена фигурата „L“, тогаш нејзиниот периметар е еднаков на $10a$, па затоа $10a = 200$,т.е. $a = 200:10 = 20\,mm = 2\,cm$. Должините на страните на правоаголникот се $6a = 6 \cdot 2 = 12\,cm$ и $4a = 4 \cdot 2 = 8\,cm$. Значи, плоштината на правоаголникот $ABCD$ е $P = 8 \cdot 12 = 96\,cm^2$, а неговиот периметар е $L = 2 \cdot (8 + 12) = 40\,cm$.

88. Седум еднакви правоаголници се наредени како на цртежот десно. Должината на едната страна на правоаголникот е три пати поголема од должината на другата стран, а добиената фигура има периметар $132\,cm$. Колку правоаголници со различен периметар може да се состават помош на овие седум правоаголници и колкави се невните периметри?



Решение. Должините на малите правоаголници да ги означиме со x и $3x$ (види цртеж). Од цртежот е јасно дека периметарот на добиената фигура е

$$L = 12 \cdot 3x + 8x = 44x\,,$$

па затоа $44x = 132$, од каде добиваме $x = 3\,cm$. Значи, должините на страните на седумте правоаголници се $3\,cm$ и $9\,cm$.

1) Прв правоаголник:

Должините на страните на правоаголникот се $3\,cm$ и $7 \cdot 9 = 63\,cm$, па неговиот периметар е $L' = 2(3 + 63) = 132\,cm$.

2) Втор правоаголник:

Должините на страните на правоаголникот се $9\,cm$ и $7 \cdot 3 = 31\,cm$, па неговиот периметар е $L' = 2(9 + 21) = 90\,cm$.

89. Од квадрати чии должини на страници изразени во сантиметри се природни броеви треба да се состави правоаголник со плоштина $2005\,cm^2$. Квадратите може да не се складни. Кој најмалиот број потребни квадрати?

Решение. Бидејќи $2005 = 5 \cdot 401$, а броевите 5 и 401 се прости броеви, димензиите на правоаголникот може да се:

1) $1\,cm$ и $2005\,cm$,

2) $5\,cm$ и $401\,cm$.

Во случајот 1) се потребни 2005 квадрати со должина на страна $1\,cm$.

Во вториот случај, ако користиме квадрати со најголема должина на страна, очекуваме дека бројот на потребните квадрати ќе биде помал. Бидејќи $401 = 80 \cdot 5 + 1$, потребно е 80 квадрати со страна со должина $5\,cm$ и 5 квадрати со должина на страна $1\,cm$ штовкупно дава 85 квадрати.

Ако искористиме 79 квадрати со должина на страна $5\,cm$, ќе ни остане правоаголник со должина на страни $5\,cm$ и $6\,cm$, кој може да се покрие со 3 квадрати со должини на страни $2\,cm$ и 2 квадрати со должини на страни $3\,cm$. Значи, во случајотв имаме 84 квадрати.

Ако искористиме 78 квадрати со должина на страна $5\,cm$, ќе ни остане правоаголник со должина на страни $5\,cm$ и $11\,cm$, за кој мора да користиме квадрат со должина на страна $5\,cm$, бидејќи во спро-тивно ќе ни се потребни повеќе од 6 квадрати, односно повеќе од 84 квадрати.

Слично се добива дека со намалување на квадратите со должина на страна $5\,cm$ само се зголемува бројот на потебните квадрати.

Значи, најмалиот број потребни квадрати е 84.

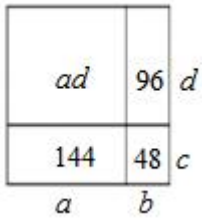
90. Еден квадрат е поделен со две прави на четири правоаголници. Колкава е страната на даденот квадрат, ако се познати плоштините на три од четирите правоаголници кои што изнесуваат $48\,cm^2$, $96\,cm^2$ и $144\,cm^2$. Пресекот е направен така што двата поголеми од споменатите три правоаголници имаат само едно заедничко теме.

Решение. Нека ги означиме страните на правоаголникот како на цртежот. Тогаш

$$ad = 144, bc = 48 \text{ и } bd = 96,$$

а треба да го определиме ad. Ако ги помножиме првото и третото равенство добиваме

$$abcd = 96 \cdot 144, \text{ т.е. } (ad)(bc) = 96 \cdot 144.$$



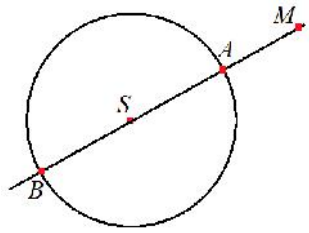
Но, $bc = 48$ и со замена во претходното равенство наоѓаме $ad = 288$. Според тоа, плоштината на квадратот е еднаква на

$$144 + 48 + 96 + 288 = 576\ cm^2,$$

што значи дека должината на неговата страна е $24\ cm$.

91. Дадена е кружница $k(S,r)$ и точка M во нејзината надворешност. Најкраткото растојание од точката M до точките од кружницата е $3\ cm$, а најголемото растојание од точката M до точките од кружницата е $11\ cm$. Определи го радиусот на оваа кружница?

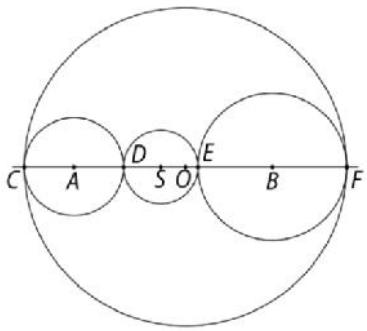
Решение. Ја повлекуваме правата SM и нека таа ја сече кружницата $k(S,r)$ во точките A и B (цртеж десно). Тогаш најкраткото растојание од точката M до точките од кружницата е отсечката MA, а најдолгото е отсечката MB. Притоа AB е дијаметар на кружницата, па затоа нејзиниот радиус е $r = \frac{1}{2}(\overline{MB} - \overline{MA}) = \frac{11-3}{2} = 4\ cm$.



92. Дадена е отсечка AB, $\overline{AB} = 8\ cm$ и кружници $k_1(A, 2\ cm)$ и $k_2(B, 3\ cm)$. Кружницата k е таква што нејзиниот центар припаѓа на правата AB и ги допира кружниците k_1 и k_2. Определи го радиусот на кружницата k.

Решение. Нека C, D, E, F се пресечните точки на кружниците k_1 и k_2 со правата AB (цртеж десно).

Нека S е средината на отсечката DE. Точката S е центар на една од бараните кружници, а $\overline{SD} = \overline{SE}$ е радиусот на кружницата која надворешно ги



допира кружници-те k_1 и k_2. Дијаметарот на оваа кружница е

$$\overline{DE} = \overline{AB} - \overline{AD} - \overline{EB} = 8 - 2 - 3 = 3\,cm,$$

па затоа нејзиниот радиус е еднаков на $1{,}5\,cm$.

Нека O е средината на отсечката CF. Точката O е центар на една од бараните кружници, а $\overline{OC} = \overline{OF}$ е радиусот на кружницата која внатрешно ја допираат кружниците k_1 и k_2. Дијаметарот на оваа кружница е $\overline{CF} = \overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BF} = 13\,cm$, па затоа нејзиниот радиус е еднаков на $6{,}5\,cm$.

Нека P е средина на отсечката CE. Точката P е центар на една од бараните кружница, а $\overline{PC} = \overline{PE}$ е радиусот на кружницата која кружницата k_1 ја допира внатрешно, а кружницата k_2 ја допира надворешно. Дијаметарот на оваа кружница е $\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = 7\,cm$, па затоа нејзиниот радиус е $3{,}5\,cm$ (направи цртеж).

Нека Q е средина на отсечката DF. Точката Q е центар на една од бараните кружница, а $\overline{DQ} = \overline{QF}$ е радиусот на кружницата која кружницата k_2 ја допира внатрешно, а кружницата k_1 ја допира надворешно (направи цртеж). Дијаметарот на оваа кружница е $\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF} = 9\,cm$, па затоа нејзиниот радиус е $4{,}5\,cm$.

93. Квадар со рабови $12\,cm, 12\,cm$ и $2\,cm$ има плоштина еднаква на плоштината на коцка. Пресметај го волуменот на оваа коцка.

Решение. Плоштината на квадарот е

$$P = 2 \cdot (12 \cdot 12 + 12 \cdot 2 + 12 \cdot 2) = 384\,cm^2.$$

Ако должината на работ на коцката е x, тогаш нејзината плоштина е $P' = 6x \cdot x$, па затоа $6x \cdot x = 384$, од каде добиваме $x = 8\,cm$. Според тоа, волуменот на коцката е $V' = x \cdot x \cdot x = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512\,cm^3$.

94. Квадар чии два раба се со должини $4\,cm$ и $6\,cm$ има волумен еднаков на волуменот на коцка со раб $6\,cm$. Определи ја плоштината на овој квадар.

Решение. Нека $a = 4\,cm, b = 6\,cm$ и c ги означиме должините на рабовите на квадарот. Тогаш волуменот на квадарот е $V = 24c\,cm^3$. Волу-

менот на коцката е $V' = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216\, cm^3$, па затоа $24c = 216$, од каде добиваме $c = 9\, cm$. Според тоа, плоштината на квадарот е

$$P = 2(ab + bc + ca) = 2 \cdot (4 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 9) = 228\, cm^2.$$

95. Ана, Билјана и Венеса ги мереле должините на рабовите на дрвен квадар $ABCDEFGH$ и тоа три раба од темето A и по еден раб од темето G. Секоја ги собрала измерените должини и добиле $25\, cm$, $27\, cm$, $28\, cm$. Дали и како може да се пресмета плоштината на квадарот?

Решение. Нека a, b, c се должините на различните рабови на квадарот $ABCDEFGH$. Бидејќи добиле три различни резултати Ана, Билјана и Венеса ги мереле должините на трите различни рабови од темето G. Затоа нивните мерења може да се запишат како

$$a + b + c + a = 25,$$
$$a + b + c + b = 27,$$
$$a + b + c + c = 28.$$

Ако ги собереме горните равенства добиваме $4a + 4b + 4c = 80$, од каде наоѓаме $a + b + c = 20$. Сега со замена во горните равенства добиваме $a = 5\, cm, b = 7\, cm, c = 8\, cm$. Конечно, волуменот на квадарот е $V = abc = 280\, cm^3$.

96. Два квадари се составени од 5, односно 7 еднакви коцки. Плоштините на овие квадари се разликуваат за $200\, cm^2$. Определи ја плоштината на една од коцките.

Решение. Бидејќи 5 и 7 се прости броеви квадарите може да бидат составени само на еден начин, со редење на коцките во еден ред. Квадарот составен од 5 коцки има sидови составени од $5 \cdot 4 + 2 = 22$ квадрати, а квадарот составен од 7 коцки има sидови составени од $7 \cdot 4 + 2 = 30$ квадрати. Според тоа, разликата на плоштините е еднаква на плоштината на $30 - 22 = 8$ квадрати. Значи, плоштината на еден квадрат е еднаква на $200 : 8 = 25\, cm^2$. Конечно, плоштината на една коцка е еднаква на $6 \cdot 25 = 150\, cm^2$.

97. Два квадари се составени од 5, односно од 11 еднакви коцки. Волу-

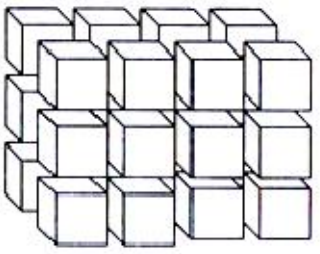
менот на овие квадари се разликува за $48\,cm^2$. Пресметај ја разликата на плоштините на двата квадари.

Решение. Волуменот на двата квадари се разликува за волуменот на $11-5=6$ еднакви коцки. Според тоа, волуменот на една коцка е $48:6=8\,cm^3$. Но, $2\cdot 2\cdot 2=8$, па затоа должината на страната на една коцка е еднаква на $2\,cm$.

Бидејќи 5 и 11 се прости броеви при составување на квадарите коцките мора да се наредени една до друга. Значи, плоштината на квадарот кој е составен од 5 коцки е еднаква на плоштината на $2+5\cdot 4=22$ квадрати со страна $2\,cm$, а плоштината на квадарот составен од 11 еднакви коцки е еднаква на $2+11\cdot 4=46$ квадрати со страна $2\,cm$. Според тоа, бараната разликана плоштините е еднаква на $(46-22)\cdot 2\cdot 2=24\cdot 4=96\,cm^2$.

98. Квадар со рабови $4\,cm, 6\,cm, 8\,cm$ е расечен со рамнини паралелни на неговите ѕидови на најголеми можни коцки. Должините на рабовите на овие коцки изразени во сантиметри се природни броеви. Определи ја вкупната плоштина на сите така добиени коцки.

Решение. За да го определиме работ на еднаквите коцки треба да го определиме најголемиот број на кој се дели-ви броевите 4, 6 и 8. Тоа е бројот 2, па затоа работ на една коцка ќе биде $2\,cm$. Според тоа, квадарот еднаш го сечеме паралелно на ѕидот 8×6, два пати го сечеме паралелно на ѕидот 8×4 и три пати го сечеме паралелно на ѕидот 6×4 (цртеж десно). Така добиваме $2\cdot 3\cdot 4=24$ коцки со раб $2\,cm$. Нивната плоштина е $24\cdot 6\cdot 2\cdot 2=576\,cm^2$.



99. Дрвен квадар со рабови 72 *dm*, 96 *dm* и 120 *dm* е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, пришто должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

Решение. Должината на работ на делбените коцки е еднаква на $\text{NZD}(72,96,120)=24\,dm$. Според тоа, рабовите на квадарот се поделе-

ни на $72:24=3, 96:24=4$ и $120:24=5$ делови, што значи дека квадарот е поделен на $3\cdot 4\cdot 5=60$ коцки. Конечно, висината на добиениот столб е еднаква на $60\cdot 24=1440\,dm=144\,m$.

100. Дали постои коцка со раб $a\,cm, a\in\mathbb{N}$, чиј волумен е еднаков на збирот на волумените на квадари со рабови

$6\,cm, 7\,cm, 18\,cm$; $11\,cm, 12\,cm, 13\,cm$ и $14\,cm, 15\,cm, 16\,cm$?

Ако постои определи ја должината на работ на таа коцка.

Решение. Збирот на волумените на трите квадари е еднаков на

$$6\cdot 7\cdot 18+11\cdot 12\cdot 13+14\cdot 15\cdot 16=756+1716+3360=5832\,cm^3.$$

Сега, од $5832=2^3\cdot 3^6=(2\cdot 3^2)=18^3$ добиваме дека збирот на волумените е еднаков на волуменот на коцка со раб $18\,cm$.

101. Дали постои коцка со раб $a, a\in\mathbb{N}$, чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на квадарите со рабови $1\,cm, 2\,cm, 3\,cm; 4\,cm, 5\,cm, 6\,cm$ и $7\,cm, 8\,cm, 9\,cm$.

Решение. Збирот на плоштините на трите квадари е

$$P=2(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1)+2(4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 4)+2(7\cdot 8+8\cdot 9+9\cdot 7)=552\,cm^2$$

Сега, ако постои коцка со саканото својство потребно е да важи $6\cdot a\cdot a=552$, односно $a\cdot a=92$. Со разложување на бројот 92 на прости множители добиваме $92=2\cdot 2\cdot 23$, па заклучуваме дека не постои коцка со саканото својство.

6. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Во секој од градовите Битола, Велес и Кратово живее по едно од девојчињата Анка, Бранка и Дарка. Анка и Бранка ги дале следниве вистинити изјави:
   Анка: *Јас не живеам во Битола.*
   Бранка: *Јас живеам во Кратово.*
   Каде живее секое од девојчињата?
   Решение. Бидејќи Бранка живее во Кратово, останува Анка и Дарка да живеат во Битоал и Велес. Но, Анка не живее во Битола, па затоа таа живее во Велес. Конечно, Дарка живее во Битола.

2. Мирјана секогаш ја говори вистината, освен на својот роденден, кога на прашањето кога и е роденден дава невистинит одговор. Стојан на 5. мај на Мирјана и поставил пршање:
   - Кога ти е роденден?
   - Беше вчера, - одговорила Мирјана.

   Утредента, на истото прашање, Стојан добил ист одговор. Кога е роденденот на Мирјана?
   Решение. Едниот одговор е точен, бидејќи не може и на 5. мај и на 6. мај да е роденденот на Мирјана. Значи, Мирјана е родена или на 4. мај или на 5. мај. Ако е родена на 4. мај, тогаш нејзиниот одговор од 5. мај е точен, а одговорот од 6. мај е неточен. Но, тоа значи дека Мирјана е родена на 6. мај, што е противречност. Според тоа, Мирјана е родена на 5. мај.

3. Горјан, Рампо и Сашко тренираат кошарка, ракомет и одбојка, при што секој од нив тренира само еден спорт. Горјан и Рампо ги дале следниве изјави:
   Горјан: *Јас сум одбојкар, а Сашко тренира кошарка*.
   Рампо: *Сашко е ракометар, а Горјан тренира кошарка*.
   Се покажало дека секој од нив дал еден вистинит и еден невистинит исказ. Со кој спорт се занимава секое од децата?
   Решение. а) Нека исказот на Горјан: *Јас сум одбојкар* е точен, а исказот *Сашко тренира кошарка* е неточен. Тогаш исказот на Рампо: *Горјан тренира кошарка* е неточен, па затоа е точен исказот: *Сашко е*

ракометар. Според тоа: Горјан е одбојкар, Сашко е ракометар и Рампо е кошаркар.

б) Нека исказот на Горјан: *Јас сум одбојкар* е неточен, а исказот *Сашко тренира кошарка* е точен. Сега исказот на Рампо: *Сашко е ракометар* е неточен, па затоа е точен исказот *Горјан тренира кошарка,* што не е можно бидејќи тогаш Сашко и Горјан се кошаркари, а според условот може да има само еден кошаркар.

4. Секој од тројцата ученици Иван, Стефан и Дамјан се занимава само со еден од спортовите: кошарка, ракомет и одбојка, при што не постојат двајца кои тренираат ист спорт. Определи кој што тренира ако е точна само една од следниве реченици:
   1) Иван тренира кошарка.
   2) Стефан не тренира кошарка.
   3) Дамјан не тренира одбојка.

   Решение. Ако е точна првата реченица, тогаш втората не е точна, што значи дека и Стефан тренира кошарка, што противречи на тоа дека не постојат двајца кои тренираат ист спорт. Нека е точна втората реченица. Тогаш првата и третата реченица не се точни, што значи дека Дамјан тренира одбојка и како Иван и Стефан не тренираат кошарка останува дека Дамјан тренира кошарка, што противречи на тоа дека секој ученик тренира еден спорт. Значи, точна е третата реченица т.е. Дамјан не тренира одбојка. Но, тоа значи дека не е точна втората реченица, па затоа Стефан тренира кошарка. Сега, останува Дамјан да тренира ракомет и Иван да тренира одбојка.

5. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 се поделени во три групи. Докажи дека производот на броевите во најмалку една од овие групи е поголем од 34.

   Решение. Со a,b,c да ги означиме производите на броевите во делбените групи. Имаме $abc = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$. Ако секој од броевите a,b,c е помал или еднаков на 34, тогаш треба да важи

   $$40320 = abc \le 34\cdot 34\cdot 34 = 39304,$$

   што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека барем еден од броевите a,b,c мора да е поголем од 34.

6. Четири другарки Сава, Маја, Темјана и Дарка на писмената работа по математика добиле различни оценки и ниту една не добила единица.

Радозналата Бојана, која не била на училиште, се интересирала за нивните оценки и ги добила следниве информации:

1) Темјана добила 4, а Дарка добила 3,
2) Темјана добила 5, а Маја добила 4,
3) Сава добила 4, а Дарка добила 2.

Во секоја од овие реченици еден дел е точен, а другиот е неточен. Помогни ѝ на Бојана да дознае која ученичка која оценка ја добила.

Решение. Да претпоставиме дека првиот дел на првата изјава е точен, т.е. дека Темјана добила 4, а вториот дел дека е неточен. Тогаш во втората изјава првиот дел е неточен, а другиот е точен, т.е. Маја добила 4 е точно, што не е можно бидејќи не е можно Темјана и Маја да добиле иста оценка. Значи, претпоставката дека Темјана добила оценка 4 не е точна. Оттука следува дека *Дарка добила 3*. Сега од третата изјава следува дека *Сава добила 4* е точно, што според втората изјава значи дека не е точно дека Маја добила 4. Според тоа, *Темјана добила 5*, па останува дека *Маја добила 2*.

7. Четири ученици по писмената работа по математика, разговарааат за решението на една задача, кое е природен број.
   Ацо: Решението е бројот 9.
   Марко: Решението е прост број.
   Ана: Решението е парен број.
   Марија: Решението е број делив со 15.
   Се покажало дека едно момче и едно девојче дале точни изјави, а другите две неточни. Кој број е решение на задачата.
   Решение. Ако изјавата на Ацо е точна, тогаш двете изјави на девојчињата се неточни, бидејќи бројот 9 не е парен и не е делив со 15. Значи, изјавата на Марко е точна. Но, прост број не може да е делив со 15. Според тоа, изјавата на Марија не е точна, а изјавата на Ана е точна. Единствен прост број кој е парен е бројот 2.

8. На контролна вежба по математика учениците решавале две задачи. Точните одговори на двете задачи биле природни броеви. По часот Андреј, Бодан и Војдан дале по два искази кои се однесуваат на одговорите на задачите:
   Андреј: Одговорот на првата задача е поголем од 18. Одговорот на втората задача не е поголем од 14.
   Бодан: Одговорот на првата задача е помал од 20. Одговорот на

втората задача е 14.

Војдан: Одговорот на првата задача е 15. Одговорот на втората задача е поголем од 14.

Познато е дека еден ученик погрешно ги решил двете задачи, додека двата исказа на другите два ученика се точни. Определи го збирот на решенијата на двете задачи.

Решение. Вторите тврдења на Андреј и Војдан се противречни, па затоа тие двајца не може да се оние со по два точни искази. Според тоа, точни се двете тврдења на Бодан, па затоа точното решение на втората задача е 14. Тоа не може да бидат и Бодан и Војдан, бидејќи и нивните втори тврдења се противречни. Значи, точни се двете тврдења на Андреј. Сега, од првите тврдења на Андреј и Бодан следува дека одговорот на првата задача е 19.

Конечно, бараниот збир е $14+19=33$.

9. Околу тркалезна маса седат 33 луѓе. Секој од нив или секогаш лаже или секогаш ја говори вистината. Секој од нив изјавил: „Сите десет луѓе десно од мене се лажливци“. Колку лажливци седат на масата?

Решение. Не е можно сите да се лажливци, бидејќи тогаш првиот од 11 луѓе кои седат еден до друг ќе даде точен исказ, што противречи на тоа дека е лажливец. Сега, ако тргнеме од еден од оние кои говорат вистина (првиот), тогаш 10 луѓе десно од него се лажливци. Потоа мора да седи човек кој говори вистина (во спротивно првиот лажливец би дал точен исказ), па повторно имаме 10 лажливци, па човек кој говори вистина и на крајот уште 10 лажливци. Значи, на масата седат 30 лажливци и 3 вистинољупци.

10. На масата се наоѓаат три карти, на секоја е напишан природен број на едната страна. Картите се наредени превртени на масата од лево на десно така што броевите на картите не се гледаат. Ана, Бисера и Цветанка пробуваат да ги погодат броевите на картите. На девојчињата им е познато дека:
    - сите броеви на картите се меѓусебно различни,
    - збирот на сите броеви на картите е еднаков на 13,
    - броевите на картите се во растечки редослед од лево кон десно.

    Ана го погледна бројот а левата карта и рече: „Немам доволно информации да ги определам другите два броја.“

    Потоа Бисера знаејќи ја изјавата на Ана, го погледна бројот на десната

карта ја кажа истата реченица како и Ана. Конечно, Цветанка знаејќи ги изјавите на Ана и Бисера ја погледна средната карта и ја кажа истата реченица.

Дали може врз база на овие информации да определиме кој број е на средната карта?

Решение. Прво да забележиме дека ги имаме следниве можности за броевите на картите:

(1,2,10), (1,3,9), (1,4,8), (1,5,7), (2,3,8), (2,4,7), (2,5,6) и (3,4,6).

Ако Ана на првата карта од лево го видела бројот 3, ќе ги знаела другите два броја. Но, тоа не е случај, па затоа можеме да ја отстраниме комбинацијата (3,4,6). Потоа, ако последната карта е 10, 9 или 6, Бисера ќе ги знаела другите два броја. Но, тоа не е случај, па затоа ќе ги елиминираме комбинациите: (1,2,10), (1,3,9) и (2,5,6). Ни остануваат (1,4,8), (1,5,7), (2,3,8) и (2,4,7). Бидејќи ниту Цветанка по гледањето на средниот број не можела да ги определи броевите отпаѓаат и комбинациите (1,5,7) и (2,3,8). Значи, останаа (1,4,8) и (2,4,7), па затоа средниот број е 4.

11. Прераспореди ги цифрите на бројот 11223344 така што ќе добиеш осумцифрен број во кој меѓу две единици има една цифра, меѓу две двојки има две цифри, меѓу две тројки има три цифри и меѓу две четворки има четири цифри.

    Решение. Меѓу две четворки не може да има две цифри тројки, меѓу две тројки не може да има две цифри двојки и меѓу две двојки не може да има две цифри единици. Ако ова се земе предвид, тогаш може да се добијат следниве два распореди на цифрите 23421314 и 41312432.

12. Маја има три кутии и шест топчиња, три црвени и три сини. Во секоја кутија ставила по две топчиња така што во една се наоѓаат две црвени, во друга две сини и во трета едно црвено и едно сино топче. Потоа на секоја кутија залепила по една од следниве реченици:
    - Во оваа кутија се две црвени топчиња.
    - Во оваа кутија се две сини топчиња.
    - Во оваа кутија е едно црвено и едно сино топче.

    Петар треба да погоди какви топчиња се во одделните кутии. Може да извлечи без гледање само едно топче од трите кутии. Притоа знае дека ниту еден напис не соодветствува на сосотојбата во кутијата. Од која

кутија треба да го извлече тоа едно топче?

Решение. Ако Петар извлече едно топче од кутијата на која пишува дека во неа се две црвени, тогаш постојат две можности. Ако извлече црвено топче, тогаш знае дека другото топче во таа кутија е сино, па две црвени топчиња се во кутијата со натписот: Во оваа кутија се две сини топчиња. Сега во кутијата на која пишува дека има едно црвено и едно сино топче се две сини топчиња. Но, не е сигурно дека извлеченото топче е црвено, па ако извлече сино топче, тогаш не може да определи дали во кутијата се две сини или едно црвено и едно сино топче.

Наполно идентичен е случајот ако Петар извлече топче од кутијата на која пишува дека содржи две сини типчиња.

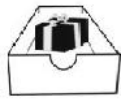
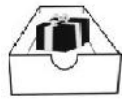
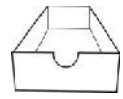
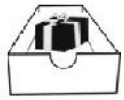
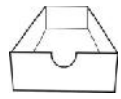
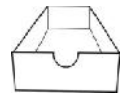
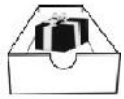
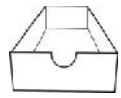
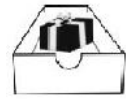
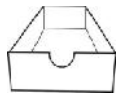
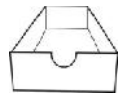
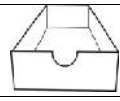
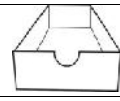
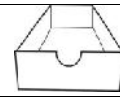
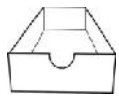
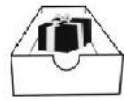
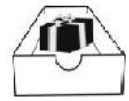
Нека Петар извлече топче од кутијата на која пишува дека во неа е едно сино и едно црвено топче. Бидејќи во оваа кутија се две топчиња со иста боја, ако Петар извлече сино топче, тогаш во оваа кутија се две сини топчиња. Сега во кутијата на која пишува дека во неа се две црвени топчиња има едно црвено и едно сино топче, а во кутијата на која пишува дека во неа се две сини топчиња има две црвени топчиња. Ако од оваа кутија Петар извлече црвено топче, тогаш во неа се две црвени топчиња, во кутијата на која пишува дека во неа се две сини топчиња има едно црвено и едно сино топче, а во кутијата на која пишува дека во неа се две црвени топчиња се две сини топчиња.

Од претходните разгледувања следува дека Петар треба да извлече топче од кутијата на која пишува: Во оваа кутија е едно црвено и едно сино топче.

13. Илина за својот 11-ти роденден добила поклон од родителите. Тие малку се пошегувале, па поклонот го ставиле во една од три исто запакувани кутии и на секоја кутија ставиле по еден натпис:
    1) Поклонот е во оваа кутија.
    2) Поклонот не е во оваа кутија.
    3) Поклонот е во оваа кутија.

    Дали Илина може да заклучи во која кутија е поклонот, ако знае дека меѓу натписите има и точни и неточни?

    Решение. Бидејќи меѓу натписите има и точни и неточни, тоа значи дека ниту сите натписи се точни, нити сите се неточни. Така ги имаме следниве можности:

Случај	1. Кутија	2. Кутија	3. Кутија	Заклучок
I	Точен натпис	Неточен натпис	Неточен натпис	Неможно
				
II	Точен натпис	Точен натпис	Неточен натпис	Можно
				
III	Точен натпис	Неточен натпис	Точен натпис	Неможно
				
IV	Неточен натпис	Точен натпис	Точен натпис	Можно
				
V	Неточен натпис	Точен натпис	Неточен натпис	Неможно
				
VI	Неточен натпис	Неточен натпис	Точен натпис	Неможно
				

Од горните заклучоци следува дека случаите II и IV се можни. Тоа значи, дека врз основа на добиените информации Илина може да заклучи дека поклонот е или во првата кутија (натписите на првата и втората кутија се точни, а на третата е неточен) или во третата кутија (натписот на првата кутија е неточен, а на втората и третата се точни).

14. Во една соба има три работни маси и над секоја маса има по една светилка, а во друга три прекинувачи за овие светилки, за секоја по еден. Познато е дека неколку часа пред тоа сите три светилки биле угасени. Како можеш два утврдиш кој прекинувач на која светилка ѝ соодветствува ако во собата со светилки можеш да влезеш само еднаш?

Решение. Треба да го вклучиш првиот прекинувач. Ќе почекаш неколку минути, го исклучуваш првиот прекинувач и го вклучуваш вториот прекинувач. Потоа влегуваш во собата. Светилката која свети соодветствува на вториот прекинувач, од другите две светилки све-

тилката која е загреана соодветствува на првиот прекинувач, а ладната светилка соодветствува на третиот прекинувач.

15. Од 27 коцки за играње е составена една голема коцка (На ѕидовите на коцките се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а збирот на броевите запишани на спротивните ѕидови е 7). Кој е најмалиот можен збир на видливите ѕидови на овие коцки?

Решение. Составената коцка има димензии $3\times 3\times 3$. Бидејќи збирот на било кои два од трите најмали броја е помал од 7, никои два од трите најмали броја не се запишани на спротивни ѕидови. Тоа значи дека ѕидовие на кои се запишани броевите 1, 2 и 3 имаат заедничко теме. Во темињата на големата коцка ги поставуваме коцките така да видливи се ѕидовите со броевите 1, 2 и 3. Потоа на средината на секој раб на коцката се наоѓа по една коцка која ќе ја наместиме така што видливи се ѕидовите со броевите 1 и 2. На средината на секој ѕид на коцката се наоѓа по една коцка која ќе ја наместиме така што видлив е ѕидот на кој е бројот 1. Коцката има 8 темиња, 12 рабови и 6 ѕида. Така го добиваме најмалиот можен збир на видливите броеви на запишани на ѕидовите на малите коцки, кој е еднаков на

$$8\cdot(1+2+3)+12\cdot(1+2)+6\cdot 1=48+36+6=90.$$

16. На прашањето кој е бројот на зградата во која живее Стојмен одговорил дека кога ќе ги помножи бројот на своите години, бројот на одделението во кое оди, двоцифрениот број на зградата во која е училиштето и трицифрениот број на зградата во која живее се добива бројот 279279. Кој е бројот на зградата во која живее Стојмен?

Решение. Имаме $279279=3\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 31$. Според тоа, Стојмен е ученик во трето или седмо одделение. Ако е во трето одделение, тогаш тој ќе има 9 години, а бројот 9 не е во производот. Според тоа, Стојмен е ученик во седмо одделение и има 13 години. Сега, од условот на задачата ќе следува производот на двоцифрениот број на зградата во која е училиштето и трицифрениот број на зградата во која живее е $3\cdot 3\cdot 11\cdot 31$, па затоа бројот на зградата во која живее Стојмен е $3\cdot 3\cdot 31=279$, а бројот на зградата во која е училиптетот е 11.

17. Ако три саботи во еден месец се со парен датум, кој ден е 28. во тој месец?

Решение. Најмалиот парен датум во еден месец е 2 и нека тоа е

првата сабота. Меѓу две саботи има 7 дена, па соодветнте датуми се со различна парност. Значи, првата следна сабота е на 16-ти, а третата на 30-ти во тој месец. Само во овој случај има три саботи. Тоа значи дека 28-тиот ден во тој месец мора да е во четврток.

18. Една година во месец март имало повеќе понеделници отколку среди, а во јуни повеќе вторници отколку недели. Кој е последниот ден во таа година?

Решение. Во март има повеќе понеделници од среди ако првиот ден во март е сабота или недела. Во јуни има повеќе вторници отколку недели ако првиот ден во јуни е понеделник или вторник. Од 1. март до 1. јуни има 92 дена, па ако март почнува во сабота, јуни почнува во недела, па тогаш јуни не може да има повеќе вторници од недели. Ако март почнува во недела,тогаш јуни почнува во понеделник, па јуни ќе има повеќе вторници од недели. Значи, таа година 1. март бил во недела, а 1. јуни во понеделник. Бидејќи од 1. јуни до крајот на годината има 214 дена и $214 = 7 \cdot 30 + 4$, во овој интервал има полни 30 седмици и уште 4 дена. Според тоа, последниот ден од годината бил во четвртиот ден од седмицата, сметајќи го понеделник, односно во четврток.

19. Филип има дигитална вага која покажува точен број грамови и 10 вреќички со по 100 златници. Во девет вреќички се златници од по 10 грама, а во една се златници од 11 грама. Како само со едно мерење Филип може да открие во кои вреќички се златници од по 10 грама, а во која се златници од 11 грама?

Решение. Нека Филип ги означи вреќичките со броевите од 1 до 10. Потоа од секоја вреќичка зема онолку златници колку што е бројот со кој вреќичката е означена. Така Филип вкупно зел

$$1+2+3+...+10=55$$

златници. Ако сите златници се од по 10 грама, тогаш нивната маса ќе биде $55 \cdot 10 = 550$ грама. Но бидејќи има златници и од 11 грама, Филип ќе измери маса поголема од 550 грама, а помала или еднаква на 560 грама. Притоа, ако Филип измерил маса $550 + x$ грама, $1 \le x \le 10$ тоа значи дека тој зел x златници од по 11 грама и тие се во вреќичката означена со бројот x.

20. Во една вреќа има $9\,kg$ брашно. Располагаме со вага со два таса и тег

од 200 грама. Како со три мерења ќе измериме $2\,kg$ брашно?

Решение. *Прв чекор*: На едниот тас ќе го ставиме тегот од $200\,g$, а потоа на тасовите ќе го истуриме целото брашно од $9\,kg$ така што вагата ќе биде во рамнотежа. На тој начин ќе измериме брашно со маса $\frac{9+0,2}{2}=4,6\,kg$ и брашно со маса $4,4\,kg$,

Втор чекор. Од брашното со $4,6\,kg$ како во првиот чекор ќе измериме брашно со маса $\frac{4,6+0,2}{2}=2,4\,kg$ и брашно со маса $2,2\,kg$.

Трет чекор. Од брашното со маса $2,2\,kg$ со помош на тегот ќе извадиме брашно со маса $0,2\,kg$, со што ќе добиеме $2\,kg$ брашно.

21. Во множество од четири топчиња некои се волшебни. Детектор може да утврди колку волшебни топчиња има меѓу оние кои се ставени во него. Со помош на три теста со детекторот констатирај кои топчиња се волшебни, а кои не се волшебни.

Решение. Топчињата да ги означиме со A,B,C,D. Со $t(S)$ да го означиме бројот на волшебните топчиња во множеството S. За едноелементно множество наместо $t(\{X\})$ ќе пишуваме $t(X)$.

Го тестираме $\{A,B\}$.

Ако $t(\{A,B\})=0$, тогаш поединечно ги тестираме C и D и во зависност од тие тестови добиваме дека множеството волшебни топчиња е $\emptyset,\{C\},\{D\}$ или $\{C,D\}$.

Ако $t(\{A,B\})=2$, продолжуваме како во претходниот случај и во зависност од добиените резулатаи множеството волшебни топчиња е $\{A,B\}$, $\{A,B,C\}$, $\{A,B,D\}$ или $\{A,B,C,D\}$.

Ако $t(\{A,B\})=1$, тогаш го тестираме множеството $\{A,C,D\}$.

Ако $t(\{A,C,D\})=0$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{B\}$.

Ако $t(\{A,C,D\})=3$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{A,C,D\}$.

Ако $t(\{A,C,D\})=1$, тогаш го тестираме множеството $\{B,C\}$.

Ако $t(\{B,C\})=0$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{A\}$.

Ако $t(\{B,C\})=1$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{B,D\}$.

Ако $t(\{B,C\})=2$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{B,C\}$.

Ако $t(\{A,C,D\})=2$, тогаш го тестираме множеството $\{B,C\}$.

Ако $t(\{B,C\})=0$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{A,D\}$.

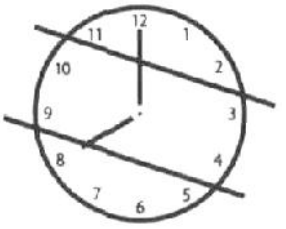
Ако $t(\{B,C\})=1$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{A,C\}$.

Ако $t(\{B,C\})=2$, тогаш множеството волшебни топчиња е $\{B,C,D\}$.

22. Даден е часовник кај кој часовите се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ..., 12. Повлечи две прави кои рамнината на часовникот ја делат на три дела, така што збирот на броевите во секој од добиените делови да е еднаков.

Решение. *Прв начин*. Збирот на броевите запишани на часовникот е

$$1+2+3+...+10+11+12=6\cdot 13=78.$$



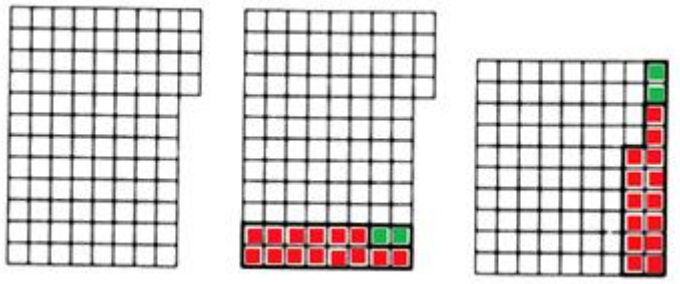
Значи, збирот на броевите во секој од трите дела на кои треба да се подели рамнината на триаголникот треба да биде $78:3=26$. Бидејќи $8+9+10=27$ и $9+10+11=30$, броевите 9 и 10 не смее да се во ист дел ниту со 8, ниту со 11. Понатаму, $26-(9+10)=7$, па затоа со 9 и 10 треба да се два соседни броја чиј збир е 7. Јасно, тоа се броевите 3 и 4. Според тоа, бараната поделба е: I дел - 3, 4, 9, 10, II дел – 5, 6, 7, 8, III дел – 1, 2, 11, 12.

Втор начин. Како и во првиот начин добиваме дека секој дел треба да содржи броеви чиј збир е $78:3=26$. Според тоа, доволно е на часовникот да групираме последователни броеви чиј збир е 26. Јасно, во првата група се броевите 5, 6, 7, 8, во втората група се броевите 11, 12, 1, 2, а во третата група преостануваат броевите 3, 4, 9, 10.

23. Елисавета купила правоаголен чаршав со димензии $9\,dm\times 12\,dm$. Нејзината ќерка Темјана си играла со ножички и од чаршавот отсекла правоаголно праче со димензии $1\,dm\times 8\,dm$, кое потоа го исекла на мали парчиња, така што истото било неупотребливо. Кога Елисавета видела многу се налутила, но по кратко време забележала дека од преостанатиот дел може да отсече едно парче со димензии $1\,dm\times 4\,dm$ и така да добие чаршав со плоштина $96\,dm^2$. Но, нејзиниот син Аритон ја советувал тоа да не го прави, бидејќи тој знае како преостанатиот дел да го исече на три дела од кои може да се сошие квадратен чаршав со плоштина $100\,dm^2$. Како тоа Аритон може да го направи?

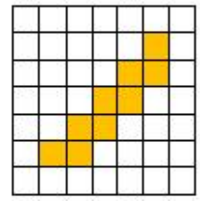
Решение. Откако Темјана, сечејќи правоаголен дел со димензии

$1\,dm \times 8\,dm$, го оштетила чаршавот, Елисавета можела да отсече правоаголен дел со димензии $1\,dm \times 4\,dm$, така што ќе добие чаршав со плоштина $96\,dm^2$. Бидејќи збирот на должините на подолгите страни на двата отсечени правоаголници е $4+8=12\,cm$ и $96=8\cdot 12$ заклучуваме дека по постапката на Темјана чаршавот изгледал како на цртежот лево.

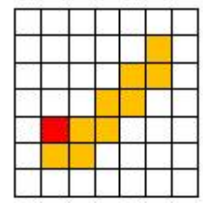


Значи, Аритон ќе го расече преостанатиот дел од чаршавот како што е прикажано на средниот цртеж, а потоа трите парчиња ќе ги сошие како што е прикажано на десниот цртеж.

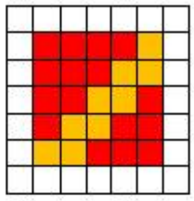
24. Колку најмногу квадрати можеме да обоиме, за да добиената фигура има еднаков периметар како и обоената фигура на цртежот десно?



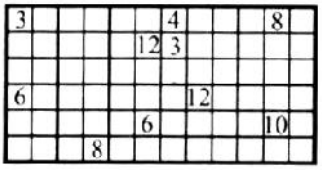
Решение. Со додавање на едно квадратче не треба да се менува периметарот на обоената фигура. Тоа значи, дека при додавањето на квадратчето тоа со фигурата мора да има две заеднички страни (види цртеж десно).



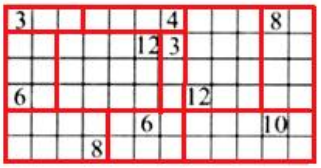
Сега, ако согласно претходно кажаното редоследно додаваме квадратчиња, тогаш ќе ја добиеме фигурата прикажана на цртежот лево. Според тоа, можеме дополнително да обоиме 16 квадратчиња, со што добиваме квадрат 5×5 чиј периметар е еднаков на периметарот на почетната фигура.



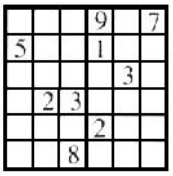
25. Правоаголникот прикажан на цртежот десно, по линиите на мрежата, расечи го на помали правоаголници така, што секој правоаголник ќе содржи точно еден број, и бројот на квадратчињата во секој правоаголник ќе биде еднаков на бројот кој го содржи.



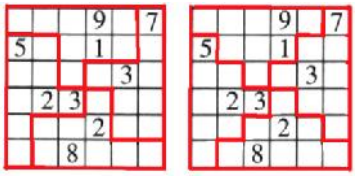
Решение. Соодветното расекување е прикажано на цртежот десно. До истото најлесно може да се дојде ако се тргне од десната страна бидејќи правоаголниците со 12, 10 и 8 квадратчиња може да се постават на единствен начин.



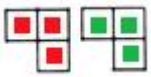
26. Квадратот прикажан на цртежот десно подели го на шетири складни делови (делови со иста форма и еднаков број квадрати) така, што збирот на броевите во секој дел биде еднаков. Најди две решенија на здачата.



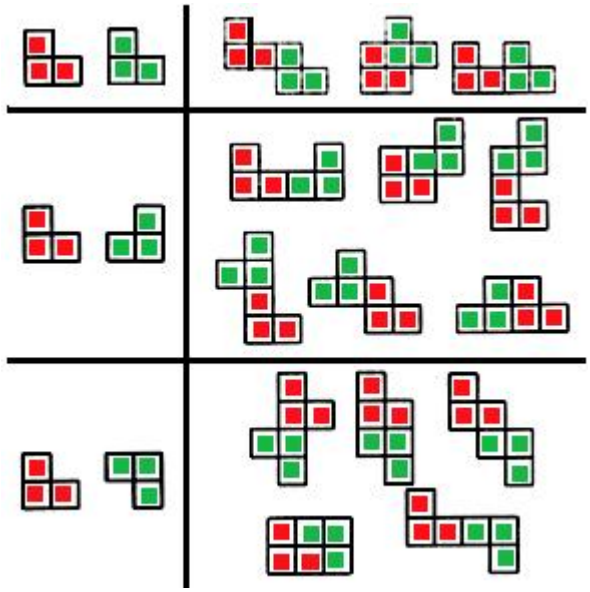
Решение. Големиот квадрат е составен од 36 мали квадратчиња, па затоа во секој дел треба да има по $36:4=9$ квадратчиња. Понатаму, збирот на запишаните броеви е $1+2+2+3+3+5+7+8+9=40$, што значи во секој дел збирот на броевите треба да биде еднаков на $40:4=10$. Јасно, во една група мора да се броевите 9 и 1, во друга група броевите 8 и 2, во трета група броевите 7 и 3, во четврта група броевите 2, 3 и 5. Две поделби се дадени на долните цртежи.



27. Колку различни фигури може да се состават од две L тримина (цртеж десно), ако е дозволено составување на триминатa само долж заедничка страна на квадратчињата? Дозволено е триминатa да се вртат и превртуваат. (Две фигури се различни ако со поместување во рамнината или со превртување не можеме да ги доведеме до поклопување.)



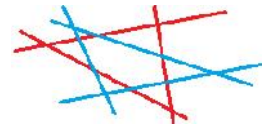
Решение. При дадените услови од две L тримина може да се состават вкупно 14 различни фигури.



Фигурите можеме да ги поделиме во три групи, секоја од кои е составена од двете тримина чија положба е прикажана на левите цртежи. Притоа триминатa може да се движат хоризонтално и вертикално, но ниту се вртат, ниту се превртуваат.

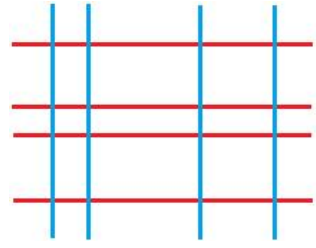
28. Распореди 12 точки на 6 прави така што на секоја права има по 4 точки.

Решение. Јасно, секоја точка мора да припаѓа на две прави, односно секоја точка е пресек на две прави. Едно од можните решенија е дадено на цртежот десно.



29. На 8 прави распореди 16 точки така што на секоја права ќе има по 4 точки.

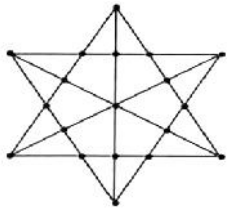
Решение. Осумте прави се определени со 16 точки, и притоа на секоја права има по 2 точки. За да на правите има по 4 треба овие 16 точки да се распоредени така што на секоја права да има уште по 2 точки. Ова е можно само ако секоја права се сече со четири други прави. Ваков распоред е прикажан на цртежот десно.



30. Градинарот Пандил во својата градина засадил 19 ружи во 9 реда така што во секој ред има точно по 5 ружи. Нацртај план според кој се засадени ружите.

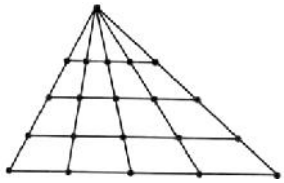
Решение. Едно од можните решенија на задачата е прикажано на цртежот десно.

Обиди се да најдеш барем уште еден распоред на ружите кој ги задоволува условите на задачата.



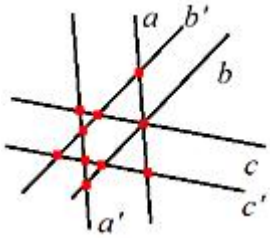
31. Градинарот Анте во својата градина засадил 21 ружа во 9 реда така што во секој ред имало по 5 ружи. Нацртј можен распоред на ружите.

Решение. Еден од можните распореди е даден на цртежот десно. Така имаме четири хоризонтални редови со по 5 ружи и пет коси редови со по 5 ружи.



32. Во рамнината се дадени три прави a,b,c кои се сечат во една точка. Нацртај уште три прави од кои едната е паралелна со правата a, втората со правата b, а третата со правата c. Кој е најголемиот број пресечни точки што може да ги имаат нацртаните шест прави.

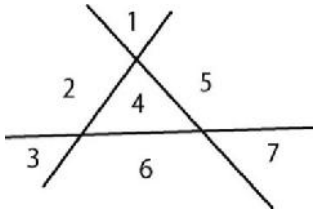
Решение. Права a' која е паралелна на правата a ги сече правите b и c во 2 точки. Понатаму, права b' која е паралелна на правата b ги сече правите a,a',c најмногу во 3 точки. Права c' која е паралелна на правата c ги сече правите a,b,a',b' најмногу во 4 пресечни точки (види цртеж). Ако на овие точки ја додадеме заедничката точка на правите a,b,c, добиваме дека најголемиот можен број пресечни точки на добиената конфигурација е $1+2+3+4=10$.



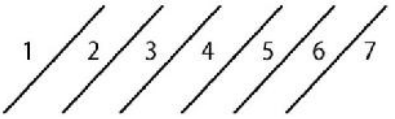
33. Една права ја дели рамнината во која се наоѓа на две област. Колку најмалку, а колку најмногу прави треба да се нацртаат во рамнината, за да тие ја поделат на точно 7 области?

Решение. Една права ја дели рамнината на две области. Две прави рамнината ја делат на три области (ако се паралелни) или на четири области ако се сечат.

Рамнината може да се подели на седум



области со најмалку три прави на начин прикажан на цртежот десно.



Може да се нацртаат најмногу шест прави со кои рамнината е поделена на седум области. Имено, две паралелни прави ја делат рамнината на три области, а со секоја следна права паралелна на веќе нацртаните прави се добива по една нова област (види цртеж).

34. Докажи дека меѓу 15 произволни природни броеви постојат два броја чија разлика е делива со 14.

Решение. При делење со бројот 14 можни остатоци се 0, 1, 2, ..., 13. Значи, имаме 15 броеви, а можни остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја кои при делење со 14 даваат еден ист остаток, т.е. се од видот $14n+r$ и $14m+r$. Разликата на овие два броја е бројот $14n+r-(14m+r)=14(n-m)$ кој е делив со 14, што и требаше да се докаже.

35. Докажи дека секое множество кое содржи 20 природни броеви има подмножество чиј збир на елементи е делив со 19. Забелешка: збирот на елементите на едноелементно множество е самиот тој елемент.

Решение. Дадените броеви да ги означиме со $n_1, n_2, ..., n_{20}$. Да ги разгледаме броевите

$$s_1 = n_1,\ s_2 = n_1 + n_2,\ ...,\ s_{20} = n_1 + n_2 + ... + n_{20}.$$

Добивме 20 броеви за кои важи $s_1 < s_2 < ... < s_{20}$. При делење со бројот 19 можни се деветнаесет остатоци 0,1, 2, ..., 18, па како имаме 20 броеви од принципот на Дирихле следува дека барем два од броевите $s_1, s_2, ..., s_{20}$ при делење со 19 даваат ист остаток. Јасно, разликата на овие два број е делива со 19. Меѓутоа, разликата на секои два од броевите $s_1, s_2, ..., s_{20}$ (од поголемиот го одземаме помалиот) всушност е еднаква на збир на некои од броевите $n_1, n_2, ..., n_{20}$. Значи, постои подмножества на множеството $\{n_1, n_2, ..., n_{20}\}$ чиј збир на елементи е делив со 19.

36. Во едно училиште има 733 ученици. Докажи дека најмалку тројца од нив слават роденден во ист ден.

Решение. Една година може да има најмногу 366 денови, а тоа е случајот кога годината е престапна. Сега, ако во секој ден од годината

најмногу 2 ученика слават роденден, тогаш во училиштето ќе има најмногу $2 \cdot 366 = 732$ ученика. Но, во училиштето има 733 ученика, што значи дека постои ден во кој роденден слават повеќе од два ученика, односно најмалку три ученика.

37. Сите ученици на едно одделение на крајот на учебната година добиле преодни оценки: 2, 3, 4 и 5. Ако во тоа одделение има 33 ученици докажи дека барем 3 ученици имаат исти оценки по математика и биологија.
Решение. Секој ученик добил 2, 3, 4 или 5 по математика, што значи дека за оценката по математика имаме 4 можности. Исто така за оценката по биологија имаме 4 можности. Според тоа, имаме $4 \cdot 4 = 16$ можни парови оценки по математика и биологија. Сега, ако имаме најмногу по 2 ученика кои имаат исти оценки, тоа се $2 \cdot 16 = 32$, па останува 1 ученик кој мора да има оценки како некоја од 16-те можности. Според тоа, постојат 3 ученика кои имаат ист пар оценки, односно исти оценки по математика и биологија.

38. Датумот 11.02.2011 е интересен бидејќи ако ги избришеме точките го добиваме бројот 11022011 кој е палндром (број кој и од лево и од десно се чита исто). Колку такви датуми има во третиот милениум?
Решение. Такви датуми може да се појават само во февруари и во декември. Во февруари има 29 (од 01.02.2010 до 29.02.2092, при што е важно дека 2092 година е престапна), а во декември ги има 31 (од 01.12.2110 до 31.12.2113). Значи, има вкупно 60 такви датуми во третиот милениоум.

39. Колку палиндроми покажува дигитален часовник со четири цифри, две за часови и две за минути? (Палиндром е број кој исто се чита од лево кон десно и од десно кон лево.)
Решение. Гледајќи од лево кон десно првата цифра може да биде 0, 1 и 2. Ако првата цифра е 0 или 1, втората цифра може да биде било која, додека ако првата цифра е 2 втората цифра може да биде цифра од 0 до 3. Третата цифра може да биде било која цифра од 0 до 5, додека четвртата цифра може да биде било која.
Ако првата цифра е 0, имаме 6 палиндроми и тоа
00:00, 01:10, 02:20, 03:30, 04:40, 05:50.
Ако е првата цифра 1 имаме 6 палиндроми и тоа:

10:10, 11:11, 12:21, 13:31, 14:41, 15:51.

Ако е првата цифра 2 имаме 4 палиндроми и тоа:

20:02, 21:12, 22:22, 23:32.

Конечно, имаме вкупно $6+6+4=16$ палиндроми.

40. Сите цифри на петцифрениот број $\overline{abcde}$ се меѓусебно различни и $e\neq 0$. Притоа збирот на цифрите е 10. Кога овој број се собере со бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед се добива број запишан со исти цифри. Колку има такви петцифрени броеви?

Решение. Цифрите на бројот $\overline{abcde}$ се 0, 1, 2, 3 и 4. Броевите $\overline{abcde}$ и $\overline{edcba}$ имаат еднакви збирови цифри, па како при нивното собирање немаме пренос добиваме дека збирот на цифрите на нивниот збир е 20. Според условот на задачата збирот е запишан со исти цифри, па затоа цифрата со која е запишан збирот е $20:5=4$, т.е. збирот е 44444. Според тоа, цифрите 0 и 4 не може да се ниту прва ниту последна и дека 2 е средната цифра. Според тоа, бараните броеви се 14203, 10243, 30241 и 34201.

41. Определи го бројот природните броеви кои се помали од 2009 и чиј збир на цифри е поголем од 26?

Решение. Збирот на цифрите на броевите кои се помали од 2009 може да биде најмногу $1+9+9+9=28$. Трицифрени броеви чиј збир на цифри е 27 има само еден и тоа е бројот 999. Трицифрени броеви чиј збир на цифри е 28 нема. Четирицифрени броеви помали од 2009 чиј збир на цифри е 27 се: 1899, 1989 и 1998. Четирицифрени броеви помали од 2009 чиј збир на цифри е 28 има само еден и тоа е бројот 1999. Значи, природни броеви помали од 2009 чиј збир на цифри е поголем од 26 има точно 5.

42. Определи го бројот на броевите кои се помали од 2009 и чиј производ на цифри е еднаков на 10?

Решение. Производ на цифрите на природниот број е 10 ако две цифри се 2 и 5 и сите преостанати цифри се 1. Такви едноцифрени нема. Двоцифрени броеви се два: 25 и 52. Такви трицифрени има шест: 125, 152, 215, 251, 512 и 521. Такви четирицифрени броеви исто така има шест: 1125, 1152, 1215, 1251, 1521 и 1512, бидејќи четирицифрените броеви кои почнуваат со цифрите 2 и 5 се поголеми од 2009. Значи, имаме $2+6+6=14$ броеви со бараните својства.

43. Определи го бројот на дропките кои се еднакви на $\frac{1}{2}$, чии броител и именител се природни броеви, а именителот е поголем од 2, но не е поголем од 100?

Решение. За да дропката биде еднаква на $\frac{1}{2}$, неговиот именител мора да е два пати поголем од неговиот броител, т.е да биде парен број. Парни броеви кои не се поголеми од 100 има 50. Од нив го отфрламе бројот 2, па затоа имаме вкупно $50-1=49$ дропки со саканите својства.

44. Определи го бројот на дропките од видот $\frac{a}{b+c}$ кои се еднакви на дропката $\frac{1}{3}$, ако a,b,c се едноцифрени броеви?

Решение. Броевите a,b,c се едноцифрени, па затоа тие примаат вредности од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Бидејќи збирот на броевите во именителот треба да биде три пати поголем од бројот во броителот, а збир на два едноцифрени броја е помал или еднаков на 18, заклучуваме дека во броителот може да е запишан број кој е помал или еднаков на $18:3=6$. Така ја добиваме следнвата табела:

a	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	6
b	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	3	4	5	6	6	7	9
c	3	2	6	5	4	3	9	8	7	6	5	9	8	7	6	9	8	9

Во табелата се дадени 18 решенија, но кога броевите a и b се различни, истите можеме да ги земеме во обратен редослед, па ќе добиеме уште 15 решенија, иако овие дропки нема да бидат различни од претходно наведените.

45. Одреди го бројот на:

а) двоцифрени б) трицифрени броеви

што се запишани само со парни цифри.

Решение. а) На местото на десетки може да стојат 4 цифри и тоа 2, 4, 6 и 8. На местото на единици може да стојат 5 цифри и тоа 0, 2, 4, 6 и 8. Значи, има вкупно $4\cdot 5=20$ двоцифрени броеви.

б) Од двоцифрените броеви, трицифрени се добиваат ако на секој двоцифрен број му се допише по една од цифрите 0, 2, 4, 6 и 8 од десната страна. Според тоа, има $20\cdot 5=100$ трицифрени броеви.

46. На еден шаховски турнир учествувале 12 шахисти. Секој шахист со

секој друг шахист одиграл по 3 партии. Колку партии се одиграни на турнирот.

Решение. На турнирот учествувале 12 шахисти и ако секој одиграл по една партија со секој од преостанатите 11 шахисти, тогаш бидејќи партијата на X со Y е истата партија на Y со X, заклучуваме дека во производот $12 \cdot 11 = 132$ секоја партија е броена два пати. Според тоа, ако секој шахист одиграл по една партија со секој друг шахист, тогаш бројот на одиграните партии е еднаков на $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Но, секој со секого одиграл по 3 партии, па затоа бројот на одиграните партии е еднаков на $3 \cdot 66 = 198$.

47. Колку има трицифрени природни броеви такви што цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на десетките и единиците?

Решение. Трицифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се од видот $\overline{abc}, a \neq 0$ и $a = b + c$.

- **з**а $a = 1$ тоа се броевите: 101, 110,
- за $a = 2$ тоа се броевите: 202, 211, 220,
- за $a = 3$ тоа се броевите: 303, 312, 321, 330,
- за $a = 4$ тоа се броевите: 404, 413, 422, 431, 440,
- за $a = 5$ тоа се броевите: 505, 514, 523, 532, 541, 550,
- за $a = 6$ тоа се броевите: 606, 615, 624, 633, 642, 651, 660,
- за $a = 7$ тоа се броевите: 707, 716, 725, 734, 743, 752, 761, 770,
- за $a = 8$ тоа се броевите: 808, 817, 826, 835, 844, 853, 862, 871, 880,
- за $a = 9$ тоа се броевите: 909, 918, 927, 936, 945, 954, 963, 972, 981, 990.

Конечно, постојат $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54$ трицифрени броеви со бараното својство.

48. Определи го бројот на трицифрените природни броеви кај кои производот на цифрите е парен број.

Решение. *Прв начин*. Има 900 трицифрени броеви. Секој од нив има или парен или непарен производ на цифри. Производот на цифрите е парен ако не е непарен. Производот на цифрите е непарен ако сите три цифри се непарни. Имаме 5 непарни цифри, па затоа броеви кои се запишани само со непарни цифри се $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, што значи дека имаме 125 трициффени броеви чиј производ на цифри е непарен. Конечно, имаме $900 - 125 = 775$ трицифрени броеви чиј производ на

цифри е парен број.

Втор начин. Производот на цифрите е парен број, ако барем една од цифрите е парна. Тоа значи дека имаме три можности:

1) Една цифра е паран, а другите две се непарни. Можни се случаите ПНН, НПН, ННП. Бидејќи првата цифра не може да е 0, првите броеви се вкупно $4\cdot 5\cdot 5=100$, вторите броеви се $5\cdot 5\cdot 5=125$ и третите броеви се $5\cdot 5\cdot 5=125$. Значи, во овој случај имаме $100+125+125=350$ броеви.
2) Две цифри се парни и една е непарна. Можни се следниве случаи ППН, ПНП, НПП. Првите и вторите броеви се $4\cdot 5\cdot 5=100$, а третите се $5\cdot 5\cdot 5=125$. Значи, имаме $100+100+125=325$ броеви.
3) Сите три цифри се парни и такви броеви има $4\cdot 5\cdot 5=100$.

Конечно, трицифрени броеви кај кои производот на цифрите е парен број има $350+325+100=775$.

49. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои сите цифри не се различни.

Решение. Кај четирицифрен број првата цифра може да се избере на 9 начини (сите цифри освен цифрата 0), а секоја од преостанатите три цифри може да се избере на 10 начини. Од принципот на производ следува дека имаме вкупно $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10=9000$ четирицифрени броеви. Првата цифра на четирицифрен број запишан со различни цифри можеме да ја избереме на 9 начини, втората исто така на 9 начини, третата на 8 и четвртата на 7 начини. Значи, имаме $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$ четирицифрени броеви запишани со различни цифри.

Конечно, четирицифрени броеви кај кои сите цифри не се различни се $9000-4536=4464$

50. Определи го бројот на петцифрените броеви кои се запишани со различни цифри, а во декадниот запис на броевите цифрите 1 и 2 се соседни.

Решение. Ако цифрите 1 и 2 се на првите две места, тогаш броевите се од видот $\overline{12abc}$ и $\overline{21abc}$. Цифрата a можеме да ја избереме од множеството $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$, т.е. имаме 8 можности, за цифрата b имаме 7 можности и за цифрата c имаме 6 можности. Според тоа, во овој случај имаме $2\cdot 8\cdot 7\cdot 6=672$ броја.

Ако цифрите 1 и 2 се на второто и третото место, броевите се од видот

$\overline{a12bc}$ и $\overline{a21bc}$. Тогаш цифрата a можеме да ја избереме од множеството $\{3,4,5,6,7,8,9\}$, т.е. имаме 7 можности, за цифрата b имаме 7 можности (може да е и 0) и за цифрата c имаме 6 можности.во случајов имаме $2\cdot 7\cdot 7\cdot 6 = 588$ броја.

Слично, ако цифрите 1 и 2 се на третот и четвртото место, односно на четвртото и петтото место имаме по 588 броеви.

Конечно, бараниот број броеви е $672 + 3\cdot 588 = 2436$.

51. Бојан има три коцки за играње: зелена, сина и жолта. На ѕидовите на зелената коцка се запишани броевите 1, 1, 2, 2, 3 и 3, на ѕидовите на жолтата броевите 2, 2, 4, 6, 6 и 6, на ѕидовите на сината броевите 1, 1, 2, 3, 3 и 4. По фрлањето на коцките од добиените броеви Бојан составува трицифрени броеви, така што на местото на стотките ја става зелената, на местото на десетите жолтата и на местото на единиците ја става сината коцка. Колку различни трицифрени броеви може да добие Бојан и колку од овие броеви се деливи со 3? Колку различни трицифрени броеви може Бојан да добие ако редоследот на коцките е жолта, сина, зелена или сина, жолта, зелена?

Решение. Ако редоследот на коцките е зелена, жолта, сина тогаш на местото на стотките може да е една од цифрите 1, 2 и 3, на местото на десетките една од цифрите 2, 4 и 6, на местото на единиците една од цифрите 1, 2, 3 и 4. Значи за стотките имаме 3 можности, за десетките 3 можности и за единиците 4 можности, па затоа Бојан може да состави $3\cdot 3\cdot 4 = 36$ трицифрени броеви.

Од овие броеви деливи со 3 се 12 броеви, а тоа се броевите чиј збир на цифри е делив со 3. Овие броеви се дадени во следнава табела:

З	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
Ж	2	4	4	6	2	4	6	6	2	2	4	6
С	3	1	4	2	2	3	1	4	1	4	2	3

Ако редоследот на коцките е жолта, сина, зелена, тогаш повторно имаме $3\cdot 3\cdot 4 = 36$ трицифрени броеви. Сега ако на овие 36 броеви го додадеме редоследот сина, жолта, зелена, тогаш овој број ќе се зголеми. Бидејќи кај редоследот жолта, сина, зелена 1 и 3 не беа на местото на стотките, на местото на десетките можеме да ставиме три (2, 4 или 6), а на местото на единиците исто така три (1, 2 или 3) цифри, па тоа се вкупно $2\cdot 3\cdot 3 = 18$ броеви. Ако на местото на стотките ги ставиме цифрите 2 или 4, кои веќе беа на тоа место во претходниот распоред, на местото на десетките можеме да го ставиме само бројот

6, па тоа се уште $2 \cdot 3 = 6$ броја. Значи, кога распоредот е жолта, сина, зелена или сина, жолта, зелена имаме $36 + 18 + 6 = 60$ различни броеви.

52. На колку начини бројот 2310 може да се запише како производ на два или три различни броја.

Решение. Имаме, $2310 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Ќе определиме како бројот 2310 може да се запише како производ на два множители, т.е. $2310 = ab$. Бројот a може да биде било кој пд броевите 1, 2, 3, 5, 7 и 11, а бројот b да е производот на преостанатите пет броеви. На тој начин имаме 6 можности и тоа:

$$1 \cdot 2310,\ 2 \cdot 1155,\ 3 \cdot 770,\ 5 \cdot 462,\ 7 \cdot 330,\ 11 \cdot 210.$$

Бројот a може да е еднаков на производот на било кои два од броевите 2, 3, 5, 7 и 11, а бројот b да е производот на другите три броја. На тој начин имаме 10 можности и тоа:

$$6 \cdot 385,\ 10 \cdot 231,\ 14 \cdot 165,\ 22 \cdot 105,\ 15 \cdot 154,$$
$$21 \cdot 110,\ 33 \cdot 70,\ 35 \cdot 66,\ 55 \cdot 42,\ 77 \cdot 30.$$

Ќе определиме како бројот 2310 може да се запише како производ на три множители, т.е. $2310 = cde$. Прво броевите c и d примаат вредност по еден од броевите 1, 2, 3, 5, 7 и 11, а e е производот на преостанатите броеви. Тогаш имаме 15 можности и тоа:

$$1 \cdot 2 \cdot 1155,\ 1 \cdot 3 \cdot 770,\ 1 \cdot 5 \cdot 462,\ 1 \cdot 7 \cdot 330,\ 1 \cdot 11 \cdot 210,\ 2 \cdot 3 \cdot 385,\ 2 \cdot 5 \cdot 231,$$
$$2 \cdot 7 \cdot 165,\ 2 \cdot 11 \cdot 105,\ 3 \cdot 5 \cdot 154,\ 3 \cdot 7 \cdot 110,\ 3 \cdot 11 \cdot 70,\ 5 \cdot 7 \cdot 66,\ 5 \cdot 11 \cdot 42,\ 7 \cdot 11 \cdot 30$$

Понатаму, ако $c = 1$, d е производ на два од преостанатите пет броја и e е производ на преостанатите три броја, тогаш имаме 10 можности и тоа:

$$1 \cdot 6 \cdot 385,\ 1 \cdot 10 \cdot 231,\ 1 \cdot 14 \cdot 165,\ 1 \cdot 22 \cdot 105,\ 1 \cdot 15 \cdot 154,$$
$$1 \cdot 21 \cdot 110,\ 1 \cdot 33 \cdot 70,\ 1 \cdot 35 \cdot 66,\ 1 \cdot 55 \cdot 42,\ 1 \cdot 77 \cdot 30.$$

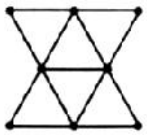
Конечно, ако c е некој од броевите 2, 3, 5, 7 и 11, а d е еднаков на производот на два од преостанатите четири броја, а e е еднаков на производот на другите два броја, тогаш имаме 15 можности и тоа:

$$2 \cdot 15 \cdot 77,\ 2 \cdot 21 \cdot 55,\ 2 \cdot 33 \cdot 35,\ 3 \cdot 10 \cdot 77,\ 3 \cdot 14 \cdot 55,$$
$$3 \cdot 22 \cdot 35,\ 5 \cdot 6 \cdot 77,\ 5 \cdot 14 \cdot 33,\ 5 \cdot 22 \cdot 21,\ 7 \cdot 6 \cdot 55,$$
$$7 \cdot 10 \cdot 33,\ 7 \cdot 15 \cdot 22,\ 11 \cdot 6 \cdot 35,\ 11 \cdot 10 \cdot 21,\ 11 \cdot 14 \cdot 15.$$

Според тоа, имаме $6 + 10 = 16$ начини на запишување на бројот 2310 како шроизвод на два различни броја и $15 + 10 + 15 = 40$ начини на

запишување на бројот 2310 како производ на три различни броја. Конечно, вкупниот број начини на запишување на бројот 2310 како производ на два или три различни броја е $16+40=56$.

53. Колку отсечки и колку триаголници се прикажани на цртежот десно?



Решение. На цртежот има 6 мали и 2 големи триаголници. Според тоа, вкупно $6+2=8$ триаголници.
На цртежот има 6 отсечки кои се составени од по две мали отсечки и 13 отсечка која е составена од една мала отсечка. Според тоа, на цртежот вкупно има $6+13=19$ отсечки.

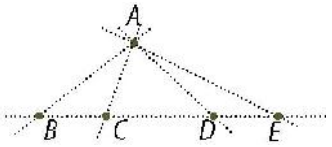
54. Колку најмалку и колку најмногу отсечки, колку најмалку и колку најмногу триаголници се определени со различните точки A,B,C,D и E кои припаѓаат на иста рамнина?
Решение. Со пет различни точки A,B,C,D и E, без разлика каква е нивната заемна положба секогаш се определени 10 отсечки и тоа: $AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE$ И DE.
Пет точки не определуваат ниту еден триаголник, ако тие се колинеарни, т.е. лежат на една права.
Пет точки може да определат најмногу 10 триаголници и тоа:
$$ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE \text{ и } CDE.$$
Тоа е случај кога меѓу точките нема три колинеарни.

55. Колку отсечки, а колку триаголници се определени со темињата на конвексен шестаголник?
Решение. Имаме 6 темиња, односно 6 крајни точки на отсечки. Со секои две точки е определена отсечка, а како отсечките XY и YX се еднакви, во случајов имаме $\frac{6\cdot5}{2}=15$ отсечки кои се опреелени со темињата на конвексниот шестаголник. Аналогно се наоѓа дека бројот на триаголниците е $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}=20$.

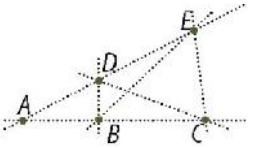
56. Дадени се 100 точки. Ако никои три од овие точки на припаѓаат на иста права, колку прави се определени со овие точки.
Решение. Секоја права е определена со две точки. Бидејќи меѓу дадените точки нема три колинеарни, доволно е да го определиме бројот на различните парови точки. За избор на првата точка имаме 100

можности, а за избор на втората точка имаме 99 можности. Но, правата XY се совпаѓа со правата YX, па затоа вкупниот број можности треба да го поделиме со 2. Значи, со дадените 100 неколинеарни точки се определени вкупно $(100 \cdot 99) : 2 = 4950$ прави.

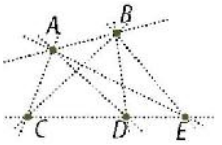
57. Колку прави се определени со 5 точки? Разгледај ги сите случаи.
Решение. Можни се следниве пет случаи:
1) Ако сите пет точки се колинеарни, тогаш тие определуваат само една права.
2) Ако четири точки се колинеарни, тогаш тие определуваат пет прави: AB, AC, AD, AE, BC.



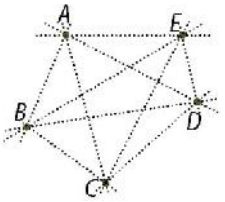
3) Ако имаме две тројки колинеарни точки, тогаш тие определуваат шест прави и тоа: $AB, AD,\ BD, BE, CD, CE$.



4) Ако точно три точки се колинеарни, тогаш тие определуваат осум прави и тоа: $AB,\ AC, AD,\ AE, BC, BD, BE, CD$.

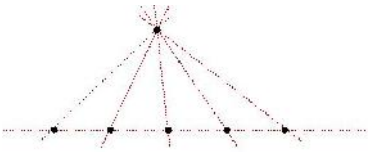


5) Ако нема тројка колинеарни точки, тогаш точките определуваат десет прави и тоа: $AB, AC, AD, AE,\ BC, BD, BE, CD, CE, DE$.

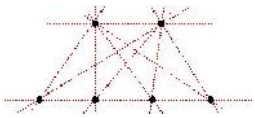


58. Колку прави се определени со 6 точки? Разгледај ги сите случаи.
Решение. Можни се повеќе случаи.
1) Ако сите точки се колинеарни, тие определуваат 1 права.

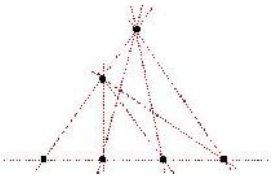
2) Ако пет точки се коленеарни, тие определуваат 6 прави.



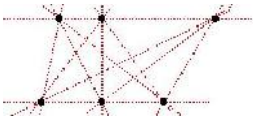
3) Ако четири точки се коленеарни, тие определуваат 10 прави.



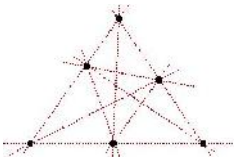
4) Ако една четворка и една тројка точки се колинеарни, тие определуваат 8 прави.



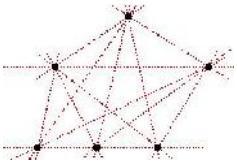
5) Ако две тројки точки се колинеарни, тие определуваат 11 прави.



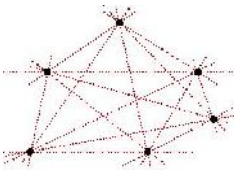
6) Ако постојат три тројки колинеарни точки, тие определуваат 9 прави.



7) Ако постои една тројка колинеарни точки, тие определуваат 13 прави.



8) Ако нема три колинеарни точки, тие определуваат 15 прави.



59. Шест точки A,B,C,D,E и F припаѓаат на рамнината ~ .

а) Кој е најмалиот број четириаголници чии темиња се точките A,B,C,D,E и F ?

б) Кој е најголемиот број четириаголници чии темиња се точките A,B,C,D,E и F ?

в) Дали постои распоред на точките A,B,C,D,E и F таков што тие се темиња на точно 12 четириаголници?

Решение. а) Шест точки не определуваат ниту еден четириаголник, ако меѓу нив има пет колинеарни точки.

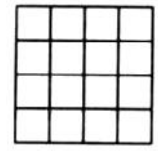
б) Шест точки може да определат најмногу 15 четириаголници и тоа кога меѓу нив нема три колинеарни точки. Тоа се четириаголниците:

$$ABCD, ABCE, ABCF, ABDE, ABDF,$$
$$ABEF, ACDE, ACDF, ACEF, ADEF,$$
$$BCDE, BCDF, BCEF, BDEF, CDEF.$$

в) Шесте точки определуваат 12 четириаголници ако меѓу нив има точно една тројка колинеарни точки. Ако, на пример, точките A,B,C се коленеарни, тогаш четириаголниците $ABCD, ABCE, ABCF$ не постојат и преостануваат само четириаголниците:

$$ABDE, ABDF, ABEF, ACDE, ACDF, ACEF,$$
$$ADEF, BCDE, BCDF, BCEF, BDEF, CDEF.$$

60. Квадрат со димензии $4\,cm \times 4\,cm$ е поделен на мали квадрати со димензии $1\,cm \times 1\,cm$. Колку отсечки и колку квадрати содржи добиената фигура?



Решение. Во секој ред има по 5 точки. Секоја отсечка е определена со две точки. За избор на првата точка A имаме 5 можности, а за избор на втората точка B имаме 4 можности. Значи, имаме $5 \cdot 4 = 20$ можности и тој број треба да го поделиме со 2 бидејќи отсечката AB е иста со отсечката BA. Значи, во секој ред имаме по $20 : 2 = 10$ отсечки. Истото важи и за секоја колона. Конечно, бидејќи имаме $5 + 5 = 10$ редови и колони, дадената фигура содржи $10 \cdot 10 = 100$ отсечки.

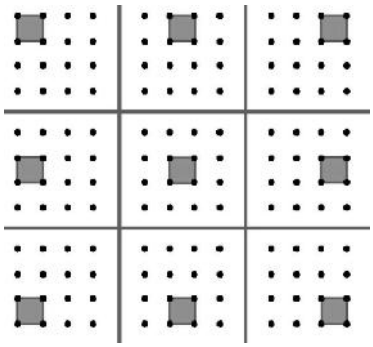
Во секој ред има 4 квадрати со должина на страна 1, па како има 4 реда, имаме $4 \cdot 4 = 16$ квадрати со должина на страна 1. Во еден ред има по 3 квадрати со должина на страна 2, а вакви редови има 3, што значи дека има $3 \cdot 3 = 9$ квадрати со должина на страна 2. Слично има $2 \cdot 2 = 4$ квадрати со должина на страна 3 и $1 \cdot 1 = 1$ квадрат со должина на страна 4. Конечно, дадената фигура содржи $16 + 9 + 4 + 1 = 30$

квадрати.

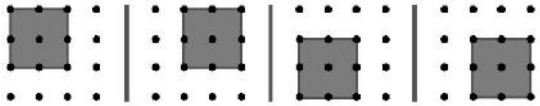
61. Колку квадрати може да се формираат така што нивните темиња ќе бидат точките на квадратната мрежа прикажана на цртежот десно?

Решение. Ако растојанието меѓу две соседни точки (хоризонтални или вертикални) го означиме со x, тогаш:

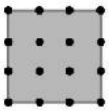
- квадрати со должина на страна x има 9 и тоа:



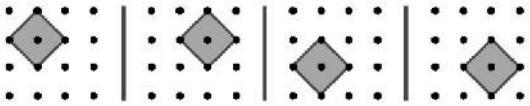
- квадрати со должина на страна $2x$ има 4 и тоа:



- квадрати со должина на страна $3x$ има 1 и тоа:



- квадрати со должина на страна y каде y е дијагоналата на квадратот со должина на страна x има 4 и тоа:



- квадрати со должина на страна z каде z е дијагонала на правоаголник со страни x и $2x$ има 2 и тоа:

62. Софија има осум стапчиња со дожини $1\,cm, 2\,cm, ..., 8\,cm$ и од нив составува рамностран триаголници. При составувањето таа стапчињата

ги поврзува во нивните крајни точки, без виткање и кршење. На колку начини Софија може да состави рамнострани триаголници? Редоследот на страните и редоследот на стапчињата на нив не е важен.

Решение. Дожината на страната не може да е 3 бидејќи $3=2+1$ и недостасуваат стапчиња за третата страна.

Должината на страната не може да се 4 бидејќи $4=3+1=2+2$, но немаме две стапчиња со должина $2\,cm$.

Значи, должината на страната не може да е помала од $5\,cm$.

Понатаму, $1+2+3+4+5+6+7+8=36$, па затоа должината на страната може да биде најмногу $36:3=12\,cm$.

Рамностраните триаголници може да се состават на следните начини.

Должина на страна	Избор на стапчиња	Број на можности
5	$5=4+1=3+2$.	1
6	$6=5+1=4+2$.	1
7	$7=6+1=5+2$, $7=6+1=4+3$, $7=5+2=4+3$, $6+1=5+2=4+3$.	4
8	$8=7+1=6+2$, $8=7+1=5+3$, $8=6+2=5+3$, $7+1=6+2=5+3$, $8=6+2=1+3+4$.	5
9	$8+1=7+2=6+3$, $8+1=7+2=5+4$, $8+1=6+3=5+4$, $7+2=6+3=5+4$.	4
10	$8+2=7+3=6+4$, $8+2=7+3=1+4+5$.	2
11	$8+3=7+4=6+5$, $7+4=6+5=1+2+8$.	2
12	$8+4=7+5=1+2+3+6$, $8+4=7+2+3=1+5+6$, $8+1+3=7+5=2+4+6$.	3

Зн ачи, Софија може да состави рамностран триаголник на 22 начина.

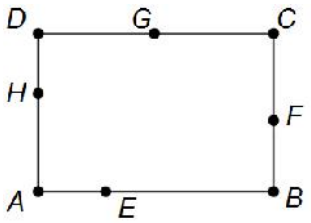
63. Определи го бројот на триаголниците со периметар 49 кај кои должините на сите страни се прости броеви? Колку меѓу овие триаголници се рамнокраки?

Решение. Најдолгата страна не може да е поголема од 23, ниту пак да е помала од 17. Ако ова се земе предвид лесно се добива дека бараните триаголници се со страни:

(23, 23, 3), (23, 29, 7), (23, 13, 13), (19, 19, 11), (19, 17, 13).

64. Даден е правоаголник $ABCD$ и точки E,F,G,H такви што важи $A-E-B, B-F-C, C-G-D, D-H-A$. Определи го бројот на триаголниците чии темиња се од множеството $\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$.

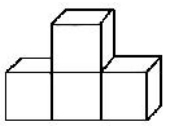
Решение. Ќе определиме на колку начини можеме да избереме три различни точки од дадените осум точки. За избор на првата точка имаме 8 можности. Откако неа сме ја избрале, ни останууваат 7 точки, па за избор на втората точка имаме 7 можности, по што ни останууваат 6 точки, што значи дека за избор на третата точка ни преостануваат 6 можности. Значи, во случајот имаме $8\cdot 7\cdot 6=336$ можности. Но, ако сме избрале три точки, на пример A,B,C, тогаш тие определуваат еден триаголник, а редоследно може да се избрани како што следува:



$$(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A),$$

односно на 6 начини. Затоа од дадените осум точки три различни точки може да се изберат на $336:6=56$ начини. Но, изборите $A,E,B;\ B,F,C;\ C,G,D;\ D,H,A$ не даваат триаголници, па затоа вкупниот број триаголници чии темиња се дадените точки е $56-4=52$.

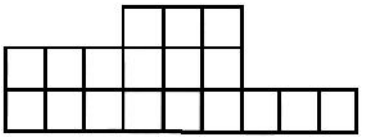
65. Пабло од четири еднакви коцки ја составил фигурата прикажана на цртежот десно. Потоа тој фигурата ја обоил со сина боја. Колку sидови на коцка обоил Пабло?



Решение. Пабло оддолу обоил 3 sида на коцка, од горе обоил 3 sида на коцка, однапред обоил 4 sида на коцка, одназад обоил 4 sида на коцка, од лево обоил 2 sида на коцка и од десно обоил 2 sида на коцка.

Конечно, Пабло обоил $3+3+4+4+2+2=18$ сида на коцка.

66. Пабло со лепење на 18 еднакви коцки составил постоње за прогласување на победникот во училишниот кроз. Постољето имало три реда и за победникот, второпласираниот и третопласираниот местата биле на три различни висини, при што за секого имало по три коцки за стоење. Потоа постољето го обоил со сина боја. Колку кутии боја му биле потребни на Пабло за да го обои постољето ако со една кутија тој боел 6 сидови на една коцка?



Решение. Гледано однапред постољето кое го составил Пабло изгледа како на цртежот десно. Пабло оддолу обоил 9 сида на коцка, од горе обоил 9 сида на коцка, однапред обоил 18 сид на коцка, одназад обоил 18 сида на коцка, од лево обоил 3 сида на коцка и од десно обоил 3 сида на коцка. Конечно, Пабло обоил $9+9+18+18+3+3=60$ сида на коцка. Бидејќи за секои 6 сида потрошил по една кутија боја, за боењето на целото постоње тој употребил $60:6=10$ кутии боја.

67. Дрвена коцка со раб $5\,cm$ е обоена црвено, па е исечена на коцки со раб $1\,cm$ (единечни коцки). Ангел ги зел сите мали коцки со по еден обоен сид и од нив составувал нови коцки. Колку коцки Ангел можел да состави под услов да ги употреби сите мали коцки?

Решение. На секој сид има 25 единечни коцки (квадрати со страна $1\,cm$) од кои 9 имаат точно еден обоен сид. Големата коцка има 6 сида, па затоа единечни коцки со точно еден обоен сид се $6\cdot 9=54$. Коцки може да се составуваат само со 8, 27, 64, 125, 216, 343, ... единечно коцки (Зошто?). Сега, од $54=2\cdot 27$ заклучуваме дека Ангел можел да состави само две коцки со должина на раб $3\,cm$.

68. Дрвена коцка со раб $20\,cm$ е целата обоена, па е исечена на единечни коцки (коцки со раб $1\,cm$). Богдан ги зел сите мали коцки кои имаат точно два обоени сида и до нив составувал нови коцки. Колку коцки можел Богдан да состави ако ги употреби сите мали коцки?

Решение. На секој раб на коцката има 20 единечни коцки, од кои 18 имаат точно по два обоени сида (тоа се соседни сидови). Други еди-

нечни коцки со по два обоени sида не постојат. Коцката има 12 рабови и на секој раб има по 18 коцки со по два обоени sида, што значи дека Богдан има $18 \cdot 12 = 216$ коцки. Коцките може да се составуваат од

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3, \quad 64 = 4 \cdot 4 \cdot 4, \quad 125 = 5 \cdot 5 \cdot 5, \quad 216 = 6 \cdot 6 \cdot 6$$

мали коцки. Понатаму, бидејќи

$$216 = 27 \cdot 8, \quad 216 = 8 \cdot 27, \quad 216 = 3 \cdot 64 + 3 \cdot 8, \quad 216 = 2 \cdot 64 + 11 \cdot 8,$$
$$216 = 64 + 19 \cdot 8, \quad 216 = 27 + 64 + 125, \quad 216 = 27 + 8 \cdot 8 + 125,$$

Богдан може да состави:

- само една коцка со раб $6\,cm$,
- 27 коцки со раб $2\,cm$,
- 8 коцки со раб $3\,cm$,
- 3 коцки со раб $4\,cm$ и 3 коцки со раб $2\,cm$,
- 2 коцки со раб $4\,cm$ и 11 коцки со раб $2\,cm$,
- 1 коцка со раб $4\,cm$ и 19 коцки со раб $2\,cm$,
- 1 коцка со раб $3\,cm$, 8 коцки со раб $2\,cm$ и 1 коцка со раб $5\,cm$,
- 1 коцка со раб $3\,cm$, 1 коцка со раб $4\,cm$ и 1 коцка со раб $5\,cm$.

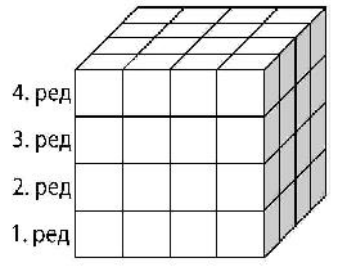
Значи, Богдан коцките може да ги состави на 8 начини, т.е. може да состави 1, 3, 6, 8, 10, 13, 20 или 27 коцки.

69. Торта има форма на коцка со раб $4\,dm$. Горната страна на коцката и сите нејзини бочни sидови се премачкани со шлаг. Потоа тортата е расечена на 64 парчиња во форма на коцки со раб $1\,dm$, при што сечењето е направено паралелно со sидовите на коцката. Определи колку парчиња има кои:

а) немаат sид премачкан со шлаг,

б) имаат еден sид премачкан со шлаг,

в) имаат два sида премачкани со шлаг.



Решение. а) Без премачкани sидови се по 4 внатрешни мали коцки на првиот, вториот и третиот ред, односно $4 + 4 + 4 = 12$ мали коцки.

б) Точно еден премачкан sид ќе има $3 \cdot 2 = 6$ мали коцки на околните 4 sидови и 4 мали коцки на горниот sид, односно $4 \cdot 6 + 4 = 28$ мали коцки.

в) Точно два премачкани sидови ќе имаат $4 \cdot 3 = 12$ мали коцки на бочните рабови и $4 \cdot 2 = 8$ мали коцки на горната основа, односно

$12+8=20$ мали коцки.

70. Имаме 12 еднакви коцки за играње. На ѕидовите на секоја коцка се запишани броевите 1, 3, 5, 7, 9 и 11. Збирот на броевите на спротивните ѕидови на коцките е 12. Со овие коцки се составува квадар со димензии $3\times 2\times 2$. Колку е најголемиот можен збир на броевите на коцките на видливите ѕидови на коцките?

Решение. Збирот ќе биде најголем ако се гледаат ѕидовите на кои се запишани најголемите броеви. Бидејќи збирот на броевите на спротивните ѕидови на коцката е 12, заклучуваме дека ѕидовите на кои се запишани броевите 7, 9 и 11 имаат заедничко теме. Квадарот има 8 темиња, па затоа коцките во темињата на квадарот ќе ги наместиме така што ќе се гледаат ѕидовите со најголемите броеви. Понатаму, на четирите рабови со должина 3 треба да ставиме уште по една коцка. За да збирот биде најголем четирите коцки ќе ги поставиме така што ќе се гледаат двата најголеми броја,т.е. броевите 9 и 11. Според тоа, најголемиот можен збир на видливите ѕидови на малите коцки ќе биде $8\cdot(7+9+11)+4\cdot(9+11)=296$.

71. Две момчиња играат игра во која секој од нив зголемува две цифри на бројот 130502 за 1. Победник е детето по чиј потег сите цифри на тој шестцифрен потез се еднакви. Дали во оваа игра може да има победник?

Решение. Збирот на цифрите на бројот 130502 е 11. Секое момче кога е на потег зголемува две цифри за 1, што значи дека збирот на цифрите го зголемува за 2. Така ќе се добиваат збировите 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, ... Но, ако се добијат исти цифри во шестцифрениот број, тогаш збирот на цифирте е делив со 6. Броевите деливи со 6 се деливи со 2 и со 3, т.е. се парни. Со зголемување на бројот 11 секогаш за 2 се добиваат само непарни броеви. Значи, во играта нема да има победник.

72. Ивана игра со коцки за играње, од кои едната е бела, а другата е црвена. На ѕидовите на белата коцка се запишани броевите 2, 3, 4, 5, 6 и 7, а на црвената броевите 1, 3, 5, 7, 8 и 9. По фрлањето на коцките Ивана составува двоцифрени броеви чија прва цифра ќе биде бројот од белата, а втора бројот од црвената коцка.

а) Колку различни двоцифрени броеви може Ивана да добие на овој

начин?

б) Колку различни двоцифрени броеви може да добие ако редоследот на коцките не е важен и колку од овие броеви ќе бидат деливи со 9?

Решение. а) Првата цифра на двоцифрениот број е број од белата коцка, па затоа броевите може да почнуваат со цифрите 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Зад цифрата 2 може да е било која од цифрите 1, 3, 5, 7, 8 и 9, па ќе добиеме 6 различни двоцифрени броеви. За секоја од преостанатите цифри од белата коцка ќе имаме уште по 6 решенија, бидејќи броевите на белата коцка се различни.Според тоа, добиваме $6 \cdot 6 = 36$ различни двицифрени броеви.

б) Според решението на задачата по а) кога прво го запишуваме бројот од белата па бројот од црвенета коцка добиваме 36 двоцифрени броеви. Ќе определиме колку се преостанатите броеви. Прво ги земеме броевите 1, 8 и 9 од црвената коцка, бидејќи тие не се наоѓаат на белата коцка, па затоа двоцифрените броеви кои почнуваат со овие цифри се уште не сме ги броеле. По овие три цифри можеме да го запишеме секој број од белата коцка, па затоа имаме уште $3 \cdot 6 = 18$ броеви. Сега да ги земеме броевите 3, 5 и 7. Бидејќи тие се наоѓаат и на белата коцка, истите нема да ги земаме од белата коцка, бидејќи ќе добиеме двоцифрени броеви кои веќе ги броевме. Овие цифри ги комбинираме со цифрите кои не се наоѓаат на црвената коцка, т.е. со цифрите 2, 4 и 6. Така ќе добиеме $3 \cdot 3 = 9$ броеви. Според тоа, вкупно имаме $36 + 18 + 9 = 63$ различни двоцифрени броеви.

Еден број е делив со 9, ако збирот на цифрите му е делив со 9. Ќе ги наведеме соодветните парови такви броеви. Првиот број во заградата е од белата, а вториот од црвената коцка: $(2,7), (4,5), (6,3)$. Вкупно имаме 3 пара, а секој пар определува 2 двоцифрени броја, па затоа двоцифрени броеви деливи со 9 се 6.

73. Ацо и Марија ја играат следнава игра. Карти, кои се нумерирани со броевите од 1 до 100, ги стават на маса една покрај друга, почнувајќи од 1 па до 100. Потоа Ацо ја зема секоја седма карта, па ја зема секоја карта на кои се броеви кои ја содржат барем една цифра 7. Потоа Марија од преостанатите карти ги зема картите на кои се броеви деливи со 5, а потоа и картите на кои се броеви кои содржат барем една цифра 5. Кој ќе има повеќе карти и за колку? Како ќе се заврши играта, ако Марија почне земање на карти кои со правилото кои се однесува на бројот 5, а Ацо продолжи со правилото кое се однесува на

бројот 7?

Решение. Ацо прво ќе ги избере броевите деливи со 7 кои се 14 броја и тоа: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 и 98, а потоа од преостанатите броеви ќе ги избере броевите: 17, 27, 37, 47, 57, 67, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 87 и 97, кои се вкупно 16. Значи, Ацо ќе земе $14+16=30$ карти.

Потоа Марија од преостанатите карти ќе ги земе броевите деливи со 5 кои се 17 и тоа: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 80, 85, 90, 95 и 100, а потоа ќе ги земе броевите кои во својот запис ја содржат цифрата 5 и тоа се броевите: 51, 52, 53, 54, 58 и 59, кои се вкупно 8. Значи, Марија ќе земе $17+6=23$ карти. Според тоа, Ацо ќе земе 7 карти повеќе.

Ако Марија прва зема карти таа ќе земе 28 карти, а потоа Ацо ќе земе 25 карти. Значи, во овој случај Марија ќе земе 3 карти повеќе. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

74. Матео и Пабло играат игра испишувајќи ги наименично цифрите на 2006-цифрен број. Матео ја почнува играта испишувајќи една цифра, при што може да избира дали ќе почне од првата или од последната (2006-та) цифра. Пабло ја продолжува низата цифри која ја започнал Матео, така што ја испишува втората или 2005-тата цифра итн. се до испишувањето на последната или првата цифра. Ако на крајот на играта се добие број кој е делив со 9 победува Пабло, а ако се добие број кој не е делив со 9 победува Матео. Кој има победничка стратегија?

Решение. Еден број е делив со 9, ако збирот на неговите цифри е делив со 9. Пабло може секогаш да го контролира овој збир, бидејќи на секоја цифра x која ќе ја запише Матео x $(x\neq 9)$, тој ја запишува цифрата $9-x$. Ако Матео ја запише цифрата 9 и Пабло ќе ја запише цифрата 9. На тој начин збирот на секој пар на цифрите кои последователно ќе ги запишуваат Матео и Пабло (без разлика дали Матео ќе почне од првата или последната цифра) ќе биде 9 или 18, што обезбедува добиениот 2006-тоцифрен број да е делив со 9. Според тоа, со оваа стратегија Пабло секогаш победува.

75. Матео и Пабло играат игра испишувајќи ги наименично цифрите на 2006-цифрен број. Матео ја почнува играта испишувајќи една цифра, при што може да избира дали ќе почне од првата или од последната

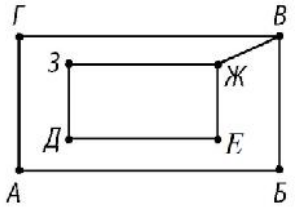
(2006-та) цифра. Пабло ја продолжува низата цифри која ја започнал Матео, така што ја испишува втората или 2005-тата цифра итн. се до испишувањето на последната или првата цифра. Ако на крајот на играта се добие број кој е делив со 11 победува Пабло, а ако се добие број кој не е делив со 11 победува Матео. Кој има победничка стратегија?

Решение. Еден број е делив со 11 ако разликата на збирот на цифрите на парните и збирот на цифрите на непарните места е делива со 11. Во нашиот случај Матео секогаш ја пишува првата, третата, петтата, ... или 2006-тата, 2004-тата, 2002-рата ... цифра, а Пабло ги пишува втората, четвртата, шестата,... или 2005-тата, 2003-тата, 2001-вата ... цифра.

Ако Матео почне од првата цифра, секогаш ќе победува Пабло, бидејќи стратегијата е крајно едноставна. Пабло секогаш ќе ја запишува цифрата која ја запишал Матео и се добива бројот $aabbcc...xxyy...$ кој очигледно е делив со 11.

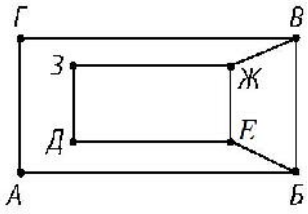
Ако Матео како 2006-та цифра ја запише цифрата 0, а Пабло како 2005-та цифра ја запише цифрата x, тогаш Матео како следна цифра ќе ја запише цифрата x и потоа ги повторува сите цифри на Пабло. На тој начин пред да се запише првата цифра ќе се добие $\_aabbcc...xx0$. Сега, Пабло ако ја запише било која цифра на местото на цртичката ќе се добие број кој не е делив со 11. Според тоа, Матео има победничка стратегија.

76. Во малата држава Недојдија градовите се обележани со буквите А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З и некои од нив се поврзани со патишта (цртеж десно). Дали сите патишта може да се поминат точно еднаш при што низ некој град може да се помине и повеќе пати? Ако е тоа можно објасни како и од кое место треба да се тргне?



Решение. Градовите и патиштата на државата Недојдија формираа еден граф. Темињата В и Ж се со степен 3, а степените на другите темиња се 2. Тоа значи дека сите патишта може да се поминат точно по еднаш тргнувајќи од В или Ж. Едно од можните обиколувања е: ВГАБВЖЕДЗЖ.

77. Во малата држава Недојдија градовите се обележени со буквите А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З и некои од нив се поврзани со патишта (цртеж десно). Дали сите патишта може да се поминат точно еднаш при што низ некој град може да се помине и повеќе пати? Ако е тоа можно објасни како и од кое место треба да се тргне?



Решение. Градовите и патиштата на државата Недојдија формираа еден граф. Темињата Б, В, Ж и Е се со степен 3, а степените на другите темиња се 2. Тоа значи дека сите патишта не може да се поминат точно по еднаш, бидејќи за таа цел е потребно да има најмногу две соседни темиња со непарен степен.