Ристо Малчески
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 28

(збирка подготвителни задачи за натпревари за 4 и 5 одделение)

Скопје
11. октомври 2022

Рецензенти
д-р Катерина Аневска
д-р Методи Главче

СОДРЖИНА

Предговор		5
I	Пресметувања, бројни ребуси и равенки	7
II	Текстуални задачи	13
III	Геометрија	22
IV	Множества, логика и комбинаторика	29
Решенија на задачите		
I	Пресметувања, бројни ребуси и равенки	36
II	Текстуални задачи	51
III	Геометрија	77
IV	Множества, логика и комбинаторика	93

ПРЕДГОВОР

Книгава *Математички талент* 28 е наменета за талентираните ученици по математика од четврто и петто одделение и истата е на извесен начин дополнување на книгите *Математички талент* 1, 2, 13, 14, 19, 22 и 25. Меѓутоа, сметаме дека таа ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 175 решени задачи во која во четири одделни дела се обработени аритметички, текстуални, логички, комбинаторни и геометриски задачи, приспособени за учениците на возраст од осум до десет години. Притоа, во четвртиод дел се дадени и три задачи од темата Работа со податоци. Причината за поместување на овие задачи е тоа што во најновите наставни програми е содржана оваа тема, па природно е да се претпостави дека под притисок на програмите во системот на натпревари ќе се најдат и задачи од ваков вид.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Тоа значи дека изборот на задачите е направен со цел развој на квалитетите на мислењето, како и усвојување на методите на решавање задачи, што треба да биде примарна цел на наставата по математика. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварување, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Катерина Аневска и д-р Методи Главче, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторите
11 октомври, 2022 г.

I. ПРЕСМЕТУВАЊА, БРОЈНИ РЕБУСИ И РАВЕНКИ

1. Прецртај 6 цифри во низата

   2012201220122012

   така да десетцифрениот број кој се состои од преостанатите цифри биде:
   а) најголемиот можен број,
   б) најмалиот можен број.

2. Броевите 1,2,3,4,...,40 се запишани еден по друг без запирки, па така е добиен бројот

   12345678910111213...383940.

   Кој е најголемиот можен број што може да се добие ако од вака запишаниот број избришеш 66 цифри (редоследот на цифрите не смееш да го менуваш.)

3. Шест карти се нумерирани со броевите: $309, 9, 41, 98, 5, 2$.
   Кој е најмалиот број, кој може да се формира со редење на овие карти една до друга?

4. Запиши ги сите броеви помали од 100 кои се запишуваат со точно две римски цифри.

5. Со римски цифри запиши ги броевите од 95 до 105.?

6. Премести само едно кибритче така да добиеш точно равенство. Определи ги сите решенија.

7. Запиши ги сите броеви од втората стотка чија цифра на единиците е за еден поголема од цифрата на стотките.

8. Пресметај:
$$(300+10\cdot 3+7)\cdot(567829-567827)\cdot(2+2:2).$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$12345-(13456-504:9-9876).$$

10. Колку знаци плус и меѓу кои броеви треба да се додадат за да од бројот 123456789 се добие бројот 99?

11. Користејќи го само бројот 2 и аритметичките операции, претстави го бројот 58.
Решение.Имаме
$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-(2+2+2)=64-6=58.$$

12. Користејќи ги наизменично броевите 2 и 3, како и аритметичките операции и заградите, запиши го бројот 516.

13. Користејќи ги броевите $1, 3, 5, 7\ldots...$, (броевите мора да се користат по истиот редослед) на најкраток начин претстави го бројот 144.

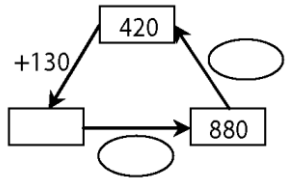
14. Меѓу некои или меѓу сите цифри 2 0 2 2 стави знаци на аритметичките операции, а по потреба и загради така што вредноста на добиениот израз ќе биде:
а) 1, б) 2, в) 3, г) 4, д) 5.
(Цифрите 2, 0, 2, 2 не смее да ги менуваат местата.)

15. Пополни ги празните полиња во табелата.

+			
	467	546	
500	650		826
208			

16. Ако е $x-2012=3434$, пресметај:
а) $(x+2000)-2012$;
б) $(x-2000)-2012$;
в) $x-(2012-2000)$.

17. Во шемата прикажана на цртежот десно запиши ги соодветните броеви така што пресметувањата ќе бидат точни.



18. Со која цифра завршува производот на првите 2011 непарни броеви?

19. Со која цифра завршува производот на 2010 седмици?

20. Воочи го правилото и продолжи ја низата за уште три члена:
1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

21. Во низа се запишани 11 броја така што збирот на секои три последователни броја е еднаков на 18. Збирот на сите 11 броја е еднаков на 64. Кој број е шестиот по ред запишан број во оваа низа?

22. Дешифрирај го изразот:
$$\overline{AAA} = A \cdot A \cdot \overline{AB}.$$
На различни букви одговараат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

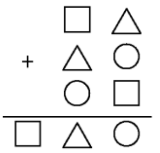
23. Дешифрирај го собирањето, ако на исти букви одговараат исти цифри, а на различни букви различни цифри.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & A \\ & & & & B & A \\ & & & C & B & A \\ + & & D & C & B & A \\ \hline & & 2 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

24. На линиите запиши ги соодветните цифри така што собирањето ќе биде точно:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & & \\ & \overline{} & & & \overline{} & \overline{} \\ + & 3 & & \underline{} & 7 & 1 \\ \hline & 5 & 1 & 2 & 9 & \end{array}$$

25. Под исти фигури се кријат исти цифри, а под различни фигури се кријат различни цифри. Определи ги соодветните цифри така што пресметувањето ќе биде точно:



26. Дешифрирај го одземањето, во кое на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$LAV - KEC = MIS\,.$$

Определи барем едно решение:

27. Дешифрирај го собирањето:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & B \\ & A & A & A & A \\ + & A & A & A & A \\ \hline B & A & A & A & A \end{array}$$

28. Истите букви замени ги со исти, а различните букви со различни цифри, така да собирањето

$$\overline{\mathrm{MC}} + \overline{\mathrm{MC}} + \overline{\mathrm{MC}} = \overline{D\mathrm{M}}$$

биде точно и при тоа во бројот $\overline{\mathrm{MC}}$ цифрата на десетки е поголема од цифрата на единици. Потоа, пресметај ја вредноста на изразот:

$$D + 2 \cdot \mathrm{M} + 3 \cdot \mathrm{C}\,.$$

29. Во збирот КУ + КУ + РИ + КУ истите букви претставуваат исти цифри, а различните букви различни цифри. Која е најголемата можна вредност на тој збир?

30. Во бројниот ребус

$$\overline{FA} + \overline{LA} + \overline{MI} = \overline{SI}$$

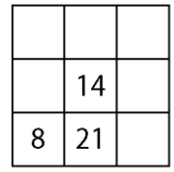
на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат разлини цифри. Определи ја најголемата можна вредност на збирот и во тој случај најде барем едно решение на дадениот ребус.

31. Дешифрирај го бројниот ребус

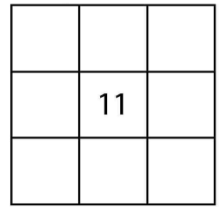
$$\overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 3000\,,$$

така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

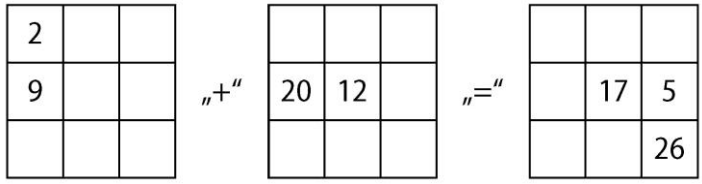
32. Во квадратот на цртежот десно се запишани три броја. Запиши броеви во празните квадратчиња така што квадратот ќе биде магичен.



33. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши ги сите непарни броеви од 3 до 19 (освен бројот 11 кој е веќе запишан) така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков, т.е. така што ќе добиеш магичен квадрат.



34. Пополни ги празните полиња во магичните квадрати



така што збирот на броевите запишани во соодветните полиња на првите два квадрати ќе биде еднаков на бројот запишан во соодветното поле на третиот квадрат.

35. За еден природен број ќе велиме дека е *растечки* ако секоја негова цифра (освен првата), гледано од лево кон десно, е за еден поголема од претходната. Определи растечки број чија третина е природен број поголем од 1500 и помал од 2300.

36. Намалениот е еднаков на производот на броевите 1637 и 5, а намалителот е еднаков на количникот на броевите 1566 и 9. Определи ја вредноста на изразот.

37. Пабло замислил некој број. Потоа на тој број му додал 5, па добиениот збир го поделил со 2, добиениот количник го помножил со 9, од добиениот производ одзел 6, разликата ја поделил со 7 и го добил бројот 3. Кој број го замислил Пабло?

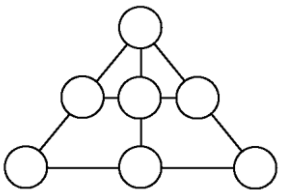
38. Секој знак претстатвува некој број. Определи ги броевите кои ги претставуваат знаците △, □ и ○, ако

$$\bigcirc + \triangle = 20,$$
$$\bigcirc + \square = 25,$$
$$\bigcirc + \square + \square = 33.$$

39. Секој од симболите $\triangle, \otimes, \varnothing$ претставува по еден број. Определи ги овие броеви ако

$$7 \cdot \triangle + \otimes = 117,$$
$$8 \cdot \varnothing = 56,$$
$$6 \cdot \varnothing - \otimes = 30.$$

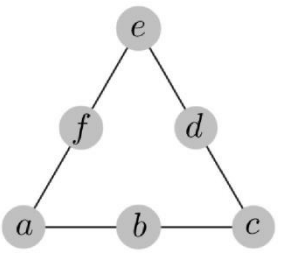
40. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги сите броеви од 1 до 7 така што збирот на броевите запишани во кругчињата кои се наоѓаат на иста права е секогаш 12.



41. Буквите во кругчињата на цртежот десно замени ги со броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 така што важи

$$a+b+c=c+d+e=e+f+a.$$

Сите броеви мора да се употребат. Што значи дека ниту еден број не се повторува. Колкава може да биде вредноста на збирот? За секој можен збир прикажи барем еден соодветен распоред на броевите.



42. Бабата Марија купила голема вреќа со бомбони . Од нив направила 10 еднакви пакетчиња за своите десет внуци и ѝ останала една бомбона. Кога ѝ јавиле дека две внучиња нема да дојдат, сите бомбони ги вратила во големата вреќа и почнала од почеток. За внуците кои доаѓаат направила еднакви пакетчиња и и останале три бомбони. Колку бомбони купила бабата Марија, ако знаеме дека таа купила повеќе од 200, а помалку од 260?

II. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Машина за печатење билети за театар секогаш бројот на билтетот го печати со четири цифри. Ако бројот на билетот е едноцифрен, двоцифрен или трицифрен број, тогаш пред бројот на билетот машината запишува соодветен број нули. На пример, билетот со број 4 се запишува како 0004, а билетот со број 65 се запишува како 0065. Колку нули машината ќе отпечати за картите со редни броеви од 1 до 212?

2. За нумерирање на една книга се употребени 540 цифри. Колку страници има оваа книга ако секоја страна е нумерирана со некој број, а нумерирањето започнува со бројот 1?

3. Во улицата на Горјан сите куќи од левата страна се означени со сите непарни броеви од 1 до 31, а сите куќи од десната страна се означени со сите парни броеви од 2 до 28. Колку куќи има во улицата на Горјан и колку цифри се употребени за нивното означување?

4. Збирот на броевите 278 и 319 намали го за најголемиот непарен број од втората стотка.

5. Од разликата на броевите 230 и 58 одземи го првиот парен следбеник на бројот 38.

6. Определи ги збирот и разликата на најголемиот и најмалиот петцифрен број секој од кои има збир на цифри 24.

7. Алекс и Матеј погаѓаат број кој бго замислил Рампо.
   Алекс: Рампо го замислил бројот кој е еднаков на производот на броевите 750 и 31.
   Матеј: Рампо го замислил бројот кој е еднаков на производот на броевите 640 и 36.
   Ако Алекс згрешил за 250, за колку згрешил Матеј?

8. Збирот на намаленикот и разликата е 105, а разликата е за 3 поголема од намалителот. Определи ги намаленикот и намалителот.

9. Да се определат 8 последователни природни броеви чиј збир е 100.

10. Определи четири последователни природни броеви чиј збир е 2010.

11. Најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 21 одземи го од најголемиот трицифрен број чиј производ на цифри е 12.

12. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков 4044. Разликата е поголема од намалителот за 2020. Определи ги намаленикот, намалителот и разликата.

13. Збирот на три броја е 2022. Ако првиот број се намали за 111, вториот број се намали за 170, а третиот број се намали за 346, се добиваат еднакви броеви. Определи ги трите почетни броја?

14. Кај некои броеви од четвртата стотка цифрата на десетките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и стотките. Определи два такви различни броја така што
    а) нивниот збир е најголем можен,
    б) нивната разлика е број од шестата десетка. Определи ги сите решенија.

15. Збирот на три броја е еднаков на 2021. Ако најмалиот од нив го намалиме за 21, добиваме три броја такви што разликата на двата помали броја е 200, а разликата на двата поголеми броја е 100. Определи ги почетните броеви.

16. Од цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 состави еден трицифрен и еден двоцифрен број такви што:
    а) нивниот збир е 479,
    б) нивната разлика е 459.

17. Определи ги сите природни броеви кои при делење со 7 даваат количник кој е еднаков на остатокот од делењето.

18. Збирот на два броја е 2020, а $\frac{1}{6}$ од поголемиот број е еднаква на $\frac{1}{4}$ од помалиот број. Кои се тие броеви?

19. Збирот на пет броја е 20295. Секој од нив, освен првиот, е поголем за 2020 од претходниот. Кои се тие броеви?

20. Бројот 2020 запиши го како збир на два собирци од кои едниот е за 138 поголем од другиот.

21. Пабло замислил некој број. На бројот 456 му го додал замисленият број повеќе од 10 пати и го добил бројот 555. Кој број го замислил Пабло?

22. Во збирот

$$M+A+T+E+M+A+T+I+K+A$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различницифри. Определи ги овие цифри така што збирот ќе биде:
а) најмал можен,
б) најголем можен.

23. Андреј на хартија запишал 0, а потоа последователно ги пишувал сите броеви од 1 до 2020. Ако секоја минута запишувал точно 77 цифри, колку броеви му преостанале да запише по 1 час и 30 минути пишување?

24. Во едно училиште наставата почнува во 9 часот. Секој ден учениците од четврто одделение имаат 5 школски часа кои траат по 50 минути. Прво имаат 4 школски часа, по што следува голем одмор за ручек кој трае 45 минути. По ручекот се одржува петтиот час. Кога завршува петтиот час ако нема мали одмори меѓу школските часови?

25. Марија два пати го обиколила дворот на нејзината куќа кој имал правоаголен облик. По секоја пократка страна таа одела $15\,\mathrm{s}$. За колку време Марија ја поминувала подолгата страна на дворот, ако таа цело време одела со иста брзина, а вкупното време на обиколката било три минути и дваесет секунди?

26. Марија има два часовника. Првиот часовник на секои 45 минути доцни една минута, а вториот на секои 30 минути побрзува една минута. На кое времиња треба Марија да ги намести двата часовника во 9 часот наутро за да на полноќ истиот ден двата часовника покажуваат точно време?

27. Бојана се наоѓа на железничката станица во Скопје и телефонски и се јавила на мајка ѝ: „Возот стигна пред 10 минути, а се возевме точно 4 часа и 22 минути.“ Мајката на Бојана во тој момент погледнала на часовникот кој покажувал 13 часот и 5 минути.
а) Во колку часот тргнал возот со кој Бојана пристигнала во Скопје?
б) Како агол определувале стрелките на часовникот во моментот кога тргнал возот?

28. Часовникот на сат-кулата во Прилеп заостанува 12 секунди за 14 дена. Кое време ќе покажува часовникот на 9.4.2023 година во 10 часот ако е наместен да покажува точно време на 1.1.2023 година во 10 часот?

29. Еден часовник заостанува 6 секунди во пет дена. Кое време ќе го покажува часовникот на пладне на 7.3.2022 година, ако е подесен да покажува точно време на пладне на 1.1.2022 година?

30. Пабло тргнал со автомобил од Скопје за Љубљана во 14:30 часот. При патувањето направил две паузи од по 45 минути, а во вожња поминал $13\,h\,20\,\min$. Во колку часот стигнал Пабло во Љубљана?

31. Збирот на годините на сите ученици во една група е 56. По две години збирот на нивните години ќе биде 70. Колку ученици има во оваа група?

32. Ќерката денес е 18 години помлада од мајката, а пред 5 години таа била 4 пати помлада од мајката. Колку години има мајката, а колку ќерката?

33. Таткото има 45 години, а синот 22. После колку години таткото ќе биде два пати постар од синот?

34. Братот е два пати постар од сестрата, а 4 пати помлад од својот татко.

Таткото и ќерката заедно имаат 36 години. Колку години имаат заедно братот, сестрата и нивниот татко?

35. Пет вола и два овна чинат 11 златници, а осум овна и два вола чинат 8 златници. Колку златници чини еден вол, а колку еден овен?

36. На крајот на учебната година учениците од едно одделение кое имало 20 ученици, собрале пари за поклон на учителката. Секое момче дало по 200 денари, а секое девојче по 150 денари и собрале вкупно 3600 денари. Колку момчиња, а колку девојчиња имало во тоа одделение?

37. Вера купила фрижидер, телевизор и машина за перење. За сите три апарати таа платила 80000 денари. Колку чини секој од овие апарати, ако фрижидерот е 8900 денари поскап од машината за перење, а телевизорот е 6200 денари поефтин од фрижидерот?

38. Браќата Горјан и Андреј отпатувале во земјата Дренландија. Валутата на Дренландија е дрен. По доаѓањето Горјан разменил 4500 денари во банката A и за секои 5 денари добил по 20 дрена. Андреј разменил 4300 денари во банката B и за секои 100 денари добил 420 дрена. Од разликата на добиените износи братот кој добил повеќе дрена купил два сладоледи од чоколадо. Кој ги платил сладоледите? Колку чинел еден сладолед?

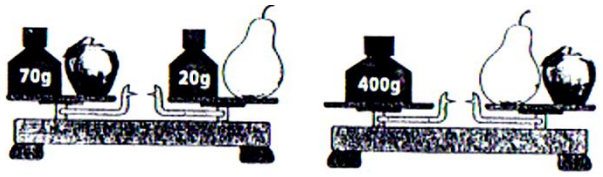
39. Сестрите Маја, Ана, Натка и Каролина купиле роденденски поклон за својата другарка Дарка. На прашањето на нивната мајка колку пари дала секоја од нив, тие одговориле:
Маја: Натка, Каролина и јас заедно дадовме 1200 денари.
Натка: Знам само дека Ана, Каролина и јас заедно дадовме 1020 денари.
Каролина: Се сеќавам дека дадов 100 денари повеќе од Натка.
Ана: Поклонот чинеше 1500 денари.
Кое девојче колку пари дало за купување на поклонот.

40. Маја, Ана и Иван заедно имаат 1500 денари. Иван и дал на Маја 130 денари, Маја и дала на Ана 220 денари и Ана му дала на Иван 330 денари, по што секој од нив имал еднаква сума пари. Колку пари имало на почетокот секое дете?

41. Цената на букетот во кој има четири ружи и четири лалиња е 960 денари, а цената на букетот во кој има две ружи и шест лалиња е 840 денари. Колку чини букет во кој има пет ружи и три лалиња?

42. Горјан во својата штедна касичка вкупно има 108 денари во монети од 5, 2 и 1 денар. Вредноста на парите во монети од 5 ден. и 2 ден. е еднаква. Бројот на монетите од 1 ден. е еднаков на бројот на монетите од 2 ден. и 5 ден. По колку монети има во касичката од секој вид?

43. Во двата случаја вагата е во рамнотежа. Пресметај ја масата на јаболкото и масата на крушата врз основа на информациите дадени на сликата.



44. Мечокот Тоби во текот на секое лето ја зголемува својата тежина по $5\,kg$, а во текот на секоја зима слабее $4\,kg$. Неговата маса не се менува во текот на пролетта и есента. Есента 2021. година неговата маса била $100\,kg$. Колкава е масата на Тоби во пролетта 2018. година?

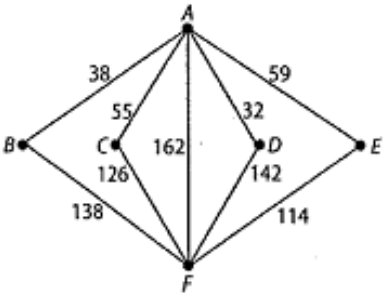
45. Масата на буре со пченица изнесува $148\,kg$. Откако од бурето е потрошена третина од пченицата, масата на бурето со преостанатата пченица е еднаква на $105\,kg$. Определи ја масата на празното буре.

46. Растојанието меѓу местата A и B е 525 километри. Од местото A кон местото B тргнал автомобил кој вози со брзина 82 километри на час. Во исто време од местото A кон местото B тргнал камион кој вози со брзина 63 километри на час. Колку ќе биде оддалечени еден од друг автомобилот и камионот по 6 часа возење? Колку километри по 6 часа возење треба да помине автомобилот, а колку камионот за да стигне до местото B?

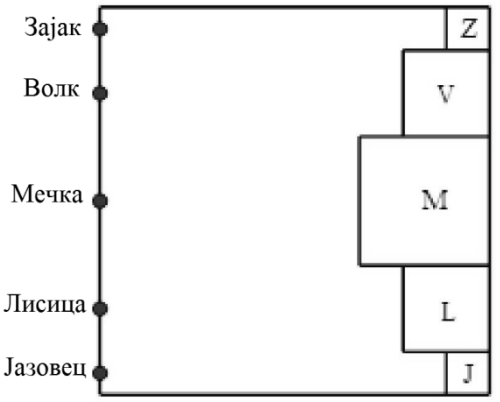
47. Чекорите на Рампо и Марко се со еднаква должина. Тие меѓу себе се оддалечени 1600 чекори. За една минута Рампо прави 80 чекори, а

Марко прави 60 чекори. Кој од нив двајцата треба да тргне порано и колку порано за да одејќи еден кон друг се сретнат точно на половина пат?

48. На сликата се дадени некои растојанија меѓу градовите *A, B, C, D, E, F* (во километри). Поштарот тргнал од градот *A* во градот *F*. На својот пат треба да помине во уште еден од градовите *B, C, D* или *E*. Во кој град треба да помине за да растојанието кое би го изминал биде најдолго? Колку километри пократко би патувал кога директно од градот *A* би отишол во градот *F*?



49. Покрај еден раб на квадратна шума со ширина $550\,m$ во куќи со квадратен облик живеат Зајак, Волк, Мечка, Лисица и Јазовец (види цртеж). Тис се сретнале на работ од шумата и секој застанал наспроти својата куќа и до неа сака да дојде по најкраткиот можен пат. Притоа се знае дека:
    - Куќата на Зајакот е иста со куќата на Јазовецот, а куќата на Волкот е иста со куќата на Лисицата.
    - Зајакот има $475\,m$ до својата куќа, а Волкот $450\,m$.
    - Мечката минува 1 метар за 1 секунда.



    - За да стигне до својата куќа на Лисицата ѝ треба два пати помалку време отколку што ѝ треба на Мечката да стигне до нејзината куќа, а на Јазовецот му треба два пати повеќе време за да стигне до својата куќа отколку што и треба на Мечката да стигне до нејзина-

та куќа.
Колку време му треба на Јазовецот за да стигне до неговата куќа, а колку време ѝ треба на Лисицата да стигне до нејзината куќа?

50. Во подмладокот на ансамблот Танец има 39 момчиња и 23 девојчиња. Секоја седмица на ансамблот му се придружуваат по 6 момчиња и по 8 девојчиња. По колку седмици во подмладокот на ансамблот Танец ќе има еднаков број момчиња и девојчиња? Колкав ќе биде вкупниот број деца во подмладокот на насамблот Танец?

51. Минатата година во работилница за дрвени играчки се произведувале по 198 автомобилчиња дневно. Оваа година за 6 дена се произведуваат онолку автомобилчиња колку што минатата година се произведувале за 8 дена. Колку автомобилчиња оваа година се произведуваат за 100 работни дена?

52. Од едно училиште на екскурзија тргнале 713 ученици во 25 автобуси, од кои некои имале 33 седишта, а некои 26 седишта. Ако е познато дека сите ученици ги пополниле сите места во автобусите, колку автобуси биле со 26, а колку со 33 седишта?

53. Од 1 филџан мед, 2 филџани зејтин, 3 филџани шеќер и 4 филџани брашно баба Милка направила 25 колачиња. Колку најмногу колачиња баба Милка ќе направи од 13 филџани мед, 14 филџани зејтин, 15 филџани шеќер и 16 филџани брашно?

54. Во понеделник Горјан решил од утре да почне да чита книга. Првиот ден тој прочитал 32 страници, а секој следен ден читал по три страници повеќе отколку претходниот ден. Колку страници вкупно прочитал Горјан по читањето на книгата во саботата истата седмица?

55. Во собата на Пабло на три полици се распоредени 167 книги. Пабло на третата полица ставил нови 23 книги. Потоа од третата полица префрлил на првата полица 26 книги, а сите книги од втората полица ги поклонил на Домот на деца без родители. Потоа на сите три полици останале вкупно 135 книги. Колку книги поклонил Пабло на Домот на деца без родители?

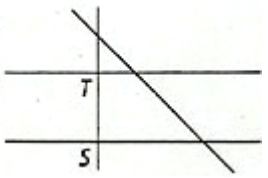
56. Додека Андреј изеде две вишни, Пабло изедува пет вишни, а додека Пабло изедува три вишни, Филип изедува седум вишни. Андреј и Филип вкупно изеле 82 вишни. Колку вишни за тоа време изел Пабло?

57. Во две купчиња има вкупно 411 лешници. Кога од првото купче ќе се преместат во второто 39 лешници, тогаш во првото купче ќе има два пати повеќе лешници отколку во второто. Колку лешници има во секое купче?

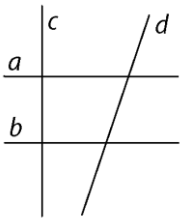
58. Група од 20 џинови правеле кула од коцки. Сите џинови учествувале во градбата на кулата. Десет џинови ределе коцки една над друга така што секој џин ставил двојно повеќе коцки од својот претходник. Првиот џин ставил една коца, вториот ставил две коцки, третиот ставил четири коцки итн. Потоа, преостанатите десет џинови од врвот надолу земале коцки и тоа така што првиот зел една коцка, вториот зел две коцки, тртиот зел три коцки итн. до десеттиот џин кој зел десет коцки. Колку била на крајот висока кулата, ако секоја коцна имала раб долг $5\,cm$?

III. ГЕОМЕТРИЈА

1. а) На цртежот обележи ги правите: *a, b, c* и *d*, така да важи:
   - правите *a* и *b* се паралелни, а точката *T* припаѓа на правата *b;*
   - правата *d* е нормална на правата *a*;
   б) во кој однос се правите *b* и *d?*

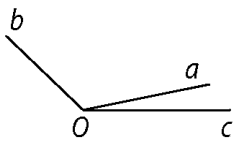


2. Погледни го цртежот десно и одговори на следниве прашања:
   а) Колку прави се прикажани на цртжот? Запиши ги!
   б) Запиши ги сите парови паралелни прави!
   в) Запиши ги сите парови заемно нормални прави!



3. Нацртај прави a,b,c,d ако знаеш дека правата a е нормална на правата b, правата a е паралелна со правата c и правата d е паралелна со правата c (сите четири прави се меѓусебно различни). Во каква положба се правите:
   а) b и d, б) a и d, г) c и b.

4. На цртежот десно нацртај полуправа Od така што $\sphericalangle cOd$ ќе биде прав, а $\sphericalangle bOd$ ќе биде остар. Запиши ги сите агли, па утврди колку од нив се:
   а) остри, б) прави, в) тапи агли.

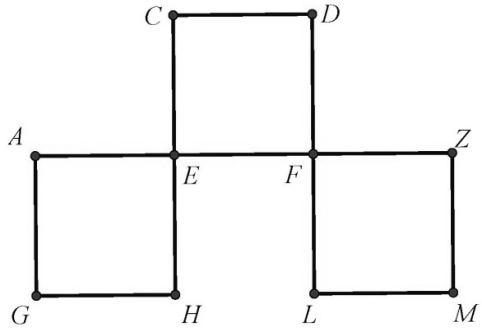


5. Нацртај еден правоаголник. Нацртај две прави кои го делат правоаголникот на два триаголници и два петоаголника.

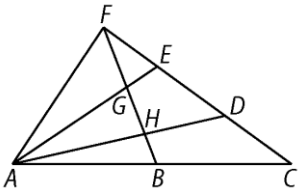
6. Каква е меѓусебната положба на 4 прави кои даден круг го делат на:
   а) 5; б) 11 различни делови?

7. Подреди ги по големина, од најкратката до надолгата, отсечките чии должини се: $35\,cm, 2\,dm$ и $400\,mm$.

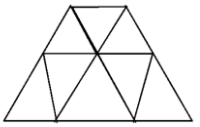
8. На цртежот десно е дадена шема од патеки во паркот. Определи ги сите различни патишта по кои може да се стигне од точката A до точката Z. Два пата се различни ако се разликуваат барем во една од точките низ кои минуваат. На секој пат низ една од точките може да се помине само еднаш. Патот запиши го така што ќе ги запишеш точките низ кои минуваш, почнувајќи од точката A и завршувајќи во точката Z. Ако растојанието меѓу секои две точки е $100\,m$, колкава е должината на најкраткиот, а колкава е должината на најдолгиот пат?



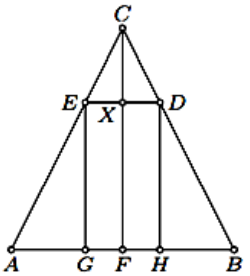
9. а) Колку триаголници се прикажани на цртежот десно? Запиши ги!
б) Колку отсечки се прикажани на цртежот десно? Запиши ги!



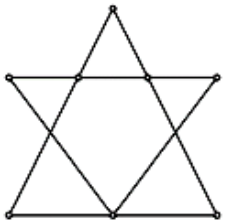
10. Колку триаголници има на дадениот цртеж?



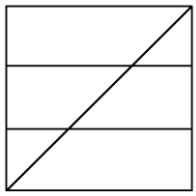
11. Колку отсечки и колку триаголници има на цртежот?



12. Колку отсечки и колку триаголници има на дадениот цртеж?



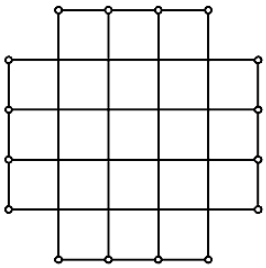
13. Колку триаголници и киолку правоаголници се прикажани на цртежот десно? Што има повеќе, триаголници или правоаголници? (Внимавај, квадратот е правоаголник.)



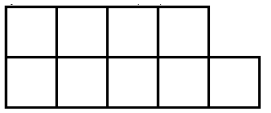
14. Определи го бројот на:
    а) правоаголници;
    б) квадрати
    во правоаголник со димензии 1244×1389, такви што нивното горно лево теме секогаш се совпаѓа со темето на правоаголникот.

15. Колку квадрати и колку правоаголници има на дадениот цртеж?

16. Колку квадрати, а колку правоаголници кои не се квадрати има на следниот цртеж?



17. Од девет квадрати составена е фигура како на цртежот десно. Периметарот на фигурата е еднаков на $28\,cm$. Определи го збирот на периметрите на сите квадрати кои може да се воочат на дадениот цртеж.



18. Голем правоаголник е составен од 5 еднакви мали правоаголници (види цртеж). Ако должината на поголемата страна на големиот правоаголник е $30\,cm$, пресметај го периметарот на еден мал правоаголник.

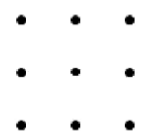
19. Правоаголникот со страни $9cm$ и $4cm$ и квадрат имаат еднакви плоштини. Кој од нив има поголем периметар и за колку?

20. Ако едната страна на квадратот ја зголемиме два пати, а другата три пати, ќе добиеме правоаголник со плоштина $96\,cm^2$. За колку периметарот на добиениот правоаголник е поголем од периметарот на квадратот?

21. Ако сите полиња од шаховската табла се поредат едно по друго, се добива правоаголник со периметар $260cm$. Пресметај ја плоштината на шаховската табла.

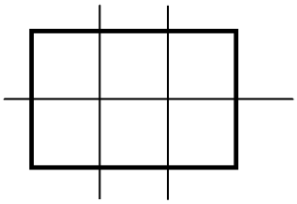
22. Околу тревник во форма на правоаголник е направена бетонска патека (ширината на патеката е иста). Помалата страна на правоаголникот има должина од $16m$, а плоштината на патеката е $173cm^2$. Пресметајте ја должината на другата страни на правоаголникот (тревникот) ако пешак што ја обиколува целата патека од надворешната страна поминува $16m$ повеќе отколку пешак што ја обиколува целата патека од внатрешната страна.

23. а) Колку квадрати може да се нацртаат така што нивните темиња ќе бидат по четири точки прикажани на цртежот десно?
б) Определи ја плоштината на секој од овие квадрати ако растојанието на секои две соседни точки по хоризонтала и по вертикала е $5mm$.



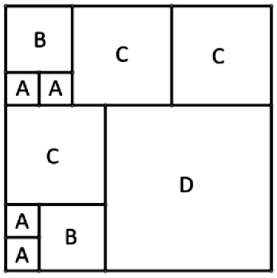
24. За колку ќе се намали должината на страната на квадратот, ако периметарот на квадратот се намали за $100\,cm$?

25. Три прави го делат правоаголникот на шест еднакви квадрати (цртеж десно). Ако периметарот на правоаголникот е за $180\,cm$ поголем од периметарот на еден од добиените квадрати, определи ги периметарите и плоштините на правоаголникот и квадратот.

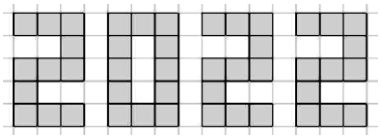


26. На својата фарма Пабло заградил игралиште во форма на правоаголник. Оградата која ја искористил била долга $188\,m$. По извесно време решил да го зголеми игралиштето и затоа должината на секоја негова страна ја зголемил за половина, по што добил ново игралиште, исто така во форма на правоаголник. За оградување на новото игралипте Пабло ја искористил старата ограда и докупил иста таква ограда. Колку ограда докупил Пабло? Која плоштина е поголема, на старото игралиште или на делот со кој е зголемено старото игралиште?

27. Квадратот на цртежот десно е составен од повеќе мали квадрати. Определи ја неговата плоштина ако периметарот на квадратот B е еднаков на $56\,cm$.



28. Со помош на сиви квадратни плочки со должина на страна $5\,cm$ Филип на лист хартија составил четири фигури. Потоа со фломастер ја обиколила секоја фигура и така на хартијата го добила бројот 2022. Мајката на Филип смета дека збирот на должините на рабовите на цифрите е најмалку $5\,m$. Дали Мајката на Филип е во право?

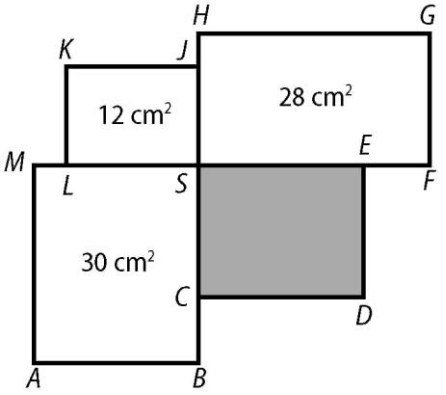


29. На цртежот десно за три правоаголници се запишани нивните плоштини. Определи ја плоштината на осенчениот правоаголник $CDES$ ако

$\overline{BC} = 2\,cm, \overline{EF} = 2\,cm,$

$\overline{FG} = 4\,cm, \overline{HJ} = 1\,cm,$

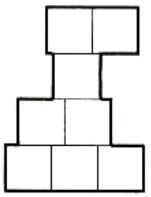
$\overline{ML} = 1\,cm.$



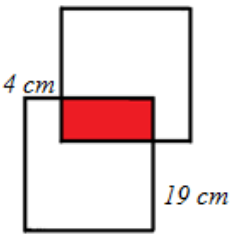
30. Ако едната страна на квадрат ја продолжиме за $4cm$, а другата ја намалиме за $3\ cm$ добиваме правоаголник, чија плоштина е еднаква на плоштината на квадратот. Колкави се периметарот и плоштината на квадратот и правоаголникот?

31. Со 2 прави еден квадрат е поделен на 2 други квадрати и 2 правоаголника. Периметарот на еден од добиените квадрати е $20\ cm$, а периметарот на еден правоаголник е $30cm$. Определи го периметарот на почетниот квадрат.

32. Фигурата на цртежот е составена од 8 исти квадрата. Периметарот на фигурата од цртежот е $32cm$. Пресметај ја нејзината плоштина.

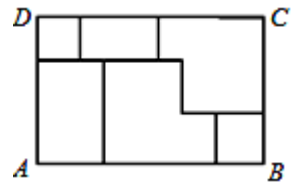


33. Два квадрати со должина на страните по $28cm$ имаат заеднички обоен дел, со форма на правоаголник (како на цртежот). Пресметај го периметарот на правоаголникот.

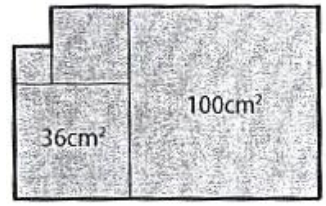


34. Плоштината на еден правоаголник е $2008\,cm^2$. Должината на една страна е парен број сантиметри, а на другата е непарен број сантиметри. Да се пресмета периметарот на правоаголникот. Запиши ги сите можни решенија.

35. Определи го збирот на периметрите на сите 6 фигури (види цртеж) кои настанале со делење на правоаголникот *ABCD* чии страни се со должина $\overline{AB} = 14{,}26cm$ и $\overline{BC} = 11{,}3cm$. Секоја од страните на сите шест фигури е паралелна со еден пар на страни на правоаголникот *ABCD*.



36. Фигурата на цртежот е составена од 4 квадрати. Пресметај го периметарот на таа фигура, ако на цртежот се дадени површини на два квадрата.



37. Во средината на еден мозаик се наоѓа голема квадратна плоча со должина на страна $81cm$. На средната третина секоја страна на плочата е поставена помала квадратна плоча. Потоа на секоја средна третина ма секоја слободна страна на помалите квадратни плочи се поставени помали квадратни плочи. Од колку плочи се состои мозаикот? Колкав е периметарот на мозаикот?

38. На колку најмалку делови треба да се исечат два квадрати со страни $3cm$ и $4cm$, за да од добиените делови може да се направи нов квадрат?

39. На колку најмалку делови треба да се исече картонски квадрат со страна $3cm$, за да од така добиените делови може да се состават три нови квадрати со плоштини од $1cm^2$, $4cm^2$ и $4cm^2$.

IV. МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Браќата Марко и Рампо собираат стрипови. Во својата колекција моментално имаат 67 стрипови, од кои Марко прочитал 34, а Петар 27. Колку стрипови никој не ги прочитал, ако двајцата браќа прочитале 15 исти стрипови?

2. Во едно одделение има 32 ученика, од кои 18 ученици се претплатени за весникот „Другарче“, а 13 се претплатени за весникот „Развигор“. Ако е познато дека 8 ученици не се претплатени на ниту едно списание, тогаш колку ученици ги земаат двете списанија истовремено?

3. На писмената работа по математика поставени се 3 задачи. Секој ученик решил барем една задача, и ниту еден од учениците не ја решил третата задача. Првата задача ја решиле 25 ученици, втората 27 ученици, а двете задачи ги решиле 20 ученици. Колку ученици биле присутни на писмената работа по математика? Колку од нив ја решиле само првата задача?

4. Во едно одделение од 29 ученици, 13 ја прочитале првата книга, 16 втората книга и 11 третата. Истовремено тројца од нив не прочитале ниту една книга. 6 од оние кои ја прочитале втората книга во исто време ја прочитале и првата книга, а 4 ученици и третата книга. Само еден ученик ги прочитал сите три книги. Колку ученици од одделението ја прочитале само првата книга, а колку само третата книга?

5. Пополни го Веновиот дијаграм врз основа на следниот текст. 150 почетници на музичкото училиште се прашани дали знаат да свират клавир, тапани или гитара. Добиени се следните одговори:
   18 лица не свират на ниту еден инструмент;
   10 лица свират на сите три инструменти;
   77 лица можат да свират само гитара или тапани, но не можат да свират клавир;
   73 лица свират гитара;

49 лица свират барем два од наведените инструменти;
13 лица можат да свират клавир и гитара, но не можат да свират тапани;
21 лице свири клавир и тапани.

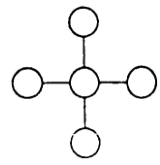
6. Во едно одделение со 35 ученици, секој ученик задолжително учи барем еден, но не повеќе од два странски јазици и тоа: 18 ученици учат англиски, 16 руски и 13 германски јазик. Притоа 4 ученици учат англиски и германски јазик, 6 англиски и руски. Колку ученици учат само еден јазик, а колку руски и германски истовремено?

7. Колку
а) најмногу, б) најмалку
денови може да има во четири последователни месеци.

8. Во зграда со 4 ката и 4 влеза (*I, II, III* и *IV)* на секој кат и во секој влез има по еден стан. Во секој од становите во непарните влезови живее ист број на станари. Во секој од становите во парните влезови, живеат двојно повеќе станари отколку во становите во непарните влезови. Ако во зградата вкупно живеат 48 станари, колку станари живеат во секој стан?

9. Во корпата за топки има 10 кошаркарски, 5 фудбалски и 7 ракометарски топки. Колку најмалку топки без гледање треба да извлечеме за да бидеме сигурни дека сме извлекле ракометарска топка.

10. Во секој круг треба да се впише еден од броевите 1, 2, 3, 4 и 5 така да збирот на броеви хоризонтално и збирот на броеви вертикално биде по 8.



11. Миле има 3 кутии со џамлии: една со 13, една со 10 и една со 4 џамлии. Со помош на точно 3 префрлања, Миле ги распоредил џамлиите така што во секоја од кутиите има еднаков број на џамлии. Префрлањето се реализира така што од едната во другата кутија префрламе точно половина од џамлиите кои биле во втората кутија. Како тоа го направил Миле?

12. Од 6 навидум еднакви џамлии, една има помала маса од останатите. Со помош на само 2 мерења на вага без тегови одреди која е таа џамлија.

13. Андреј, Бране, Дарко, Јанко, Ласте, Марјан и Виктор се ученици во петто одделение. Учителот Благоја измерил колку се високи и запишал 128, 132, 135, 137, 138, 141 и 142 сантиметри. Но тој заборавил да запише кој ученик колку е висок, па го прашал ученикот Горјан дали се сеќава кој ученик колку е висок. На тоа Горјан одговорил:
    1) Андреј е повисок од Ласте, а е понизок од Бране,
    2) Виктор е повиско од Бране,
    3) Збирот на висините на Јанко и Марјан е 272,
    4) Јанко е понизок од Марјан,
    5) Висината на Дарко е непарен број поголем од 137,
    6) Виктор не е понизок од $136\,cm$.

    Помогни му на учителот Благоја да открие кој ученик колку е висок, ако се знае дека сите тврдења кои ги искажал Горјан се вистинити.

14. Коцка за играње на сите ѕидови има различен број точки, од една до шест точки, а збирот на броевите на точките на спротивните ѕидови е еднаков на 7. Од 1000 коцки за играње е составена голема коцка со димензии $10\times10\times10$. Колкав е најмалиот можен збир на сите точки кои се видливи на ѕидовите на така добиената коцка?

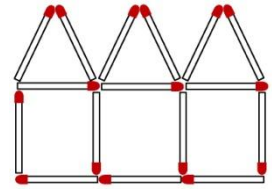
15. Тројца пријатели Раде, Ласте и Марко тренираат маратон. Тие имаат зелено, сино и црвено капче, а носат патики број 43, 44 и 45. Често пати нешто забораваат во соблекувалната, а денес во шкавчето за заборавени работи имало зелено капче и патики број 43. Кој денеска заборавил работи ако се знае дека:
    - Ласте нема сино капче,
    - оној што има патики број 44 има зелено капче,
    - Раде нема патики број 43,
    - Ласте нема патики број 44,
    - оној што има патики број 43 нема црвено капче.

16. Горјан како шифра за заклучување на својот мобилен телефон поставил парен четирицифрен број. За да не го заборави бројот, тој запишал:
    - сите цифри се различни, а збирот на сите цифри е 15,
    - цифрата на единиците е три пати помала од цифрата на илјадитите,

- цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците.

Определи ја шифрата која Горјан ја поставил за отклучување на својот мобилен.

17. Три девојчиња: Ана, Марија, Темјана и три момчиња: Никола, Јанко и Рампо, седат околу тркалезна маса. Ана не седи до момче, Јанко седи наспроти Марија и до Рампо, на неговата лева страна. Кој седи до Темјана, на нејзината десна страна, а кој до Никола, на неговата лева страна?

18. За прикажување на три куќички во низа, како на цртежот десно, се потребни 16 чкорчиња.

а) Колку чкорчиња се потребни за прикажување на 55 такви куќички?
б) Колку чкорчиња во низа може да се прикажат со помош на 756 чкорчиња?

19. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 10 и кај кои цифрата на стотките е поголема од цифрата на десетките, а цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците. Колку броеви запиша?

20. Определи го бројот на природните броеви чиј производ на цифри е еднаков на 14, а збирот на цифрите е 11. Кој е најголем од овие броеви?

21. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 10, а најголемата цифра им е за 6 поголема од најмалата.

22. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви чијн производ на цифри е еднаков на 4.

23. Запиши ги сите броеви помали од 300 кои во својот запис имаат точно две цифри двојки. Колку броеви запиша?

24. Запиши ги сите трицифрени броеви кај кои производот на цифрата на стотките и цифрата на десетките е еднаков на цифрата на единиците. Колку има такви броеви?

25. Определи го бројот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е помал од шест, а поголем од два.

26. Определи го бројот на сите четирицифрени броеви кај кои збирот на првите две цифри е парен, а на другите две цифри непарен број.

27. На колку различни начини Горјан, Пабло, Андреј и Филип може да поделат четири исти моливи?

28. Филип целиот месец јули ќе го помине кај баба му. Тој планира некои од тие денови да чита, а некои да вози велосипед. Откако го направил планот, тој забележал дека: ако го утростручи бројот на деновите во планира да чита, а го удвои бројот на деновите во кои планира да вози велосипед, тогаш збирот на добиените броеви ќе биде еднаков на бројот на деновите во месецот кој Филип ќе го помине кај баба му. На колку различни начини Филип може да го испланира бројот на деновите за читање и бројот на деновите за возење велосипед?

29. На шаховски турнир учествувале 10 шахисти. Секој шахист играл со секој од преостанатите шахисти по една партија.
    а) Колку партии изиграл секој шахист?
    б) Колку партии се вкупно одиграни на турнирот?

30. На колку начини може сума од 20 денари да се плати со монети од 1, 2 и 5 денари, при што секој вид монета треба да се искористи барем еднаш?

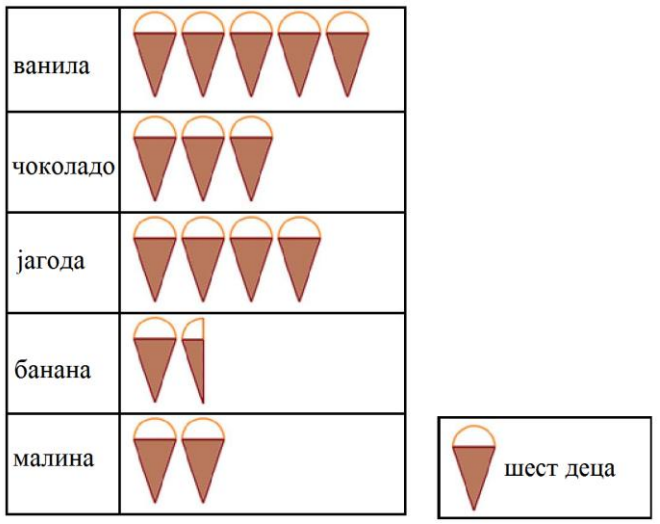
31. Дадени се десет непаралелни прави во една рамнина. Ниту едни од тие три прави не се сечат во иста точка. Во колку точки меѓу себе се сечат овие прави?

32. Нека се дадени 4 различни точки. Колку прави може да бидат определени со тие точки?

33. Лифтот во една дваесеткатница може да ги изврши само следниве две операции: да се качи за 8 ката и да се спушти за 13 ката. Лифтот не може да оди нагоре ако над него нема барем 8 ката, ниту да оди надолу ако под него нема барем 13 ката. Запиши како со лифтот може:
    а) да се спуштиме од 20. кат на приземје,
    б) да стигнеме од 8. на 13. кат.

34. Група деца учествувале во анкета за омилениот вкус на сладолед. Добиените податоци од анкетата се прикажани со помош на пик-

тограми и се дадени на долниот цртеж.



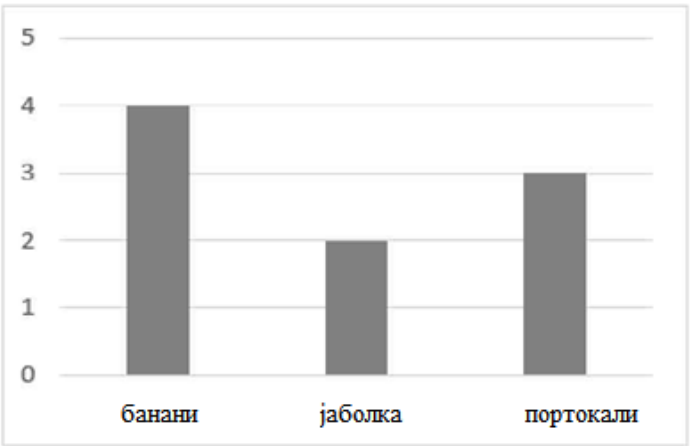
а) Колку деца најмногу сакаат сладолед од ванила?

б) Колку деца најмногу сакаат сладолед од банана?

в) За колку е бројот на децата кои најмногу сакаат сладолед од чоколадо е поголем од бројот на децата кои најмногу сакаат сладолед од малина?

г) Колку деца учествувале во анкетата?

35. Во складиште се наоѓаат вкупно $315\,kg$ овошје запакувано во сандаци. Во секој сандак се наоѓа еднакво количество овошје. Бројот на саднаците на одделните видови овошје е прикажан на долниот дијаграм. По колку килограми овошје имало од секој вид во складиштето?



36. Бројот на жителите во Република Македонија на возраст од 8 до 15 години прикаќан е со пиктограмот , каде претставуваат 22000 жители. Ако бројот на девојчињата е за 4500 поголем од бројот на момчињата, колку момчиња и колку девојчиња има во Република Македонија на возраст од 8 до 15 години?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I. ПРЕСМЕТУВАЊА, БРОЈНИ РЕБУСИ И РАВЕНКИ

1. Прецртај 6 цифри во низата

2012201220122012

така да десетцифрениот број кој се состои од преостанатите цифри биде:

а) најголемиот можен број,

б) најмалиот можен број.

Решение. а) За да се добие најголемиот можен број последователно од лево прецртуваме нули и единици и добиваме 2222222012 ;

б) За да се добие најмалиот можен број од лево прецртуваме до првата единица, а потоа прецртуваме четири двојки и добиваме: 1010122012

2. Броевите 1,2,3,4,...,40 се запишани еден по друг без запирки, па така е добиен бројот

12345678910111213...383940.

Кој е најголемиот можен број што може да се добие ако од вака запишаниот број избришеш 66 цифри (редоследот на цифрите не смееш да го менуваш.)

Решение. При запишувањето на дадениот број се искористени 9 едноцифрени и 31 двоцифрени броеви, што значи во неговиот запис вкупно има $9+2\cdot 31=71$ цифра. Бидејќи $71-66=5$, по бришењето на цифрите треба да добиеме петцифрен број. За да бројот е што е можно поголем треба да имаме најголем можен број деветки. Бидејќи во него постојат четири деветки и тие се наоѓаат по една во броевите 9, 19, 29 и 39, заклучуваме дека најголемиот можен број е 99994.

3. Шест карти се нумерирани со броевите: $309,9,41,98,5,2$.

Кој е најмалиот број, кој може да се формира со редење на овие карти една до друга?

Решение. Најмалиот број е 2309415686.

Напомена: Картите 98 и 9 се вртат наопаку.

4. Запиши ги сите броеви помали од 100 кои се запишуваат со точно две римски цифри.
Решение. Римските цифри со кои се запишуваат броевите помали од 100 се: I,V,X,L и C. Според тоа, бараните броеви се:
II, IV, VI, IX, XI, XV, XX, XL, LI, LV, LX, XC

5. Со римски цифри запиши ги броевите од 95 до 105.?
Решение. Имаме:
$$XCV, XCVI, XCVII, XCVIII, XCVIX, C, CI, CII, CIII, CIV, CV$$

6. Премести само едно кибритче така да добиеш точно равенство. Определи ги сите решенија.

Решение. Постојат четири решенија:
$$XIV + V = XIX, \quad XV + IV = XIX,$$
$$XVI + IV = XX, \quad XVI + V = XXI$$

7. Запиши ги сите броеви од втората стотка чија цифра на единиците е за еден поголема од цифрата на стотките.
Решение. Во втората стотка цифрата на стотките е 1, па затоа цифрата на единиците ќе биде $1+1=2$, а додека цифрата на десетките може да биде било која од десетте цифри. Значи, бараните броеви се: 102, 112, 122, 132, 142, 152, 162, 172, 182 и 192

8. Пресметај:
$$(300+10\cdot 3+7)\cdot(567829-567827)\cdot(2+2:2).$$
Решение. Имаме:
$$\begin{aligned}(300+10\cdot 3+7)\cdot(567829-567827)\cdot(2+2:2) &= \\ =(300+30+7)\cdot(567829-567827)\cdot(2+2:2) & \\ =337\cdot(567829-567827)\cdot(2+2:2) & \\ =337\cdot 2\cdot(2+2:2) & \\ =337\cdot 2\cdot(2+1) & \\ =337\cdot 2\cdot 3 & \\ =2022. &\end{aligned}$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$12345-(13456-504:9-9876).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}12345-(13456-504:9-9876) &= 12345-(13456-56-9876)\\ &= 12345-3524=8821.\end{aligned}$$

10. Колку знаци плус и меѓу кои броеви треба да се додадат за да од бројот 123456789 се добие бројот 99?

Решение. Имаме

$$1+2+3+4+5+67+8+9=99.$$

11. Користејќи го само бројот 2 и аритметичките операции, претстави го бројот 58.

Решение.Имаме

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-(2+2+2)=64-6=58.$$

12. Користејќи ги наизменично броевите 2 и 3, како и аритметичките операции и заградите, запиши го бројот 516.

Решение. Имаме

$$((2\cdot 3-2)\cdot 3+2)\cdot(2\cdot 3+2\cdot 3)\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2=516.$$

13. Користејќи ги броевите $1,3,5,7\ldots...$, (броевите мора да се користат по истиот редослед) на најкраток начин претстави го бројот 144.

Решение. Имаме

$$(1+3)\cdot(5\cdot 7)-9+11-13+15=144.$$

14. Меѓу некои или меѓу сите цифри 2 0 2 2 стави знаци на аритметичките операции, а по потреба и загради така што вредноста на добиениот израз ќе биде:

а) 1, б) 2, в) 3, г) 4, д) 5.

(Цифрите 2, 0, 2, 2 не смее да ги менуваат местата.)

Решение. Имаме:

а) $2\cdot 0+2:2=2+0-2:2=1,$

б) $2+0\cdot 2\cdot 2=2+0\cdot 2:2=2+0+2-2=2-0-2+2=2,$

в) $2+0+2:2=3,$

г) $2\cdot 0+2+2=2\cdot 0+2\cdot 2=4,$

д) $20:(2+2)=20:(2\cdot 2)=5.$

15. Пополни ги празните полиња во табелата.

+			
	467	546	
500	650		826
208			

Решение. Имаме:

+	**150**	**229**	**326**
317	467	546	**643**
500	650	**729**	826
208	**358**	**437**	**534**

16. Ако е $x-2012=3434$, пресметај:

а) $(x+2000)-2012$;

б) $(x-2000)-2012$;

в) $x-(2012-2000)$.

Решение. а) Имаме:

$$(x+2000)-2012=(x-2012)+2000=3534+2000=5434.$$

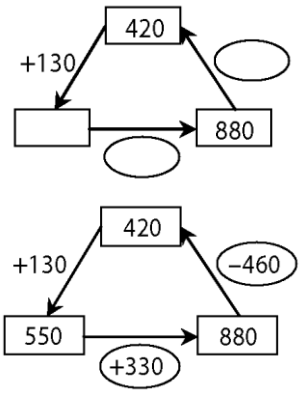
б) Имаме:

$$(x-2000)-2012=(x-2012)-2000=3434-2000=1434;$$

в)Имаме:

$$x-(2012-2000)=(x-2012)+2000=3434+2000=5434\,.$$

17. Во шемата прикажана на цртежот десно запиши ги соодветните броеви така што пресметувањата ќе бидат точни.



Решение. Јасно, во празниот правоаголник треба да се запише бројот $420+130=550$. Понатаму, за да од бројот 550 се добие бројот 880, потребно е да се додаде бројот $880-550=330$. Конечно, за да од бројот 880 се добие бројот 420 потребно е да се одземе бројот $880-420=460$. Конечно, бараното пополнување на дадената шема е прикажано на цртежот десно.

18. Со која цифра завршува производот на првите 2011 непарни броеви?

Решение. Бидејќи меѓу непарните броеви се наоѓа и бројот 5, а производот на бројот 5 и било кој друг непарен број завршува со цифрата 5, заклучуваме дека бараниот производ завршува со цифрата 5.

19. Со која цифра завршува производот на 2010 седмици?
Решение. Забележуваме дека
$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2041,$$
односно дека производот на четири седмици завршува со цифрата 1. Производот $7 \cdot 7 \cdot \ldots .7$, на 2010 седмици можеме да го напишеме и како
$$(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot \ldots . (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7),$$
бидејки $2010 = 502 \cdot 4 + 2$. Секоја заграда од по 4 седмици дава производ кој се завршува со 1, а последната заграда дава производ кој се завршува со цифрата 9. Конечно, последната цифра на бараниот производ е 9.

20. Воочи го правилото и продолжи ја низата за уште три члена:
$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots .$$
Решение. Имаме: $1+2=3, 2+3=5, 3+5=8$ и $5+8=13$, што значи дека секој член на низата почнувајќи од третиот член е еднаков на збирот на претходните два члена. Според тоа, бараните три члена на низата се: $8+13=21, 13+21=34$ и $21+34=55$.

21. Во низа се запишани 11 броја така што збирот на секои три последователни броја е еднаков на 18. Збирот на сите 11 броја е еднаков на 64. Кој број е шестиот по ред запишан број во оваа низа?
Решение. Нека во низата редоследно се запишани броевите
$$a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k.$$
Притоа одејќи однапред наназад за првите шест броја имаме
$$a+b+c=d+e+f=18,$$
а одејќи одназад нанапред за последните шест број имаме
$$k+j+i=h+g+f=18.$$
Од горните равенства последователно следува
$$a+b+c+d+e+f+f+g+h+i+j+k=4\cdot 18,$$
$$f+(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k)=72,$$
и ако искористиме дека
$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k=64,$$

добиваме $f+64=72$, од каде наоѓаме $f=8$.

22. Дешифрирај го изразот: $\overline{\mathrm{AAA}} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$. На различни букви одговараат различни цифри, а на исти букви исти цифри.
Решение. Имаме
$$\overline{\mathrm{AAA}} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}},$$
$$\mathrm{A}\cdot 111 = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$$
$$111 = \mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\,.$$
Бидејќи $111 = 3\cdot 37$, добиваме $\mathrm{A}=3$ и $\mathrm{B}=7$, па $333:37 = 3\cdot 3$

23. Дешифрирај го собирањето, ако на исти букви одговараат исти цифри, а на различни букви различни цифри.

				A
			B	*A*
		C	*B*	*A*
+	*D*	*C*	*B*	*A*
	2	0	0	8

Решение. Јасно, *A* може да биде 2 или 7. Ако *A* е 2, тогаш при собирање на десетките не може да се добие 0, па затоа $A=7$. Сега е јасно дека $B=6, C=4, D=1$.

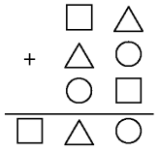
24. На линиите запиши ги соодветните цифри така што собирањето ќе биде точно:

		2		
+	3		7	1
	5	1	2	9

Решение. Јасно, цифрата на единиците на првиот собирок е $9-1=8$. Понатаму, бидејќи немаме пренос од собирањето на единиците, а цифрите на десетките на вториот собирок и на збирот се 7 и 2, соодветно, заклучуваме дека цифрата на десетките на првиот собирок мора да е 5. Сега при собирање на стотките имаме пренос 1, па како цифрата на стотките на првиот собирок е 2, за да збирот има цифра на стотките еднаква на 1, вториот собирок мора да има цифра на стотките 8 и притоа имаме пренос 1. Конечно, цифрата на илјадитите на првиот собирок е еднаква на $5-(3+1)=1$, а бараното собирање е:

$$\begin{array}{r} \underline{\mathbf{1}}\ 2\ \underline{\mathbf{5}}\ \underline{\mathbf{8}} \\ +\ 3\ \underline{\mathbf{8}}\ 7\ 1 \\ \hline 5\ 1\ 2\ 9 \end{array}$$

25. Под исти фигури се кријат исти цифри, а под различни фигури се кријат различни цифри. Определи ги соодветните цифри така што пресметувањето ќе биде точно:



Решение. Од збирот на единиците следува дека $\triangle+\square=10$, а од збирот на десетките следува дека $\square+\bigcirc+1=10$. Бидејќи со $\square$ е покриена цифрата на стотките, под квадратот може да биде само цифрата 1 или 2 (збирот на три двоцифрени броја е помал од 300). Ако под квадратот е 2, тогаш под триаголникот е 8, а под кругот е 7. Но, оваа комбинација не дава решение, бидејќи $28+87+72=187\neq 287$. Ако под квадратот е 1, тогаш под триаголникот е 9, а под кругот е 8, па бараното решение е $19+98+81=198$.

26. Дешифрирај го одземањето, во кое на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$LAV-KEC=MIS.$$

Определи барем едно решение:

Решение. Во дадениот броен ребус имаме девет различни букви, што значи дека треба да искористиме девет различни од можните десет цифри. Задачата има повеќе решенија, а некои од нив се

$$873-654=219,\qquad 890-314=576,\qquad 486-359=127.$$

Обиди се да најдеш други решенија на овој ребус.

27. Дешифрирај го собирањето:

$$\begin{array}{r} \quad\quad\quad\quad B \\ \quad A\ \ A\ \ A\ \ A \\ +\ A\ \ A\ \ A\ \ A \\ \hline B\ \ A\ \ A\ \ A\ \ A \end{array}$$

Решение. Имаме

$$B+A+\ A=A+20 \text{ или } B+A+A=A+10.$$

Во првиот случај $B+A=20$, а тоа е невозможно, бидејќи во прашање се цифри. Ни останува вториот случај, во кој $B+A=10$. Значи,

$A + A + 1 = A + 10$, односно $A = 9$, па $B = 1$. Следува решението: $1 + 9999 + 9999 = 19999$.

28. Истите букви замени ги со исти, а различните букви со различни цифри, така да собирањето

$$\overline{\text{МС}} + \overline{\text{МС}} + \overline{\text{МС}} = \overline{D\text{М}}$$

биде точно и при тоа во бројот $\overline{\text{МС}}$ цифрата на десетки е поголема од цифрата на единици. Потоа, пресметај ја вредноста на изразот:

$$D + 2 \cdot \text{М} + 3 \cdot \text{С}.$$

Решение. Бидејќи е збирот на три исти двоцифрени збира двоцифрен број, тогаш A може да биде 1, 2 или 3, а како е $\text{М} > \text{С}$, тогаш C може да биде 0, 1 или 2, зависно од вредноста M. Бидејќи $\text{С} + \text{С} + \text{С} = \text{М}$, тогаш единствена можност е $\text{М} = 3$ и $\text{С} = 1$, па е $D = 9$. Значи,

$$D + 2 \cdot \text{М} + 3 \cdot \text{С} = 18.$$

29. Во збирот КУ + КУ + РИ + КУ истите букви претставуваат исти цифри, а различните букви различни цифри. Која е најголемата можна вредност на тој збир?

Решение. Цифрите на десетките во збировите треба да бидат најголеми можни, а бидејќи K се појавува три пати, најголемиот збир се добива за $\text{К} = 9$ и $\text{Р} = 8$. Исто така, бидејќи $У$ се појавува три пати на местото на единиците, најголемиот збир се добива за $\text{У} = 7$ и $\text{И} = 6$. На тој начин добиваме дека најголемиот можен збир е

$$97 + 97 + 86 + 97 = 377.$$

30. Во бројниот ребус

$$\overline{FA} + \overline{LA} + \overline{MI} = \overline{SI}$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат разлини цифри. Определи ја најголемата можна вредност на збирот и во тој случај најде барем едно решение на дадениот ребус.

Решение. Бидејќи $\overline{SI}$ е двоцифрен број со различни цифри, неговата најголема можна вредност е 98. Понатаму, при собирањето на цифрите на единиците два пати се јавува цифрата A и еднаш цифрата $I = 8$, па затоа $A = 0$ или $A = 5$. Значи, ребусот добива еден од видовите

$$\overline{F5} + \overline{L5} + \overline{M8} = 98 \text{ или } \overline{F0} + \overline{L0} + \overline{M8} = 98.$$

Сега, лесно се добива дека некои од можните решенија се:

$$45+35+18=98,$$
$$15+35+48=98,$$
$$50+30+18=98,$$
$$60+20+18=98.$$

31. Дешифрирај го бројниот ребус

$$\overline{AB}+\overline{ABC}+\overline{ABCD}=3000,$$

така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Јасно, цифрата A не може да биде 1, а не може да биде ниту поголема или еднаква на 3, па заклучуваме дека $A=2$. Според тоа, $\overline{2B}+\overline{2BC}+\overline{2BCD}=3000$, па затоа $B+\overline{BC}+\overline{BCD}=780$. Јасно, B не може да е 8 или 9, а ако $B\le 6$, тогаш $B+\overline{BC}+\overline{BCD}\le 773<780$. Значи, $B=7$, од каде го добиваме равенството $7+\overline{7C}+\overline{7CD}=780$, односно $C+\overline{CD}=3$. Конечно, од последното равенство следува $11C+D=3$ и како C и D се цифри, добиваме $C=0$ и $D=3$. Значи,

$$27+270+2703=3000.$$

32. Во квадратот на цртежот десно се запишани три броја. Запиши броеви во празните квадратчиња така што квадратот ќе биде магичен.

	14	
8	21	

Решение. Ако во првиот квадрат на втората колона е запишан бројот a, тогаш во третиот квадрат на третиот ред треба да е запишан бројот

$$21+14+a-(8+21)=a+6.$$

Сега во првиот квадрат на првиот ред треба да е запишан бројот

$$21+14+a-(14+a+6)=15.$$

Понатаму, во третиот квадрат на првиот ред треба да е запишан бројот

$$21+14+a-(a+15)=20.$$

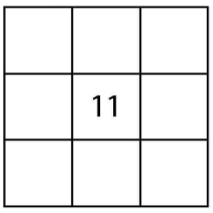
Значи, збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на

$$8+14+20=42.$$

Сега, лесно се добива пополнувањето, кое е единствено и е прикажано на цртежот десно.

15	**7**	**20**
19	14	**9**
8	21	**13**

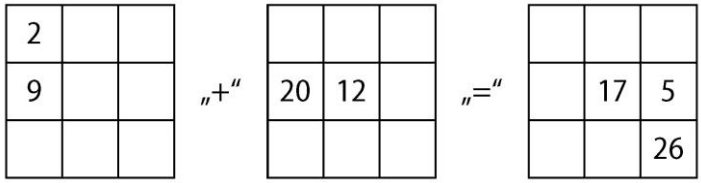
33. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши ги сите непарни броеви од 3 до 19 (освен бројот 11 кој е веќе запишан) така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков, т.е. така што ќе добиеш магичен квадрат.



Решение. Имаме $3+5+7+9+11+13+15+17+19=99$ и збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала мора да е еднаков, а имаме три реда заклучуваме дека овој збир е еднаков на $99:3=33$. Но, во централното поле е запишан бројот 11, па затоа збирот на секои два броја кои се запишани во симетричните квадратчиња во однос на централното поле мора да е еднаков на $33-11=22$. Според тоа, во четирите пара симетрични квадратчиња треба да се распоредат броевите 3 и 19; 5 и 17; 7 и 15; 9 и 13. Понатаму, од овие четири парови треба да се изберат три така што збирот на три броја земени по еден од секој пар е еднаков на 33, а исто така и збирот на другите три броја од овие парови е еднаков на 33. Лесно се добива дека тоа се паровите 3 и 19; 5 и 17; 9 и 13, при што првите три броја се 19, 5 и 9, а вторите три броја се 3, 13 и 17. Едно решение е прикажано на цртежот десно. Обиди се да најдеш и други решенија на зачата.

9	19	5
7	11	15
17	3	13

34. Пополни ги празните полиња во магичните квадрати



така што збирот на броевите запишани во соодветните полиња на првите два квадрати ќе биде еднаков на бројот запишан во соодветното поле на третиот квадрат.

Решение. Во првото поле на вториот ред од третиот квадрат треба да се запише бројот $9+20=29$, а во второто поле на вториот ред на првиот квадрат треба да се запише бројот $17-12=5$. Значи, збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали во третиот квадрат е еднаков на $29+17+5=51$. Сега лесно се пополнува третиот квадрат. Понатаму, ако во првиот квадрат во третото поле на вториот

ред е запишан бројот a, тогаш во третото поле на првата колона треба да е запишан бројот $9+5+a-(2+9)=a+3$. Затоа во првото поле на третата колона треба да е запишан бројот $9+5+a-(5+a+3)=6$, а во третото поле на оваа колона бројот $9+5+a-(a+6)=8$. Значи збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала на првиот квадрат е $2+5+8=15$. Сега лесно се добива решението кое е прикажано на долниот цртеж:

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

„+“

6	**16**	**14**
20	12	**4**
10	**8**	**18**

„=“

8	**23**	**20**
29	17	5
14	**11**	26

35. За еден природен број ќе велиме дека е *растечки* ако секоја негова цифра (освен првата), гледано од лево кон десно, е за еден поголема од претходната. Определи растечки број чија третина е природен број поголем од 1500 и помал од 2300.

Решение. Со x го означиме бараниот број. Бидејќи третина од x е поголема од 1500 и помала од 2300 добиваме $4500<x<6900$. Бидејќи бројот е растечки тој може да биде само еден од броевите 4567, 5678 или 6789. Третината од x е природен број, па затоа x е делив со 3. Имаме $4567=3\cdot1522+1$, $5678=3\cdot1892+2$ и $6789=3\cdot2263$, па затоа $x=6789$.

36. Намалениот е еднаков на производот на броевите 1637 и 5, а намалителот е еднаков на количникот на броевите 1566 и 9. Определи ја вредноста на изразот.

Решение. Имаме,

$$1637\cdot5=8185 \text{ и } 1566:9=174.$$

Според тоа,

$$1637\cdot5-1566:9=8185-174=8011.$$

37. Пабло замислил некој број. Потоа на тој број му додал 5, па добиениот збир го поделил со 2, добиениот количник го помножил со 9, од добиениот производ одзел 6, разликата ја поделил со 7 и го добил бројот 3. Кој број го замислил Пабло?

Решение. Задачата ќе ја пресметуваме одејќи одназад нанапред. Имаме:

$$3\cdot 7=21,$$
$$21+6=27,$$
$$27:9=3,$$
$$3\cdot 2=6,$$
$$6-5=1.$$

Според тоа, Пабло го замислил бројот 1.

38. Секој знак претстатвува некој број. Определи ги броевите кои ги претставуваат знаците $\triangle, \square$ и $\bigcirc$, ако

$$\bigcirc+\triangle=20,$$
$$\bigcirc+\square=25,$$
$$\bigcirc+\square+\square=33.$$

Решение. Збирот на $\bigcirc$ и $\square$ е 25, а збирот на $\bigcirc$ и два $\square$ е 33, од каде заклучуваме дека $\square=33-25=8$. Сега од втората равенка добиваме

$$\bigcirc=25-\square=25-8=17,$$

па од првата равенка добиваме

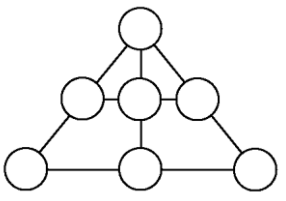
$$\triangle=20-\bigcirc=20-17=3.$$

39. Секој од симболите $\triangle, \otimes, \varnothing$ претставува по еден број. Определи ги овие броеви ако

$$7\cdot\triangle+\otimes=117,$$
$$8\cdot\varnothing=56,$$
$$6\cdot\varnothing-\otimes=30.$$

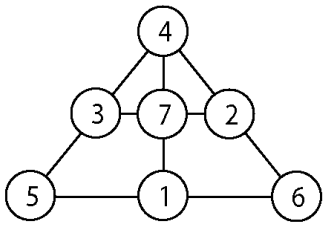
Решение. Од $8\cdot\varnothing=56$ добиваме $\varnothing=7$. Заменуваме $\varnothing=7$ во $6\cdot\varnothing-\otimes=30$ и добиваме $6\cdot 7-\otimes=30$, односно $\otimes=6\cdot 7-30$, што значи $\otimes=12$. Заменуваме $\otimes=12$ во $7\cdot\triangle+\otimes=117$ и добиваме $7\cdot\triangle+12=117$, односно $7\cdot\triangle=117-12$, па затоа $7\cdot\triangle=105$, т.е. $\triangle=15$.

40. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги сите броеви од 1 до 7 така што збирот на броевите запишани во кругчињата кои се наоѓаат на иста права е секогаш 12.

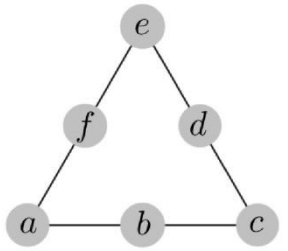


Решение. Збирот на броевите кои треба да ги запишеме е $1+2+3+4+5+6+7=28$, а збирот на броевите запишани во кругчињата на долните две хоризонтални прави е $12+12=24$. Според тоа, во горното кругче треба да

го запишеме бројот $28-24=4$. На сите три прави во кои е запишан бројот 4 збирот на броевите запишани во другите две кругчиња треба да е еднаков на $12-4=8$. Според тоа, на секоја од трите можеме да ги запишеме паровите броеви 1 и 7; 2 и 6; 3 и 5. Едно решение е дадено на долниот цртеж, а можни се и други решенија во зависност од распоредот на можните парови во полињата чиј збир е еднаков на 8. Може да се покаже дека задачата вкупно има 12 решенија.



41. Буквите во кругчињата на цртежот десно замени ги со броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 така што важи



$$a+b+c=c+d+e=e+f+a.$$

Сите броеви мора да се употребат. Што значи дека ниту еден број не се повторува. Колкава може да биде вредноста на збирот? За секој можен збир прикажи барем еден соодветен распоред на броевите.

Решение. Збирот на дадените броеви е $1+2+3+4+5+6=21$. Од $a+b+c=c+d+e=a+f+e$ следува

$$(a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+a)=3(a+b+c).$$

Во збирот на левата страна броевите a,c,e како собирци се јавуваат два пати (тоа се броевите запишани во кругчињата во темињата на триаголникот). Затоа важи

$$3(a+b+c)=(a+b+c+d+e+f)+(a+c+e),$$
$$3(a+b+c)=21+(a+c+e).$$

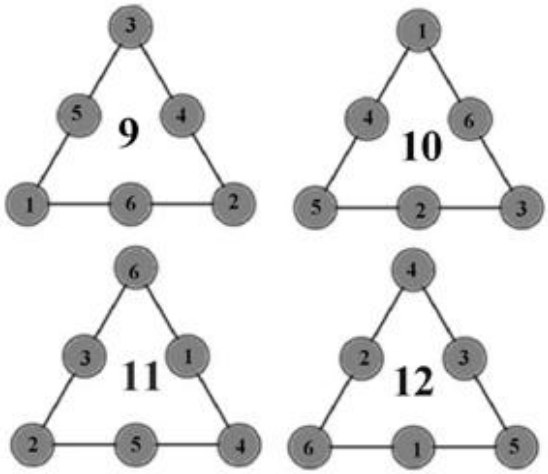
Понатаму, збирот на броевите $a+c+e$ може да биде најмалку $1+2+3=6$, а најмногу $4+5+6=15$ и притоа тој мора да е делив со 3. Според тоа, збирот $a+c+e$ може да е еднаков на 6, 9, 12 и 15. Притоа,

$$a+b+c=7+(a+c+d):3,$$

па затоа

$$a+b+c=7+6:3=9 \text{ или}$$
$$a+b+c=7+9:3=10 \text{ или}$$
$$a+b+c=7+12:3=11 \text{ или}$$
$$a+b+c=7+15:3=12.$$

На долните цртежи се дадени соодветни распореди за четирите можни збира.



42. Бабата Марија купила голема вреќа со бомбони . Од нив направила 10 еднакви пакетчиња за своите десет внуци и ѝ останала една бомбона. Кога ѝ јавиле дека две внучиња нема да дојдат, сите бомбони ги вратила во големата вреќа и почнала од почеток. За внуците кои доаѓаат направила еднакви пакетчиња и и останале три бомбони. Колку бомбони купила бабата Марија, ако знаеме дека таа купила повеќе од 200, а помалку од 260?

Решение. *Прв начин*. Вкупниот број бомбони при делење со 10 треба да даден остаток 1. Такви броеви поголеми од 200, а помали од 260 се: 201, 211, 221, 231, 241 и 251. Бидејќи две внучиња не доаѓаат бабата Марија направила 8 пакетчиња. Бидејќи во овој случај и останале 3 бомбони, треба да провериме кој од броевите 201, 211, 221, 231, 241 и 251 при делење со 8 дава остаток 3. Имаме:

$$201=8\cdot 25+1,$$
$$211=8\cdot 26+3,$$
$$221=8\cdot 27+5,$$
$$231=8\cdot 28+7,$$

$$241 = 8 \cdot 30 + 1,$$
$$251 = 8 \cdot 31 + 3.$$

Според тоа, од разгледуваните шест броја такви се броевите 211 и 251, што значи дека бабата Марија купила 211 или 251 бомбони.

Втор начин. Вкупниот број бомбони при делење со 10 треба да даден остаток 1. Такви броеви поголеми од 200, а помали од 260 се: 201, 211, 221, 231, 241 и 251. Понатаму, вкупниот број бомбони при делење со 8 треба да дава остаток 3. Такви броеви поголеми 200, а помали од 260 се: 203, 211, 219, 227, 235, 243, 251 и 259.

Треба да ги определиме броевите кои при делење со 10 дваат остаток 1 и кои при делење со 8 даваат остаток 3. Јасно, тоа се броевите кои се заеднички за претходните две низи броеви, што значи дека тоа се броевите 211 и 251. Конечно, бабата Марија купила 211 или 251 бомбони.

II. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Машина за печатење билети за театар секогаш бројот на билтетот го печати со четири цифри. Ако бројот на билетот е едноцифрен, двоцифрен или трицифрен број, тогаш пред бројот на билетот машината запишува соодветен број нули. На пример, билетот со број 4 се запишува како 0004, а билетот со број 65 се запишува како 0065. Колку нули машината ќе отпечати за картите со редни броеви од 1 до 212?
   Решение. Бидејќи се печатат броевите од 1 до 212, првата цифра секогаш е 0, па така се отпечатени 212 нули. Како втора цифра, 0 се печати за броевите од 1 до 99, што значи 99 пати. Како трета цифра 0 се печати кај едноцифрените броеви, што значи 9 пати, а потоа уште 20 пати (од 100 до 109 и од 200 до 209). Значи, 0 како трета цифра се печати 29 пати. Како четврта цифра 0 се појавува кај сите десетки до 212, односно 21 пат. Според тоа, цифрата 0 вкупно ќе биде отпечатена $212+99+29+21=361$ пат.

2. За нумерирање на една книга се употребени 540 цифри. Колку страници има оваа книга ако секоја страна е нумерирана со некој број, а нумерирањето започнува со бројот 1?
   Решение. При нумерирањето за едноцифрените броеви се употребени 9 цифри, а за двоцифрените броеви се употребени $2\cdot 90=180$ цифри. Според тоа, останууваат уште $540-(180+9)=351$ цифра и тие се употребени за означување на трицифрените броеви. Според тоа, со трицифрени броеви се нумерирани $351:3=117$ страници. Конечно, книгата има $9+90+117=216$ страници.

3. Во улицата на Горјан сите куќи од левата страна се означени со сите непарни броеви од 1 до 31, а сите куќи од десната страна се означени со сите парни броеви од 2 до 28. Колку куќи има во улицата на Горјан и колку цифри се употребени за нивното означување?
   Решение. *Прв начин.* За означување на куќите се употребени сите броеви од 1 до 28 и уште броевите 29 и 31, што значи дека во улицата на Горјан има $28+2=30$ куќи. За нумерирање на овие куќи се

употребени 9 едноцифрени и $30-9=21$ двоцифрен број, што значи дека се употребени $9+2\cdot 21=9+42=51$ цифра.

Втор начин. На левата страна од улицата има 16 куќи, а на десната страна има 14 куќи. Значи, во улицата на Горјан има $16+14=30$ куќи. За нумерирање на куќите на левата страна се употребени $5+11\cdot 2=27$ цифри, а за нумерирање на куќите на десната страна се употребени $4+10\cdot 2=24$ цифри. Конечно, за нумерирање на сите куќи се употребени $27+24=51$ цифра.

4. Збирот на броевите 278 и 319 намали го за најголемиот непарен број од втората стотка.

Решение. Најголемиот непарен број од втората стотка е 199. Според тоа, бараниот број е

$$278+319-199=398.$$

5. Од разликата на броевите 230 и 58 одземи го првиот парен следбеник на бројот 38.

Решение. Првиот парен следбеник на бројот 38 е бројот 40. Според тоа, бараниот број е

$$230-58-40=132.$$

6. Определи ги збирот и разликата на најголемиот и најмалиот петцифрен број секој од кои има збир на цифри 24.

Решение. Најголемиот петцифрен број чиј збир на цифри е 24 се добива ако последователно се земат од лево кон десно најголемите можни цифри и тоа е бројот 99600, а најмалиот петцифрен број чиј збир на цифри е 24 се добива ако последователно се земат од лево кон десно најмалите можни цифри и тоа е бројот 10599. Според тоа, збирот на бараните броеви е $99600+10599=110199$, а нивната разлика е $99600-10599=89001$.

7. Алекс и Матеј погаѓаат број кој бго замислил Рампо.

Алекс: Рампо го замислил бројот кој е еднаков на производот на броевите 750 и 31.

Матеј: Рампо го замислил бројот кој е еднаков на производот на броевите 640 и 36.

Ако Алекс згрешил за 250, за колку згрешил Матеј?

Решение. Бидејќи $750\cdot 31=23250$ и бидејќи Алекс згрешил за 250,

Рампо можел да го замисли или бројот 23000 или бројот 23500. Бидејќи $640 \cdot 36 = 23040$, заклучуваме дека Матеј згрешил или за 40 или за 460.

8. Збирот на намаленикот и разликата е 105, а разликата е за 3 поголема од намалителот. Определи ги намаленикот и намалителот.
Решение. Нека разликата ја означиме со r. Тогаш, намаленикот е еднаков на $105 - r$, а намалителот $r - 3$. Ако намаленикот, намалителот и разликата ги запишеме во облик на равенство, добиваме дека $(105 - r) - (r - 3) = r$, од каде $r = 36$. Значи, намаленикот е еднаков на $105 - 36 = 69$, а намалителот е $36 - 3 = 33$.

9. Да се определат 8 последователни природни броеви чиј збир е 100.
Решение. Нека најмалиот од нив е a. Тогаш,
$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6) + (a + 7) = 100.$
Значи $8a + 28 = 100$, односно $a = 9$. Конечно, бараните броеви се $9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ и 16.

10. Определи четири последователни природни броеви чиј збир е 2010.
Решение. Вториот од нив е поголем од првиот за еден, третиот за два, четвртиот за три, па така ако првиот го претставиме како x имаме дека
$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 2010,$$
односно $x = 501$, па бараните броеви се 501, 502, 503 и 504.

11. Најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 21 одземи го од најголемиот трицифрен број чиј производ на цифри е 12.
Решение. Најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 21 се добива ако за цифрите на единиците и десетките ја земеме најголемата можна цифра, а тоа е 9 и притоа го добиваме бројот 399. Бидејќи бројот 12 како производ на три едноцифрени броја може да се запише на следниве начини $12 = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 2$, добиваме дека најголемиот трицифрен број чиј производ на цифри е 12 е бројот 621. Конечно, бараната разлика е $621 - 399 = 222$.

12. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков 4044. Разликата е поголема од намалителот за 2020. Определи ги намаленикот, намалителот и разликата.
Решение. Со a и b да ги означиме намаленикот и намалителот, со-

одветно. Тогаш разликата е еднаква на $a-b$, па затоа

$$a+b+(a-b)=4044,$$
$$2a=4044,$$
$$a=2022.$$

Понатаму, $a-b=2020+b$, односно $2022-b=2020+b$, од каде добиваме $2b=2022-2020$, т.е. $b=1$. Според тоа, намаленикот е 2022, намалителот е 1 и разликата е $2022-1=2021$.

13. Збирот на три броја е 2022. Ако првиот број се намали за 111, вториот број се намали за 170, а третиот број се намали за 346, се добиваат еднакви броеви. Определи ги трите почетни броја?

Решение. Ако по соодветното намалување се добива бројот x, тогаш почетните броеви се $x+111$, $x+170$ и $x+346$. Според тоа,

$$x+111+x+170+x+346=2022,$$
$$3x+627=2022,$$
$$3x=1395,$$
$$x=465.$$

Значи, почетните броеви се

$$465+111=576,\ 465+170=635 \text{ и } 465+346=811.$$

14. Кај некои броеви од четвртата стотка цифрата на десетките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и стотките. Определи два такви различни броја така што

а) нивниот збир е најголем можен,

б) нивната разлика е број од шестата десетка. Определи ги сите решенија.

Решение. Сите броеви од четвртата десетка кај кои збирот на цифрите на единиците и стотките е еднаков на цифрата на десетките се: 330, 341, 352, 363, 374, 385 и 396.

а) Најголем збир се добиа кога ќе ги собереме два најголеми броеви, т.е. броевите 385 и 396.

б) Имаме две решенија и тоа: 396 и 341 при што $396-341=55$, и 385 и 330 при што $385-330=55$.

15. Збирот на три броја е еднаков на 2021. Ако најмалиот од нив го намалиме за 21, добиваме три броја такви што разликата на двата помали броја е 200, а разликата на двата поголеми броја е 100. Определи ги

почетните броеви.

Решение. *Прв начин*. Кога еден собирок се намалува за 21, тогаш збирот се намалува за 21. Намалениот збир е $2021-21=2000$. Нека првиот број е најмал, а третиот е најголем. Вториот број е за 200 поголем од првиот, а третиот е за $200+100=300$ поголем од првиот. Ако од 2000 ги одземеме 300 и 200, тогаш новиот намален збир е $2000-(200+300)=1500$. Сега имаме три еднакви броја чиј збир е 1500 и тие броеви се еднакви на $1500:3=500$. Според тоа, првиот собирок е $500+21=521$, вториот собирок е $500+200=700$ и третиот собирок е $700+100=800$.

Втор начин. Кога еден собирок се намалува за 21, тогаш збирот се намалува за 21. Намалениот збир е $2021-21=2000$. Нека првиот број е најмал, а а третиот е најголем. Ако првиот број е a, тогаш вториот број е $a+200$, а третиот број е $a+200+100=a+300$. Имаме

$$a+a+200+a+300=2000,$$
$$3a+500=2000,$$
$$3a=1500,$$
$$a=500.$$

Значи, бараните броеви се $a+21=521$, $a+200=700$ и $a+300=800$.

16. Од цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 состави еден трицифрен и еден двоцифрен број такви што:

а) нивниот збир е 479,

б) нивната разлика е 459.

Решение. а) Јасно цифрата на стотките на трицифрениот број не може да е 5 или 6, бидејќи тогаш збирот би бил поголем од 479. Но, таа не може да е ниту 2 или 3, бидејќи тогаш збирот на броевите ќе биде помал од 420. Значи, цифрата на стотките на трицифрениот број мора да е 4. Сега, за да збирот има цифра на единиците 9, мора цифрите на единиците на двоцифрениот и трицифрениот број да се 3 и 6, во некој редослед. Останува цифрите на десетките на двата броја да се 2 и 5 во некој редослед и така ги добиваме решенијата:

$$456+23=479,\ 453+26=479,\ 423+56=479,\ 426+53=479.$$

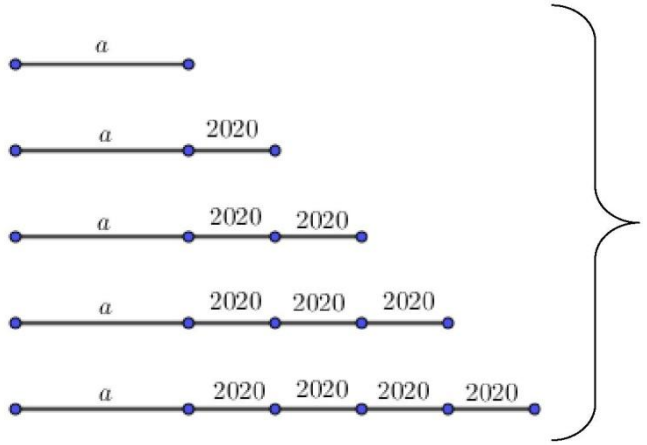
б) Цифрата на стотките на трицифрениот број не може да е 6, бидејќи тогаш добиената разлика би била поголема од 459. Понатаму, цифрата на стотките не може да е 2, 3 или 4, бидејќи тогаш разликата ќе биде помала или еднаква на 442. Значи, цифрата на стотките на трицифре-

ниот број мора да е 5. Понатаму, ако цифрата на десетките на трицифрениот број е поголема од 2, тогаш разликата на двата броја ќе биде поголема или еднаква на 468, т.е. поголема од 459. Според тоа, цифрата на десетките на трицифрениот број мора да е 2, а за да разликата има цифра на единиците 9, единствена можност е цифрите на единиците на трицифрениот и двоцифрениот број да се 3 и 4, соодветно. Конечно, задачата има единствено решение и тоа: $523-64=459$.

17. Определи ги сите природни броеви кои при делење со 7 даваат количник кој е еднаков на остатокот од делењето.
Решение. Ако количникот и остатокот ги означиме со q, тогаш бараните броеви се од видот $7q+q=8q$, каде $1\le q\le 6$. Според тоа, бараните броеви се 8, 16, 24, 32, 40 и 48.

18. Збирот на два броја е 2020, а $\frac{1}{6}$ од поголемиот број е еднаква на $\frac{1}{4}$ од помалиот број. Кои се тие броеви?
Решение. Поголемиот и помалиот број да ги означиме со a и b, соодветно. Ако шестината на поголемиот број ја означиме со x, тогаш поголемиот број е шест пати поголем од x, т.е. $a=6x$. Понатаму, четвртината од помалиот број исто така е еднаква на x, па затоа $b=4x$. Според тоа, $6x+4x=2020$, од каде добиваме $10x=2020$, односно $x=202$. Значи, помалиот број е $b=4\cdot 202=808$, а поголемиот број е $a=6\cdot 202=1212$.

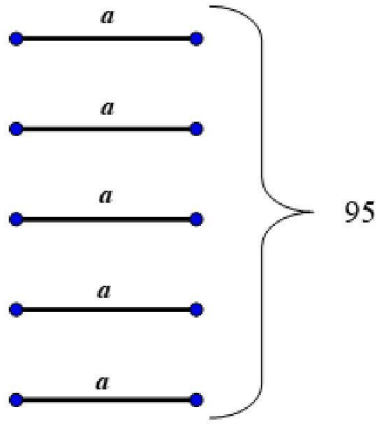
19. Збирот на пет броја е 20295. Секој од нив, освен првиот, е поголем за 2020 од претходниот. Кои се тие броеви?
Решение. *Прв начин*. Ако збирот на броевите го поделиме со 5 ќе го добиеме средниот од бараните броеви и тоа е бројот $20295:5=4059$. Со одземање и додавање на дадената разлика 2020 ќе ги добиеме вториот и четвртиот број во низата од бараните броеви и тоа се броевите $4059-2020=2039$ и $4059+2020=6079$, соодветно. Сега, ако од вториот број ја одземеме, а на четвртио број ја додадеме разликата 2020 ќе ги добиеме првиот и петтиот број, соодветно, т.е. $2029-2020=19$ и $6079+2020=8099$.
Конечно, бараните броеви редоследно се 19, 2039, 4059, 6079 и 8099.
Втор начин. Односот на броевите графички е прикажан на долниот цртеж, при што најмалиот број е означен со a.



Во дадениот збир бројот 2020 се јавува 10 пати како собирок, па за да го пресметаме бројот a прво ја определуваме разликата

$$20295-10\cdot 2020=95.$$

Понатаму, во овој збир бројот a се јавува 5 пати како собирок, што графички може да се прикаже на следниов начин



Затоа, вредноста на a е еднаква на $95:5=19$. Значи, најмалиот од бараните броеви е 19, па сега лесно се добива дека другите броеви редоследно се 2039, 4059, 6079 и 8099.

Трет начин. Првиот број да го означиме со x. Со последователно додавање на 2020 ги добиваме преостанатите четири броја. Значи, вториот број е $x+2020$, тртиот број е $x+4040$, четвртиот број е $x+6060$ и петтиот број е $x+8080$. Според условот на задачата

$$x+x+2020+x+4040+x+6060+x+8080=20295,$$

од каде последователно добиваме

$$5x + 20200 = 20295,$$
$$5x = 20295 - 20200,$$
$$5x = 95,$$
$$x = 95 : 5,$$
$$x = 19.$$

Конечно бараните броеви се 19, 2039, 4059, 6079 и 8099.

20. Бројот 2020 запиши го како збир на два собирци од кои едниот е за 138 поголем од другиот.

Решение. *Прв начин*. На левиот цртеж долу графички е прикажан помалиот собирок, па затоа графичкиот приказ на поголемиот собирок е даден на десниот цртеж долу.

Бидејќи збирот на двата броја е еднаков на 2020, тоа графички може да се прикаже на левиот цртеж долу, од каде следува десниот цртеж долу.

Сега бидејќи $1882 : 2 = 941$, добиваме

Според тоа, помалиот собирок е 941, а поголемиот е 1079.

Втор начин. Ако помалиот собирок го означиме со x, тогаш поголемиот собирок е $x+138$. Според тоа, точна е равенка

$$x + x + 138 = 2020,$$

од каде добиваме $2x = 2020 - 138$, односно $2x = 1882$. Значи, $x = 941$ и $x+138 = 1079$, т.е. помалиот собирок е 941, а поголемиот собирок е 1079.

21. Пабло замислил некој број. На бројот 456 му го додал замисленият број повеќе од 10 пати и го добил бројот 555. Кој број го замислил Пабло?

Решение. *Прв начин*. Добиениот број е 555, а почетниот број е 456,

што значи дека Пабло почетниот број се зголемил за $555-456=99$. Ако замисленият број е 2, тогаш Пабло истиот треба да го собере со бројот 456 точно $99:2$ пати, што не е можно, бидејќи количникот не е природен број. Исто важи ако замисленият број е било кој парен број. Понатаму, имаме:

- ако замисленият број е 1, тогаш Пабло тој број го додал $99:1=99$ пати,
- ако замисленият број е 3, тогаш Пабло тој број го додал $99:3=33$ пати,
- ако замисленият број е 5, тогаш Пабло тој број го додал $99:5$ пати, што не е можно,
- ако замисленият број е 7, тогаш Пабло тој број го додал $99:7$ пати, што не е можно,
- ако замисленият број е 9, тогаш Пабло тој број го додал $99:9=11$ пати,
- ако замисленият број е 11 , тогаш Пабло тој број го додал $99:11=9$ пати, што не е можно, бидејќи бројот на додавања е поголем од 10,
- ако продолжиме да го зголемуваме бројот кој Пабло го замислил, тогаш ќе се намалува бројот на додавање, па замислениуот број не може да се додаде најмалку 10 пати.

Конечно, Пабло замислил еден од броевите: 1, 3 или 9.

Втор начин. Добиениот број е 555, а почетниот број е 456, што значи дека Пабло почетниот број се зголемил за $555-456=99$. Тоа значи дека бројот 99 може да се запише како збир на еднакви собирци, односно како производ на два броја од кои едниот е замисленият број. Бидејќи бројот на додавања на замисленият број е поголем од 10, множителот во производот кој ќе го означува бројот на додавањата е поголем од 10. Имаме:

$$99=99\cdot 1,$$
$$99=33\cdot 3,,$$
$$99=11\cdot 9,$$

па затоа имаме три можности и тоа:

- Пабло го замислил бројот1 и истиот го додал 99 пати,
- Пабло го замислил бројот 3 и истиот го додал 33 пати и
- Пабло го замислил бројот 9 и истиот го додал 11 пати.

22. Во збирот

$$M+A+T+E+M+A+T+I+K+A$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различницифри. Определи ги овие цифри така што збирот ќе биде:

а) најмал можен,

б) најголем можен.

Решение. Во збирот $M+A+T+E+M+A+T+I+K+A$ буквата A се јавува 3 пати, буквите M и T по 2 пати, а буквите E,I,K по еднаш.

а) Збирот ќе биде најмал кога буквата која се јавува најмногу се замени со најмала цифра, па буквата која се јавува одма по неа се замени со следната цифра итн. Значи, $A=0$, $M=1, T=2$ (или $T=1$, $M=2$), $E=3, I=4, K=5$ (или било која друга комбинација на буквите E,I,K и цифрите 3, 4, 5). Најмалиот збир кој се добива е

$$1+0+2+3+1+0+2+4+5+0=18.$$

б) Збирот ќе биде најголем кога буквата која се јавува најмногу се замени со најголемата цифра, па буквата која се јавува одма по неа се замени со следната цифра итн. Значи, $A=9, M=8, T=7$ (или $T=8$, $M=7$), $E=6, I=5, K=4$ (или било која друга комбинација на буквите E,I,K и цифрите 6, 5, 4). Најголемиот збир кој се добива е

$$7+9+8+6+7+9+8+5+4+9=72.$$

23. Андреј на хартија запишал 0, а потоа последователно ги пишувал сите броеви од 1 до 2020. Ако секоја минута запишувал точно 77 цифри, колку броеви му преостанале да запише по 1 час и 30 минути пишување?

Решение. Андреј запишал 10 едноцифрени, 90 двоцифрени, 900 трицифрени и $2020-999=1021$ трицифрени броеви. Според тоа, тој запишал $10+90\cdot 2+900\cdot 3+1021\cdot 4=6974$ цифри. Во 1 час и 30 минути има $60+30=90$ минути во кои Андреј запишал $90\cdot 77=6930$ цифри. Значи, на Андреј му преостанале да запише $6974-6930=44$ цифри, односно $44:4=11$ броеви.

24. Во едно училиште наставата почнува во 9 часот. Секој ден учениците од четврто одделение имаат 5 школски часа кои траат по 50 минути. Прво имаат 4 школски часа, по што следува голем одмор за ручек кој трае 45 минути. По ручекот се одржува петтиот час. Кога завршува

петтиот час ако нема мали одмори меѓу школските часови?

Решение. *Прв начин*. Првиот школски час завршува во 9:50, а вториот во 10:40 часот. Третиот школски час завршува во 11:30, ачетвртиот во 12:20 часот. Големиот одмор трае до 13:05, кога почнува петтиот час. Петтиот школски час завршува во 13:55 часот.

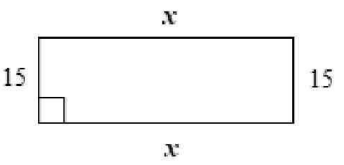
Втор начин. Петте школски часа траат $5\cdot 50=250$ минути. Заедно со одмерот од 45 минути, учениците се на училиште $250+45=295$ минути, односно 4 часа и 55 минути. Значи, петтиот час завршува во $9h+4h\,55\min=13h\,55\min$.

25. Марија два пати го обиколила дворот на нејзината куќа кој имал правоаголен облик. По секоја пократка страна таа одела $15\,\mathrm{s}$. За колку време Марија ја поминувала подолгата страна на дворот, ако таа цело време одела со иста брзина, а вкупното време на обиколката било три минути и дваесет секунди?

Решение. *Прв начин*. Марија по пократката страна поминааа 4 пати и тоа за време од $4\cdot 15=60\,\mathrm{s}$. Таа два пати го обиколила дворот за време $3\cdot 60+20=200\,\mathrm{s}$. Според тоа, Марија четири пати одела по подолгата страна и при тоа таа потрошила вкупно $200-60=140\,\mathrm{s}$. Значи, Марија подолгата страна ја поминувала за $140:4=35\,\mathrm{s}$.

Втор начин. Марија два пати го обиколила дворот и таа вкупно одела

$$3\cdot 60+20=200\,\mathrm{s}.$$



Значи, за една обиколка на дворот Марија потрошила $200:2=100\,\mathrm{s}$. По двете пократки страни Марија одела $2\cdot 15=30\,\mathrm{s}$, па затоа таа по двете подолги страни таа одела $100-30=70\,\mathrm{s}$. Конечно, подолгата страна Марија ја поминувала за време од $70:2=35\,\mathrm{s}$.

26. Марија има два часовника. Првиот часовник на секои 45 минути доцни една минута, а вториот на секои 30 минути побрзува една минута. На кое времиња треба Марија да ги намести двата часовника во 9 часот наутро за да на полноќ истиот ден двата часовника покажуваат точно време?

Решение. *Прв начин*. Ако првиот часовник секои 45 минути доцни 1 минута, значи дека за 90 минути ќе доцни 2 минути, а за 180 минути ќе доцни 4 минути. Бидејќи $180\min = 3h$, значи дека на секои 3 часа првиот часовник ќе доцни 4 минути. Во 12 часот ќе доцни 4 минути, во 15 часот ќе доцни 8 минути, во 18 часот ќе доцни 12 минути, во 21 часот ќе доцни 16 минути и на полноќ ќе доцни 20 минути. Според тоа, првиот часовник треба да се намести на 9:20 часот.

Ако вториот часовник секои 30 минути побрзува 1 минута, тој за еден час ќе побрза 2 минути. Според тоа, од 9 часот наутро до полноќ има 15 часа, па затоа овој часовник ќе побрза $15 \cdot 2 = 30$ минути. Значи, вториот часовник треба да се намести на 8:30 часот.

Втор начин. Од 9 часот наутро до полноќ има $24 - 9 = 15$ часа, односно $15 \cdot 60 = 900$ минути. За тоа време првиот часовник ќе доцни $900 : 45 = 20$ минути, па затоа Марија трба да го намести на 9:20 часот. Вториот часовник ќе побрза $900 : 30 = 30$ минути, па затоа Марија треба да го намести на 8:30 часот.

27. Бојана се наоѓа на железничката станица во Скопје и телефонски и се јавила на мајка ѝ: „Возот стигна пред 10 минути, а се возевме точно 4 часа и 22 минути.“ Мајката на Бојана во тој момент погледнала на часовникот кој покажувал 13 часот и 5 минути.

а) Во колку часот тргнал возот со кој Бојана пристигнала во Скопје?

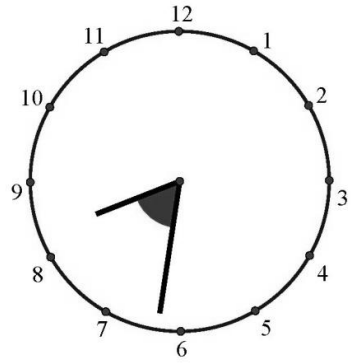
б) Како агол определувале стрелките на часовникот во моментот кога тргнал возот?

Решение. а) Возот со кој Бојана пристигнала во Скопје тргнал пред

$$10\min + 4h\,22\min = 4h\,32\min,$$

од моментот кога мајката на Бојана погледнала на часовникот. Во тој момент било $13h\,5\min$, што значи дека возот со кој Бојана стигнала во Скопје тргнал во

$$13h\,5\min - 4h\,32\min = 8h\,33\min.$$



б) Часовникот на цртежот десно го покажува времето кога возот тргнал за Скопје. Значи стрелките на часовникот во моментот на поаѓање на возот зафаќале остар агол.

Забелешка. Како одговор на прашањето под б) може да се земе и тапиот агол (направи цртеж).

28. Часовникот на сат-кулата во Прилеп заостанува 12 секунди за 14 дена. Кое време ќе покажува часовникот на 9.4.2023 година во 10 часот ако е наместен да покажува точно време на 1.1.2023 година во 10 часот?
Решение. Бидејќи 2023 година не е престапна, од 1.1.2023 во 10 часот до 1.4.2023 во 10 часот ќе поминат $31+28+31=90$ дена. Понатаму, од 1.4.2023 во 10 часот до 9.1.2023 во 10 часот ќе поминат 8 дена, што значи дека вкупно имаме $90+8=98$ дена. Во овие 98 дена имаме $98:14=7$ заостанувања од по 12 секунди, т.е. часовникот ќе заостане вкупно $7\cdot 12=84$ секунди или 1 минута и 24 секунди.
Вистинското време е 10 часот, па затоа часовникот ќе покажува
$$10\,h-1\,\text{min}\,24\text{s}=9\,h\,58\,\text{min}\,36\,\text{s}.$$

29. Еден часовник заостанува 6 секунди во пет дена. Кое време ќе го покажува часовникот на пладне на 7.3.2022 година, ако е подесен да покажува точно време на пладне на 1.1.2022 година?
Решение. Од пладне на 1.1.2022 година до пладне на 7.3.2022 година поминале $30+28+7=65$ дена. Бидејќи $65:5=13$, часовникот ќе заостанува $6\cdot 13=78$ секунди. Според тоа, на 7.3.2022 година часовникот ќе покажува 11 часот 58 минути и 42 секунди.

30. Пабло тргнал со автомобил од Скопје за Љубљана во 14:30 часот. При патувањето направил две паузи од по 45 минути, а во вожња поминал $13\,h\,20\,\text{min}$. Во колку часот стигнал Пабло во Љубљана?
Решение. Пабло во паузите поминал $2\cdot 45=90\,\text{min}=1\,h\,30\,\text{min}$, што значи дека на пат поминал
$$13\,h\,20\,\text{min}+1\,h\,30\,\text{min}=14\,h\,50\,\text{min}.$$
Бидејќи тргнал во $14\,h\,30\,\text{min}$, до полноќ тој на пат поминал
$$24\,h-14h\,30\,\text{min}=9\,h\,30\,\text{min},$$
што значи дека во Љубљана стигнал утредента во
$$14\,h\,50\,\text{min}-9\,h\,30\,\text{min}=5\,h\,20\,\text{min}.$$

31. Збирот на годините на сите ученици во една група е 56. По две години збирот на нивните години ќе биде 70. Колку ученици има во оваа група?
Решение. По две години збирот на годините на сите ученици се зголемил за $70-56=14$. Бидејќи на секој ученик бројот на годините се зголемил за две, заклучуваме дека во групата имало $14:2=7$ учени-

ци.

32. Ќерката денес е 18 години помлада од мајката, а пред 5 години таа била 4 пати помлада од мајката. Колку години има мајката, а колку ќерката?
Решение. Нека x е бројот на години на ќерката. Согласно условите на задачата го запишуваме равенството $4(x-5) = x+18-5$. Значи, ќерката сега има 11 години.

33. Таткото има 45 години, а синот 22. После колку години таткото ќе биде два пати постар од синот?
Решение. Нека x е бараниот број на години. Согласно условите на задачата го запишуваме равенството $45+x = 2(x+22)$, значи $x = 1$.

34. Братот е два пати постар од сестрата, а 4 пати помлад од својот татко. Таткото и ќерката заедно имаат 36 години. Колку години имаат заедно братот, сестрата и нивниот татко?
Решение. Ако бројот на години на братот го означиме со a, бројот на години на сестрата со b, а бројот на годинини на таткото со c, тогаш врз основа на текстот на задачата имаме: $a = 2b, c = 4a$, односно $c = 8b$. Збирот на годините на таткото и ќерката изнесува $9b$. Оттука, следи дека бројот на години на сестрата е 4, на братот 8, а на нивниот татко 32. Вкупниот збир на нивните години изнесува 44.

35. Пет вола и два овна чинат 11 златници, а осум овна и два вола чинат 8 златници. Колку златници чини еден вол, а колку еден овен?
Решение. Бидејќи 2 вола и осум овна чинат 8 златници, 1 вол и 4 овна чинат 4 златници, а 5 вола и 20 овна 20 златници. Ако 5 вола и 20 овна чинат 20 златници, и 5 вола и 2 овна чинат 11 златници, тогаш $20-2 = 18$ овна чинат 9 златници. Ова значи дека еден овен чини половина златник, а еден вол $4 - 4 \cdot 0{,}5 = 2$ златници.

36. На крајот на учебната година учениците од едно одделение кое имало 20 ученици, собрале пари за поклон на учителката. Секое момче дало по 200 денари, а секое девојче по 150 денари и собрале вкупно 3600 денари. Колку момчиња, а колку девојчиња имало во тоа одделение?

Решение. Нека бројот на момчињата е a. Тогаш има $20-a$ девојчиња. Учениците дале вкупно $200a+150(20-a)$ денари. Бидејќи тој износ мора да биде еднаков на 3600, добиваме дека $a=12$. Значи, има 12 момчиња и 8 девојчиња.

37. Вера купила фрижидер, телевизор и машина за перење. За сите три апарати таа платила 80000 денари. Колку чини секој од овие апарати, ако фрижидерот е 8900 денари поскап од машината за перење, а телевизорот е 6200 денари поефтин од фрижидерот?
Решение. Ако цената на машината за перење ја означиме со x, тогаш цената на фрижидерот е $x+8900$, а цената на телевизорот е $x+2700$. Затоа $x+x+8900+x+2700=80000$, од каде добиваме $x=22800$, односно цената на машината за перење е 22800 денари, фрижидерот е 31700 денари, а телевизорот е 25500 денари.

38. Браќата Горјан и Андреј отпатувале во земјата Дренландија. Валутата на Дренландија е дрен. По доаѓањето Горјан разменил 4500 денари во банката A и за секои 5 денари добил по 20 дрена. Андреј разменил 4300 денари во банката B и за секои 100 денари добил 420 дрена. Од разликата на добиените износи братот кој добил повеќе дрена купил два сладоледи од чоколадо. Кој ги платил сладоледите? Колку чинел еден сладолед?
Решение. Бидејќи за 5 денари Горјан во банката A добивал 20 дрена, тој за 1 денар добивал $20:5=4$ дрена. Значи, за 4500 денари Горјан добил $4\cdot 4500=18000$ дрена. Андреј во банката B разменил 4300 денари, што е $4300:100=43$ пати по 100 денари. За секои 100 денари тој добивал по 420 дредна, што значи дека тој за 4300 денари добил $43\cdot 420=18060$ дрена. Од $18060>18000$ следува дека Андреј ги платил сладоледите и дека тие чинеле $18060-18000=60$ дрена. Значи, еден сладолед чинел $60:2=30$ дрена.

39. Сестрите Маја, Ана, Натка и Каролина купиле роденденски поклон за својата другарка Дарка. На прашањето на нивната мајка колку пари дала секоја од нив, тие одговориле:
Маја: Натка, Каролина и јас заедно дадовме 1200 денари.
Натка: Знам само дека Ана, Каролина и јас заедно дадовме 1020 денари.
Каролина: Се сеќавам дека дадов 100 денари повеќе од Натка.

Ана: Поклонот чинеше 1500 денари.

Кое девојче колку пари дало за купување на поклонот.

Решение. Со n,a,k,m да ги означиме редоследно сумите кои ги дале Натка, Ана, Каролина и Маја, соодветно. Од исказите на девојчињата ги добиваме равенките:

$$m+a+n+k=1500,$$
$$m+n+k=1200,$$
$$n+a+k=1020,$$
$$n+100=k.$$

Од првата и втората равенка наоѓаме $a+1200=1500$, од каде следува $a=300$. Од првата и третата равенка наоѓаме $m+1020=1500$, па затоа $m=480$. Сега, од втората равенка добиваме $480+n+k=1200$, па затоа $n+k=720$. Ако во последната равенка замениме $k=n+100$, добиваме $2n+100=720$, односно $n=310$. Конечно, $k=410$.

Според тоа, Ана дала 300 денари, Маја дала 480 денари, Натка дала 310 денари и Каролина дала 410 денари.

40. Маја, Ана и Иван заедно имаат 1500 денари. Иван и дал на Маја 130 денари, Маја и дала на Ана 220 денари и Ана му дала на Иван 330 денари, по што секој од нив имал еднаква сума пари. Колку пари имало на почетокот секое дете?

Решение. *Прв начин*. На крајот секое дете имало еднаква сума пари, односно по $1500:3=500$ денари. Иван од Ана добил 330 денари, што значи дека пред тоа имал $500-330=170$ денари. Иван на Маја и дал 130 денари, што значи дека пред тоа имал $170+130=300$ денари, т.е. тој на почетокот имал 300 денари. Маја на Ана и дала 220 денари, што значи дека пред тоа имала $500+220=720$ денари. Маја од Иван добила 130 денари, што значи дека пред тоа имала $720-130=590$ денари, т.е. таа на почетокот имала 590 денари. Ана на Иван му дала 330 денари, па пред тоа имала $500+330=830$ денари. Ана од Маја добила 220 денари, па пред тоа имала $830-220=610$ денари, т.е. таа на почетокот имала 610 денари.

Втор начин. На крајот секое дете имало еднаква сума пари, односно по $1500:3=500$ денари. Иван дал 130 денари, а добил 330 денари, што значи дека тој добил $330-130=200$ денари, па на почетокот имал $500-200=300$ денари. Маја добила 130 денари, а дала 220 денари, што значи дека таа дала $220-130=90$ денари, па на поче-

токот имала $500+90=590$ денари. Конечно, Ана дала 330 денарри, а добила 220 денари, што значи дека таа дала $330=220=110$ денари, па на почетокот имала $500+110=610$ денари.

Трет начин. На крајот секое дете имало еднаква сума пари, односно по $1500:3=500$ денари. Враќајќи се наназад добиваме:

	На крајот	Пред Ана да му даде на Иван 330 ден.	Пред Маја да ѝ даде на Ана 220 ден.	Пред Иван да ѝ даде на Маја 130 ден.
Маја	500	500	500 + 220 = 720	720 – 130 = 590
Ана	500	500 + 330 = 830	830 – 220 = 610	610
Иван	500	500 – 330 = 170	170	170 + 130 = 300

Значи, на почетокот Ана имала 610, Маја имала 590 и Иван имал 300 денари.

41. Цената на букетот во кој има четири ружи и четири лалиња е 960 денари, а цената на букетот во кој има две ружи и шест лалиња е 840 денари. Колку чини букет во кој има пет ружи и три лалиња?

Решение. Бидејќи 4 ружи и 4 лалиња чинат 960 денари, заклучуваме дека 1 ружа и 1 лале чинат $960:4=240$ денари. Понатаму, 2 ружи и две лалиња чинат $2\cdot 240=480$ денари, па затоа ако од 2 ружи и 6 лалиња кои чинат 840 денари извадиме 2 ружи и 2 лалиња добиваме дека 4 лалиња чинат $840-480=360$ денари. Според тоа, 1 лале чини $360:4=90$ денари. Затоа 1 ружа чини $240-90=150$ денари. Конечно, букет од 5 ружи и 3 лалиња чини $5\cdot 150+3\cdot 90=1020$ денари.

42. Горјан во својата штедна касичка вкупно има 108 денари во монети од 5, 2 и 1 денар. Вредноста на парите во монети од 5 ден. и 2 ден. е еднаква. Бројот на монетите од 1 ден. е еднаков на бројот на монетите од 2 ден. и 5 ден. По колку монети има во касичката од секој вид?

Решение. *Прв начин*. Монети од 1 ден. има колку што има монети од 5 ден. и 2 ден. заедно, па затоа можеме да направиме групи од 1 и 5 ден. во кои ќе има 6 ден. и групи од 1 и 2 ден. во кои ќе има 3 ден. Износот на монетите од 2 ден. и 5 ден. е еднаков, па затоа на секои 5 монети од 2 ден. (т.е. група од 3 ден.) има 2 монети од 5 ден (т.е. група 6 ден.). Според тоа, сите монети може да ги распределиме во купчиња во кои има по 2 групи од 6 ден. и по 5 групи од 3 ден, што значи дека

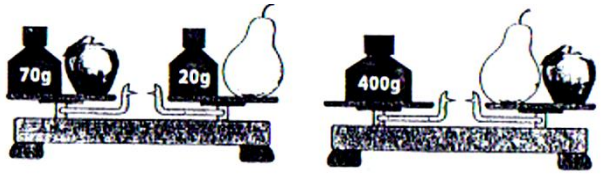
во секоја група има $2\cdot 6+5\cdot 3=27$ ден. Вкупно има 108 ден. па затоа бројот на купчињата е еднаков на $108:27=4$. Во секое купче имаме по 2 монети од 5 ден., па затоа вкупно се 8 монети од 5 ден. Во секое купче има 5 монети од 2 ден. па затоа вкупниот број монети од 2 ден. е 20. Конечно, во секое купче има 7 монети од 1 ден. па затоа вкупно има 28 монети од 1 ден.

Втор начин. Бидејќи сумата пари од 2 ден. и сумата пари од 5 ден. се еднакви, бројот на монетите од 2 ден. мора да е делив со 5. Понатаму, кога се зголемува бројот на монетите од 2 ден. се зголемува и целата сума, па затоа ја имаме следнава табела:

Монети од 2 ден.	Монети од 5 ден.	Монети од 1 ден.	Вкупна вредност
10	4	14	54
15	6	21	81
20	**8**	**28**	**108**
25	10	35	135

од каде следува дека во касичката на Горјан имало 20 монети од 2 ден., 8 монети од 2 ден. и 14 монети од 1 ден.

43. Во двата случаја вагата е во рамнотежа. Пресметај ја масата на јаболкото и масата на крушата врз основа на информациите дадени на сликата.



Решение. На левата слика може да се воочи дека масата на крушата е за $50\ g$ поголема од масата на јаболката. Ако на десната слика наместо круша има јаболко, вкупната маса би била за $50\ g$ помала, па масата на двете јаболка би била $350\ g$. Значи, масата на едно јаболко би била $175\ g$, па масата на крушата е $225\ g$.

44. Мечокот Тоби во текот на секое лето ја зголемува својата тежина по $5\,kg$, а во текот на секоја зима слабее $4\,kg$. Неговата маса не се менува во текот на пролетта и есента. Есента 2021. година неговата маса била $100\,kg$. Колкава е масата на Тоби во пролетта 2018. година?

Решение. Мечокот Тоби во текот на една година ја зголемува својата

маса за $1\,kg$. Бидејќи есента 2021. година имал $100\,kg$, тој пролетта во 2021. година имал $95\,kg$. Оттука следува дека Тоби пролетта 2018. година имал $95-3=92\,kg$.

45. Масата на буре со пченица изнесува $148\,kg$. Откако од бурето е потрошена третина од пченицата, масата на бурето со преостанатата пченица е еднаква на $105\,kg$. Определи ја масата на празното буре.

Решение. *Прв начин*. Третина од масата на пченицата е еднаква на $148-105=43\,kg$. Според тоа, на почетокот масата на пченицата е еднаква на $3\cdot 43=129\,kg$. Значи, масата на празното буре е еднаква на $148-129=19\,kg$.

Втор начин. Третина од масата на пченицата е $148-105=43\,kg$. Значи, масата на пченицата откако е потрошена една третина е $2\cdot 43=86\,kg$. Конечно, маста на празното буре е еднаква на $105-86=19\,kg$.

46. Растојанието меѓу местата A и B е 525 километри. Од местото A кон местото B тргнал автомобил кој вози со брзина 82 километри на час. Во исто време од местото A кон местото B тргнал камион кој вози со брзина 63 километри на час. Колку ќе биде оддалечени еден од друг автомобилот и камионот по 6 часа возење? Колку километри по 6 часа возење треба да помине автомобилот, а колку камионот за да стигне до местото B?

Решение. *Прв начин*. За 6 часа возење автомобилот ќе помине $6\cdot 82=492\,km$, а камионот ќе помине $6\cdot 63=378\,km$. Растојанието меѓу автомобилот и камионот по 6 часа возење ќе биде еднакво на $492-378=114\,km$. За да стигне во местото B на автомобилот му преостануваат да помине уште $525-492=33\,km$, а на камионот му преостануваат да помине уште $525-378=114+33=147\,km$.

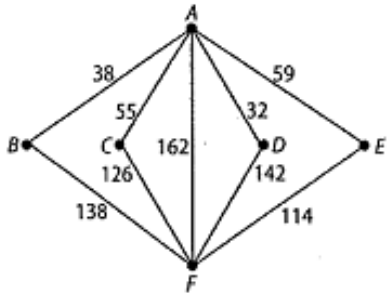
Втор начин. Разликата меѓу брзините на автомобилот и камионот е $82-63=19\,km$ на час. Значи, секој час автомобилот минува $19\,km$ повеќе од камионот, па за 6 часа тој ќе помине $6\cdot 19=114\,km$ повеќе и тоа е бараното растојание меѓу автомобилот и камионот. За 6 часа автомобилот ќе помине $6\cdot 82=492\,km$, а камионот ќе помине $6\cdot 63=378\,km$. За да стигне во местото B на автомобилот му пре-

остануваат да помине уште $525-492=33\,km$, а на камионот му преостануваат да помине уште $525-378=114+33=147\,km$.

47. Чекорите на Рампо и Марко се со еднаква должина. Тие меѓу себе се оддалечени 1600 чекори. За една минута Рампо прави 80 чекори, а Марко прави 60 чекори. Кој од нив двајцата треба да тргне порано и колку порано за да одејќи еден кон друг се сретнат точно на половина пат?

Решение. Секое дете треба да помине половина пат, што значи дека треба да помине 800 чекори. На Рампо за да помине 800 чекори му се потребни $800:80=10$ минути. За овие 10 минути Марко ќе помине $10\cdot 60=600$ чекори. Според тоа, Марко треба да тргне порано и пред да тргне Рампо тој треба да помине $800-600=200$ чекори. Бидејќи Марко за една минута прави 60 чекори, тој за 1 секунда ќе помине 1 чекор. За да изоди 200 чекори пред да тргне Рампо, Марко треба да тргне порано од Рампо $200\,\text{sec}=3\cdot 60+20\,\text{sec}=3\,\text{min}\,20\,\text{sec}$.

48. На сликата се дадени некои растојанија меѓу градовите *A, B, C, D, E, F* (во километри). Поштарот тргнал од градот *A* во градот *F*. На својот пат треба да помине во уште еден од градовите *B, C, D* или *E*. Во кој град треба да помине за да растојанието кое би го изминал биде најдолго? Колку километри пократко би патувал кога директно од градот *A* би отишол во градот *F*?



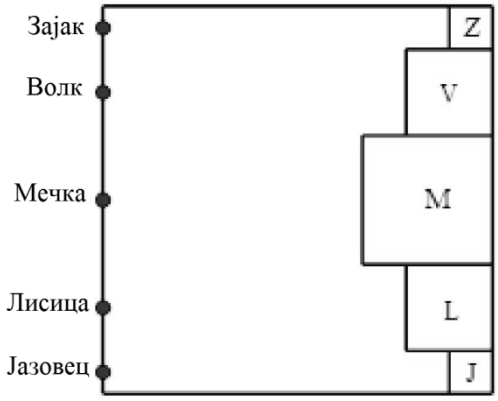
Решение. Со $A-B-F$ го означуваме патот што поштарот го поминува од градот *A* до градот *F* преку градот *B*. Тогаш растојанијата кои ги поминува поштарот ако минува во различните градови е следен: $A-B-F$ е $176\,km.$; $A-C-F$ е $181\,km$; $A-D-F$ е $174\,km$; $A-E-F$ е $173\,km$. Значи, најдолго растојание ќе помине ако помине во гардот *C*. Кога би отишол од градот *A* директно во градот *F* би патувал $19\,km$ пократко.

49. Покрај еден раб на квадратна шума со ширина $550\,m$ во куќи со квадратен облик живеат Зајак, Волк, Мечка, Лисица и Јазовец (види цртеж). Тис се сретнале на работ од шумата и секој застанал наспроти

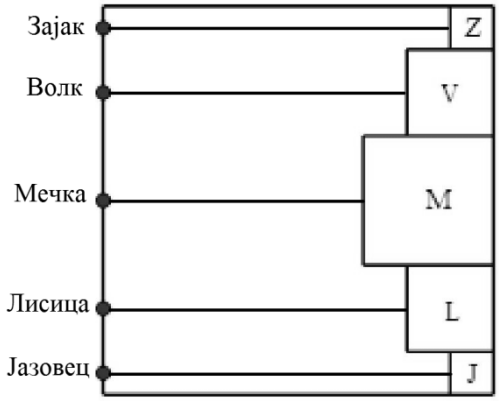
својата куќа и до неа сака да дојде по најкраткиот можен пат. Притоа се знае дека:

- Куќата на Зајакот е иста со куќата на Јазовецот, а куќата на Волкот е иста со куќата на Лисицата.
- Зајакот има $475\,m$ до својата куќа, а Волкот $450\,m$.
- Мечката минува 1 метар за 1 секунда.
- За да стигне до својата куќа на Лисицата ѝ треба два пати помалку време отколку што ѝ треба на Мечката да стигне до нејзината куќа, а на Јазовецот му треба два пати повеќе време за да стигне до својата куќа отколку што и треба на Мечката да стигне до нејзината куќа.

Колку време му треба на Јазовецот за да стигне до неговата куќа, а колку време ѝ треба на Лисицата да стигне до нејзината куќа?



Решение. Најкраток е патот кога се движеме по права линија меѓу две означени места. Да ги означиме патеките по кои се движат животните како на долниот цртеж.



Бидејќи ширината на шумата е еднаква на збирот на должината на

патот до куќата и ширината на куќата на секое животно, заклучуваме дека куќите на Зајакот и Јазовецот се широки $550-475=75\,m$, а на Волкот и Лисицата се пироки $550-450=100\,m$. Сега, куќата на Мечката е широка $550-(75+100+100+75)=200\,m$. Мечката до својата куќа треба да помине $550-200=350\,m$. Бидејќи Мечката минува 1 метар за 1 секунда, нејзе ѝ требаат 350 секунди за да стигне до својата куќа. На Лисицата и треба два пати помалку време отколку на мечката, што значи дека таа до својата куќа ќе стигне за

$$350:2=175\,\text{s}=2\,\text{min}\,55\,\text{s}.$$

На Јазовецот му треба два пати повеќе време отколку на Мечката, што значи дека тој ќе стигне за

$$350\cdot 2=700\,\text{s}=11\,\text{min}\,40\,\text{s}$$

50. Во подмладокот на ансамблот Танец има 39 момчиња и 23 девојчиња. Секоја седмица на ансамблот му се придружуваат по 6 момчиња и по 8 девојчиња. По колку седмици во подмладокот на ансамблот Танец ќе има еднаков број момчиња и девојчиња? Колкав ќе биде вкупниот број деца во подмладокот на насамблот Танец?

Решение. *Прв начин.* Ја составуваме табелата

	Момчиња	Девојчиња
Моментално	39	23
По 1. седмица	45	31
По 2. седмица	51	39
По 3. седмица	57	47
По 4. седмица	63	55
По 5. седмица	69	63
По 6. седмица	75	71
По 7. седмица	81	79
По 8. седмица	87	87

Значи, по осум седмици бројот на момчињата ќе биде еднаков на бројот на девојчињата и притоа во подмаладокот на ансамблот Танец ќе има $87+87=174$ деца.

Втор начин. Во ансамблот има $39-23=16$ момќиња повеќе од девојчиња. Секоја седмица на насамблот му се придружуваат $8-6=2$ повеќе девојчиња од момчиња. Значи, бројот на момчињата и девојчињата ќе биде еднаков по $16:2=8$ седмици. По осум седмици вкупниот број момчиња ќе биде $39+8\cdot 6=87$. Бидејќи по осум седмици

бројот на момчињеата и девојчињата е еднаков, во ансамблот ќе има вкупно $87+87=174$ деца.

Трет начин. Во ансамблот има $39-23=16$ момчиња повеќе од девојчиња. Секоја седмица на ансамблот му се придружуваат $8-6=2$ повече девојчиња од момчиња. Значи, бројот на момчињата и девојчињата ќе биде еднаков по $16:2=8$ седмици. На почетокот во ансамблот има $39+23=62$ деца, па како секоја седмица бројот на децата се зголемува за $8+6=14$, по осум седмици во ансамблот Танец ќе има $62+8\cdot 14=174$ деца.

51. Минатата година во работилница за дрвени играчки се произведувале по 198 автомобилчиња дневно. Оваа година за 6 дена се произведуваат онолку автомобилчиња колку што минатата година се произведувале за 8 дена. Колку автомобилчиња оваа година се произведуваат за 100 работни дена?

Решение. Минатата година за 8 дена се произведувале $8\cdot 198=1584$ автомобилчиња. Овие автомобилчиња оваа година се произведуваат за 6 дена, па затоа оваа година за еден ден се произведуваат $1584:6=264$ автомобилчиња. Конечно, оваа година за 100 работни дена ќе се произведат $100\cdot 264=26400$ автомобилчиња.

52. Од едно училиште на екскурзија тргнале 713 ученици во 25 автобуси, од кои некои имале 33 седишта, а некои 26 седишта. Ако е познато дека сите ученици ги пополниле сите места во автобусите, колку автобуси биле со 26, а колку со 33 седишта?

Решение. *Прв начин*. Ако секој автобус има по 26 седишта, тогаш бројот на учениците ќе биде $25\cdot 26=650$. Но, имаме $713-650=63$ ученици повеќе и тие седнале во автобуси со 33 седишта. Секој автобус со 33 седишта има $33-26=7$ седишта повеќе, па затоа имаме $63:7=9$ автобуси со 33 седишта. Конечно, бројот на автобусите со 26 седишта е $25-9=16$.

Втор начин. Нека имаме x автобуси со 33 седишта. Тогаш бројот на автобусите со 26 седишта е $25-x$, па затоа важи

$$\begin{aligned} 33x+26(25-x)&=713,\\ 33x+650-26x&=713,\\ 7x&=63,\\ x&=9. \end{aligned}$$

Конечно, имаме 9 автобуси со 33 седишта и 16 автобуси со 26 седишта.

53. Од 1 филџан мед, 2 филџани зејтин, 3 филџани шеќер и 4 филџани брашно баба Милка направила 25 колачиња. Колку најмногу колачиња баба Милка ќе направи од 13 филџани мед, 14 филџани зејтин, 15 филџани шеќер и 16 филџани брашно?
Решение. Баба Милка има 13 пати повеќе мед, 7 пати повеќе зејтин, 5 пати повеќе шеќер и 4 пати повеќе брашно отколку што и се потребни за 25 колкачиња. Значи таа може да направи 4 пати повеќе колачиња (затоа што брашно има релативно најмалку), односно може да направи 100 колачиња.

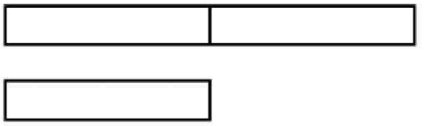
54. Во понеделник Горјан решил од утре да почне да чита книга. Првиот ден тој прочитал 32 страници, а секој следен ден читал по три страници повеќе отколку претходниот ден. Колку страници вкупно прочитал Горјан по читањето на книгата во саботата истата седмица?
Решение. Горјан во вторникот прочитал 32 страници, во средата прочитал $32+3=35$ страници, во четвртокот $35+3=38$, во петокот $38+3=41$ и во саботата $41+3=44$ страници. Конечно, Горјан по читањето на книгата во саботата истата седмица вкупно прочитал $32+35+38+41+44=190$ страници.

55. Во собата на Пабло на три полици се распоредени 167 книги. Пабло на третата полица ставил нови 23 книги. Потоа од третата полица префрлил на првата полица 26 книги, а сите книги од втората полица ги поклонил на Домот на деца без родители. Потоа на сите три полици останале вкупно 135 книги. Колку книги поклонил Пабло на Домот на деца без родители?
Решение. Кога Пабло ставил 23 книги на третата полица, тогаш на сите три полици вкупно имало $167+23=190$ книги. По извршеното поклонување Пабло имал 135 книги. Пабло на Домот на деца без родители поклонил толку книги колку што по поклонувањето се намалил вкупниот број книги на сите три полици, т.е. тој поклонил $190-135=55$ книги.

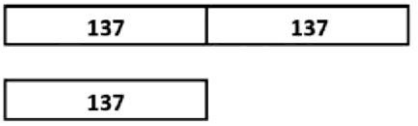
56. Додека Андреј изеде две вишни, Пабло изедува пет вишни, а додека Пабло изедува три вишни, Филип изедува седум вишни. Андреј и

Филип вкупно изеле 82 вишни. Колку вишни за тоа време изел Пабло?
Решение. Пабло при споредба со Андреј и Филип изедува 5 и 3 вишни соодветно. Затоа ќе разгледаме кога Пабло изедува $3\cdot 5=15$ вишни. Тогаш Андреј изедува $3\cdot 2=6$ вишни, а Филип изедува $5\cdot 7=35$ вишни. Тоа значи дека додека Пабло изедува 15 вишни, Андреј и Филип заедно изедуваат $6+35=41$ вишна. За да изедат 84 вишни, Андреј и Филип треба да изедат уште $82-41=41$ вишна и за тоа време Пабло ќе изеде уште 15 вишни. Конечно, додека Андреј и Филип изедат 82 вишни, Пабло изедува $15+15=30$ вишни.

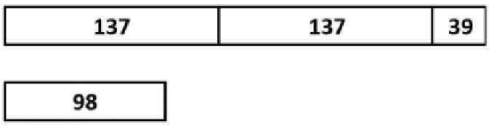
57. Во две купчиња има вкупно 411 лешници. Кога од првото купче ќе се преместат во второто 39 лешници, тогаш во првото купче ќе има два пати повеќе лешници отколку во второто. Колку лешници има во секое купче?
Решение. *Прв начин*. Со преместување на лешниците во второто купче има два пати помалку лешници отколку во првото, што значи дека во второто купче има третина од сите лешници. Значи во второто купче има $411:3=137$ лешници, па затоа во првото купче има $2\cdot 137=411-137=274$ лешници. Пред преместувањето во првото купче имало $274+39=313$ лешници, а во второто купче имало $137-39=98$ лешници.
Втор начин. Нека во второто купче има x лешници. Тогаш во првото купче има $411-x$ лешници. По преместувањето на 39 лешници во второто купче има $x+39$, а во првото купче има
$$411-x-39=372-x$$
лешници. Од условот на задачата добиваме ја добиваме равенката
$$372-x=2(x+39),$$
од каде последователно наоѓаме
$$\begin{aligned} 372-x&=2x+78,\\ 2x+x&=372-78,\\ 3x&=294,\\ x&=98. \end{aligned}$$
Значи, на почетокот во второто купче имало 98, а во првото купче имало $411-98=313$ лешници.
Трет начин. По преместувањето имаме две купчиња лешници. Во поголемото купче има два пати повеќе лешници, што графички е прикажанов на долните цртежи:



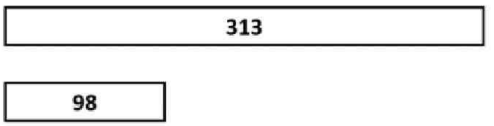
Значи, еден правоаголник означува $411:3=137$ лешници и имаме:



Пред преместувањето имаме



односно:



Според тоа, во првото купче имало 313, а во второто 98 лешници.

58. Група од 20 џинови правеле кула од коцки. Сите џинови учествувале во градбата на кулата. Десет џинови ределе коцки една над друга така што секој џин ставил двојно повеќе коцки од својот претходник. Првиот џин ставил една коца, вториот ставил цве коцки, третиот ставил четири коцки итн. Потоа, преостанатите десет џинови од врвот надолу земале коцки и тоа така што првиот зел една коцка, вториот зел две коцки, тртиот зел три коцки итн. до десеттиот џин кој зел десет коцки. Колку била на крајот висока кулата, ако секоја коцна имала раб долг $5\,cm$?

Решение. Првите десет џинови вкупно ставиле

$$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1023 \text{ коцки.}$$

Вторите десет џинови вкупно извадиле

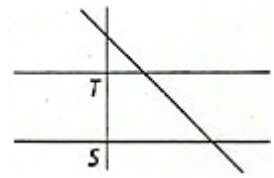
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 \text{ коцки.}$$

Значи, кулата имала $1023-55=968$ коцки и таа била висока

$$968\cdot 5=4840\,cm.$$

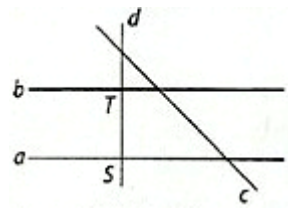
III. ГЕОМЕТРИЈА

1. а) На цртежот обележи ги правите: *a, b, c* и *d*, така да важи:
- правите *a* и *b* се паралелни, а точката *T* припаѓа на правата *b;*
- правата *d* е нормална на правата *a*;



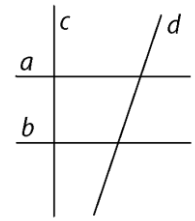
б) во кој однос се правите *b* и *d?*

Решение. а) Бараното обележување е прикажано на цртежот десно.



б) Правите *b* и *d* се нормални

2. Погледни го цртежот десно и одговори на следниве прашања:



а) Колку прави се прикажани на цртжот? Запиши ги!

б) Запиши ги сите парови паралелни прави!

в) Запиши ги сите парови заемно нормални прави!

Решение. а) На цртежот се прикажани четири прави и тоа: a,b,c,d.

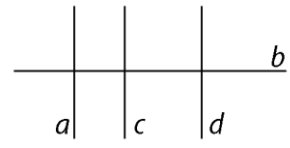
б) Има само еден пар паралелни прави и тоа $a \| b$.

в) Има два пара заемно нормални прави и тоа: $a \perp c$ и $b \perp c$.

3. Нацртај прави a,b,c,d ако знаеш дека правата a е нормална на правата b, правата a е паралелна со правата c и правата d е паралелна со правата c (сите четири прави се меѓусебно различни). Во каква положба се правите:

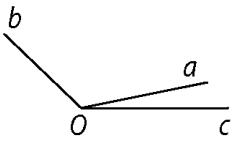
а) b и d, б) a и d, г) c и b.

Решение. Прво ги цртаме правата a и на неа нормалната права b. Сега цртаме права $c \| a$ и потоа права $d \| c$, цртеж десно. Имаме:



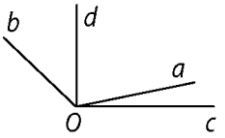
а) $b \perp d$, б) $a \parallel d$, в) $c \perp b$.

4. На цртежот десно нацртај полуправа Od така што $\measuredangle cOd$ ќе биде прав, а $\measuredangle bOd$ ќе биде остар. Запиши ги сите агли, па утврди колку од нив се:



а) остри, б) прави, в) тапи агли.

Решение. Поуправата Od треба да е нормална на полуправата Oc. Ако полуправата Od е во надворешноста од $\measuredangle bOc$, тогаш $\measuredangle bOd$ ќе биде тап. Затоа полуправата Od мора да биде во внатрешноста на $\measuredangle bOc$ и истата е прикажана на цртежот десно. Аглите кои се добиваат се:



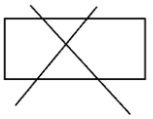
$$\measuredangle cOa,\ \measuredangle aOd,\ \measuredangle dOb,\ \measuredangle cOd,\ \measuredangle cOb \text{ и } \measuredangle aOb.$$

Имаме:

а) 3 остри, б) 1 прав, в) 2 тапи агли.

5. Нацртај еден правоаголник. Нацртај две прави кои го делат правоаголникот на два триаголници и два петоаголника.

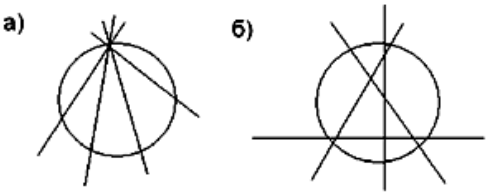
Решение. Правоаголник и прави кои го задоволуваат условот на задачата се прикажани на цртежот десно.



6. Каква е меѓусебната положба на 4 прави кои даден круг го делат на:

а) 5; б) 11 различни делови?

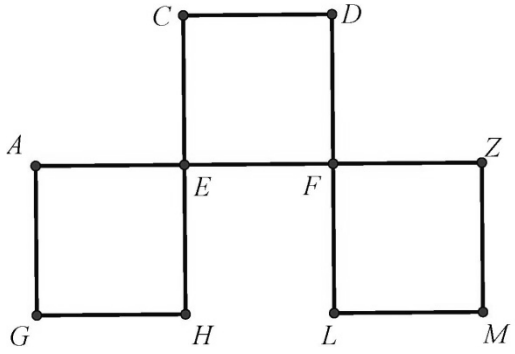
Решение. Одговорот е даден на долните цртежи.



7. Подреди ги по големина, од најкратката до надолгата, отсечките чии должини се: $35\,cm, 2\,dm$ и $400\,mm$.

Решение. Имаме $35\,cm = 350\,mm$ и $2\,dm = 20\,cm = 200\,mm$. Понатаму, бидејќи $200 < 350 < 400$ добиваме $2\,dm < 35\,cm < 400\,mm$.

8. На цртежот десно е дадена шема од патеки во паркот. Определи ги сите различни патишта по кои може да се стигне од точката A до точката Z. Два пата се различни ако се разликуваат барем во една од точките низ кои минуваат. На секој пат низ една од точките може да се помине само еднаш. Патот запиши го така што ќе ги запишеш точките низ кои минуваш, почнувајќи од точката A и завршувајќи во точката Z. Ако растојанието меѓу секои две точки е $100\,m$, колкава е должината на најкраткиот, а колкава е должината на најдолгиот пат?



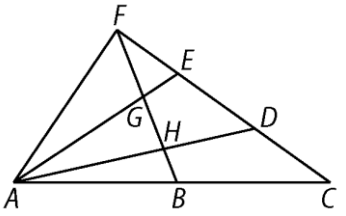
Решение. Има осум различни патишта и тоа:

AECDFZ, AECDFLMZ, AEFZ, AEFLMZ, AGHECDFZ, AGHECDFLMZ, AGHEFZ, AGHEFLMZ.

Патот *AGHECDFLMZ* е најдолг и неговата должина е $900\,m$, а патот *AEFZ* е најкраток и неговата должина е $300\,m$.

9. а) Колку триаголници се прикажани на цртежот десно? Запиши ги!

б) Колку отсечки се прикажани на цртежот десно? Запиши ги!



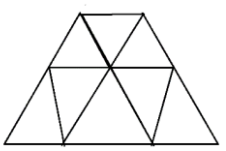
Решение. а) На дадениот цртеж се прикажани 15 триаголници и тоа:

ABH, *ABG*, *ABF*, *ACD*, *ACE*, *ACF*, *BCF*, *AHG*, *AHF*, *ADE*, *ADF*, *HDF*, *AGF*, *AEF*, *GEF*.

б) На дадениот цртеж се прикажани 22 отсечки и тоа:

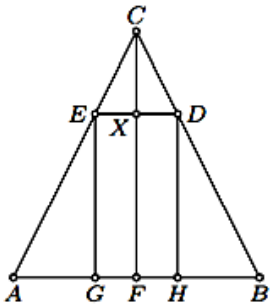
AB, *AC*, *BC*, *AH*, *HD*, *AD*, *AG*, *GE*, *AE*, *AF*, *FG*, *GH*, *HB*, *FH*, *GB*, *FB*, *FE*, *ED*, *DC*, *FD*, *EC*, *FC*.

10. Колку триаголници има на дадениот цртеж?



Решение. На дадениот цртеж се прикажани десет триаголници и тоа: 8 мали и 2 составени од 4 мали триаголници.

11. Колку отсечки и колку триаголници има на цртежот?



Решение. Кога на една права имаме:

а) само 2 точки, на неа се наоѓа една отсечка;

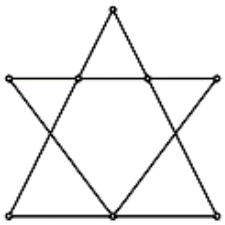
б) 3 точки, на неа се наоѓаат 3 отсечки;

в) 4 точки, на неа се наоѓаат 6 отсечки;

г) 5 точки, на неа се наоѓаааат 10 отсечки.

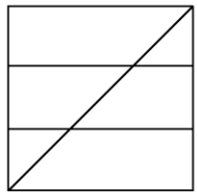
На цртежот ги имаме следните прави: *EG*, *DH* – 2 точки; *AC*, *BC*, *CF*, *ED* – 3 точки; *AB* – 5 точки. Тоа е вкупно $(2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 10) = 24$ отсечки и 7 триаголници.

12. Колку отсечки и колку триаголници има на дадениот цртеж?

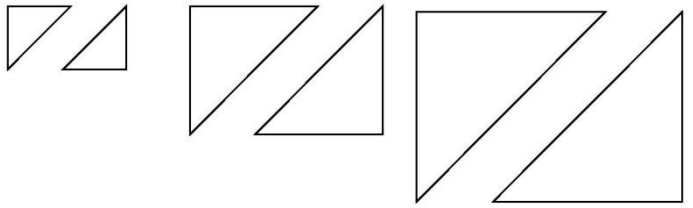


Решение. На цртежот се прикажани 27 отсечки и 7 триаголници.

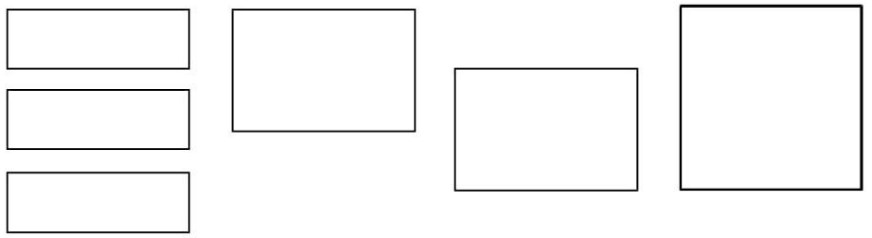
13. Колку триаголници и киолку правоаголници се прикажани на цртежот десно? Што има повеќе, триаголници или правоаголници? (Внимавај, квадратот е правоаголник.)



Решение. *Прв начин*. На дадениот цртеж се прикажани 6 триаголници (цртеж долу).

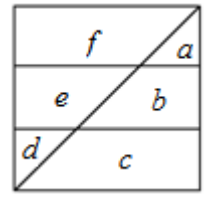


На дадениот цртеж се прикажани 6 правоаголници (цртеж долу).



Според тоа, на цртежот се прикажани еднаков број триаголници и правоаголници.

Втор начин. Даги означиме делови на кои е поделен квадратот како на цртежот десно.



На цртежот се прикажани триаголниците:

$$a, ab, abc, d, de, def\ ,$$

што значи дека се прикажани 6 триаголници. По-натаму, на цртежот се прикажани правоаголниците

$$af, be, cd, abef, bcde, abcdef\ ,$$

што значи дека се прикажани 6 правоаголници.

Според тоа, на цртежот се прикажани еднков број триаголници и правоаголници.

14. Определи го бројот на:

а) правоаголници;

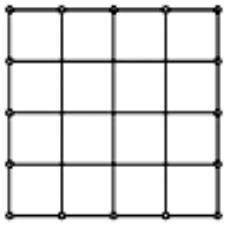
б) квадрати

во правоаголник со димензии 1244×1389, такви што нивното горно лево теме секогаш се совпаѓа со темето на правоаголникот.

Решение. Горното десно теме и долното лево теме еднозначно се определени со помош на горното лево теме и долното десно теме. Бидејќи горното лево теме е фиксирано, ние само треба да го одредиме бројот на можни позиции на долното десно теме.

а) Може да се наоѓа било каде, освен на левиот или на горниот раб, а тоа можеме да го избереме на $1243 \cdot 1388 = 1725284$ начини.
б) Бидејќи двете страни на квадратот се еднакви, долната десна точка мора да биде на еднакво растојание и од горниот и од левиот раб, т.е. на некоја од 1243 точки кои го задоволуваат тој услов, а не се горно-лево теме.

15. Колку квадрати и колку правоаголници има на дадениот цртеж?



Решение. Квадратите ќе ги броиме по димензии

$$1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3 \text{ и } 4 \times 4.$$

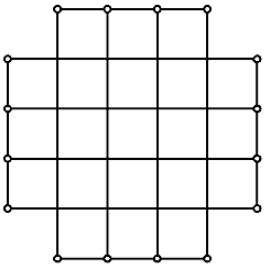
Имаме:
$1 \times 1 - 16$ квадрати
$2 \times 2 - 9$ квадрати
$3 \times 3 - 4$ квадрати
$4 \times 4 - 1$ квадрат
што значи вкупно 30 квадрати.
Правоаголниците ќе ги поделиме исто така по димензии:

$$1 \times 2, 2 \times 1, 1 \times 3, 3 \times 1, 1 \times 4, 4 \times 1,$$
$$2 \times 3, 3 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 2, 3 \times 4, 4 \times 3.$$

Имаме:
1×2 - 12 правоаголници, а исто толку има и 2×1 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен
1×3 - 8 правоаголници, а исто толку има и 3×1 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен
1×4 - 4 правоаголници, а исто толку има и 4×1 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен
2×3 - 6 правоаголници, а исто толку има и 3×2 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен
2×4 - 3 правоаголници, а исто толку има и 4×2 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен
3×4 - 2 правоаголници, а исто толку има и 4×3 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен.

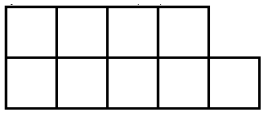
Вкупно 70, што со оние 30 квадрати дава 100 правоаголници.

16. Колку квадрати, а колку правоаголници кои не се квадрати има на следниот цртеж?



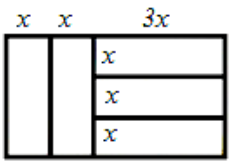
Решение. Користејќи ја идеата од претходната задача, добиваме дека на цртежот има 38 квадрати и 106 правоаголници.

17. Од девет квадрати составена е фигура како на цртежот десно. Периметарот на фигурата е еднаков на $28\,cm$. Определи го збирот на периметрите на сите квадрати кои може да се воочат на дадениот цртеж.



Решение. Периметарот на фигурата е формиран од 14 страни на малите квадрати од кои е составена фигуратта. Затоа должината на една страна на малите квадрати е $28:14=2\,cm$. На цртежот имаме 9 мали квадрати од кои е составена фигурата и уште 3 квадратин составени од по 4 мали квадрати и чија должина на страна е $4\,cm$. Збирот на периметрите на деветте мали квадрати е $9\cdot 4\cdot 2=72\,cm$, а збирот на периметрите на трите мали квадрати е $3\cdot 4\cdot 4=48\,cm$. Конечно, бараниот збир на периметрите на сите квадрати е $72+48=120\,cm$.

18. Голем правоаголник е составен од 5 еднакви мали правоаголници (види цртеж). Ако должината на поголемата страна на големиот правоаголник е $30\ cm$, пресметај го периметарот на еден мал правоаголник.



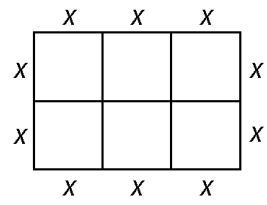
Решение. Ако помалата страна на правоаголникот ја обележиме со x, тогаш подолгата страна на помалиот правоаголник е $3x$. Подолгата страна на поголемиот правоаголник тогаш е $5x$, па е

$$5x = 30cm, \text{ т.е. } x = 6cm.$$

Значи, страните на помалиот правоаголник се $6cm$ и $18\ cm$ и од тука, неговиот периметар е $48cm$.

19. Правоаголникот со страни $9cm$ и $4cm$ и квадрат имаат еднакви плоштини. Кој од нив има поголем периметар и за колку?
Решение. Плоштината на правоаголникот и квадратот е
$$4 \cdot 9 = 36cm^2.$$
Страната на квадратот е $6cm$ $(6 \cdot 6 = 36)$, затоа поголем периметар има правоаголникот и тоа за
$$2 \cdot (9 + 4\ ) - (4 \cdot 6) = 2cm.$$

20. Ако едната страна на квадратот ја зголемиме два пати, а другата три пати, ќе добиеме правоаголник со плоштина $96\,cm^2$. За колку периметарот на добиениот правоаголник е поголем од периметарот на квадратот?
Решение. Ако со x ја означиме должината на страната на квадратот, тогаш правоаголникот же има страни со должини $2x$ и $3x$, а ќе биде составен од 6 квадрати. Плоштината на еден квадрат ќе биде $96:6=16\,cm^2$, па неговата страна ќе биде $x=4\,cm$. Според тоа, периметарот на квадратот ќе биде $4x=16\,cm$, а периметарот на правоаголникот ќе биде $2(2x+3x)=10x=40\,cm$. Значи, периметарот на правоаголникот е за $40-16=24\,cm$ поголем од периметарот на квадратот.



21. Ако сите полиња од шаховската табла се поредат едно по друго, се добива правоаголник со периметар $260cm$. Пресметај ја плоштината на шаховската табла.
Решение. Нека страната на полето на шаховската табла (квадрат) ја обележиме со a. Едната страна на правоаголникот ќе биде a, а другата $64a$. Од формулата за периметар на правоаголник добиваме дека $a = 2cm,$ па од тука плоштината на шаховската табла е
$$64a^2 = 256cm^2.$$

22. Околу тревник во форма на правоаголник е направена бетонска патека

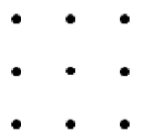
(ширината на патеката е иста). Помалата страна на правоаголникот има должина од $16m$, а плоштината на патеката е $173cm^2$. Пресметајте ја должината на другата страни на правоаголникот (тревникот) ако пешак што ја обиколува целата патека од надворешната страна поминува $16m$ повеќе отколку пешак што ја обиколува целата патека од внатрешната страна.

Решение. Нека ширината на патеката е x, а должината на бараната страна е y. Пешакот што ја обиколува целата патека од надворешната страна, всушност поминува $8xm$ подолг пат од пешакот кој ја обиколува целата патека од внатрешна старна. Следува дека $x = 2m$. Од таму добиваме дека плоштината на патеката е

$$4 \cdot (2 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 16) + 2 \cdot (2 \cdot y) = 176m^2.$$

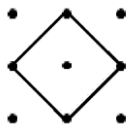
Затоа $80 + 4 \cdot y = 176$, па оттука $y = 24m$.

23. а) Колку квадрати може да се нацртаат така што нивните темиња ќе бидат по четири точки прикажани на цртежот десно?



б) Определи ја плоштината на секој од овие квадрати ако растојанието на секои две соседни точки по хоризонтала и поо вертикала е $5\,mm$.

Решение. а) На цртежот се прикажани шест квадрати и тоа: 4 квадрати со должина на страна $5\,mm$, 1 квадрат со должина на страна $10\,mm$ и 1 квадрат кој е прикажан на цртежот десно.



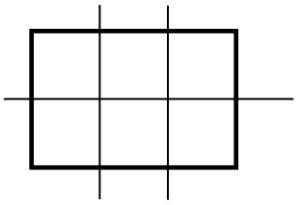
б) Плоштината на квадрат со должина на страна $5\,mm$ е еднаква на $5 \cdot 5 = 25\,mm^2$. Плоштината на квадрат со должина на страна $10\,mm$ е еднаква на $10 \cdot 10 = 100\,mm^2$. Прикажаниот квадрат на цртежот е составен од 4 половинки на квадрат со должина на страна $5\,mm$, што значи дека неговата плоштина е двапати поголема од плоштината на квадрат со должина на страна $5\,mm$. Значи, плоштината на овој квадрат е еднаква на $2 \cdot 25 = 50\,mm^2$.

24. За колку ќе се намали должината на страната на квадратот, ако периметарот на квадратот се намали за $100\,cm$?

Решение. Периметарот на квадратот е збир на должините на четири еднакви отсечки, па затоа ако неговиот периметар се намали за

$100\,cm$, тогаш неговата страна ќе се намали за $100:4=25\,cm$.

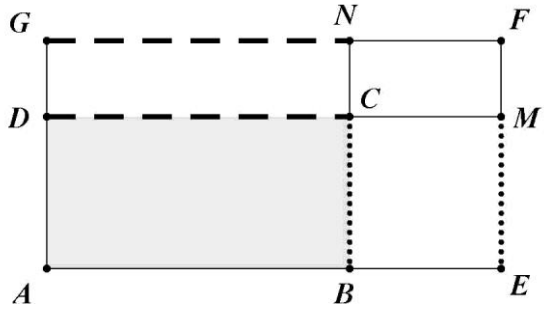
25. Три прави го делат правоаголникот на шест еднакви квадрати (цртеж десно). Ако периметарот на правоаголникот е за $180\,cm$ поголем од периметарот на еден од добиените квадрати, определи ги периметарите и плоштините на правоаголникот и квадратот.



Решение. Ако должината на страната на еден од добиените квадрати е a, тогаш должините на страните на почетниот правоаголник се $2a$ и $3a$. Оттука следува дека $2(2a+3a)-4a=180$, т.е. $6a=180$, од каде добиваме $a=30\,cm$. Значи, периметарот на еден од делбените квадрати е $4a=4\cdot 30=120\,cm$, а периметарот на почетниот правоаголник е $120+180=300\,cm$. Понатаму, плоштината на еден од делбените квадрати е $30\cdot 30=900\,cm^2$, а плоштината на почетниот правоаголник е $6\cdot 900=5400\,cm^2$.

26. На својата фарма Пабло заградил игралиште во форма на правоаголник. Оградата која ја искористил била долга $188\,m$. По извесно време решил да го зголеми игралиштето и затоа должината на секоја негова страна ја зголемил за половина, по што добил ново игралиште, исто така во форма на правоаголник. За оградување на новото игралипте Пабло ја искористил старата ограда и докупил иста таква ограда. Колку ограда докупил Пабло? Која плоштина е поголема, на старото игралиште или на делот со кој е зголемено старото игралиште?

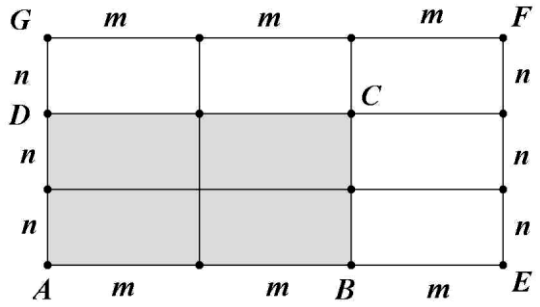
Решение. Нека правоаголникот $ABCD$ е старото игралиште, а правоаголникот $AEFG$ е новото игралиште (цртеж долу).



Имаме, $\overline{GN}=\overline{DC}$, $\overline{BC}=\overline{EM}$, па затоа овие делови од старото игра-

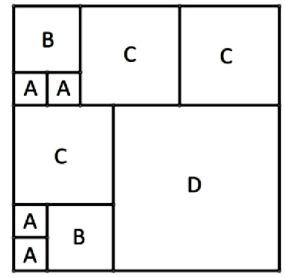
лиште Пабло може да ги искористи при оградување на соодветните еднакви делови на новото игралиште. Понатаму, $\overline{BE}+\overline{NF}=\overline{AB}$ и $\overline{DG}+\overline{MF}=\overline{BC}$, што значи дека збирот на должините на деловите за кои Пабло докупил ограда се еднакви збирот на должините на две соседни страни на правоаголникот, односно на половина од неговиот периметар. Конечно, Пабло треба да докупи $188:2=94\,m$ ограда.

Правоаголникот $AEFG$ да го поделиме на правоаголници со еднакви плоштини, како што е прикажано на долниот цртеж.



Забележуваме дека новото игралиште е составено од $3\cdot3=9$ такви правоаголници, а старото од $2\cdot2=4$ такви правоаголници. Според тоа, делот со кој е зголемено старото игралипте е составен од $9-4=5$ нови правоаголници, што значи дека тој има поголема плоштина од старото игралиште.

27. Квадратот на цртежот десно е составен од повеќе мали квадрати. Определи ја неговата плоштина ако периметарот на квадратот B е еднаков на $56\,cm$.



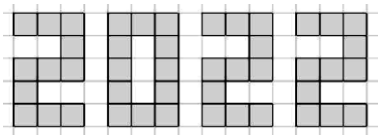
Решение. *Прв начин*. Должината на страната на квадратот B е еднаква на $56:4=14\,cm$. Должината на страната на квадратот A е еднаква на $14:2=7\,cm$. Должината на страната на квадратот C е еднаква на $7+14=21\,cm$. Должината на страната на D е еднаква на $21+14=35\,cm$. Плоштините на квадратите A,B,C,D се соодветно: $49\,cm^2, 196\,cm^2, 441\,cm^2, 1225\,cm^2$, па затоа плоштината на целиот квадрат е

$$P=4\cdot49+2\cdot196+3\cdot441+1225=3136\,cm^2.$$

Втор начин. Аналогно како при првиот начин за должините на стра-

ните на квадратите A,B,C,D наоѓаме: $7\,cm14\,cm, 21\,cm, 35\,cm$, па затоа должината на страната на целиот квадрат е: $7+14+35=56\,cm$. Конечно, плоштината на целиот квадрат е $P=56\cdot 56=3136\,cm^2$.

28. Со помош на сиви квадратни плочки со должина на страна $5\,cm$ Филип на лист хартија составил четири фигури. Потоа со фломастер ја обиколила секоја фигура и така на хартијата го добила бројот 2022. Мајката на Филип смета дека збирот на должините на рабовите на цифрите е најмалку $5\,m$. Дали Мајката на Филип е во право?



Решение. Периметарот на фигурата со која е добиена цифрата 2 е добиен од

$$1+3+3+2+1+2+1+3+3+2+1+2=24$$

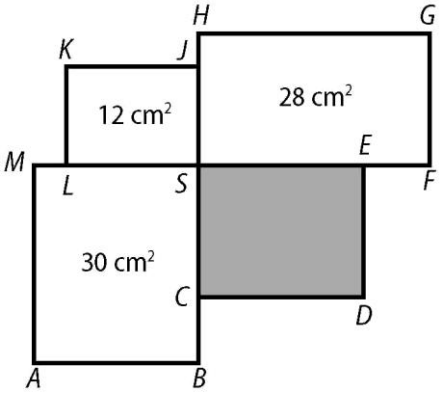
должини на страната на плочката, па затоа тој е еднаков на $5\cdot 24=120\,cm$. Периметарот на фигурата со која е добиена цифрата 0 е составен од

$$3+5+3+5+1+3+1+3=24$$

должини на страната на плочката, па затоа тој е еднаков на $5\cdot 24=120\,cm$. Според тоа, збирот на должините на рабовите на сите е еднаков на $2\cdot 120+120=480\,cm$. Но, $5\,m=500\,cm$ и како $480<500$ заклучуваме дека мајката на Филип не била во право.

29. На цртежот десно за три правоаголници се запишани нивните плоштини. Определи ја плоштината на осенчениот правоаголник $CDES$ ако

$$\overline{BC}=2\,cm, \overline{EF}=2\,cm,$$
$$\overline{FG}=4\,cm, \overline{HJ}=1\,cm,$$
$$\overline{ML}=1\,cm.$$



Решение. Плоштината на правоаголникот $FGHS$ е еднаква на $28\,cm^2$ и $\overline{FG}=4\,cm$, па затоа $\overline{SF}=28:4=7\,cm$, од каде добиваме

$\overline{SE}=\overline{SF}-\overline{EF}=5\,cm$. Понатаму, од $\overline{HJ}=1\,cm$ и $\overline{SH}=\overline{FG}=4\,cm$, па затоа $\overline{JS}=3\,cm$. Сега плоштината на правоаголникот $JKLS$ е еднаква на $12\,cm^2$, па затоа $\overline{LS}=12:3=4\,cm$, односно $\overline{MS}=\overline{ML}+\overline{LS}=5\,cm$. Но, плоштината на правоаголникот $ABSM$ е еднаква на $30\,cm^2$, па затоа $\overline{MA}=\overline{BS}=30:5-6\,cm$. Според тоа, $\overline{SC}=\overline{BS}-\overline{BC}=4\,cm$. Конечно, плоштината на правоаголникот $CDES$ е

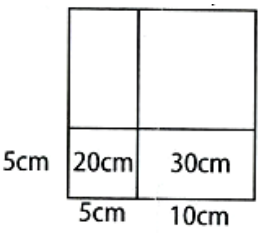
$$P=\overline{SC}\cdot\overline{SE}=4\cdot5=20\,cm^2.$$

30. Ако едната страна на квадрат ја продолжиме за $4cm$, а другата ја намалиме за $3\ cm$ добиваме правоаголник, чија плоштина е еднаква на плоштината на квадратот. Колкави се периметарот и плоштината на квадратот и правоаголникот?

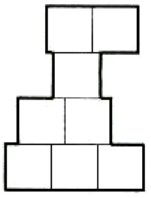
Решение. Нека мерниот број на должината на страната на дадениот квадрат е a. Од тоа што плоштината на добиениот правоаголник е еднаква на плоштината на дадениот квадрат, т.е. $3a=4(a-3)$, следува дека $3a=4a-12$, односно $a=12\ cm$. Страните на правоаголникот се $9\ cm$ и $16\ cm$. Плоштината на квадратот и правоаголникот е $144\ cm^2$. Периметарот на квадратот е $48\ cm$, а на правоаголникот е $50\ cm$.

31. Со 2 прави еден квадрат е поделен на 2 други квадрати и 2 правоаголника. Периметарот на еден од добиените квадрати е $20\ cm$, а периметарот на еден правоаголник е $30cm$. Определи го периметарот на почетниот квадрат.

Решение. Периметарот на еден квадрат е $20\ cm$, па страната на тој квадрат е $5\ cm$. Периметарот на правоаголникот е $30\ cm$, а бидејќи една страна на правоаголникот е еднаква на страната на квадратот, тогаш другата страна на правоаголникот е $10\ cm$ (види цртеж). Значи, страната на почетниот квадрат е $15\ cm$, а периметарот е $60\ cm$.

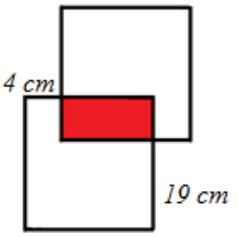


32. Фигурата на цртежот е составена од 8 исти квадрата. Периметарот на фигурата од цртежот е $32cm$. Пресметај ја нејзината плоштина.



Решение. Страната на квадратот ја обележуваме со a. Периметарот на дадената фигура се состои од 16 страни на квадратот, па $16\,a = 32cm$, а од каде добиваме дека страната на квадратот е $2cm$. Бидејќи фигурата се состои од 8 квадрати, заклучуваме дека бараната плоштина е $8 \cdot a \cdot a = 32cm^2$

33. Два квадрати со должина на страните по $28cm$ имаат заеднички обоен дел, со форма на правоаголник (како на цртежот). Пресметај го периметарот на правоаголникот.

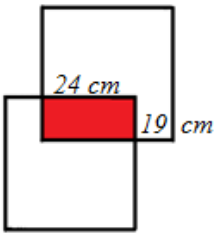


Решение. Една страна на правоаголникот е

$$28cm - 4cm = 24cm,$$

а другата

$$28cm - 19cm = 9cm.$$



Периметарот на правоаголникот е

$$L = 2a + 2b = 48 + 18 = 64cm.$$

34. Плоштината на еден правоаголник е $2008\,cm^2$. Должината на една страна е парен број сантиметри, а на другата е непарен број сантиметри. Да се пресмета периметарот на правоаголникот. Запиши ги сите можни решенија.

Решение. Бидејки е

$$2008 = 1 \cdot 2008 = 2 \cdot 1004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251,$$

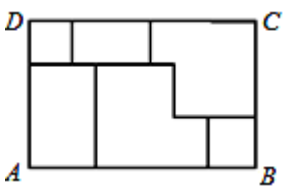
задачата има две решенија. Ако должините на страните се $1cm$ и $2008cm$, решението е

$$L = 2 \cdot (1 + 2008) = 4018cm,$$

а ако должините на страните се $8cm$ и $251cm$ решението е

$$L = 2 \cdot (8 + 251) = 518cm.$$

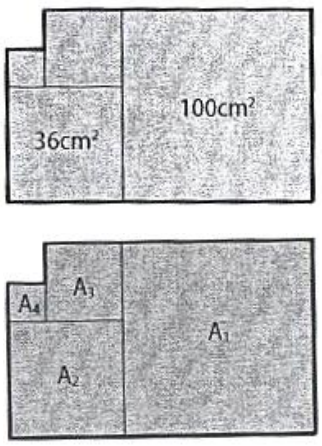
35. Определи го збирот на периметрите на сите 6 фигури (види цртеж) кои настанале со делење на правоаголникот $ABCD$ чии страни се со должина $\overline{AB} = 14{,}26cm$ и $\overline{BC} = 11{,}3cm$. Секоја од страните на сите шест фигури е паралелна со еден пар на страни на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Бидејќи збирот на должините на средните хоризонтални линии е еднаков на должината на страната *AB*, збирот на средните леви две вертикални линии и еднаков на должината на страната *BC* и збирот на средните десни три вертикални е еднаков дожината на страната *BC*, добиваме дека збирот на периметрите на сите 6 фигури е:

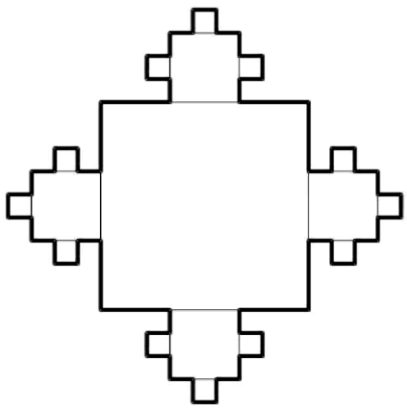
$$(2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC}) + (2 \cdot \overline{AB} + 4 \cdot \overline{BC}) = 124{,}84cm$$

36. Фигурата на цртежот е составена од 4 квадрати. Пресметај го периметарот на таа фигура, ако на цртежот се дадени површини на два квадрата.



Решение. Го обележуваме квадратот како на цртежот. Должината на страната на квадратот A_1 е $10cm$, а на квадратот A_2 е $6cm$. Должината на страната на квадратот A_3 е $10cm - 6cm = 4cm$, а на квадратот A_4 е $6cm - 4cm = 2cm$. Плоштината на дадената фигура е еднаква на $156cm^2$, а периметарот е еднаков на $52cm$.

37. Во средината на еден мозаик се наоѓа голема квадратна плоча со должина на страна $81cm$. На средната третина секоја страна на плочата е поставена помала квадратна плоча. Потоа на секоја средна третина ма секоја слободна страна на помалите квадратни плочи се поставени помали квадратни плочи. Од колку плочи се состои мозаикот? Колкав е периметарот на мозаикот?

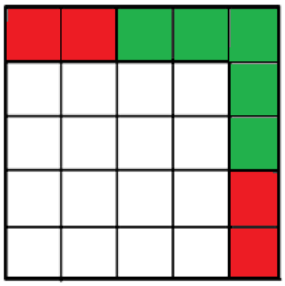


Решение. Мозаикот се сотои од 1 голема, 4 средни и 12 мали плочи (цртеж десно). Според тоа, мозаикот се состои од $1+4+12=17$ квадратни плочи.

Работ на мозаикот се состои од 8 отсечки со должина $81:3=27cm$ и $4 \cdot 15 = 60$ отсечки со должина $27:3=9cm$. Според тоа, периметарот на мозаикот е еднаков на

$8 \cdot 27 + 60 \cdot 9 = 216 + 540 = 756\,cm.$

38. На колку најмалку делови треба да се исечат два квадрати со страни $3cm$ и $4cm$, за да од добиените делови може да се направи нов квадрат?
Решение. На три дела. Види го цртежот.



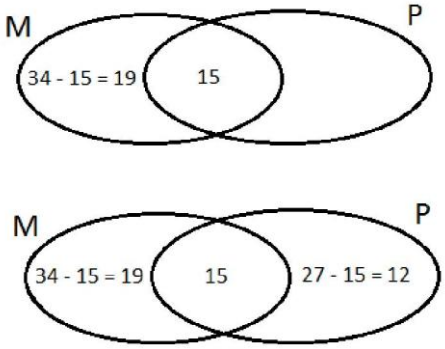
39. На колку најмалку делови треба да се исече картонски квадрат со страна $3cm$, за да од така добиените делови може да се состават три нови квадрати со плоштини од $1cm^2$, $4cm^2$ и $4cm^2$.
Решение. На четири дела. Види го цртежот.

IV. МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Браќата Марко и Рампо собираат стрипови. Во својата колекција моментално имаат 67 стрипови, од кои Марко прочитал 34, а Петар 27. Колку стрипови никој не ги прочитал, ако двајцата браќа прочитале 15 исти стрипови?

   Решение. *Прв начин*. Ако двајцата браќа прочитале 15 исти стрипови, тогаш Марко прочитал $34-15=19$ стрипови кои не ги прочитал Рампо. Бидејќи бројот на прочитаните стрипови е еднаков на збирот на бројот на стриповите кои ги прочитал само Марко и бројот на стриповите кои ги прочитал Рампо, добиваме дека од колекцијата од 67 стрипови биле прочитани $19+27=46$ стрипови. Конечно, $67-46=21$ стрип не бил прочитан од ниту еден од браќата.

   Втор начин. Со помош на Ојлер-Венов дијаграм ќе ги прикажеме броевите стрипови кои биле прочитани од некој од браќата Марко и Рампо. Постапката на добивање на дијаграмот е дадена на цртежите десно. Според тоа, вкупно биле прочитани

   $$19+15+12=46$$

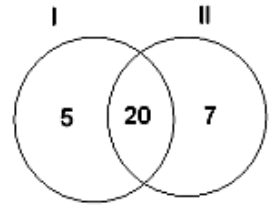
   стрипови, па затоа непрочитани останале $67-46=21$ стрип.

2. Во едно одделение има 32 ученика, од кои 18 ученици се претплатени за весникот „Другарче“, а 13 се претплатени за весникот „Развигор“. Ако е познато дека 8 ученици не се претплатени на ниту едно списание, тогаш колку ученици ги земаат двете списанија истовремено?

   Решение. *Прв начин*. Нека x е бројот на ученици претплатени на двете списанија. Тогаш $18-x+x+13-x=32-8$, па $x=7$.

   Втор начин. Со користење Венов дијаграм каде A е множеството ученици кои земаат Другарче, а B е множеството ученици кои земаат Развигор.

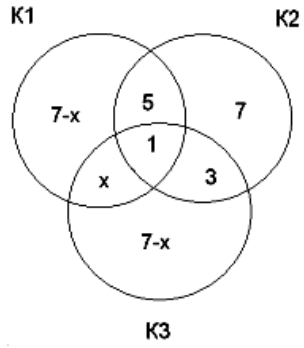
3. На писмената работа по математика поставени се 3 задачи. Секој ученик решил барем една задача, и ниту еден од учениците не ја решил третата задача. Првата задача ја решиле 25 ученици, втората 27 ученици, а двете задачи ги решиле 20 ученици. Колку ученици биле присутни на писмената работа по математика? Колку од нив ја решиле само првата задача?



Решение. Бидејќи $5 + 20 + 7 = 32$, заклучуваме дека на писмената работа по математика имало 32 ученици. Само првата задача ја решиле $25 - 20 = 5$ ученици.

4. Во едно одделение од 29 ученици, 13 ја прочитале првата книга, 16 втората книга и 11 третата. Истовремено тројца од нив не прочитале ниту една книга. 6 од оние кои ја прочитале втората книга во исто време ја прочитале и првата книга, а 4 ученици и третата книга. Само еден ученик ги прочитал сите три книги. Колку ученици од одделението ја прочитале само првата книга, а колку само третата книга?

Решение. Го пополнуваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Според цртежот, вкупниот број на ученици што прочитале некоја од книгите е следниот:
$7 - x + 7 - x + x + 7 + 5 + 1 + 3 = 30 - x.$
Според условот на задачата 3 ученици не прочитале ниту една книга, па така вкупниот број на ученици кои читале е $29 - 3 = 26$. Сега, $26 = 30 - x$ т.е. $x = 4$. Значи, 3 ученици ја прочитале само првата, а 3 само третата книга.

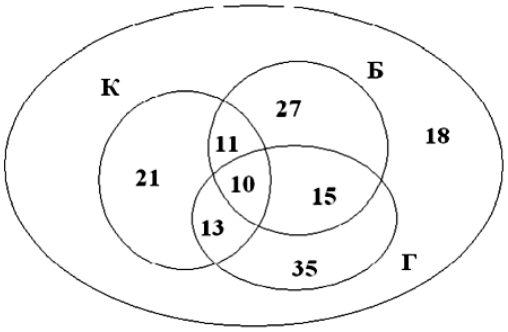


5. Пополни го Веновиот дијаграм врз основа на следниот текст. 150 почетници на музичкото училиште се прашани дали знаат да свират клавир, тапани или гитара. Добиени се следните одговори:
18 лица не свират на ниту еден инструмент;
10 лица свират на сите три инструменти;
77 лица можат да свират само гитара или тапани, но не можат да свират клавир;
73 лица свират гитара;
49 лица свират барем два од наведените инструменти;

13 лица можат да свират клавир и гитара, но не можат да свират тапани;

21 лице свири клавир и тапани.

Решение. Бараното пополнување е дадено на долниот цртеж.

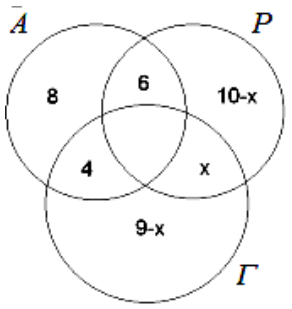


6. Во едно одделение со 35 ученици, секој ученик задолжително учи барем еден, но не повеќе од два странски јазици и тоа: 18 ученици учат англиски, 16 руски и 13 германски јазик. Притоа 4 ученици учат англиски и германски јазик, 6 англиски и руски. Колку ученици учат само еден јазик, а колку руски и германски истовремено?

Решение. Цртежот покажува дека само англиски учат $8+6+4=18$ ученици. Вкупниот број на ученици што учат било кој од јазиците е 35. Од друга страна тој број е еднаков на

$$18+9-x+10-x+x=37-x,$$

односно $37-x=35$ т.е. $x=2$. Само еден странски јазик учат $8+8+7=23$ ученици, а 2 ученика учат и руски и германски истовремено.



7. Колку

а) најмногу, б) најмалку

денови може да има во четири последователни месеци.

Решение. Во еден месец има најмногу 31, а најмалку 28 денови (случајот кога годината не е престапна). Затоа во четири последователни месеци може да има:

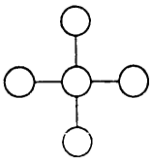
а) најмногу 123 денови, на пример во јули, август, септември и октомври,

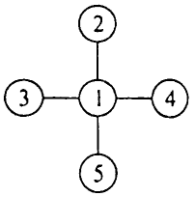
б) најмалку 120 денови, на пример во јануари, февруари, март и април.

8. Во зграда со 4 ката и 4 влеза (*I, II, III* и *IV)* на секој кат и во секој влез има по еден стан. Во секој од становите во непарните влезови живее ист број на станари. Во секој од становите во парните влезови, живеат двојно повеќе станари отколку во становите во непарните влезови. Ако во зградата вкупно живеат 48 станари, колку станари живеат во секој стан?
Решение. На секој кат живеат $48:4=12$ станари. Бидејќи на еден кат има по два стана во парните и два во непарните влезови, тоа значи дека 4 станари живеат во становите во непарните влезови на еден кат, а 8 станари во становите во парните влезови на еден кат. Значи, во еден стан во непарните влезови живеат два станари, а во еден стан во парните влезови живеат четири станари.

9. Во корпата за топки има 10 кошаркарски, 5 фудбалски и 7 ракометарски топки. Колку најмалку топки без гледање треба да извлечеме за да бидеме сигурни дека сме извлекле ракометарска топка.
Решение. Во најлош случај, прво ќе ги извлечеме сите кошаркарски и фудбалски топки. Значи, треба да извлечеме $10+5+1=16$ топки.

10. Во секој круг треба да се впише еден од броевите 1, 2, 3, 4 и 5 така да збирот на броеви хоризонтално и збирот на броеви вертикално биде по 8.





Решение. Бројот 8 како збир на три од броевите 1, 2, 3, 4 и 5 може да го добиеме на два начина: 1+2+5 и 1+3+4. Бидејќи бројот 1 е во двата збира, заклучуваме дека тој мора да се наоѓа и во хоризонталната и во вертикалната насока

11. Миле има 3 кутии со џамлии: една со 13, една со 10 и една со 4 џамлии. Со помош на точно 3 префрлања, Миле ги распоредил џамлиите така што во секоја од кутиите има еднаков број на џамлии. Префрлањето се реализира така што од едната во другата кутија префрламе точно половина од џамлиите кои биле во втората кутија. Како тоа го направил Миле?

Решение. Имаме

13	10	4
13	8	6
9	12	6
9	9	9

12. Од 6 навидум еднакви џамлии, една има помала маса од останатите. Со помош на само 2 мерења на вага без тегови одреди која е таа џамлија.
Решение. Ќе ги поделиме џамлиите во 3 групи, по две џамлии во секоја група. Ќе споредиме две групи.
1) Ако се во рамнотежа, полесната џамлија е меѓу двете кои не се мерени. Ќе ги споредиме оние џамлии кои не се мерни и на тој начин ја пронаоѓаме полесната џамлија.
2) Ако не се во рамнотежа, бараната џамлија се наоѓа меѓу оние две кои се полесни. Со мерење на тие две, доаѓаме до бараната џамлија.

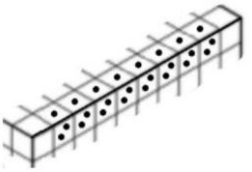
13. Андреј, Бране, Дарко, Јанко, Ласте, Марјан и Виктор се ученици во петто одделение. Учителот Благоја измерил колку се високи и запишал 128, 132, 135, 137, 138, 141 и 142 сантиметри. Но тој заборавил да запише кој ученик колку е висок, па го прашал ученикот Горјан дали се сеќава кој ученик колку е висок. На тоа Горјан одговорил:
1) Андреј е повисок од Ласте, а е понизок од Бране,
2) Виктор е повиско од Бране,
3) Збирот на висините на Јанко и Марјан е 272,
4) Јанко е понизок од Марјан,
5) Висината на Дарко е непарен број поголем од 137,
6) Виктор не е понизок од $136\,cm$.

Помогни му на учителот Благоја да открие кој ученик колку е висок, ако се знае дека сите тврдења кои ги искажал Горјан се вистинити.
Решение. Од дадените броеви единствен непарен број кој е поголем од 137 е 141, па од 5) следува дека Дарко е висок $141\,cm$. Понатаму, единствени два броја чиј збир е 272 се 135 и 137, па од 3) следува дека висините на Јанко и Марјан се $135\,cm$ и $137\,cm$, во некој редослед, па од 4) следува дека Јанко е висок $135\,cm$, а Марјан е висок $137\,cm$. Понатаму, од 6) следува дека Виктор е висок $138\,cm$ или $142\,cm$. Од 1) следува дека Бране е повисок и од Ласте и од Андреј, што значи дека тој е висок $138\,cm$ или $142\,cm$. Сега, од 2) следува дека Виктор е

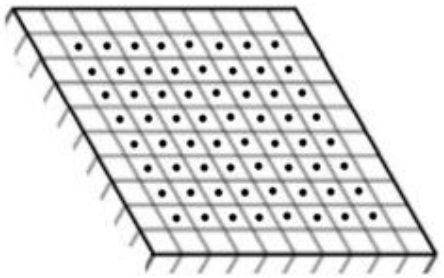
висок $142\,cm$, а Бране е висок $138\,cm$. Конечно, од 1) следува дека Андреј е висок $132\,cm$, Ласте е висок $128\,cm$.

14. Коцка за играње на сите ѕидови има различен број точки, од една до шест точки, а збирот на броевите на точките на спротивните ѕидови е еднаков на 7. Од 1000 коцки за играње е составена голема коцка со димензии $10\times10\times10$. Колкав е најмалиот можен збир на сите точки кои се видливи на ѕидовите на така добиената коцка?

Решение. Коцката има 8 темиња. Секое теме е определено со една коцкичка за играње. Најмалиот број видливи точки на секоја таква коцкичка е еднаков на $1+2+3=6$ (цртеж десно). Затоа најмалиот можен збир на видливи точки на сите осум коцкички за играње во темињата е $8\cdot6=48$.



Коцката има 12 рабови. Секој од овие рабови е определен со 8 коцкички кои не се во темињата на големата коцка. Најмалиот број видливи точки на секоја таква коцкичка е еднаков на $1+2=3$. Затоа најмалиот број водливи точки на сите рабови е еднаков на $12\cdot8\cdot3=288$. Коцката има 6 ѕидови. Секој ѕид е определен со $8\cdot8=64$ мали коцкички кои не се наоѓаат на рабовите на големата коцка. Најмалиот број видливи точки на секоја од овие коцкички е 1. Затоа, без рабовите најмалиот број видливи точки на сите ѕидови на големата коцка е $6\cdot64\cdot1=384$. Конечно, најмалиот можен збир видливи точки на големата коцка е еднаков на



$$48+288+384=720.$$

15. Тројца пријатели Раде, Ласте и Марко тренираат маратон. Тие имаат зелено, сино и црвено капче, а носат патики број 43, 44 и 45. Често пати нешто заборават во соблекувалната, а денес во шкавчето за заборавени работи имало зелено капче и патики број 43. Кој денеска заборавил работи ако се знае дека:
- Ласте нема сино капче,
- оној што има патики број 44 има зелено капче,
- Раде нема патики број 43,

- Ласте нема патики број 44,
- оној што има патики број 43 нема црвено капче.

Решение. *Прв начин.* Знаеме дека Ласте нема сино капче. Бидејќи Ласте нема ниту патики број 44, заклучуваме дека тој нема зелено капче. Значи, Ласте има црвено капче. Лицето што има црвено капче нема патики број 43, па затоа Ласте нема патики број 43. Но, Ласте нема и патики број 44, па затоа тој има патики број 45. Според тоа, Раде нема патики број 43 и 45, па заклучуваме дека Раде има патики број 44. Но, лицето со патики број 44 има зелено капче, па заклучуваме дека Раде има зелено капче. Конечно, Марко има патики број 43 и сино капче.

Од претходните разгледувања следува дека Раде и Марко заборавиле работи во соблеку-валната.

Втор начин. Со З да го означиме зеленото капче, со Ц црвеното капче и со С синото капче. Понатаму, со 43, 44 и 45 да ги означиме патиките број 43, број 44 и број 45, соодветно. Ќе ја пополниме табелата со знаците + и − на следниов начин: ако лицето поседува некој предмет на соодветното место во табелата ќе ставиме знак +, а ако не го поседува тој предмет ќе ставиме знак −. Оваа постапка го прати заклучувањето како и во првиот начин на решавање.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде						−
Ласте		−		−	−	+
Марко						−
З						
С						
Ц						

	43	44	45	З	С	Ц
Раде			−			−
Ласте	−	−	+	−	−	+
Марко			−			−
З			−			
С			−			
Ц	−	−	+			

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–			–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко	+	–	–			–
З			–			
С			–			
Ц	–	–	+			

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–	+	–	–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко	+	–	–	–		–
З	–	+	–			
С		–	–			
Ц	–	–	+			

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–	+	–	–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко	+	–	–	–	+	–
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Бидејќи денес се заборавени зелено капче и патики број 43, заклучуваме дека Раде и Марко заборавиле работи во соблекувалната.

Трет начин. Со З да го означиме зеленото капче, со Ц црвеното капче и со С синото капче. Понатаму, со 43, 44 и 45 да ги означиме патиките број 43, број 44 и број 45, соодветно. Ќе ја пополниме табелата со знаците + и – на следниов начин: ако лицето поседува некој предмет на соодветноот место во табелата ќе ставиме знак +, а ако не го поседува тој предмет ќе ставиме знак –.
Првата таблица е пополнета според условите кои се дадени во задачата.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–					
Ласте		–			–	
Марко						
З	–	+	–			
С		–				
Ц	–	–				

Од табелата се гледа дека сино капче има лицето кое носи патки број 43 и црвено капче има лицето кое носи патики број 45. Така ја добиваме следнава табела.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–					
Ласте		–			–	
Марко						
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Сега, сино капче носи лицето кое носи патики број 43, а Раде не носи патики број 43, па затоа Раде нема сино капче. Значи, сино капче има Марко. Зелено капче има лицето кое носи патики број 44. Марко има сино, а не зелено капче, па затоа Марко не носи патики број 44.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–				–	
Ласте		–			–	
Марко		–		–	+	–
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Раде носи патики број 44 и има зелено капче.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–	+	–	–
Ласте		–		–	–	
Марко		–		–	+	–
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Сега уште може да се види дека Ласте има црвено капче и носи патики број 45, Марко носи патики број 43.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–	+	–	–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко	+	–	–	–	+	–
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Бидејќи денес се заборавени зелено капче и патики број 43, заклучуваме дека Раде и Марко заборавиле работи во соблекувалната.

Четврт начин. Прво ќе ги спариме капчето и патиките на ист сопственик. Познато е дека тој што има патики број 44 има зелено капче. Исто така е познато дека тој што има патики број 43 нема црвено капче. Значи, сопственикот на патиките број 43 нема ниту зелено ниту црвено капче, па затоа тој има сино капче. Конечно, тој што има патики број 45 има црвено капче.
Сега, бидејќи Ласте нема сино капче и нема патики број 44, тој мора да има црвено капче и патики број 45. Раде нема патики број 43, па затоа тој има патики број 44 и зелено капче, а Марко го има преостанатиот пар патики број 43 и сино капче.
Бидејќи денес се заборавени зелено капче и патики број 43, заклучуваме дека Раде и Марко заборавиле работи во соблекувалната.

16. Горјан како шифра за заклучување на својот мобилен телефон поставил парен четирицифрен број. За да не го заборави бројот, тој запишал:

- сите цифри се различни, а збирот на сите цифри е 15,
- цифрата на единиците е три пати помала од цифрата на илјадитите,
- цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците.

Определи ја шифрата која Горјан ја поставил за отклучување на својот мобилен.

Решение. *Прв начин*. Ако a,b,c,d се последователно различни цифри на илјадитите, стотките, десетките и единиците на бараниот четирицифрен број $\overline{abcd}$, тогаш

$$a+b+c+d=15.$$

Бидејќи бараниот број е парен, цифрата d на единиците може да е 0, 2, 4, 6 или 8. Цифрата не единиците е три пати помала од цифрата на илјадитите, па затоа $a=3d<10$, што значи дека можни се два случаја и тоа:

- ако $d=0$, тогаш $a=3\cdot 0=0$, што не е можно бидејќи цифрите се различни и бројот е четирицифрен,
- ако $d=2$, тогаш $a=3\cdot 2=6$.

Бидејќи $d=2$ и $a=6$, а цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците, т.е. $c<d$, заклучуваме дека $c=0$ или $c=1$. Сега имаме два случаја:

- ако $c=0$, тогаш $b=15-6-0-2=7$, па бараниот број е 6702,
- ако $c=1$, тогаш $b=15-6-1-2=6$ и тоа не е можно бидејќи цифрите на бараниот број се различни.

Втор начин. Од вториот услов следува дека цифрите на единиците и илјадитите може да бидат паровите 3 и 9, 2 и 6, 1 и 3, соодветно. Понатаму, бидејќи бараниот број е парен добиваме дека цифрата на единиците е 2, а цифрата на илјадитите е 6. Сега, заради третиот услов цифрата на десетките може да е 0 или 1. Бидејќи цифрите мора да се различни бараните број е некој од броевите:

6102, 6302, 6402, 6502, 6702, 6802, 6902,
6012, 6312, 6412, 6512, 6712, 6812, 6912.

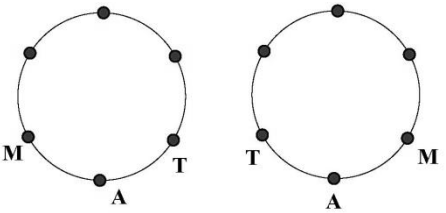
Но, меѓу овие броеви само кај бројот 6702 збирот на цифрите е еднаков на 15, па затоа бараниот број е 6702.

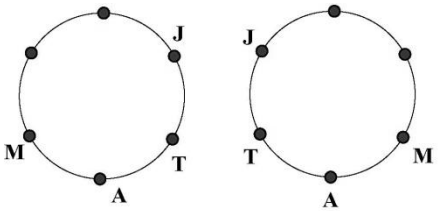
Трет начин. Од вториот услов следува дека цифрите на единиците и илјадитите може да бидат паровите 3 и 9, 2 и 6, 1 и 3, соодветно. Понатаму, бидејќи бараниот број е парен добиваме дека цифрата на единиците е 2, а цифрата на илјадитите е 6. Сега, заради третиот услов цифрата на десетките може да е 0 или 1. Ако цифрата на единиците е 0, тогаш заради условот за збирот на цифрите добиваме дека цифрата

на стотките е 7, па едно решение е 6702. Ако цифрата на десетките е 1, тогаш заради условот за збирот на цифрите добиваме дека цифрата на стотките е 6, и се добива бројот 6612, кој не е решение бидејќи има две еднакви цифри. Конечно, шифрата на телефонот на Горјан е 6702.

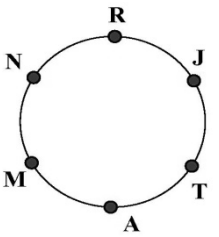
17. Три девојчиња: Ана, Марија, Темјана и три момчиња: Никола, Јанко и Рампо, седат околу тркалезна маса. Ана не седи до момче, Јанко седи наспроти Марија и до Рампо, на неговата лева страна. Кој седи до Темјана, на нејзината десна страна, а кој до Никола, на неговата лева страна?

Решение. Бидејќи Ана не седи покрај момче, до неа седат преостанатите две девојчиња, Марија и Темјана. Притоа можни се два случаја (види ги цртежите десно).



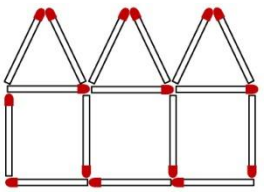


Понатаму, Јанко седи наспроти Марија, па затоа можни се два распореди, кои се прикажани на цртежите лево. Бидејќи Јанко седи лево до Рампо и лево од него десниот распоред не е можен, бидејќи во овој распоред Јанко седи до Темјана и тоа лево од неа.



Конечно, распоредот на седењето е прикажан на десниот цртеж. Според тоа, до Темјана, од нејзината десна страна седи Јанко, а до Никола, од неговата лева страна седи Рампо.

18. За прикажување на три куќички во низа, како на цртежот десно, се потребни 16 чкорчиња.



а) Колку чкорчиња се потребни за прикажување на 55 такви куќички?

б) Колку чкорчиња во низа може да се прикажат со помош на 756 чкорчиња?

Решение. *Прв начин*. а) За првата куќичка се искористени 6 чкорчиња, а за секоја следна се потребни дополнително по 5 чкорчиња. Значи, за 55 куќички се потребни $6+54\cdot 5=6+270=276$ чкорчиња.

б) За првата куќичка се потребни 6 чкорчиња, по што ни остануваат $756-6=750$ чкорчиња. Бидејќи со 5 чкорчиња се додава нова куќичка, со преостанатите 750 чкорчиња че се добијат $750:5=150$ куќички. Конечно, со 756 чкорчиња може да се состават $1+150=151$ куќичка.

Втор начин. а) Градењето го почнуваме со 1 чкорче. Сега за секоја куќичка ни требаат 5 чкорчиња. Значи за 55 куќички ни се потребни $1+55\cdot 5=1+275=276$ чкорчиња.

б) Откако ќе ставиме 1 чкорче, ни преостануваат $756-1=755$ чкорчиња. Бидејќи со секои 5 чкорчиња добиваме нова куќичка, со преостанатите 755 чкорчиња можеме да оформиме $755:5=151$ куќичка.

19. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 10 и кај кои цифрата на стотките е поголема од цифрата на десетките, а цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците. Колку броеви запиша?

Решение. Ако цифрата на единиците е 3, тогаш најмалата вредност на цифрата на десетките е 4 и најмалата вредност на цифрата на стотките е 5. Но, тогаш збирот на цифрите на бројот е поголем или еднаков на $3+4+5=12>10$, штопротивречи на условот на задачата. Значи цифрата на единиците на бараните броеви е помала или еднаква на 2. Сега лесно се добива дека броевите кои ги задоволуваат условите на задачата се: 910, 820, 730, 721, 640, 631, 541 и 532. Има осум броеви со саканите својства.

20. Определи го бројот на природните броеви чиј производ на цифри е еднаков на 14, а збирот на цифрите е 11. Кој е најголем од овие броеви?

Решение. Имаме $14=7\cdot 2$ и $7+2=9$. Но, збирот на цифрите на бараните броеви е еднаков на 11, а при множење со 1 производот не се менува, добиваме дека во записот на бараните броеви треба да има уште две цифри еднакви на 1. Според тоа, цифрите на сите броеви мора да се 1, 1, 2 и 7. Јасно, постојат 12 такви броеви и тоа:
7211, 7121, 7112, 2711, 2171, 2117, 1721, 1712, 1271, 1217, 1172 и 1127, а најголемиот меѓу нив е бројот 7211.

21. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 10, а најголемата цифра им е за 6 поголема од најмалата.

Решение. Имаме, $6-0=7-1=8-2=9-3=6$ и како $9+3=12>10$ заклучуваме дека можни цифри на трицифрениот број се 6, 4, 0 или 7, 3, 1 или 8, 0, 2. Но, за цифрите 8, 0, 2 разликата меѓу најмата и нај-

големата цифра не е 6, па затоа постојат само две можности за избор на цифри чиј збир е 10, а разликата меѓу најмалата и најголемата цифра е шест и тоа: 6, 4, 0 или 7, 2, 1. Од овие цифри може да се состават следниве 10 броеви: 640, 604, 460, 406, 721, 712, 271, 217, 172, 127.

22. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви чијн производ на цифри е еднаков на 4.

Решение. Бидејќи бројот 4 како производ на четири едноцифрени броеви може да се запише на два начини и тоа $4=1\cdot1\cdot1\cdot4=1\cdot1\cdot2\cdot2$, цифрите на бараните броеви моиже да се 1, 1, 1, 4 или 1, 1, 2, 2. Со цифрите 1, 1, 1, 4 може да се состават броевите: 1114, 1141, 1411 и 4111, а со цифрите 1, 1, 2, 2 може да се состават броевите 2211, 2121, 2112, 1122, 1212 и 1221. Збирот навака добиените броеви е $1114+1141+1411+4111+2211+2121+2112+1122+1212+1221=17776$.

23. Запиши ги сите броеви помали од 300 кои во својот запис имаат точно две цифри двојки. Колку броеви запиша?

Решение. Меѓу двоцифрените броеви има еден таков број и тоа е 22. Меѓу трицифрените броеви има 19 такви броеви и тоа: 122, 202, 212, 220, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 232, 242, 252, 262, 272, 282 и 292. Значи, вкупно има 20 броеви со саканото својство.

24. Запиши ги сите трицифрени броеви кај кои производот на цифрата на стотките и цифрата на десетките е еднаков на цифрата на единиците. Колку има такви броеви?

Решение. Нека бараниот број е од видот $\overline{abc}, a\neq0$. Од условот на задачата следува $ab=c$. Сите решенија се дадени во табелата:

a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	0
c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	2	4	6	8	0

a	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
b	1	2	3	0	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
c	3	6	9	0	4	8	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9

Значи, бараните броеви се: 100, 111, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199, 200, 212, 224, 236, 248, 300, 313, 326, 339, 400, 414, 428, 500, 515, 600, 616, 700, 717, 800, 818, 900, 919.
Такви броеви има 32.

25. Определи го бројот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е помал од шест, а поголем од два.
Решение. Го одредуваме всушност бројот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 3, 4, 5. Броеви чиј збир на цифри е три се: 111, 201, 210, 300, четири: 400, 310, 301, 220, 202, 211.103, 130, 121, 112, пет: 500, 401, 410, 302,320 311, 203, 230, 221, 212, 104, 140, 131, 113, 122. Значи, постојат вкупно 29 броеви кои го исполнуваат зададениот услов.

26. Определи го бројот на сите четирицифрени броеви кај кои збирот на првите две цифри е парен, а на другите две цифри непарен број.
Решение. Според тврдењето од претходната задача, лесно се заклучува дека има 45 броја со парен (или непарен) збир на цифри помеѓу 10 и 99 и точно 50 броеви помеѓу 0 и 99. Бидејќи првата цифра мора да биде поголема од 0, заклучуваме дека има 45 комбинации за првите две цифри кои го исполнуваат зададеното својство. Такви ограничувања за последните две цифри не постојат, па според тоа за нив има 50 такви комбинации за. Така, вкупниот број на такви четирицифрени броеви е $45 \cdot 50 = 2250$.

27. На колку различни начини Горјан, Пабло, Андреј и Филип може да поделат четири исти моливи?
Решение. Децата меѓу себе делат 4 исти моливи, па секој од нив може да добие најмногу 4 моливи, а може да се случи во некоја поделба некои деца да не добијат ниту еден молив. Затоа, можни се следниве пет случаи:

$$4 = 4 + 0 + 0 + 0,$$
$$4 = 3 + 1 + 0 + 0,$$
$$4 = 2 + 2 + 0 + 0,$$
$$4 = 2 + 1 + 1 + 0,$$
$$4 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

За секој од воие случаи ќе определиме колку различни начини на поделба на моливите имаме.

Поделбата во кое едно дете добива 4 моливи може да се направи на 4 начини.

Поделбата во кое едно дете добива 3 моливи, а едно дете добива 1 молив може да се направи на 12 различни начини:

- детето кое добива 3 моливи можеме да го избереме на 4 начини,
- за секој избор на детето кое добива 3 моливи, детето кое добива 1 молив можеме да го избереме на 3 начин.

Поделбата во која две деца добиваат по два моливи може да се направи на 6 начини:

- првото дете можеме да го избереме на 4 начини, па второто на 3 начини, но тогаш секој избор го броиме два пати, па затоа имаме $4\cdot 3:2=12:2=6$ начини.

Поделбата во која едно дете добива 2 моливи, а две деца добиваат по 1 молив можеме да ја разгледуваме како поделба во која едно дете добива 2 моливи, а едно дете не добива молив. Таква поделба може дасе направи на 12 начини:

- детето кое добива 2 моливи можеме да го избереме на 4 начини,
- за секој избор на детето кое добива 2 моливи, детето кое не добива молив можеме да го избереме на 3 начини.

Поделбата во која секое дете добива по 1 молив можеме да ја направиме на 1 начин.

Конечно, Горјан, Пабло, Андреј и Филип може да поделат четири исти моливи на $4+12+6+12+1=35$ начини.

28. Филип целиот месец јули ќе го помине кај баба му. Тој планира некои од тие денови да чита, а некои да вози велосипед. Откако го направил планот, тој забележал дека: ако го утростручи бројот на деновите во планира да чита, а го удвои бројот на деновите во кои планира да вози велосипед, тогаш збирот на добиените броеви ќе биде еднаков на бројот на деновите во месецот кој Филип ќе го помине кај баба му. На колку различни начини Филип може да го испланира бројот на деновите за читање и бројот на деновите за возење велосипед?

Решение. *Прв начин*. Јули има 31 ден, што значи дека Филип кај баба му ќе помине 31 ден.

Ако Филип планира да чита 1 ден, тогаш е $31-3\cdot 1=28=2\cdot 14$, што значи дека велосипед ќе вози 14 дена.

Ако Филип планира да чита 2 дена, тогаш $31-3\cdot 2=25=2\cdot 12+1$, што значи дека Филип не може да чита два дена.

Ако Филип планира да чита 3 дена, тогаш $31-3\cdot 3=22=2\cdot 11$, што значи дека велосипед ќе вози 11 дена.

Ако Филип планира да чита 4 дена, тогаш $31-3\cdot 4=19=2\cdot 9+1$, што значи дека Филип не може да чита четири дена.

Ако Филип планира да чита 5 дена, тогаш $31-3\cdot 5=16=2\cdot 8$, што значи дека велосипед ќе вози 8 дена.

Ако Филип планира да чита 6 дена, тогаш $31-3\cdot 6=13=2\cdot 6+1$, што значи дека Филип не може да чита шест дена.

Ако Филип планира да чита 7 дена, тогаш $31-3\cdot 7=10=2\cdot 5$, што значи дека велосипед ќе вози 5 дена.

Ако Филип планира да чита 8 дена, тогаш $31-3\cdot 8=7=2\cdot 3+1$, што значи дека Филип не може да чита осум дена.

Ако Филип планира да чита 9 дена, тогаш $31-3\cdot 9=4=2\cdot 2$, што значи дека велосипед ќе вози 2 дена.

Ако Филип планира да чита 10 дена, тогаш $31-3\cdot 10=1=2\cdot 0+1$, што значи дека Филип не може да чита десет дена.

Јасно, Филип не може да чита 11 или повеќе денови, бидејќи $3\cdot 11=33>31$.

Од претходните разгледувања следува дека Филип бројот на деновите за читање и возење велосипед може да го испланира на пет начини.

Втор начин. Јули има 31 ден, што значи дека Филип кај баба му ќе помине 31 ден.

Ако Филип вози велосипед 1 ден, тогаш $31-2\cdot 1=29=3\cdot 9+2$, што значи дека Филип не може да вози велосипед еден ден.

Ако Филип вози велосипед 2 дена, тогаш $31-2\cdot 2=27=3\cdot 9$, што значи дека Филип ќе чита 9 дена.

Ако Филип вози велосипед 3 дена, тогаш $31-2\cdot 3=25=3\cdot 8+1$, што значи дека Филип не може да вози велосипед три дена.

Ако Филип вози велосипед 4 дена, тогаш $31-2\cdot 4=23=3\cdot 7+2$, што значи дека Филип не може да вози велосипед четири дена.

Ако Филип вози велосипед 5 дена, тогаш $31-2\cdot 5=21=3\cdot 7$, што значи дека Филип ќе чита 7 дена.

Ако Филип вози велосипед 6 дена, тогаш $31-2\cdot 6=19=3\cdot 6+1$, што значи дека Филип не може да вози велосипед шест дена.

Ако Филип вози велосипед 7 дена, тогаш $31-2\cdot 7=17=3\cdot 5+2$, што значи дека Филип не може да вози велосипед седум дена.

Ако Филип вози велосипед 8 дена, тогаш $31-2\cdot 8=15=3\cdot 5$, што значи дека Филип ќе чита 5 дена.

Ако Филип вози велосипед 9 дена, тогаш $31-2\cdot 9=13=3\cdot 4+1$, што значи дека Филип не може да вози велосипед девет дена.

Ако Филип вози велосипед 10 дена, тогаш $31-2\cdot 10=11=3\cdot 3+2$, што значи дека Филип не може да вози велосипед десет дена.

Ако Филип вози велосипед 11 дена, тогаш $31-2\cdot 11=9=3\cdot 3$, што значи дека Филип ќе чита 3 дена.

Ако Филип вози велосипед 12 дена, тогаш $31-2\cdot 12=7=3\cdot 2+1$, што значи дека Филип не може да вози велосипед дванаесет дена.

Ако Филип вози велосипед 13 дена, тогаш $31-2\cdot 13=5=3\cdot 1+2$, што значи дека Филип не може да вози велосипед тринаесет дена.

Ако Филип вози велосипед 14 дена, тогаш $31-2\cdot 14=3=3\cdot 1$, што значи дека Филип ќе чита 1 ден.

Ако Филип вози велосипед 15 дена, тогаш $31-2\cdot 15=1=3\cdot 0+1$, што значи дека Филип не може да вози велосипед петнаесет дена.

Јасно, Филип не може да чита 16 или повеќе денови, бидејќи $2\cdot 16=32>31$.

Од претходните разгледувања следува дека Филип бројот на деновите за читање и возење велосипед може да го испланира на пет начини.

Трет начин. Јули има 31 ден, што значи дека Филип кај баба му ќе помине 31 ден. Нека бројот на деновите за читање е n, а бројот на деновите за возење велосипед е m. Од условот на здачата следува дека $3n+2m=31$. Бидејќи $2m$ е парен број, а 31 е непарен, заклучуваме дека $3n$ мора да е непарен број, што значи дека n е непарен број.

Ако $n=1$, тогаш $2m=28$, односно $m=14$.

Ако $n=3$, тогаш $2m=22$, односно $m=11$.

Ако $n=5$, тогаш $2m=16$, односно $m=8$.

Ако $n=7$, тогаш $2m=10$, односно $m=5$.

Ако $n=9$, тогаш $2m=4$, односно $m=2$.

Ако $n\geq 11$, тогаш $3n\geq 33>31$, па затоа не постои природен број m таков што $3n+2m=31$.

Од претходните разгледувања следува дека Филип бројот на деновите за читање и возење велосипед може да го испланира на пет начини.

29. На шаховски турнир учествувале 10 шахисти. Секој шахист играл со секој од преостанатите шахисти по една партија.
    а) Колку партии изиграл секој шахист?
    б) Колку партии се вкупно одиграни на турнирот?

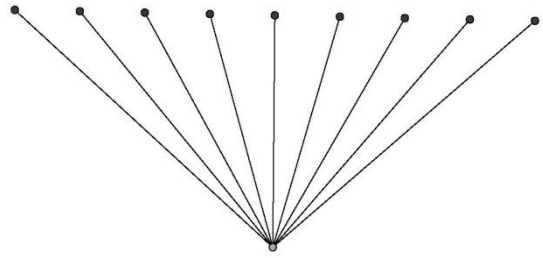
Решение. а) *Прв начин*. Шахистите да ги означиме со броевите од 1 до 10. Бидејќи изборот на шахист не влијае на бројот на партиите кои ги игра еден шахист, ќе ги испишеме можностите за еден од шахистите, на пример за шахистот 1. Имаме

1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 1 и 6, 1 и 7, 1 и 8, 1 и 9, 1 и 10.

Бидејќи е сеедно кој од шахистите сме го разгледувале, заклучуваме дека секој шахист одиграл по 9 партии шах.

Втор начин. Бидејќи секој шахист мора да игра со секој од преостанатите шахисти, да разгледаме еден шахист, на пример првиот. Тој мора да игра со секој од преостанатите $10-1=9$ шахисти, т.е. тој игра 9 патии. Бидејќи е сеедно кој од шахистите сме го разгледувале, заклучуваме дека секој шахист одиграл по 9 партии шах.

Трет начин. Секој од десетте шахисти да го означиме со точка и графички, со отсечки, да ги прикажеме сите партии кои тој ги одиграл (цртеж десно). Вкупниот број партии е еднаков на бројот на отсечките со кои сме поврзале една точка (шахист) со преостанатите точки (шахисти), што значи дека секој шахист одиграл точно 9 партии шах.



б) *Прв начин*. Да ги запишеме сите можни партии кои ќе се изиграат на трнирот, при што ќе внимаваме партиите кои ги играат исти шахисти да не ги броеви два пати.

1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	1, 8	1, 9	1, 10	9 пар.
2, 3	2, 4	2, 5	2, 6	2, 7	2, 8	2, 9	2, 10		8 пар.
3, 4	3, 5	3, 6	3, 7	3, 8	3, 9	3, 10			7 пар.
4, 5	4, 6	4, 7	4, 8	4, 9	4, 10				6 пар.
5, 6	5, 7	5, 8	5, 9	5, 10					5 пар.
6, 7	6, 8	6, 9	6, 10						4 пар.
7, 8	7, 9	7, 10							3 пар.
8, 9	8, 10								2 пар.
9, 10									1 пар.

Конечно, ако ги собереме броевите на партиите во последната колона добиваме дека на турнирот се изиграни вкупно

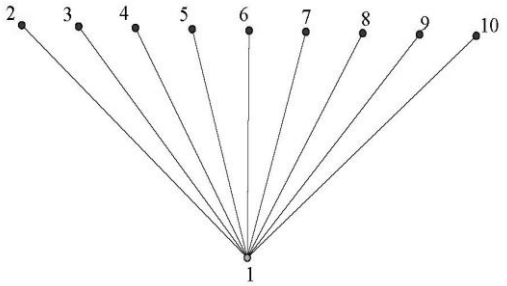
$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ партии шах.

Втор начин. Да ги собереме последователно сите партии кои ги изиграле играчите почнувајќи од првиот до последниот играч. Првиот

играч изиграл 9 партии. Вториот играч исто така изиграл 9 партии, но веќе ја броевме партијата која ја изиграл со првиот играч, па така добиваме 8 нови партии. Третиот играч изиграл 9 партии, но веќе ги броеви партиите кои ги изиграл со првите двајца играчи, па така добиваме 7 нови партии. Понатаму, заклучуваме дека четвртиот играч изиграл 6 нови партии, петтиот играч изиграл 5 нови партии, шестиот изиграл 4 нови партии, седмиот 3 нови партии, осмиот 2 нови партии и деветтиот 1 нова партија и тоа таа со десеттиот играч. За десеттиот играч се броени сите партии кои ги изиграл. Значи, вкупно се изиграни

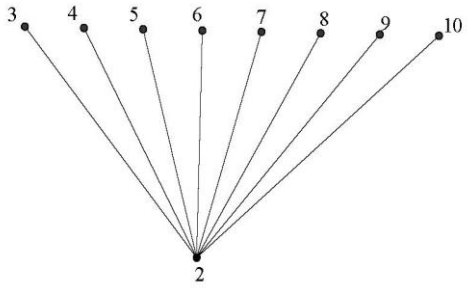
$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 \text{ партии шах.}$$

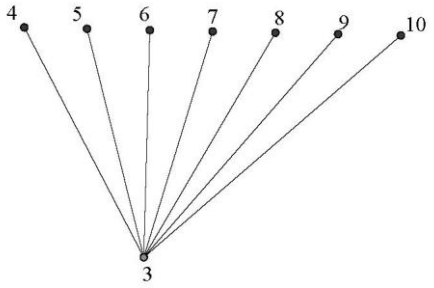
Трет начин. Да ги прикажеме графички сите партии кои ги изиграле играчите. За попрегледно нека секој играч го означиме со една точка, а точките ги означиме со броевите од 1 до 10. Тогаш бројот на партиите е еднаков на бројот на нацртаните отсечки чии крајни точки се точките со кои се означени играчите.



Првиот играч изиграл 9 партии кои се прикажани на цртежот десно.

Вториот играч изиграл 9 партии, но таа со првиот играч веќе е прикажана, па затоа имаме 8 нови партии (цртеж десно). Третиот играч изиграл 9 партии, но оние со првиот и вториот играч се веќе прикажани, па затоа имаме 7 нови партии (цртеж лево).



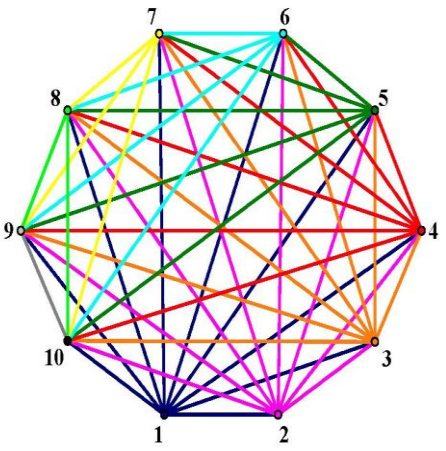


Со аналогни постапки добиваме дека за четвртиот играч треба да додадеме 6 нови партии, за петтиот играч 5 нови партии, за шестиот играч 4 нови партии, за седмиот играш 3 нови партии,

за осмиот 2 нови партии и за деветтиот 1 нова партија. Конечно, вкупно се изиграни

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 \text{ партии шах.}$$

Четврт начин. Ако играчите ги претставиме со точки распоредени на кружница, тогаш бројот на партиите шах кои се изиграни на турнирот можеме да го добиеме со пребројување на отсечките прикажани на цртежот десно. Броејќи ги отсечките обоени со иста боја почнувајќи од темето 1 и одејќи во насока обратна од насоката на движење на стрелките на часовникот имаме 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 и 1 отсечка, што значи дека на турнирот се изиграни



$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 \text{ партии шах.}$$

30. На колку начини може сума од 20 денари да се плати со монети од 1, 2 и 5 денари, при што секој вид монета треба да се искористи барем еднаш?

Решение. *Прв начин*. Ако секој вид монета се искористи еднаш, тогаш ќе платиме $1+2+5=8$ денари и ќе ни преостанат за плаќање уште $20-8=12$ денари. Овие 12 денари можеме да ги платиме користејќи било кои видови монети.

Сите можности за плаќање на 12 денари со било кои видови монети се прикажани во долната табела.

5 д.	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2 д.	1	0	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
1 д.	0	2	1	3	5	7	0	2	4	6	8	10	12

Според тоа, сумата од 20 денари со дадените монети може да се плати на 13 начини.

Втор начин. Сите можности за саканото плаќање на 20 денари се дадени во следната табела, при што секој вид монета е искористен барем еднаш.

5 д.	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
2 д.	2	1	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1
1 д.	1	3	2	4	6	8	1	3	5	7	9	11	13

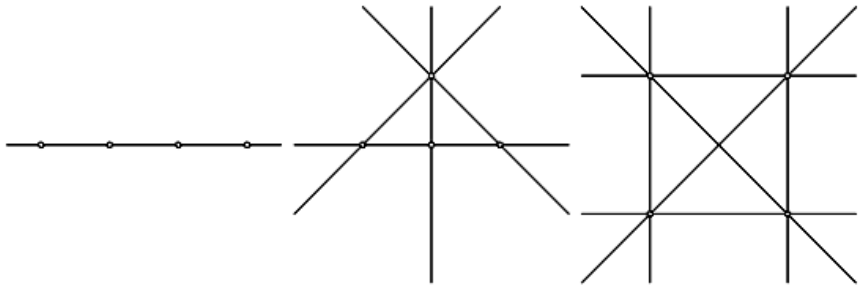
Според тоа, сумата од 20 денари со дадените монети може да се плати на 13 начини.

31. Дадени се десет непаралелни прави во една рамнина. Ниту едни од тие три прави не се сечат во иста точка. Во колку точки меѓу себе се сечат овие прави?

Решение. Секои две прави се сечат. Првата права можеме да ја избереме на10 начина. Втората права можеме да ја избереме на 9 начини. Па така доаѓаме до заклучок дека постојат 90 различни парови. Меѓутоа, овде секој пар го броевме по два пати - ако првата права е A, а втората е B, во пресметките ги вклучивме комбинациите AB и BA. Меѓутоа, во кој било редослед и да ги земаме, нивната пресечна точка е една иста точка, па затоа пресметаниот (добиениот) број треба да се подели со два. Значи, бројот на точки е 45.

32. Нека се дадени 4 различни точки. Колку прави може да бидат определени со тие точки?

Решение. Можни се три случаи, кои се дадени на долните цртежи:



33. Лифтот во една дваесеткатница може да ги изврши само следниве две операции: да се качи за 8 ката и да се спушти за 13 ката. Лифтот не може да оди нагоре ако над него нема барем 8 ката, ниту да оди надолу ако под него нема барем 13 ката. Запиши како со лифтот може:

а) да се спуштиме од 20. кат на приземје,

б) да стигнеме од 8. на 13. кат.

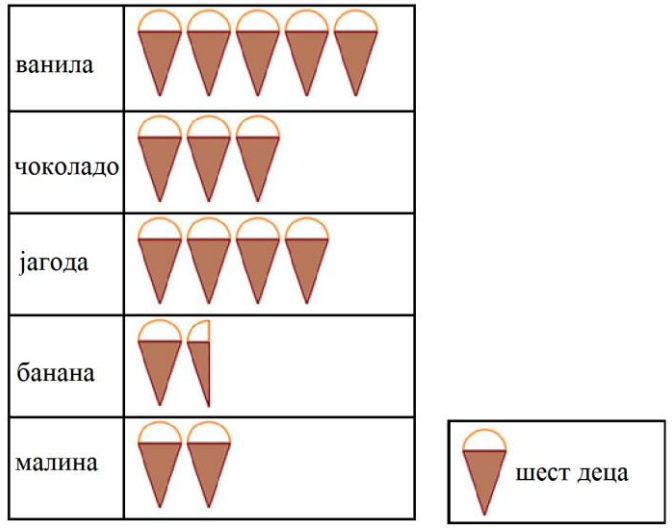
Решение. Во двата случаја само на еден начин може да се стигне од

почетниот до саканиот спрат. Имаме:

а) $20 \to 7 \to 15 \to 2 \to 10 \to 18 \to 5 \to 13 \to$ приземје,

б) $8 \to 16 \to 3 \to 11 \to 19 \to 6 \to 14 \to 1 \to 9 \to 17 \to 4 \to 12 \to 20 \to$
$7 \to 15 \to 2 \to 10 \to 18 \to 5 \to 13.$

34. Група деца учествувале во анкета за омилениот вкус на сладолед. Добиените податоци од анкетата се прикажани со помош на пиктограми и се дадени на долниот цртеж.



а) Колку деца најмногу сакаат сладолед од ванила?

б) Колку деца најмногу сакаат сладолед од банана?

в) За колку е бројот на децата кои најмногу сакаат сладолед од чоколадо е поголем од бројот на децата кои најмногу сакаат сладолед од малина?

г) Колку деца учествувале во анкетата?

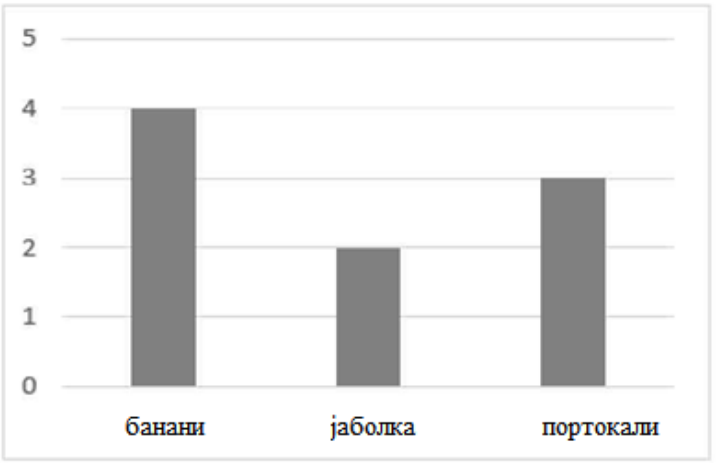
Решение. а) Сладолед од ванила најмногу сакаат 5 групи од по шест деца, односно $5 \cdot 6 = 30$ деца.

в) Сладолед од банана најмногу сака една група од 6 деца и една група од $6 : 2 = 3$ деца, односно $6 + 3 = 9$ деца.

в) Сладолед од чоколадо најмногу сакаат $3 \cdot 6 = 18$ деца, а сладолед од малина најмногу сакаат $2 \cdot 6 = 12$ деца. Според тоа, бараниот број е $18 - 12 = 6$ деца.

г) Со пиктограмите се прикажани $5 + 3 + 4 + 1 + 2 = 15$ групи од 6 деца и една група од $6 : 2 = 3$ деца. Значи, во анкетата учествувале $15 \cdot 6 + 3 = 93$ деца.

35. Во складиште се наоѓаат вкупно $315\,kg$ овошје запакувано во сандаци. Во секој сандак се наоѓа еднакво количество овошје. Бројот на саднаците на одделните видови овошје е прикажан на долниот дијаграм. По колку килограми овошје имало од секој вид во складиштето?



Решение. Во складиштето вкупно имало $4+2+3=9$ сандаци овошје. Во секој сандак има по $315:9=35\,kg$ овошје. Значи, во складиштето има $4\cdot 35=140\,kg$ банани, $2\cdot 35=70\,kg$ јаболка и $3\cdot 35=105\,kg$ портокали.

36. Бројот на жителите во Република Македонија на возраст од 8 до 15 години прикаќан е со пиктограмот , каде претставуваат 22000 жители. Ако бројот на девојчињата е за 4500 поголем од бројот на момчињата, колку момчиња и колку девојчиња има во Република Македонија на возраст од 8 до 15 години?

Решение. *Прв начин*. Вкупниот број деца на возраст од 8 до 15 години е $8\cdot 22000=176000$. Бидејќи бројот на девојчињата е за 4500 поголем од бројот на момчињата, добиваме дека во $176000-4500=171500$ деца има еднаков број на девојчиња и момчиња. Значи, во Република Македонија има $171500:2=85750$ момчиња и $85750+4500=90250$ девојчиња.

Втор начин. Вкупниот број деца на возраст од 8 до 15 години е

$8 \cdot 22000 = 176000$. Нека x е бројот на момчињата. Тогаш бројот на девојчињата е $x + 4500$, па затоа

$$x + x + 4500 = 176000,$$
$$2x + 4500 = 176000,$$
$$2x = 171500,$$
$$x = 85750.$$

Значи, во Република Македонија има 85750 момчиња и 90250 девојчиња.