

## О ПРВОМ ИЗВОДУ ФУНКЦИЈЕ КРОЗ ПРИМЕРЕ

*др Мирјана Илић, Београд*

Тешко би се могла наћи област, како у природним, тако у друштвеним наукама, у којој се не примењује први извод функције. У овом чланку ћемо дати неколико примера који би требало да допринесу бољем разумевању појма првог извода функције и илуструју његову примену у решавању конкретних проблема.

По дефиницији, први извод функције  $f(x)$  у тачки  $P(x, f(x))$ , у ознаци  $f'(x)$ , једнак је граничној вредности

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Геометријски - први извод представља нагиб тангенте на криву  $y = f(x)$  у тачки  $P$ , тј. тангенс угла који тангента образује са позитивним смером  $x$ -осе. Рачунајући ову граничну вредност за разне елементарне функције, добијају се њихови први изводи. У следећој табели дати су први изводи основних елементарних функција.

|         |                       |                         |       |              |               |                     |          |           |                       |                        |
|---------|-----------------------|-------------------------|-------|--------------|---------------|---------------------|----------|-----------|-----------------------|------------------------|
| $f(x)$  | $a, a \in \mathbb{R}$ | $x^a, a \in \mathbb{R}$ | $e^x$ | $a^x, a > 0$ | $\ln x$       | $\log_a x, a > 0$   | $\sin x$ | $\cos x$  | $\operatorname{tg} x$ | $\operatorname{ctg} x$ |
| $f'(x)$ | 0                     | $ax^{a-1}$              | $e^x$ | $a^x \ln a$  | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$  | $-\frac{1}{\sin^2 x}$  |

Видимо да је први извод функције, такође функција, тј. *пресликавање*:

$$x \rightarrow f'(x)$$

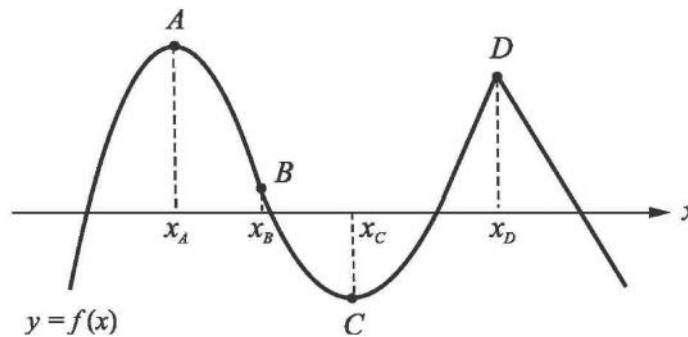
које променљиву  $x$ , у зависности од функције  $f(x)$ , пресликава у  $f'(x)$ . Сам назив, први извод функције, требало би да нас упути на то да је реч о функцији која је изведена<sup>1</sup> из саме функције. На пример, из табеле читамо да из функције  $f(x) = \ln x$ , изводимо функцију  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , која представља њен први извод. Будући да то записујемо и као

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

први извод  $\frac{1}{x}$ , функције  $\ln x$ , можемо схватити и као резултат примене операције  $'$  (чита се "прим") на функцију  $\ln x$ . То важи и у општем случају. За

било коју функцију  $f(x)$  кажемо да је њен први извод  $f'(x)$  резултат примене операције ' на  $f(x)$ .<sup>1</sup>

**Пример 1.** Како је први извод функције такође функција, можемо се запитати да ли се на основу графика функције  $f(x)$  може скицирати график функције  $f'(x)$ . Одговор је – може. То ћемо илустровати на примеру функције  $f(x)$  чији је график дат на сл. 1.

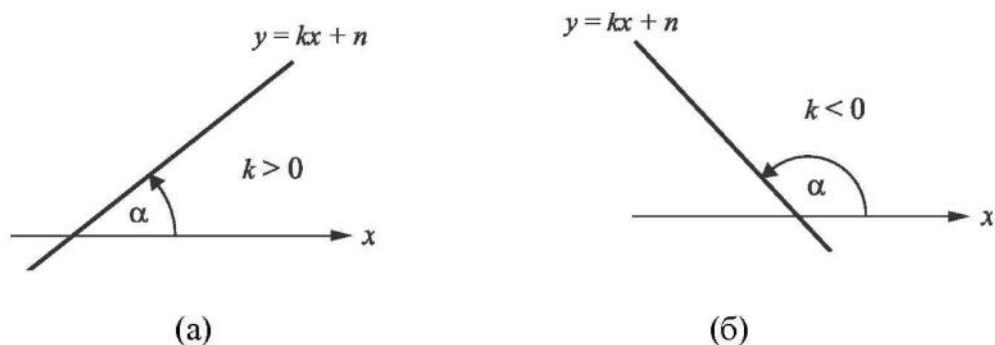


Сл. 1.

За скицирање графика првог извода функције  $f(x)$  важна је његова геометријска интерпретација. Као што је на почетку наведено, први извод функције  $f(x)$  у тачки  $P(x, f(x))$  једнак је нагибу тангенте, тј. коефицијенту правца тангенте на криву  $f(x)$  у тачки  $P$ .

Одредимо прво знак првог извода  $f'(x)$ . Сходно претходно реченом, функција  $f'(x)$  је позитивна у оним тачкама криве  $f(x)$  у којима је коефицијент правца тангенте на криву позитиван.

Подсетимо се да је коефицијент правца  $k$  праве  $y = kx + n$  једнак  $\tan \alpha$ , где је  $\alpha$  угао који права образује са позитивним смером  $x$ -осе. Стога је  $k$  позитиван када је угао  $\alpha$  оштар (сл. 2(а)), а негативан када је  $\alpha$  туп (сл. 2(б)).

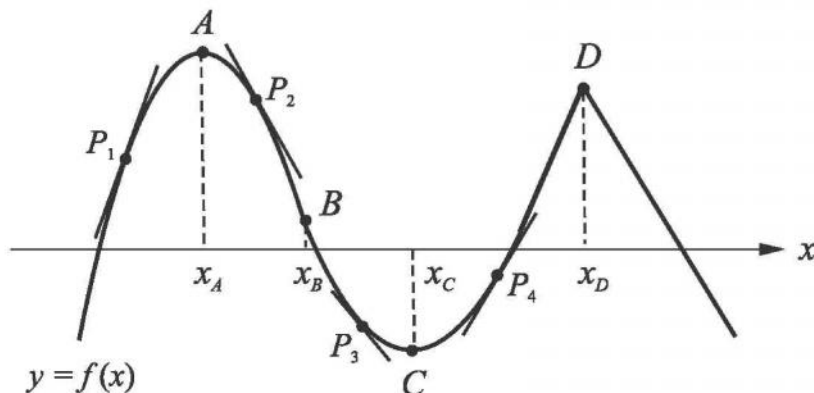


Сл. 2.

<sup>1</sup> На енглеском језику, *извесити* се каже *to derive*, па се реч *derivative* користи за први извод. Тако ћете и код нас понекад чути *дериивација функције*, уместо први извод функције.

Одавде следи да је први извод  $f'(x)$  функције  $f(x)$  позитиван у свим тачкама графика криве  $y = f(x)$  у којима тангента на криву образује оштар угао с позитивним смером  $x$ -осе.

Величина угла између тангенте и позитивног смера  $x$ -осе у некој тачки  $P(x, f(x))$  може се оценити постављањем лењира или оловке у положај тангенте (сл. 3). Ако је угао између оловке, односно лењира, и позитивног смера  $x$ -осе оштар, први извод у тачки  $P$  је позитиван. Ако је туп, први извод је негативан.

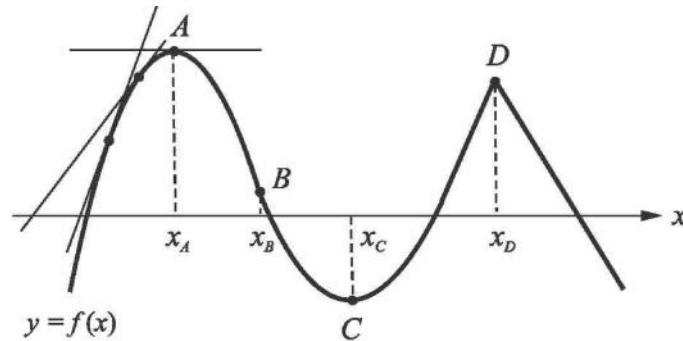


Сл. 3.

Тако је у свим тачкама  $P_1(x, f(x))$ , које се налазе на кривој  $f(x)$  лево од тачке  $A(x_A, f(x_A))$  (сл. 3), тј. у тачкама у којима је  $x < x_A$ , први извод позитиван. У тачкама  $P_2(x, f(x))$  криве које су између  $A$  и  $C$ , то су оне код којих је  $x_A < x < x_C$ , први извод је негативан. Даље, у тачкама које су између  $C$  и  $D$ , први извод је поново позитиван итд. Тако смо одредили знак првог извода у следећим отвореним интервалима.

| $x$     | $(-\infty, x_A)$ | $(x_A, x_C)$ | $(x_C, x_D)$ | $(x_D, +\infty)$ |
|---------|------------------|--------------|--------------|------------------|
| $f'(x)$ | +                | -            | +            | -                |

Погледајмо поново део криве лево од тачке  $A$ . Крећући се тим делом криве слева надесно ка тачки  $A$ , оштри углови између тангенти и позитивног смера  $x$ -осе стално опадају, па и вредности њихових тангенса опадају. Зато опада и вредност првог извода (сл. 4).

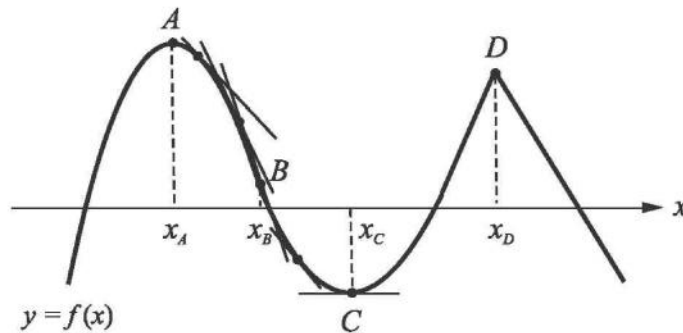


Сл. 4.

У самој тачки  $A$  тангента на график је паралелна са  $x$ -осом,  $\alpha = 0^0$  и  $k = \operatorname{tg} 0^0 = 0$ . Стога је први извод у тачки  $A(x_A, f(x_A))$  једнак 0, тј.  $f'(x_A) = 0$ . Како одраније знамо да је  $f'(x)$  позитивна функција за  $x \in (-\infty, x_A)$ , имамо:

|         |                       |           |
|---------|-----------------------|-----------|
| $x$     | $(-\infty, x_A)$      | $x = x_A$ |
| $f'(x)$ | опadaјућа и позитивна | 0         |

Посматрајмо сад део криве између тачака  $A$  и  $C$ . Већ смо утврдили да је у том делу први извод негативан. Крећући се кривом слева надесно од тачке  $A$  ка тачки  $C$ , нагибни углови тангенти опадају све до тачке  $B$  (сл. 5). Опадају и њихови тангенси, па је први извод опадајућа функција за  $x \in (x_A, x_B)$ .



Сл. 5.

У тачки  $B$  нагибни угао тангенте је такође туп. Ако са  $b$  означимо његов тангенс, тада је  $f'(x_A) = b < 0$ , па добијамо

|         |                       |           |
|---------|-----------------------|-----------|
| $x$     | $(x_A, x_B)$          | $x = x_B$ |
| $f'(x)$ | опadaјућа и негативна | $b < 0$   |

Крећући се даље кривом од тачке  $B$  ка тачки  $C$ , нагибни углови тангенти расту (сл. 5), па расте и први извод  $f'(x)$  који је, иначе, и даље негативан. У

тачки  $C$ , тангента је, као у тачки  $A$ , паралелна са  $x$ -осом, па је  $f'(x_C) = 0$ . Тако је

|         |                     |           |
|---------|---------------------|-----------|
| $x$     | $(x_B, x_C)$        | $x = x_C$ |
| $f'(x)$ | растућа и негативна | 0         |

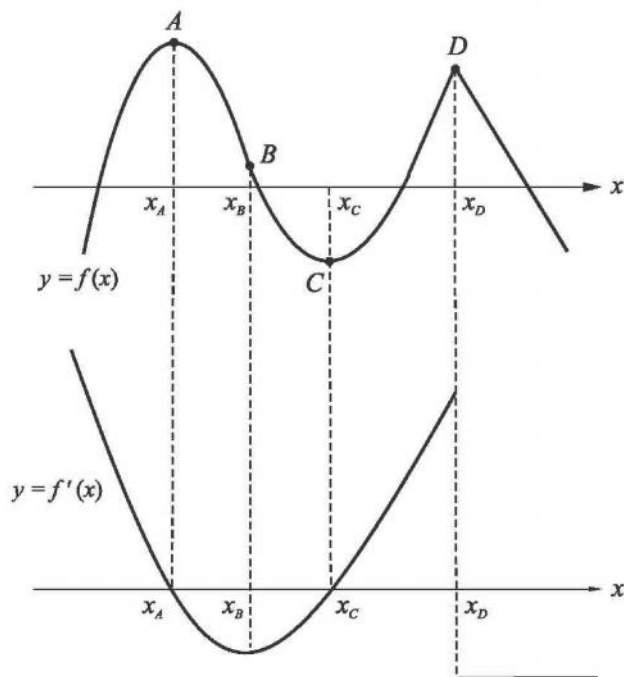
На делу криве од тачке  $C$  до тачке  $D$ , нагибни углови тангенти се поново повећавају, па расте и први извод који је сад позитиван, односно  $f'(x) > 0$  за сваки  $x \in (x_C, x_D)$ .

|         |                     |
|---------|---------------------|
| $x$     | $(x_C, x_D)$        |
| $f'(x)$ | растућа и позитивна |

Део криве десно од тачке  $D$  је, заправо, права. Она се поклапа с тангентом у свакој својој тачки, тако да је нагибни угао тангенти увек исти. У овом случају тај угао је туп, па је његов тангенс  $c$  негативан. Отуда је  $f'(x) = c < 0$  за  $x \in (x_D, +\infty)$ .

|         |                  |
|---------|------------------|
| $x$     | $(x_D, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | $c < 0$          |

На основу свега добијеног, можемо скицирати график првог извода  $f'(x)$  функције  $f(x)$  (сл. 6).



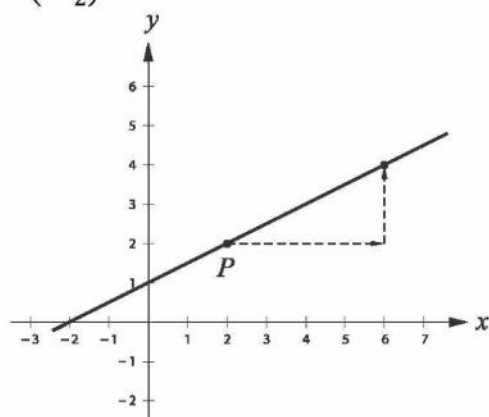
Сл. 6.

Приметимо да функција  $f'(x)$  има прекид у тачки  $D(x_D, f(x_D))$ . То је тачка у којој график функције  $y = f(x)$  има „шпиц”, односно тачку у којој не постоји тангента на криву.

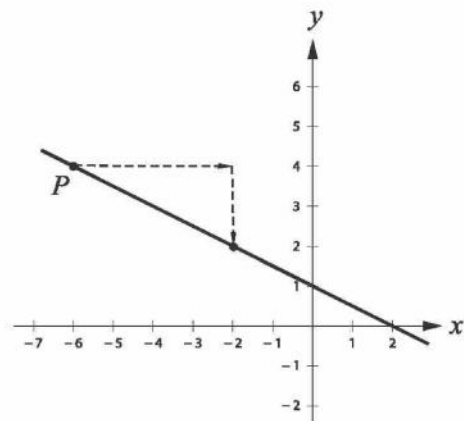
Што се тиче саме функције  $f(x)$ , она је *распућа* на интервалима  $(-\infty, x_A)$  и  $(x_C, x_D)$ . То су баш интервали на којима је  $f'(x) > 0$ . Слично, функција  $f(x)$  је *опадајућа* на интервалима  $(x_A, x_C)$  и  $(x_D, +\infty)$ , тј. тамо где је  $f'(x) < 0$ . То није случајност већ законитост која важи за сваку функцију. Ево зашто.

Према геометријској интерпретацији, први извод функције  $y = f(x)$  у тачки  $P(x, f(x))$  једнак је нагибу  $k_{t(P)}$  тангенте  $t(P)$  на криву  $y = f(x)$  у тачки  $P$ . Шта нам, уствари, говори нагиб тангенте, односно нагиб  $k$  ма које праве  $y = kx + n$ ?

Погледајмо следеће две праве, једну са нагибом  $k = \frac{1}{2}$  (сл. 7(а)) и другу са нагибом  $k_1 = -\frac{1}{2}$  (сл. 7(б)). Нека је  $P$  тачка прве праве. Ако  $P$  померимо 4 јединице хоризонтално удесно, да бисмо је вратили на праву, морамо је померити 2 јединице вертикално навише. То је управо  $4k = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$  јединице. Другим речима, њену ординату морамо повећати за 2. Ако, слично, тачку  $P$  друге праве померимо 4 јединице хоризонтално удесно (сл. 7(б)), морамо је, након тога, померити 2 јединице вертикално наниже да бисмо је вратили на праву. То је исто што и померање  $-2$  јединице навише, односно  $4k_1 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$  јединице.



(а)



(б)

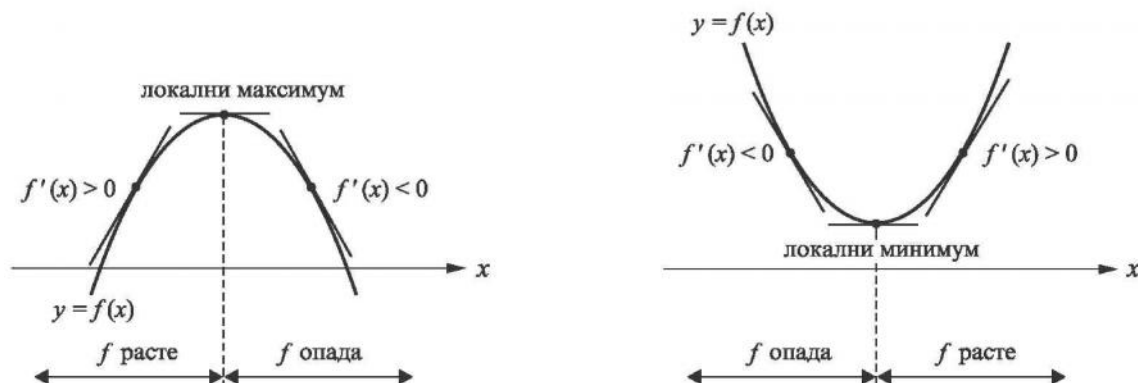
Сл. 7.

Можемо рећи да нагиб  $k$ , праве  $y = kx + n$ , представља *меру промене* вредности  $y$  у односу на промену вредности  $x$ . Наиме, ако се  $x$  повећа за  $h$ , онда ће се  $y$  променити за  $kh$ . Тачније,  $y$  ће се повећати за  $kh$  ако је  $k$  позитиван, а смањити се за  $|k|h$  ако је  $k$  негативан.

Вратимо се сада нашој кривој  $y = f(x)$  и тангенти  $t(P)$  у тачки  $P$ . У околини тачке  $P$  мали лук криве и мали сегмент тангенте  $t(P)$  се скоро поклапају. Због тога, нагиб  $k_{t(P)}$  тангенте  $t(P)$  даје и приближну *меру* *промене* вредности функције  $f(x)$  при промени вредности променљиве  $x$  у околини тачке  $P$ . То значи да ако се у околини тачке  $P$  вредност променљиве  $x$  повећа за  $h, h > 0$ , онда ће се вредност функције  $f(x)$  променити за приближно  $k_{t(P)} \cdot h$ . Повећаће се за  $k_{t(P)} \cdot h$  уколико је  $k_{t(P)} > 0$ , односно смањити за исту вредност уколико је  $k_{t(P)} < 0$ . Како је

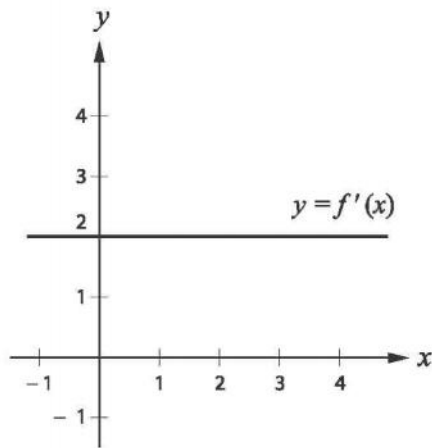
$$k_{t(P(x, f(x)))} = f'(x),$$

то, другим речима, значи да је функција  $f(x)$  растућа у околини оне тачке у којој је њен први извод  $f'(x)$  позитиван, а опадајућа у околини оне тачке у којој је њен први извод негативан. Као што смо видели, у тачкама у којима је први извод једнак нули тангента је паралелна са  $x$ -осом. Те тачке представљају тзв. *локалне екстреме* функције – локални максимум и локални минимум (сл. 8).

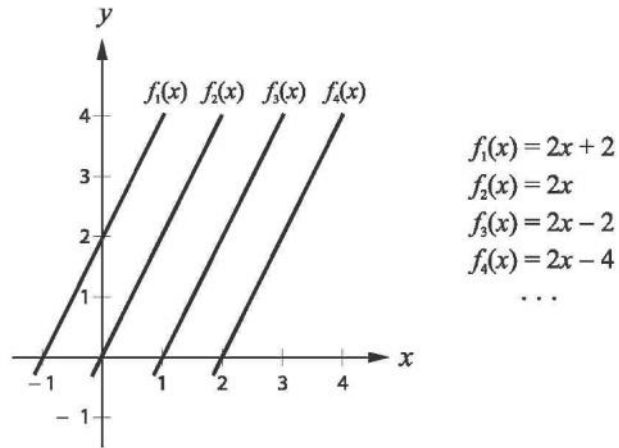


Сл. 8.

**Пример 2.** Може се поставити и обрнут проблем. Наиме, да се на основу графика првог извода функције скицира график те функције. Та функција, међутим, није јединствена. Посматрајмо прво најједноставнији случај, када је први извод константна функција, на пример,  $f'(x) = 2$  (сл. 9(а)). График тражене функције  $y = f(x)$  је права, са нагибом 2. Очигледно, таквих функција има бесконачно много (сл. 9(б)).



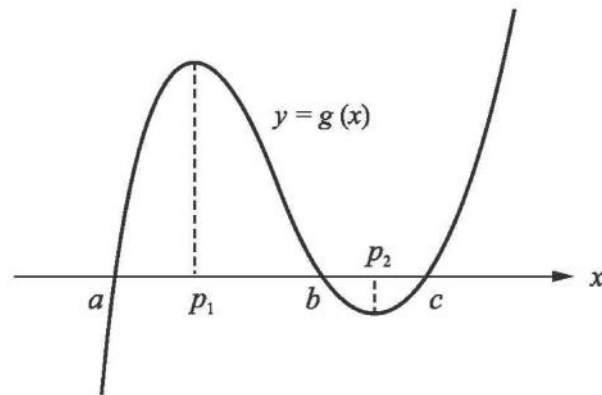
(a)



(б)

Сл. 9.

У општем случају, нека је  $y = g(x)$  график произвољне функције (сл. 10).



Сл. 10.

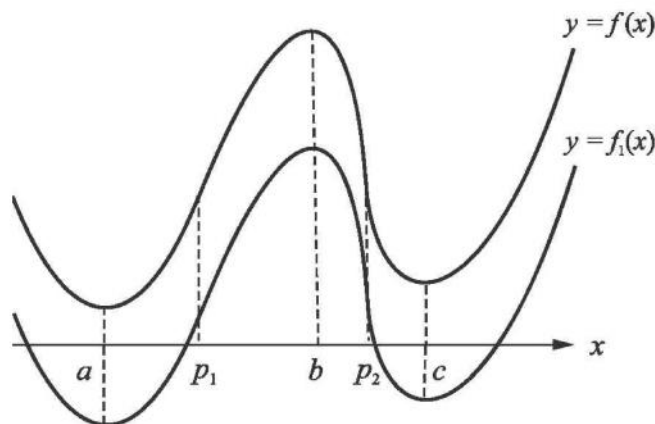
Тражимо функцију  $f(x)$  чији је први извод  $g(x)$ , тј.  $f'(x) = g(x)$ . За скицирање графика једне такве функције користићемо раније уочене чињенице. На основу знака  $g(x)$ , првог извода будуће функције, који се лако може прочитати са графика, утврдимо интервале на којима је функција  $f(x)$  растућа, односно опадајућа.

| $x$     | $(-\infty, a)$ | $(a, b)$  | $(b, c)$    | $(c, +\infty)$ |
|---------|----------------|-----------|-------------|----------------|
| $f'(x)$ | -              | +         | -           | +              |
| $f(x)$  | опадајућа ↓    | растућа ↑ | опадајућа ↓ | растућа ↑      |

На графику видимо да је  $g(a) = g(b) = g(c) = 0$ , тј.  $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$ . То значи да су у тачкама  $x = a$ ,  $x = b$  и  $x = c$  тангенте на график функције  $f(x)$  паралелне са  $x$ -осом, па се у тим тачкама налазе и локални екстрими функције  $f(x)$ . Притом, у тачкама  $x = a$  и  $x = c$  су локални минимуми



(функција  $f(x)$  прво опада, а потом расте), а у тачки  $x = b$  је локални максимум (функција  $f(x)$  прво расте, а потом опада). График једне такве функције  $f(x)$  дат је на сл. 11.



Сл. 11.

Ако се график добијене функције  $f(x)$  помери вертикално, у правцу  $y$ -осе, за произвољан вектор добија се график нове функције  $f_1(x)$  (сл.11) чији је први извод такође  $g(x)$ . Отуда, тражених функција има бесконачно много, при чему се сваке две разликују за неку константу. Штавише, може се показати да су то сва решења функционалне једначине  $f'(x) = g(x)$ .

Као што се види, први извод се ефикасно користи за испитивање функција. Међутим, то није везано само за математику. У свакој области у којој се појављују функције, први извод је добро дошао. У наредна два примера видећемо како се тај "алат" користи у економији и физици.

**Пример 3.** У економији се функцијом може задати зависност профита од обима производње. Нека је, на пример, профит неког предузећа, при производњи од  $x$  јединица неког производа, дат функцијом:

$$P(x) = -5x^2 + 970x - 500.$$

Природно питање је: "Шта се може рећи о профиту за разне обиме производње?"

Како је први извод функције  $P(x)$  једнак

$$P'(x) = -10x + 970,$$

могу се извести следећи закључци:

- за  $x = 10$  је  $P'(10) = 870$ . То значи да ако бисмо при обиму производње од 10 јединица повећали производњу за  $k$  јединица, онда би се профит повећао за приближно  $870 \cdot k$  новчаних јединица. Треба рећи да је ова процена утолико тачнија уколико је промена обима производње  $k$  мања.
- за  $x = 100$  је  $P'(100) = -30$ . То у овом случају значи да ако бисмо, при обиму производње од 100 јединица, повећали производњу за  $k$  јединица, онда би се профит смањило за приближно  $30 \cdot k$  новчаних јединица. Дакле, повећање производње, не мора увек да узрокује и повећање профита!

Одређивањем знака првог извода, добијамо:

|         |                 |          |                 |
|---------|-----------------|----------|-----------------|
| $x$     | $(-\infty, 97)$ | 97       | $(97, +\infty)$ |
| $P'(x)$ | +               | 0        | -               |
| $P(x)$  | расте           | максимум | опада           |

Из табеле следи да с повећањем производње до 97 јединица расте и профит. Максималан профит се остварује при производњи 97 јединица. При даљем повећању производње, преко 97 јединица, профит опада.

**Пример 4.** Први извод се користи у многим случајевима у физици. Један важан пример примене је одређивање тренутне брзине кретања тела.

Најпре, објаснимо шта се подразумева под тренутном брзином кретања тела. Замислимо тело које се хоризонтално праволинијски креће неравномерном брзином. У неком временском интервалу може да се креће убрзано или успорено, а исто тако у оба смера, "налево" или "надесно". Нека је функцијом  $s(t)$  дат положај тела у временском тренутку  $t$ . Вредност ове функције у тренутку  $t$  је позиција тела у односу на референтну тачку  $s = 0$ . На пример, ако је функција положаја тела

$$s(t) = -t^2 + 8t - 7$$

и ако су растојања изражена у метрима, а време у секундама, онда је тело у другој секунди кретања, дакле за  $t = 2 \text{ s}$ , на позицији

$$s(2) = -2^2 + 8 \cdot 2 - 7 = 5.$$

То значи да је тело на удаљености 5 m "десно" од референтне тачке  $s = 0$ . Слично, вредности

$$s(0) = 7, \quad s(1) = 0, \quad s(4) = 9, \quad s(6) = 5$$

означавају следеће. У почетном тренутку,  $t = 0 \text{ s}$ , тело се налази  $7 \text{ m}$  "лево" од референтне тачке. После једне секунде,  $t = 1 \text{ s}$ , налази се у референтној тачки. После 4 секунде је на  $9 \text{ m}$  "десно" од референтне тачке, да би после 6 секунди било на  $5 \text{ m}$ , такође "десно" од референтне тачке. (Заправо, после четврте секунде тело је променило смер кретања.)

Средња брзина  $v_{sr}$  кретања тела се у физици дефинише на следећи начин:

$$v_{sr} = \frac{\text{промена положаја тела}}{\text{протекло време}}.$$

Тако је средња брзина нашег тела између 2. и 4. секунде кретања једнака

$$v_{sr} = \frac{s(4)-s(2)}{4-2} = \frac{9-5}{2} = 2 \text{ m/s}.$$

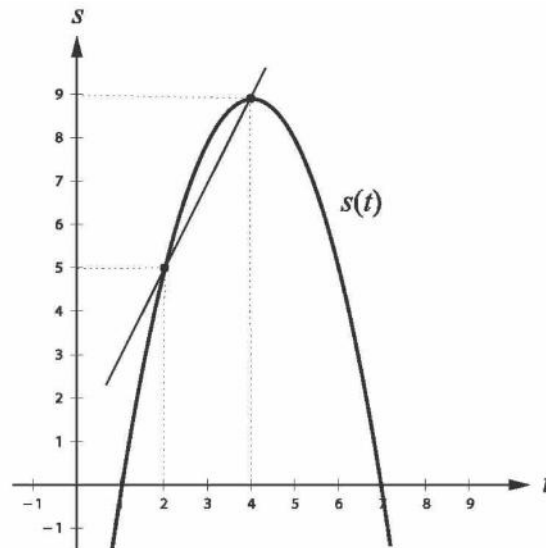
Између 4. и 6. секунде је

$$v_{sr} = \frac{s(6)-s(4)}{6-4} = \frac{5-9}{2} = -2 \text{ m/s},$$

док је између 2. и 6. секунде

$$v_{sr} = \frac{s(6)-s(2)}{6-2} = \frac{5-5}{2} = 0 \text{ m/s}.$$

У првом случају, средња брзина од  $2 \text{ m/s}$  означава да би тело, које се иначе креће променљивом брзином, из положаја  $s(2)$  дошло у положај  $s(4)$  за 2 секунде и када би се кретало константном брзином од  $2 \text{ m/s}$  "надесно". Средња брзина од  $-2 \text{ m/s}$  у другом случају означава да би тело из позиције  $s(4)$  дошло у позицију  $s(6)$  за 2 секунде и када би се кретало константном брзином од  $2 \text{ m/s}$  "налево". Коначно, средња брзина од  $0 \text{ m/s}$  означава да би тело из позиције  $s(2)$  дошло у позицију  $s(6)$  за 4 секунде и када би мировало. Другим речима, у тренуцима  $t = 2 \text{ s}$  и  $t = 6 \text{ s}$  тело се налази истој тачки. То показује и рачун  $s(2) = s(6) = 5$ . Објашњење је у томе што се после 2. секунде тело креће 2 секунде "надесно", а потом мења смер и следеће 2 секунде иде "налево". То се види и на графику функције положаја (сл. 12).



Сл.12.

Приметимо да средња брзина тела од тренутка  $t = 2 \text{ s}$  до тренутка  $t = 4 \text{ s}$  представља нагиб сечице која пролази кроз тачке  $(2, 5)$  и  $(4, 9)$ , тј.

$$v_{sr} = k_s = \frac{s(2+h) - s(2)}{h}.$$

Средња брзина тела у неком временском интервалу нам, међутим, ништа не говори о *стварној* (*тренућној*) брзини у појединим тренуцима. На пример, знајући да је средња брзина на временском интервалу  $(2, 4)$  једнака  $v_{sr} = 2 \text{ m/s}$ , ништа не можемо рећи о тренутној брзини у тренуцима  $t = 2 \text{ s}$  и  $t = 4 \text{ s}$ . Тренућна брзина  $v(t)$  тела у тренутку  $t$  дефинише се на следећи начин:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Препознајемо да је десна страна нагиб тангенте на криву  $s(t)$  у тачки  $(t, s(t))$ , а то је први извод функције  $s(t)$  у тачки  $t$ , тј.  $s'(t)$ . Дакле,

$$v(t) = s'(t).$$

На основу таблице извода, за конкретан случај  $s(t) = -t^2 + 8t - 7$  добијамо  $s'(t) = -2t + 8$ , па је тренутна брзина тела у тренутку  $t$  једнака

$$v(t) = -2t + 8.$$

Одавде добијамо тренутне брзине за специјалне вредности  $t$ :

$$v(2) = 4 \text{ m/s}, v(4) = 0 \text{ m/s}, v(5) = -2 \text{ m/s}.$$

Тренутну брзину тела можемо схватити као брзину којом би тело, које се креће променљивом брзином, наставило да се креће, ако би у том тренутку његова брзина постала стална. На пример, ако би у тренутку  $t = 4 \text{ s}$  брзина тела постала стална, оно би наставило да се креће брзином од  $-2 \text{ m/s}$ , тј, брзином од  $2 \text{ m/s}$  "налево".

За крај, читаоцу који је добро научио први извод, остављамо један леп задатак за самосталну вежбу.

**Пример 5.** Дата је купаста посуда с кружном основом полупречика  $r = 4 \text{ dm}$  и висином

$H = 3 \text{ dm}$ . Посуда је окренута врхом надоле и у њу утиче вода брзином  $v = 2 \text{ dm/min}$ . Израчунати брзину којом се подиже ниво воде у тренутку када је дубина воде  $y = 1 \text{ dm}$ .

Резултат:  $\frac{8}{9\pi} \text{ dm/min}$ .

## Литература

[1] Markus Häikiöniemi, *Perceptual and symbolic representations as a starting point of the acquisition of the derivative*, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, Vol 3, 73–80.

[2] George Polya, *How to solve it*, Princeton, N. J. Princeton University Press, 1964.

[3] David Tall, *A Sensible approach to the calculus*, 2010.  
<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010a-sensiblecalculus.pdf>

[4] Dennis G. Zill, *Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1985.

**Статијата прв пат е публикувана во списанието ТАНГЕНТА  
на ДМ на Србија во 2016/17 година**