Бранко Трпеновски
Наум Целакоски
Ѓорѓи Чупона

Калцески

ВИША МАТЕМАТИКА

II книга

изводи и интеграли

Универзитетски учебник

"ПРОСВЕТНО ДЕЛО"
СКОПЈЕ, 1993 год.

Уредник:

Кирил Милчев

Рецензенти:

Д-р **Пано Кржовски**, редовен професор на Машинскиот факултет - Скопје

Д-р **Кирил Стојменовски**, редовен професор на Технолошко - металуршкиот факултет - Скопје.

Со одлука на Наставно - научниот совет на Машинскиот факултет во Скопје под број 08 - 152/1 од 21. 01. 1992 година се одобрува употребата на оваа книга како основен универзитетски учебник.

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Во периодот 1970 - 72 излегоа од печат три книги под заеднички наслов "Предавања по виша математика", наменети за студентите од тогашниот Електро - машински факултет во Скопје. Во изминатиот период "Предавањата" се преиздавани 4 пати. Но, двајца од тројцата) автори на "Предавањата", што сега се професори на Машинскиот факултет во Скопје, согледуваат дека нивните предавања, од година во година, сè повеќе се разликуваат од "Предавањата". Така дојде до книгата "Виша Мматематика", од која првите три глави, посветени на функциите од една реална променлива, се предмет на ова издание.*

Да дадеме краток преглед на обработениот материјал. Првата глава, под општ наслов ФУНКЦИИ, се состои од 5 параграфи, секој од кои е поделен на 6 - 12 раздели. Првиот параграф, "За јазикот на математиката" е предвиден за читателот да изврши активно повторување на материјалот по математика (пред сè, по алгебра) од средно училиште. Затоа му предлагаме или да преjде веднаш на вториот параграф (се разбира ако има доволно предзнаења) или набрзина да го прочита материјалот, и тоа само оној дел што не е печатен со "петит". (По потреба, или по желба може повремено да консултира делови од овој параграф, или да го изучи детално). И во наредните два параграфа од првата глава ќе се сретнат познати факти, во врска со основните поими за функции, или елементарните функции, па и за нив важи даденото упатство. Што се однесува со последните два параграфа, во кои се изучуваат конвергентните низи од реални броеви, границите и непрекинатите функции, препорачуваме детално изучување барем на материјалот што не е печатен петитно.

Втората глава, под наслов ИЗВОДИ, е вовед во диференцијалното сметање и се состои од 6 параграфи, секој од кои се состои од 4 - 6 раздели. Тука се содржи стандардниот материјал за примена на изводите во испитување на функциите, вклучувајќи ја формулата на Тејлор. На примената на изводите во геометријата овде и се посветува мало внимание, и тоа главно, за илустрирање на својствата на изводите, а елементи од диференцијалната геометрија ќе бидат предмет на изучување во една наредните книги.

---

*) Еден од авторите, пред скоро 25 години, премина за постојан професор на Природноматематичкиот факултет во Скопје.

Третата глава, под наслов ИНТЕГРАЛИ, е вовед во интегралното сметање. Треба да се истакне дека (за разлика од "Предавањата") овде, уште во III. 1, се дефинираат паралелно и определениот и неопределениот интеграл. Потоа, во III. 2 и III. 3 се разработуваат општите методи за интегрирање, како и посебни методи за интегрирање на поедноставни елементарни функции. Во III. 4. се формулираат формулите за примена на определениот интеграл за пресметување плоштина и должина на лак во рамнина, коко и волумен и плоштина на ротациони тела. Дури во III. 5. се воведува поим на определен интеграл како граница на интегрални суми, т.е. римановиот интеграл, и се испитува врската со порано воведениот поим за определен интеграл како нараснување на примитивна функција. На крајот, во III. 6, се споменуваат уште неколку примени на определените интеграли, а последниот раздел од тој параграф е посветен на приближно пресметување на определени интеграли.

Секој раздел, а и секоја од трите глави, завршува со вежби, што треба да послужат за утврдување на поминатиот теоретски дел од материјалот. Задачите во книгава сметаме дека се доволни за подготвување на соодветниот испит. Но, се разбира, добро е да се консултираат соодветни збирки задачи, па и други учебници.

Во дел од вежбите ќе се сретнат и нови сведенија. Задачите што авторите ги сметаат за потешки, се означени со ѕвездичка (на пример, таква е вежбата 11 од I. 4. 1), а некои што содржат поширок информации дури и со две ѕвездички. Тие задачи читателот може да ги остави и нерешени, но и во тој случај му препорачуваме да го прочита барем текстот на соодветната вежба.*

Повикувањата се вообичаени. На пример, Т. 1 од II. 3. 4 означува: првата теорема од четвртиот раздел на третиот параграф во втората глава. Римската цифра се изоставa кога повикувањето се врши во истата глава.

На крајот е приложен список на книгите што се користени повеќе или помалку, како и показател на поими, имиња и теореми.

Книгава е наменета, пред сѐ, за студентите на Машинскиот факултет во Скопје, но се надеваме дека ќе им биде од корист и на студенти од други факултети каде што се изучува математиката.

Скопје, јули 1991 *Авторите*

Материјалот што е дискутиран во горниот вовед е распореден во две книги и тоа: првата глава - во кн. I, а втората и третата глава - во кн. II. При подготвувањето за печат на кн. I, за жал се појавија пречки од техничка природа, па затоа од печат излегува прво втората книга.

Скопје, септември 1993 *Авторите*

II ИЗВОДИ

Поимите граница на низа и граница на функција што ги разгледувавме во претходната глава, покрај самостојниот интерес, претставуваат подготовка за воведување на поимот извод на функција - еден од најважните поими во виша-та математика. Делот од математиката што ги изучува изводите и нивната примена се вика **диференцијално сметање**. Оваа глава претставува вовед во таа област, а заедно со претходната и наредната глава, претставува вовед во делот од математиката познат под името **математичка анализа**.

II. 1. ИЗВОД И НЕГОВИ ТОЛКУВАЊА

1.1. ИЗВОД

Поимот *извод* е предмет на целиот овој дел, а може да се рече дека тоа е најважниот поим во целата виша математика. Тој поим се дефинира за произволни функции, но, сепак, ќе се задржиме прво на една негова конкретна интерпретација: изводот како брзина.

Да потсетиме дека **брзина** v на едно рамномерно праволиниско движење е *изминат пат за единица време*. Од оваа дефиниција следува дека ако, при такво движење, за време t е поминат пат s, тогаш брзината се пресметува по формулата $v = s/t$. Во случај на произволно праволиниско движење, изминатиот пат s ќе биде функција $s = s(t)$ од времето t за кое е изминат тој пат.

Ако нè интересира движењето во еден сегмент $[t_0,t_1]$, при што $t_1 > t_0$, тогаш е природно да речеме дека количникот:

$$v_{cp} = \frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0} \tag{1}$$

е **средна брзина** на движењето од моментот t_0 до моментот t_1. Со други зборови, ако имаме произволно праволиниско движење со средна брзина v_{cp} од t_0 до t_1, тогаш изминатиот пат при тоа движење е еднаков со патот што би бил изминат кога движењето би било праволиниско рамномерно со брзина v_{cp}, т.е. $s(t_1)-s(t_0)=(t_1-t_0)\cdot v_{cp}$.

Сакајќи да имаме поим за брзина $v_0 = v(t_0)$ во моментот t_0 (т.е. моментна брзина во t_0), природно е v_0 да се дефинира со:

$$v_0 = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0} \tag{2}$$

односно со:

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3}$$

каде што $\Delta t = t_1 - t_0$, $\Delta s = s(t_1)-s(t_0)$.

Граничната вредност на десната страна од (2), т.е. (3) ја викаме **извод на патот по времето** во моментот t_0. Според тоа, можеме да речеме дека *брзината на едно движење во моментот t_0 е извод на патот по времето во тој момент.*

Да разгледаме два примера.

Пример 1. *Во случај да имаме рамномерно праволиниско движење со брзина v, изминатиот пат s од t_0 до t_1 изнесува $s = v\cdot(t_1-t_0)$, од што следува дека $v_{cp} = v(t_0) = v$ се совпаѓа со брзината на движењето, и дека не зависи од t_0, т.е. е константна, а тоа и требаше да се очекува.*

(Да забележиме дека брзината може да биде константна и при неправолиниско движење а тоа ќе биде секогаш кога изминатиот пат $s(t)$ од t_0 до t_1 се пресметува по формулата:

$$s(t)=c(t_1-t_0),$$

каде што c е константа. Во врска со ова треба да се истакне дека, обично, брзината се дефинира како векторска величина $\vec{v}(t)$, па во таков случај имаме дека v е интензитетот на $\vec{v}(t)$. Според тоа, константноста на v, не повлекува константност на $\vec{v}(t)$.)

Пример 2. *При слободно паѓање (во безвоздушен простор) изминатиот пат s се пресметува по формулата $s=g\cdot t^2/2$, каде што g =9,81... е константа, а t е времето од почетокот на движењето.*

Според тоа:

$$v_{cp}=\frac{g\cdot t_1^2}{2}-\frac{g\cdot t_0^2}{2}=\frac{g}{2}\cdot(t_1-t_0)\cdot(t_1+t_0),$$

од што следува дека брзината во моментот t_0 изнесува:

$$v(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{\frac{g}{2}\cdot(t_1-t_0)\cdot(t_1+t_0)}{t_1-t_0}=g\cdot t_0,$$

односно $v(t)=g\cdot t$, во произволен момент t.

(Се разбира, ако движењето се одвива во воздушен простор, и двете формули $s=g\cdot t^2/2$ и $v=g\cdot t$ се само приближно точни. Уште повеќе, тие формули важат сè додека телото што се движи не дојде во допир со друго тело; покрај тоа, ако телото паѓа од "голема" височина, не можеме ни g да го сметаме за константа.)

Да преjдеме, сега, на дефиницијата на извод од произволна функција.

Нека $y=f(x)$ е функција, дефинирана во интервалот (a,b) и нека x_0, $x_0+\Delta x\in(a,b)$. За количникот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{4}$$

природно е да се каже дека претставува **средна брзина на промената на функцијата** f (или: количник на нараснувањата) кога x_0 ќе се промени за Δx; овој количник зависи како од x_0 така и од Δx. Ако постои границата:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{5}$$

тогаш неа, по дефиниција, ќе ја викаме **извод на функцијата f во точката x_0**.

Да разгледаме еден пример.

Пример 3. *Нека $f(x)=x^2$; да го најдеме нејзиниот извод (ако постои!) во точката $x=1$. Имаме:*

$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1=2\cdot\Delta x+\Delta x^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x,\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2$$

Значи, во точката $x=1$ изводот на оваа функција постои и е еднаков на 2.

За обележување на изводите се употребуваат разни ознаки. Во оваа книга, ние најмногу ќе ги користиме ознаките y' и $f'(x)$.[1]
Значи:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \text{т.е. } f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Според дефиницијата, изводот $f'(x_0)$ на $f(x)$ во точката $x_0\in(a,b)$ е реален број. Ако $f'(x_0)$ постои за секој $x_0\in(a,b)$, тогаш $f'(x)$ е функција дефинирана во (a,b). Така, ако $f(x)=x^2$, тогаш:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x,$$

за секој $x\in(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Да забележиме дека една функција $f(x)$ може да биде дефинирана во интервалот (a,b), а во некои точки да нема извод.

Пример 4. *Функцијата $f(x)=|x|$ е дефинирана во $(-\infty,+\infty)$ и притоа $f'(x)=sgnx$ за секој $x\neq 0$, но $f'(0)$ не постои (вежба 15).* Уште повеќе, функцијата на Дирихле, определена со: $\chi(x)=1$ за $x\in\mathbb{Q}$ и $\chi(x)=0$ за $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ е, исто така, дефинирана за секој $x\in(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, но $\chi'(x_0)$ не постои ни за еден $x_0\in\mathbb{R}$ (Вежба 16).

[1] Се чита: y' - "ипсилон прим"; $f'(x_0)$ - "еф прим од икс нула"

Ако функцијата $f(x)$ има извод во секоја точка x_0 од некое множество D[2], тогаш изводот $f'(x)$ ќе биде функција, дефинирана во D.

Подолу ќе разгледаме неколку примери; тие се основни за натамошното изучување на изводите.

Основни примери

1.° $f(x)=c$ (c е константа). Имаме:

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$, па $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Значи,

$$(c)' = 0$$

2.° $f(x)=x$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$(x)' = 1.$$

3.° $f(x)=x^n$, n - природен број.

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x+\Delta x)^n - x^n \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\cdot\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta x^n - x^n \\ &= nx^{n-1}\cdot\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta x^n;\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x\left[\binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\Delta x^{n-2}\right];\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Значи:

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$$

4.° $y = \dfrac{1}{x}$.

---

[2] Притоа сметаме дека $\mathbf{D}$ е интервал или унија од интервали (т.е. отворено множество во $\mathbb{R}$)

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

5.° $y=\sqrt{x}$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{x+\Delta x+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x\neq 0.$$

6.° $y=a^x$.

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\cdot\left(a^{\Delta x}-1\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Бидејќи $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$ (пример 8, I. 5. 5) добиваме:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\cdot\ln a;$$

$$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a.$$

7.° Бидејќи $\ln e=1$, од претходното следува:

$$\left(e^x\right)'=e^x.$$

8.° $y=\log_a x$.

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\left(\text{ за }\frac{\Delta x}{x}=h\ \right)=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}.\bullet$$

9.° Од добиеното следува $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

10.° $y=\sin x$.

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\left(\text{ за }\frac{\Delta x}{2}=h\ \right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(x+h)=\cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

11.° $y = \cos x$.

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2};$$

како и во претходниот пример, земајќи предвид дека

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, се добива:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

За да може полесно да се следи материјалот што следува, напомнуваме дека погоре добиените резултати треба добро да се запаметат. Притоа изведените равенства важат за секој x за кој се дефинирани двете страни. Така, во 5°, равенството важи само за $x > 0$.

ВЕЖБИ

Да се најде (по дефиниција) изводот на дадената функција (**1** - **6**).

1. $y = x^3$. **2.** $y = \dfrac{1}{x^2}$. **3.*** $y = tgx$.

4. $y = 3x - x^2$. **5.** $y = \sin(x-1)$ **6.** $y = \sqrt[3]{x}$.

Да се најде $f'(x_0)$ (**7** - **10**).

7. $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(4)$. **8.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(8)$.

9. $f(x) = 5^x$, $f'(1)$. **10.** $f(x) = \lg x$, $f'(1)$.

Во кои точки функцијата $f(x)$ се совпаѓа со својот извод $f'(x)$, т.е. $f'(x) = f(x)$ во задачите (**11** - **13**)?

11. $f(x) = x^2$. **12.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$. **13.** $f(x) = e^x$.

14. Нека функцијата $f(x)$ има извод во точката $x = a$. Да се пресметаат лимесите:

а) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$; б)* $\lim\limits_{t \to \infty} t \cdot \left[f\left(a + \dfrac{1}{t}\right) - f(a) \right]$.

15.* Да се покаже дека $|x|' = sgn\, x$, за $x \neq 0$, но дека $|x|'$ не постои за $x = 0$.

16.* Да се покаже дека Дирихлеовата функција χ (в. Пр. 4) нема извод ниту во една точка $x_0 \in \mathbb{R}$.

17. Претпоставувајќи дека движењето е праволиниско, и се одвива по законот на патот $s=s(t)$, при што патот се мери во метри (m), а времето во секунди $(\sec)$, да се определи брзината $v(t)$ за $t=2\sec$, ако:

а) $s=3t$ б) $s=t^2+t$, в) $s=12t+t^3$.

18. Да се одреди брзината на тело што е исфрлено "надолу" со почетна брзина v_0 од кула висока H метри, во моментот кога ќе удри на тлото.

19. Да се одреди брзината $v(t)$ на тело што е исфрлено "вертикално нагоре" од Земјината површина со почетна брзина v_0. Да се одреди и максималната висина H, како и брзината v_1 со која телото ќе се "врати" на земјата.

1.2. ТАНГЕНТА

Поимот брзина го искористивме како едно "оправдување" за воведување на поимот извод. Мошне често, за иста цел, се користи поимот тангента на рамнинска крива, а тоа ќе биде, имено, предмет на овој раздел.

Да претпоставиме дека $y=f(x)$ има извод во $x=x_0$[1]. Ќе ја разгледаме кривата (L) што е график на таа функција[2]. Да ја означиме со M_0 точката од (L) со координати $(x_0, y_0=f(x_0))$ и да избереме точка $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ од (L). Ако го означиме со β аголот меѓу позитивниот дел на x - оската и правата на која лежи отсечката $\overline{MM_0}$, тогаш имаме (црт. 1):

$$tg\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Да го избереме аголот α така што

$$tg\alpha=f'(x_0), \qquad 0\le\alpha\le\pi.$$

[1] Случајот кога $f'(x_0)$ не постои, ќе го разгледуваме во разделот **1. 5.**

[2] Наместо "(L) е график на функцијата $y=f(x)$", може да се рече "(L) е кривата $y=f(x)$".

(Притоа, ако $f'(x_0)=0$, ставаме $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$, во зависност од тоа дали за мало Δx, β е остар или тап агол.) Јасно е дека $\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta$, па според тоа, природно е да речеме дека правата, определена со равенката:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0), \tag{1}$$

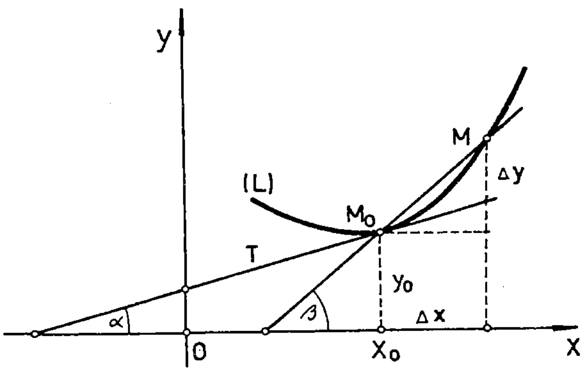
е *граница* на тетивата што минува низ M_0 и M, т.е. на правата:

$$y-f(x_0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot(x-x_0). \tag{2}$$

Поради ова велиме дека правата (1) е **тангента** на (L) во M_0. Правата што минува низ M_0 и е нормална на правата (1) ја викаме **нормала** на (L) во M_0. Според тоа, нормалата има равенка:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0) \text{ за } f'(x_0)\neq 0, \tag{3}$$

а $x=x_0$ за $f'(x_0)=0$.



Црт. 1

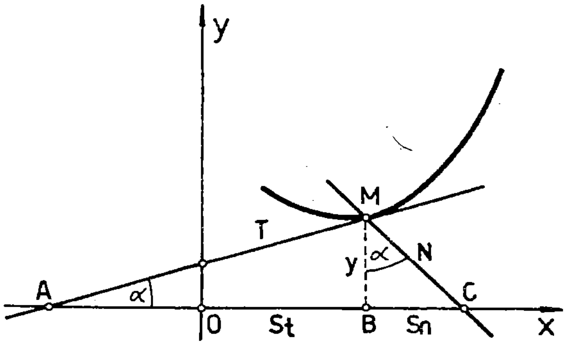
Да разгледаме еден пример.

Пример 1. *Во 1.1. видовме дека* $(1/x)'=-1/x^2$. *За* $x=2$ *ја добиваме точката* $(2,1/2)$ *од кривата* $y=1/x$, *а за* $x=2$, $y_0'=-1/4$. *Така, бараните равенки (на тангентата и нормалата) гласат:*

$$(t):\ y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(x-2),$$

$$(n):\ y-\frac{1}{2}=4\cdot(x-2).$$

Во врска со поимите тангента и нормала често се сретнуваат и таканаречените допирни количини што се определуваат на следниов начин.



Црт. 2

На кривата $y=f(x)$ да избереме точка M и во неа да ги повлечеме тангентата и нормалата; тангентата нека ја сече оската Ox во точката A, нормалата - во точката C, а B нека е ортогонална проекција на точката M врз оската Ox (црт. 2). Тогаш под **допирни количини** се подразбираат следниве четири должини:

$T=\overline{AM}$ - *должина на отсечката од тангентата ;*

$N=\overline{CM}$ - *должина на отсечката од нормалата ;*

$S_T=\overline{AB}$ - *должина на суптангентата ;*

$S_N=\overline{BC}$ - *должина на субнормалата.*

Од црт. 2, за точката $M(x,y)$ се гледа дека:

$$\frac{y}{S_T}=tg\alpha=y',\ \text{т.е.}\ \ S_T=\frac{y}{y'}\ ;$$

$$\frac{S_N}{y}=tg\alpha=y', \text{ т.е. } S_N=y\cdot y' ;$$

$$T=\sqrt{y^2+S_T{}^2}=\frac{y}{y'}\cdot\sqrt{1+y'^2} ; \quad N=\sqrt{y^2+S_N{}^2}=y\sqrt{1+y'^2} .$$

Да одбележиме дека овие формули се точни само за зададената положба на кривата и допирната точка M. Кога би било, на пример, $y<0$, би добиле $N<0$. Заради тоа, ќе ги изведеме во општ случај и ќе ги добиеме во коректен облик формулите за допирните количини.

Нека $M(x,y)$ е допирната точка; тогаш нејзината ортогонална проекција врз оската Ox ќе има координати $B(x,0)$, а равенките на тангентата и нормалата гласат:

$$Y-y=y'\cdot(X-x), \quad Y-y=-\frac{1}{y'}\cdot(X-x),$$

каде што со X и Y се означени променливите координати на точките од тангентата, односно нормалата. Ако во равенката на тангентата ставиме $Y=0$, ќе добиеме $X=x-y/y'$, т.е. точката A ги има координатите $A(x-y/y',0)$. На сличен начин, од равенката на нормалата ги добиваме и координатите на точката C, $C(yy'+x,0)$. Со помош на формулата за растојание меѓу две точки, сега добиваме:

$$T=\left|\frac{y}{y'}\right|\cdot\sqrt{1+y'^2} , \quad S_T=\left|\frac{y}{y'}\right| , \tag{4}$$

$$N=|y|\cdot\sqrt{1+y'^2} , \quad S_N=|y\cdot y'| . \tag{5}$$

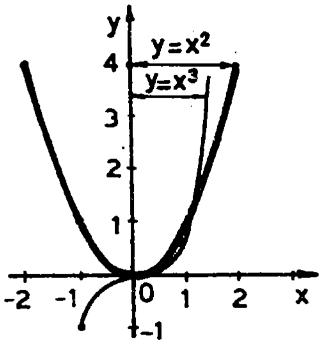
Да разгледаме еден пример.

Пример 2. *Ќе ги пресметаме допирните количини за функцијата $y=\sin x$ при $x=\pi/4$. Според примерот од разделот 1.1, $y'=\cos x$, па за $x=\pi/4$ добиваме:*

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2} , \quad y'=\frac{\sqrt{2}}{2} . \text{ Така } T=\frac{\sqrt{6}}{2} , \; S_T=1, \; N=\frac{\sqrt{3}}{2} , \; S_N=\frac{1}{2} .$$

Природно е, посебно за оние кои повеќе се интересираат за примената на математиката, да го поставиме прашањето за оправданост од воведување на поимот извод. Одговорот на ова прашање не може да се даде накратко, само во едно предавање. Во текот на натамошните разгледувања во оваа книга, а и низ различните технички предмети, читателот сам ќе најде потврда за потреба од воведување на поимот извод. На ова место ние делумно ќе дадеме потврден одговор на поставеното прашање, со тоа што ќе изнесеме уште неколку толкувања на тој поим (види **1. 3.**).

Г** Во текот на овој дел ќе се сретнеме и со други примени на изводите во геометријата[3], а овде ќе направиме неколку забелешки во врска со поимот тангента. Пред сè, обично во средно училиште, тангента на кружница или елипса се дефинира како права што со кривата има точно една заедничка точка (исто се однесува и за парабола и хипербола, со тоа што во првиот случај правата не треба да биде паралелна со оската на параболата, а во вториот случај - со некоја од двете асимптоти на хиперболата). Во **2. 5.** ќе покажеме дека, во случај кога кривата (L) е некој од споменатиот вид криви (познат под заедничко име: **криви од втор ред**), новововедениот поим за тангента е во согласност со "стариот". Тогаш, специјално кај кривите од втор ред, ако имаме тангента на (L) во точка M_0, барем во близина на M_0, сите точки од (L) се наоѓаат од иста страна на тангентата, па затоа M_0 се вика и **допирна точка**. Но, во општ случај тоа не е точно, како што се гледа од кривата $y=x^3$ (црт.3). Имено, $y'(0)=f'(0)=0$, па $y=0$ е тангента на (L) во точката $O(0,0)$, но за $x>0$ точките од (L) се над тангентата, а за $x<0$ под тангентата. (Во овој случај, велиме дека координатниот почеток е превојна точка, а со тој поим ќе се сретнеме во **5. 2.**). Ова е илустрирано на црт. 3, каде што е нацртана и параболата $y=x^2$, за која $y=0$ е, исто така, тангента во координатниот почеток, но сите точки на оваа парабола се над тангентата.

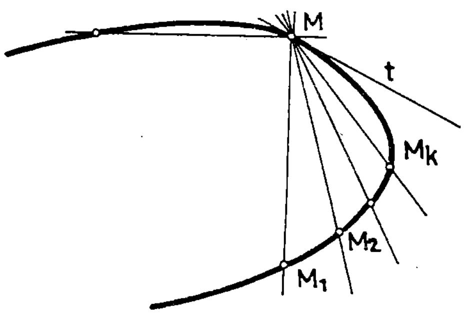


Црт. 3

[3] Тоа ќе биде само еден мал дел од примената на диференцијалното сметање во геометријата, наречена диференцијална геометрија; да спомeнеме дека диференцијалната геометрија е посебна научна дисциплина.

Еден од недостатоците на дефиницијата на поимот тангента што го дадовме погоре е тоа што, според таа дефиниција, тангентата не може да биде паралелна со y - оската. Во последниот дел од овој параграф ќе го обопштиме поимот за извод, со што ќе го отстраниме овој недостаток, а ќе го воведеме и поимот "еднострани тангенти".

Специјално последната забелешка сугерира да се дефинира поимот тангента независно од поимот извод. Затоа, подолу приложуваме една таква дефиниција.



Црт. 4

Нека е дадена кривата (L) и на неа да избереме една точка M. Покрај M, нека $M_1, M_2, \ldots, M_k$ се други точки од (L) различни од M (на црт. 4 се избрани неколку нови точки). Сврзувајќи ја M со секоја од точките $M_1, M_2, \ldots, M_k$ ги добиваме правите $MM_1, MM_2, \ldots, MM_k$. Ако земеме M_k да биде променлива точка на кривата (L) и ако при $\lim_{k\to\infty} \overline{MM_k} = 0$ правата MM_k има определена гранична положба t, независно од изборот на точките M_k, тогаш така добиената "гранична права", по дефиниција, ја викаме **тангента** на кривата (L) во нејзината точка M.

Да спомeнеме дека и при новата дефиниција на поимот тангента си дозволивме извесна непрецизност. Имено, поимот "гранична права" (односно гранична положба на дадената низа прави), го примаме интуитивно како доволно близок, па затоа не објаснуваме што подразбираме под тоа; истото се однесува и за изразот "точката A се стреми кон точката B". **

ВЕЖБИ

Да се најде равенката на тангентата и равенката на нормалата на дадената крива во назначената точка (**1** - **4**):

1. $y = x^2 + 1,\ x = 2$ **2.** $y = e^x,\ x = 0$

3. $y=2x-x^2,\ x=1$ **4.** $y=\cos x,\ x=\pi/2.$

5. Да се најде точка M на параболата $y=2+x-x^2$, така што тангентата повлечена во M да биде паралелна со:

а) оската Ox; б) правата $y=x+1$.

6. Да се најде равенката на правата што минува низ точката M и е тангента на дадената парабола.

а) $M(0,2),\ y=1-x^2$; б) $M(1,-2),\ y=x^2-2x+2$.

Под **агол меѓу две криви** што се сечат го подразбираме аголот меѓу нивните тангенти во пресечната точка на тие криви.

Да се најде аголот меѓу кривите (**7** - **10**).

7. $y=x^2,\ y=x^3$ **8.** $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$

9. $y=\ln x,\ y=x-1$ **10.** $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x\in(0,\pi)$

11. Да се пресметаат долирните количини на кривата:

а) $y=4x-x^2$, во точката со апсциса $x=1$;

б) $y=\ln x$, во точката со апсциса $x=e$.

12. Да се најде должината на: а) суптангентата, б) субнормалата на кривата $y=2^x$ во произволна нејзина точка.

13.* Дадена е кривата $y=\sqrt{x^2-a^2}$ (дел од рамнострана хипербола). Да се покаже дека, во произволна нејзина точка,

а) должината на субнормалата е еднаква со апсолутната вредност на апсцисата на таа точка,

б) должината на отсечката на нормалата е еднаква со поларниот радиус на таа точка.

1. 3. УШТЕ НЕКОЛКУ ТОЛКУВАЊА НА ИЗВОДОТ

Овде ќе ја продолжиме дискусијата за поимот брзина, а ќе се сретнеме со уште нелолку толкувања.

I. Прво, да истакнеме дека со дадена зависност $s=s(t)$ на изминатиот пат од времето, при едно движење (т.е. при даден закон на патот) движењето не е доволно окарактеризирано. На пример, само од законот на патот не можеме да заклучиме каде се наоѓа материјалната точка во моментот $t=t_0$, а не е определена ни траекторијата на движењето. Значи, потребни ни се повеќе информации. Ако имаме рамнинско движење, тогаш избирајќи (на пример) декартов правоаголен систем Oxy, за да го знаеме движењето, треба да ја знаеме положбата на материјалната точка M во секој момент t. Поради фактот што M е определена со своите координати, доаѓаме до заклучок дека треба да ги знаеме функциите:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{1}$$

а тие две равенки се викаат **равенки** или **закон на движењето**.

Да се задржиме на наједноставниот случај кога движењето е *праволиниско*. Тогаш, избирајќи ја правата на движењето за една од координатните оски, на пример за y - оска, добиваме дека равенките на движењето го имаат обликот $x = 0$, $y = y(t)$. Според тоа, едно такво движење е наполно определено со функцијата $y = y(t)$. Во овој случај, разликата меѓу законот на патот $s = s(t)$ и равенката на движењето се состои во тоа што $s(t)$ е ненегативна растечка функција додека $y(t)$ не мора да ги има тие својства. Брзината на движењето, во овој случај, се дефинира со:

$$v_y = y'(t), \tag{2}$$

т.е. брзината е извод од $y(t)$. За разлика од поимот $v = s'(t)$, а дефиниран во почетокот на **1. 1.**, во овој случај v_y може да биде и негативна, но, во секој случај, имаме: $v = |v_y|$.

Тие разлики ќе ги илустрираме со еден пример (што е во врска со задачата 18 од **1. 1.**).

Пример 1. *При вертикален истрел со почетна брзина* v_0 *равенката на движењето е:*

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{за секој} \quad t \in \left[0, \frac{2v_0}{g}\right],$$

додека законот на патот е:

$$s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{за} \quad t \in \left[0, \frac{v_0}{g}\right] \quad \text{и}$$

$$s(t) = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{1}{2} g \cdot \left(t \frac{v_0^2}{g}\right) \quad \text{за} \quad t \in \left[\frac{v_0}{g}, \frac{2v_0}{g}\right].$$

Очигледно, $y(t)$ и $s(t)$ не се исти на разгледуваниот интервал; на пример, за $t = 2v_0 / g$ имаме $y = 0$, а $s = v_0^2 / g$.

За брзината v_y имаме: $v_y = y'(t) = v_0 - g \cdot t$; за $t = v_0 / g$ се добива $v_y = 0$ (тогаш се достигнува највисоката точка, $y = v_0^2 / 2g$), а за $t \in (v_0 / g, 2v_0 / g)$ брзината v_y е негативна, $v_y < 0$. Брзината v, пак, во истиот тој интервал е позитивна, $v = s'(t) = g \cdot (t - v_0 / g) > 0$.

Да се вратиме, сега, на *општиот случај на рамнинско движење* определено со равенките (1). Во овој случај движењето можеме да го окарактеризираме со помош на две праволиниски движења. Имено, ако M_x е нормалната проекција од M на x - оската, а M_y- на y- оската, тогаш M_x ќе врши праволиниско движење по x - оската, определено со равенката $x = x(t)$, а M_y - по y- оската по правилото $y = y(t)$. Тогаш велиме дека $x'(t) = v_x$ е x - компонента, а $y'(t) = v_y$ е y- компонента на брзината на движењето на материјалната точка M. Брзината $v = \dfrac{ds}{dt}$ сега се определува со формулата:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}. \tag{3}$$

Разгледувањата што ги направивме за патот и брзината можеме да ги направиме аналогно за брзината $v = v(t)$ и **забрзувањето** $a = a(t)$ на едно движење:

$$a_{cp} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \qquad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = \frac{dv}{dt}.$$

Според тоа, можеме да кажеме дека забрзувањето a во даден момент е извод на брзината v по времето t.

II. Поимот **густина на распределбата на масата** по должината на некоја праволиниска отсечка може да се воведе аналогно како поимот брзина на движење.

Да земеме материјална праволиниска отсечка (т.е. прачка, на чија ширина и дебелина не обраќаме внимание, ги запоставуваме) и да се движиме од едниот кон другиот крај, мерејќи ја должината s на поминататото парче, како и неговата маса m. На секоја вредност од s одговара определена маса m, т.е. масата m е функција од s:

$$m = f(s).$$

За масата велиме дека е рамномерно распоредена по целата отсечка, т.е. дека таа материјална отсечка е хомогена, ако масите на кои било две нејзини еднакви (по должина) делчиња се еднакви. Во тој случај m е линеарна функција од s, поточно, m е правопропорционална на s:

$$m = \rho_0 \cdot s,$$

каде што ρ_0 е (постојан) коефициент на пропорционалноста. Притоа, $\Delta m = \rho_0 \cdot \Delta s$, а односот $\frac{\Delta m}{\Delta s}(= \rho_0)$ покажува колку единици маса m влегуваат во единица должина s. Тој константен однос се вика линеарна густина на хомогена прачка.

Нека, сега, материјата е распределена по прачката на произволен начин, во општ случај - нерамномерно. На делот од таа прачка од s до $s+\Delta s$, масата Δm ќе биде:

$$\Delta m = f(s+\Delta s) - f(s).$$

Природно е односот:

$$\rho_{cp} = \frac{\Delta m}{\Delta s}$$

да го наречеме средна линеарна густина на отсечката, а

$$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(s+\Delta s) - f(s)}{\Delta s} = f'(s) \tag{4}$$

- **линеарна густина** на отсечката во точката s. Како што гледаме од (4), таа е еднаква на изводот од масата m како функција од должината.

III. Со помош на извод може да се воведе поимот **топлотен коефициент** на тело при дадена температура.

Физичките величини што влегуваат во ова прашање да ги означиме како што следува: τ - температура (во Целзиусови степени), Q-количество топлина што треба да му се "соопшти" на телото при загревање од 0° до τ° (во џули на степен). Притоа, секако, Q е функција од τ: $Q = f(\tau)$. Ако на τ му дадеме нараснување $\Delta\tau$, тогаш и Q ќе добие нараснување ΔQ. Средниот топлотен капацитет при загревање од τ° до $(\tau+\Delta\tau)^\circ$ ќе биде:

$$C_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}.$$

Лимесот на C_{cp}, пак, кога $\Delta\tau$ се стреми кон 0, се вика **топлотен капацитет** на телото при температура τ:

$$c=\lim_{\Delta\tau\to 0} C_{cp}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}=f'(\tau). \tag{5}$$

Така, можеме да кажеме дека *топлотниот капацитет на телото е извод од количеството топлина по температурата.*

IV. **Брзината γ на хемиската реакција** во однос на супстанцата што учествува во неа, во даден момент t, се вика лимесот на средната брзина γ_{cp}, што одговара на интервалот $(t,t+\Delta t)$, кога Δt се стреми кон 0:

$$\gamma=\lim_{\Delta t\to 0}\gamma_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t),$$

каде што $m=f(t)$ е количеството материја што стапила во реакција за време t.

Бројот на ваквите примени на поимот извод е мошне голем. Сите тие, со доволна јасност го откриваат фактот дека изводот е *суштински* поврзан со основните поими од разни области на науката.

ВЕЖБИ

1. Законот на движење на материјалната точка по оската Ox е: $x=5t-t^2$. Да се најде брзината на движењето во моментите $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$ (t е зададено во секунди, а s во сантиметри).

2. Две точки се движат по оската Ox по законите:

$$x=6t+50 \quad \text{и} \quad x=t^2+t.$$

Со која брзина се оддалечуваат меѓусебно овие точки во моментот на средбата? (Притоа, x е зададен во сантиметри, а t - во секунди.)

3.* Тело се движи по права линија под дејство на променлива сила, насочена по истата права. Работата, потребна за преместување на телото од координатниот почеток во точката M со координата x е еднаква со $A(x)$. Како е сврзана функцијата $A(x)$ со силата F што дејствува на телото во точката M?

Во следните задачи се смета дека движењето е праволиниско, по законот $x=x(t)$, при што правата по која се одвива движењето е избрана за x - оска.

4. Најди ги брзината и забрзувањето за $t=2$, ако:

а) $x=3t-4$; б) $x=t^2-t+1$; в) $x=12t-t^3$.

5. Ако $x=5+4t-t^2$, да се определи t_0 за кое $v=0$. Потоа, да се пресмета поминатиот пат во времето од $t=0$ до $t=2t_0$.

6. Ако $x=t^3-6t^2+16t$, да се одреди моментот кога брзината е $v=4$. Колку е забрзувањето во тој момент?

7. Две честици се движат по законите:

$$x_1=t^3-6t^2+19, \qquad x_2=9t^2-\frac{3}{2}t^3+5.$$

Најди ги нивните брзини и положби кога тие имаат исто забрзување.

1.4. ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Разни својства на функциите сврзани со проблемот за егзистенција на извод ќе бидат разгледани на повеќе места во оваа глава, а овде ќе се задржиме само на едно својство, наречено *диференцијабилност*, што е директно сврзано со поимот извод.

Да претпоставиме дека функцијата $y=f(x)$ е дефинирана во интервалот (a,b) и има извод во точката $x_0\in(a,b)$. Тогаш за секое Δx, такво што $x_0+\Delta x\in(a,b)$ и $\Delta x\neq 0$, е дефинирана разликата:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'(x_0)=\alpha \tag{1}$$

што е функција од Δx, т.е. $\alpha=\alpha(\Delta x)$. Со цел да постои и $\alpha(0)$, ќе ставиме $\alpha(0)=0$. Имајќи предвид дека:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x_0)$$

од (1) добиваме дека:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0 \tag{2}$$

Од (1) го добиваме равенството:

$$\Delta y=y'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x, \tag{3}$$

познато како **формула за конечно нараснување**. (Да воочиме дека таа формула ќе биде точна и за $\Delta x = 0$, независно од тоа како ќе биде дефинирано $\alpha(0) = \alpha_0$.)

Ако во (3) ставиме $y'(x_0) = A$, тогаш ќе добиеме:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{4}$$

каде што A е константа.

Во досегашната дискусија претпоставувавме дека постои изводот $y'(x_0)$.

Да претпоставиме сега дека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана во интервалот (a,b) и $x_0 \in (a,b)$. Ако, покрај тоа постојат:

1) функција $\alpha = \alpha(\Delta x)$ со својствата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$ и $\alpha(0) = 0$

2) константа A,

такви што за нараснувањето на $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ важи равенството:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{4}$$

тогаш велиме дека $f(x)$ е **диференцијабилна во точката** x_0.

На пример, функцијата $y = x^3$ е диференцијабилна во точката $x_0 = 2$, зашто:

$$\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 = 12\Delta x + (6\Delta x + \Delta x^2)\Delta x;$$

$A = 12$, $\alpha = 6\Delta x + \Delta x^2$, при што $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$ и $\alpha(0) = 0$.

Нека $y = f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0. Тогаш, од (4), добиваме дека:

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - A\right),$$

т.е. дека:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Со спроведената дискусија ја докажавме следнава:

Теорема 1. *Функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x_0 ако и само ако таа е диференцијабилна во x_0.* □

(Поради ова својство, наместо "$y=f(x)$ има извод во x_0", ќе велиме и: "$y=f(x)$ е диференцијабилна во x_0". Посталката, пак, за наоѓање извод на една функција ќе го викаме **диференцирање** на таа функција.)

Како последица од **Т.1.**, ја добиваме и следнава:

Теорема 2. *Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0, тогаш таа функција е непрекината во x_0.*

Доказ. Користејќи го равенството (3) (или (4)), како и фактот дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$, добиваме дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, а од тоа, според теоремата **Т. 3.** од **I. 5. 9.** следува заклучокот дека $f(x)$ е непрекината во x_0. □

Од непрекинатоста на една функција не следува и диференцијабилноста што се гледа, на пример, од функцијата $y=|x|$; таа е непрекината во секоја точка x, но како што видовме во вежбата 15 од разделот **1. 1.**, нема извод во $x=0$.

Формулата за конечно нараснување нè доведува и до важниот поим за *диференцијал на функцијата.*

Нека функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0. Тогаш производот $y'(x_0)\Delta x$ постои и се вика **диференцијал** на $y=f(x)$ во x_0 и се означува со $dy(x_0)$ или, кратко, со dy. Значи,

$$dy=y'(x_0)\Delta x \tag{5}$$

односно $dy=y'\Delta x$ кога се работи за произволна точка.

Пример 1. *Да го запишеме диференцијалот на функцијата:*

$$y=x^2-x,$$

а) *во точката* $x=2$, б) *во произволна точка* x.

Имаме: $y'=2x-1$, $y'(2)=3$, па

а) $dy(2)=3\Delta x$, б) $dy=d(x^2-x)=(x^2-x)'\cdot\Delta x=(2x-1)\cdot\Delta x$.

За диференцијалот на функцијата $y=x$ имаме:

$$dy=dx=(x)'\cdot\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x, \text{ т.е. } dx=\Delta x.$$

Според тоа, формулата (5) може да се запише во обликот:

$$dx = y'(x_0)dx, \text{ односно } dy = y' \cdot dx. \tag{6}$$

Од формулата (6), пак, произлегува дека $y' = \frac{dy}{dx}$, па $\frac{dy}{dx}$ е уште една ознака за извод.[1]

Од дефиницијата за диференцијал и формулата за конечно нараснување следува дека:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x,$$

при што $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} dy = 0$. Покрај тоа, ако $y'(x_0) \neq 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y'(x_0)\Delta x} = \frac{1}{y'(x_0)} y'(x_0) = 1,$$

па според тоа, точна е следнава :

Теорема 3. *Ако $y = y(x)$ е диференцијабилна функција во x_0, тогаш нараснувањето Δy и диференцијалот dy во точката x_0 се еквивалентни бескрајно мали величини кога $\Delta x \to 0$.*

Поради ова својство се вели дека dy е **главна вредност** на Δy, бидејќи, за доволно мало $|\Delta x|$, можеме да сметаме дека $\Delta y \approx dy$. Тоа може да се искористи и за приближно пресметување на вредноста на некои функции. Имено, од

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy,$$

добиваме:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{7}$$

па ако $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ се "лесно пресметливи", и ако $|\Delta x|$ е "мало", тогаш $f(x_0 + \Delta x)$ се пресметува по формулата (7).

Ќе разгледаме два примера.

Пример 2. *Да го најдеме диференцијалот на функцијата:*

$$f(x) = x^3$$

во точката $x_0 = 2$ и да го пресметаме (приближно) изразот $(2,1)^3$.

---

[1] Ознаката $y' = f'(x)$ за извод на дадена функција $y = f(x)$ потекнува од Лагранж, а $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$ од Лајбниц. Ознаката $\frac{dy}{dx}$ се чита "де ипсилон по де икс".

Имаме: $df(x)=3x^2\cdot dx,\ df(2)=12\cdot dx.$

Според формулата (7), за $f(x)=x^3$ при $x_0=2$ и $\Delta x=0{,}1$ добиваме:

$$f(2{,}1)\approx 2^3+12\cdot 0{,}1=8+1{,}2=9{,}2,\ \text{т.е. } 2{,}1^3\approx 9{,}2.$$

Пример 3. *Користејќи го поимот диференцијал, приближно да го пресметаме* $\sqrt[5]{33}$.

За да ја решиме оваа задача, треба да увидиме прво дека $\sqrt[5]{32}$ го знаеме точно, а 33 е "блиску" до 32. Значи, функцијата за која станува збор е:

$$f(x)=\sqrt[5]{x}=x^{1/5},$$

а треба да пресметаме $f(33)$.

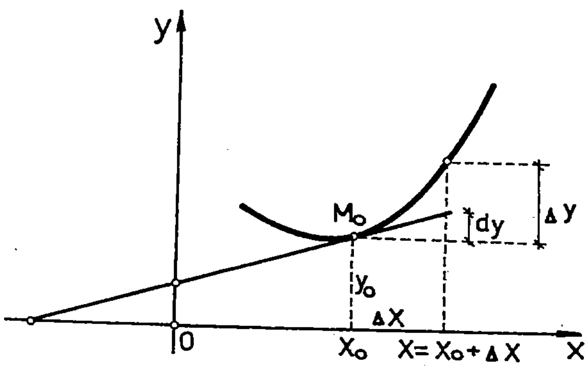
Да ставиме $x_0=32$, $\Delta x=1$ и да ја примениме формулата (7):

$$f(33)\approx f(32)+df(32).$$

Имаме: $f(32)=\sqrt[5]{32}=2,\ df(32)=f'(32)\cdot\Delta x;$

$$f'(x)=\frac{1}{5}\cdot x^{-4/5},\ f'(32)=\frac{1}{5}\cdot 2^{-4}=\frac{1}{80};\ df(32)=\frac{1}{80}\cdot 1;$$

$$\sqrt[5]{33}=f(33)\approx 2+\frac{1}{80}\approx 2{,}0125.$$



Црт. 1.

Да видиме каква геометриска интерпретација може да се даде на поимот диференцијал. Нека $y=f(x)$ е диференцијабилна функција во точката

x_0 и $f'(x_0)\neq 0$. Да повлечеме тангента на графикот од функцијата $y=f(x)$ во точката $M_0(x_0,f(x_0))$; нејзината равенка гласи:

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Ако ставиме $x-x_0=\Delta x$, ќе добиеме дека:

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x=y-y_0, \tag{8}$$

т.е. дека диференцијалот на функцијата во точката x_0 го претставува нарасну-вањето на ординатата до тангентата повлечена на графикот од функцијата во точката со апциса x_0 (црт.1.).

ВЕЖБИ

1. Покажи, по дефиниција, дека е диференцијабилна функцијата $f(x)=x^3+3x^2$:

   а) во точката $x=2$,

   б) во произволна точка x_0.

   Запиши ја посебно за б) функцијата $\alpha=\alpha(\Delta x)$ од формулата (4).

2. Провери дали е непрекината функцијата:

   а) $y=x^2-|2x|$ во $x=0$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$ во $x=0$.

   Дали таа е диференцијабилна во точката $x=0$?

3. Нека $F(x)=\begin{cases} x^2, & ako\ x\le x_0 \\ ax+b, & ako\ x>x_0. \end{cases}$

   Како треба да се изберат коефициентите a и b, за функцијата $F(x)$ да биде непрекината и диференцијабилна во точката $x=x_0$?

4. Да се дадат примери на функции $f(x)$ и $g(x)$ што не се диференцијабилни во една точка x_0, но во таа точка да е диференцијабилна функцијата:

   а) $f(x)+g(x)$; б) $f(x)\cdot g(x)$; в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

   Упат. а) $f(x)=|x|$, $g(x)=-|x|$; б) $f(x)=g(x)=|x|$; в) $f(x)=g(x)=|x|+2$.

Во задачите **5 - 8** најди го dy како функција од x и dx.

5. $y=3x-x^2$.

6. $y=x^3-x^2$.

7. $y=3^x$.

8. $y=(x+1)\cdot(x-1)$.

Во задачите **9 - 10** најди ги df и Δf и пресметај ги за дадените вредности.

9. $f(x)=x^2+x-1$, $x=1$, $\Delta x=0{,}01$.

10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1$, $\Delta x=0{,}1$.

Во задачите **11 - 12**, пресметај го приближно дадениот броен израз користејќи ја формулата (7).

11. а) $(3{,}05)^2$; б) $(2{,}08)^2$; в) $(1{,}98)^3$.

12. а) $\sqrt{25{,}1}$; б) $\sqrt{65}$; в) $\sqrt{48{,}99}$.

13.* Најди приближување, при мали $|\Delta x|$, за:

а) $(1+\Delta x)^2$; б) $(1+\Delta x)^3$; в) $\sqrt{100+\Delta x}$.

1.5. ЛЕВИ, ДЕСНИ И БЕСКРАЈНИ ИЗВОДИ

Обопштувањата на поимот лимес на функција (лев, десен, бесконечен) се користат и за воведување посебни видови изводи. Да почнеме со т.н. *еднострани изводи*.

Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана за $x=x_0$. Ако постои лимесот:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1}$$

и ако тој е конечен, тогаш него го викаме **лев извод** на функцијата $f(x)$ во точката x_0 и го означуваме со $f'(x_0^-)$. Аналогно, ако постои и е конечен лимесот:

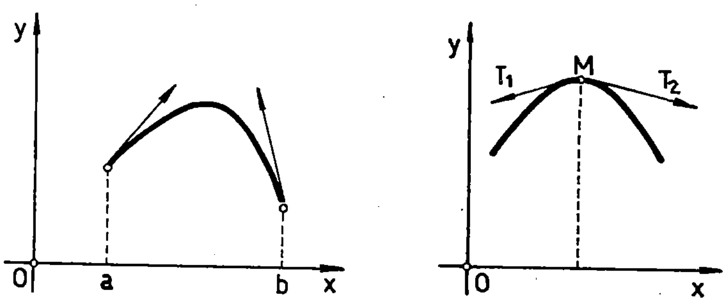
$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

тогаш него го викаме **десен извод** на $f(x)$ во точката x_0 и го означуваме со $f'(x_0^+)$. Левиот и десниот извод се викаат, со заедничко име, **еднострани изводи**.

Потребата од еднострани изводи е особено истакната кога x_0 е некој од краевите на сегмент $[a,b]$, во кој функцијата $f(x)$ е дефинирана и има десен извод во a, односно лев извод во b. Во тој случај земаме, по дефиниција, дека $f(x)$ има извод во точката a, односно во b, при што:

$$f'(a)=f'(a^+), \qquad f'(b)=f'(b^-).$$

Геометриски тоа значи дека графикот на $f(x)$ има **еднострана тангента** во a, односно во b (црт. 1).



Црт. 1. Црт. 2.

Може да се случи и за внатрешна точка x_0 од разгледуваниот интервал, $f(x)$ да има еднострани изводи, што не се еднакви меѓу себе. Во тој случај, графикот на $f(x)$, во точката $M(x_0,f(x_0))$ ќе има само "еднострани" тангенти (црт. 2.).

Пример 1. *Да ја разгледаме функцијата:*

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\le 1\\ x^2-1, & x\ge 1\end{cases}$$

во точката $x_0=1$. *Имаме:*

- за $\Delta x<0$: $\Delta f(1)=f(1+\Delta x)-f(1)=1-(1+\Delta x)^2-(1-1)=-2\Delta x-\Delta x^2$,

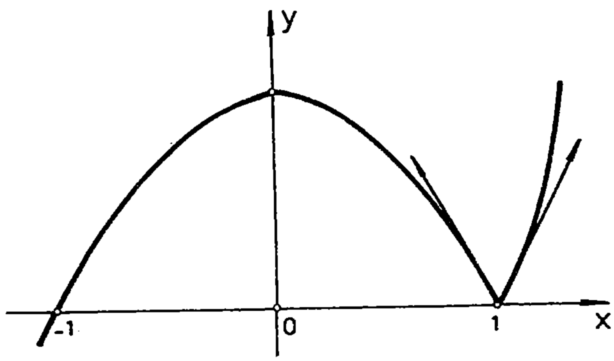
- за $\Delta x>0$: $\Delta f(1)=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1-(1-1)=2\Delta x-\Delta x^2$;

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=-2,\qquad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=2.$$

Значи, едностраните изводи на дадената функција во точката $x_0=1$ се:

$$f'(1^-)=-2,\qquad f'(1^+)=2.$$

На црт. 3. се прикажани левата и десната тангента на графикот $f(x)$ во точката $x_0=1$.



Црт. 3.

Забелешка 1. Во горниот пример, едностраните изводи, т.е. лимесите (1) и (2), не се еднакви меѓу себе. Според тоа, функцијата *нема извод* во точката x_0. Меѓутоа, *ако* $f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$ *и* $f(x)$ *е нейрекинаша во шочкаша* x_0, *шоїаш функцијаша има извоg во шаа шочка и*

$$f'(x_0^-)=f'(x_0)=f'(x_0^+) \tag{3}$$

Ако за функцијата $f(x)$, дефинирана во точката x_0, имаме:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty, \tag{4}$$

тогаш велиме дека $f(x)$ има **десен бескраен извод** во точката x_0 и пишуваме $f'(x_0^+)=\infty$, или попрецизно:

$$f'(x_0^+)=+\infty \quad \text{односно} \quad f'(x_0^+)=-\infty,$$

што зависи од тоа дали лимесот во (4) е $+\infty$ или е $-\infty$.

Аналогно се дефинира поимот **лев бескраен извод** и се означува: $f'(x_0^-)=+\infty$ или $f'(x_0^-)=-\infty$.

Поимите лев и десен бескраен извод, со заедничко име, се викаат **еднострани бескрајни изводи.**

Пример 2. а) *За функцијата* $f(x)=\sqrt{x}$ *(црт. 4. а)) во точката* $x=0$ *имаме:*

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty,$$

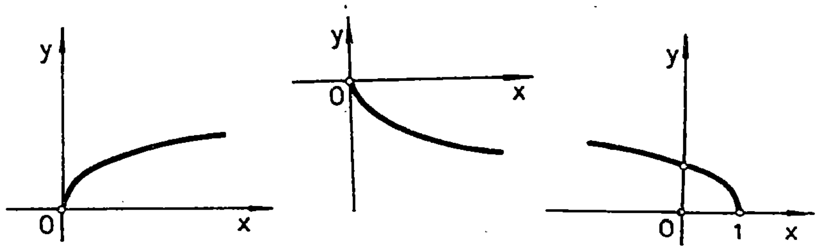
што значи дека таа има десен бескраен извод во точката $x=0$ *т.е.* $f'(0^+)=+\infty$. *Оваа функција нема лев бескраен извод во точката* $x=0$ *затоа што не постои лимесот на количникот* $\Delta f(0)/\Delta x$ *кога* $\Delta x\to 0^-$.

б) Функцијата $g(x)=-\sqrt{x}$ *(црт. 4. б)), исто така, има десен бескраен извод во точката* $x=0$ *при што* $g'(0^+)=-\infty$, *а нема лев бескраен извод.*

в) За функцијата $h(x)=\sqrt{1-x}$ *(црт. 4. в)) во точката* $x=1$, *имаме:*

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta h(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt{-\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-\Delta x}}=+\infty.$$

што значи $h(x)$ *има лев бескраен извод во точката* $x=1$, *т.е.* $f(1^-)=+\infty$. *Бидејќи* $h(x)$ *не е дефинирана за* $x>1$, *таа нема десен (бескраен) извод.*



Црт. 4. а) Црт. 4. б) Црт. 4. в)

Нека, сега, за функцијата $f(x)$ во точката x_0 имаме:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \infty \tag{5}$$

Во тој случај велиме дека функцијата $f(x)$ има **бескраен извод** во точката x_0.

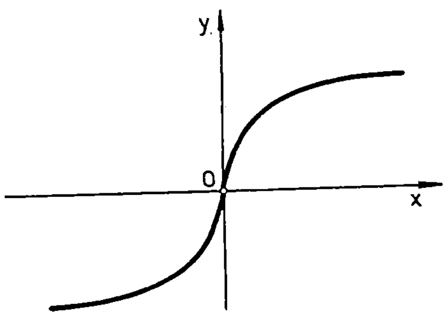
Пример 3. *Функцијата* $f(x)=\sqrt[3]{x}$ *(црт. 5.) има бескраен извод во точката* $x=0$*;*

$$\Delta f(0) = f(0+\Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{\Delta x},$$

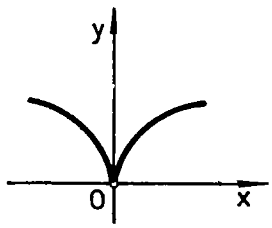
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$$

Значи, $f'(0) = +\infty$.

Да забележиме дека оваа функција има лев и десен бескраен извод во точката $x=0$, при што $f'(0^-) = f'(0^+) = +\infty$.



Црт. 5.



Црт. 6.

Пример 4. *За* $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ *(црт. 6.) во точката* $x=0$ *имаме:*

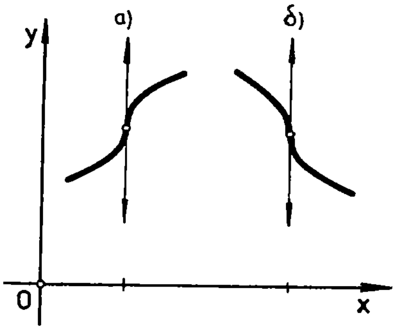
$$\Delta f(0) = \sqrt[3]{(0+\Delta x)^2} - \sqrt[3]{0^2} = \sqrt[3]{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \infty, \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = -\infty, \quad \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = +\infty,$$

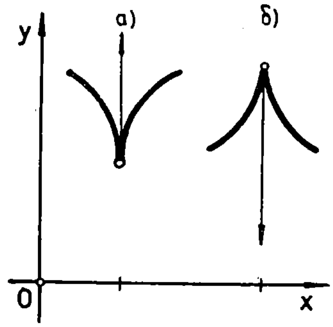
па $f'(0)=\infty$, $f'(0^-)=-\infty$, $f'(0^+)=+\infty$. *Значи,* $f(x)$ *има бескраен извод во точката* $x=0$, *иако едностраните бескрајни изводи се разликуваат по знак. (Спореди со забелешката 1.)*

Забелешка 2. За натаму, кога ќе кажеме дека една функција $y=f(x)$ **има извод** во даден сегмент $[a,b]$, тогаш тоа ќе значи дека $f(x)$ **има конечен извод** во секоја внатрешна точка $x_0 \in (a,b)$, а, исто така, дека постојат: десниот извод $f'(a^+)$ и левиот извод $f'(b^-)$. Притоа, може да се случи, на пример, $f(x)$ да е дефинирана во некој интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а $f'(a)$ да не постои.

Геометриското толкување на изводот како аглов коефициент на тангентата се проширува и во случајот на бескрајни изводи; но, тука тангентата (кога постои) е паралелна со y - оската (црт. 7. и црт. 8.).

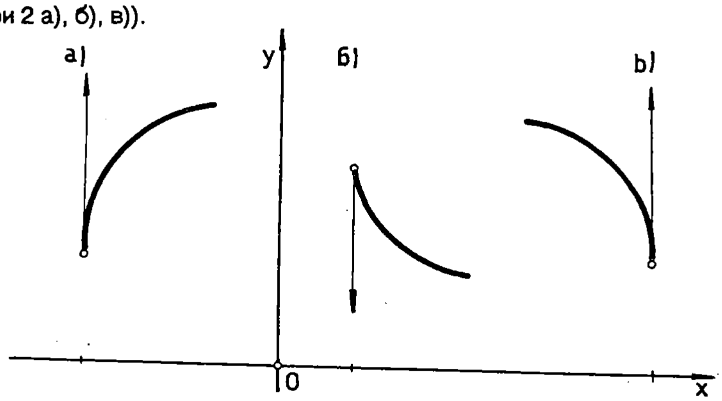


Црт. 7.



Црт. 8.

И во случаите на едностран бескраен извод може да постои тангента, да ја наречеме **еднострана тангента**, што е паралелна со y - оската (црт. 9.; в. и примери 2 а), б), в)).



Црт. 9.

Особеноста на случајот кога едностраните бескрајни изводи постојат, а се разликуваат по знак (како во примерот 4) е појавувањето *шилец* (т.е. *повратна точка*) на графикот, насочен нагоре или надолу (црт. 8.).

ВЕЖБИ

Да се најдат едностраните изводи $f'(x_0^-)$ и $f'(x_0^+)$ на функцијата $f(x)$ во точката x_0 (**1 - 6**).

1. $f(x)=|3x-6|,\ x_0=2.$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 1 \\ (x-2)^2, & x\leq 1 \end{cases}\quad x_0=1$

3. $f(x)=|2x-x^2|,\ x_0=2.$

4. $f(x)=\ln|x|,\ x_0=1.$

5. $f(x)=|\sin x|,\ x_0=\pi.$

6. $f(x)=x^2-2|x|+1,\ x_0=0.$

7. Дадена е функцијата $f(x)=x|x|$. Покажи дека:

а) $f'(0^-)=f'(0^+)=f'(0)$,

б) $f'(x)$ постои за секој x и $f'(x)=2|x|$.

8. Што значи геометриски равенството $y'(x_0)=\infty$?

Да се пресмета $f'(x)$, ако (**9 - 12**):

9. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=0.$

10. $f(x)=\sqrt{2-x},\ x_0=2.$

11. $f(x)=\sqrt[3]{x-1},\ x_0=1.$

12. $f(x)=\sqrt[3]{x^2},\ x_0=0.$

Во задачите **13** и **14**, да се најде равенката на левата и равенката на десната тангента на графикот од функцијата $f(x)$ во точката x_0 (од задача **3.** односно задача **6.**) Направи скица.

13. $f(x)=|2x-x^2|,\ x_0=2.$

14. $f(x)=x^2-2|x|+1,\ x_0=0.$

II. 2. ПРАВИЛА ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ ИЗВОДИ

2.1. ИЗВОД ОД ЗБИР, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

Во овој дел ќе претпоставуваме дека $u(x), v(x)$ и $w(x)$ се диференцијабилни функции во еден интервал, при што $w(x) \neq 0$ за секој x од тој интервал.

Цел ни е да покажеме дека се диференцијабилни и функциите $c \cdot u$, $u+v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{w}$ и нив да ги изразиме со помош на изводите на u, v, w, при што c е константа.

Прво, од дефиницијата на поимот нараснување на функција, ги добиваме следниве равенства:

$$\Delta(c \cdot u) = c \cdot (u + \Delta u) - c \cdot u = c \cdot \Delta u,$$

$$\Delta(u+v) = [(u+\Delta u) + (v+\Delta v)] - (u+v) = \Delta u + \Delta v,$$

$$\Delta(u \cdot v) = (u+\Delta u) \cdot (v+\Delta v) - u \cdot v = (\Delta u) \cdot v + u \cdot (\Delta v) + (\Delta u) \cdot (\Delta v),$$

$$\Delta\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w+\Delta w} - \frac{1}{w} = -\frac{\Delta w}{(w+\Delta w) \cdot w}.$$

Имајќи ги предвид тие равенства, дефиницијата на поимот извод, како и фактот дека $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta w = 0$, добиваме:

$$(c \cdot u)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(c \cdot u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot (\Delta u)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'; \tag{1}$$

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u + \Delta v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'; \tag{2}$$

$$(u-v)' = [u + (-1) \cdot v]' = u' + [(-1) \cdot v]' = u' + (-1) \cdot v' = u' - v'; \tag{3}$$

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u \cdot \Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v\right) = v \cdot u' + u \cdot v'; \tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{w}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{1}{w}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta w}{\Delta x\cdot(w+\Delta w)\cdot w} =$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}\cdot\frac{1}{w\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(w+\Delta w)} = -\frac{w'}{w^2}; \tag{5}$$

$$\left(\frac{u}{w}\right)' = \left(u\cdot\frac{1}{w}\right)' = u'\cdot\frac{1}{w}+u\cdot\left(\frac{1}{w}\right)' = \frac{u'}{w}-\frac{u\cdot w'}{w^2} = \frac{u'\cdot w-u\cdot w'}{w^2}. \tag{6}$$

Овде се раководевме од соодветните правила за граници, како и од фактот дека u, v, w не зависат од Δx, т.е. дека тие можат да се третираат како константи при определување на соодветните граници. Покрај тоа, во (4) го користевме и равенството:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0,$$

а тоа е точно поради фактот што $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$ и фактот што $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ е конечен.

Значи, при условите наведени во почетокот на овој параграф за функциите u, v и w докажуваме дека се точни следниве формули:

1.° $(c\cdot u)' = c\cdot u'$, $c =$ константа.

2.° $(u+v)' = u'+v'$.

3.° $(u-v)' = u'-v'$.

4.° $(u\cdot v)' = u'\cdot v+u\cdot v'$.

5.° $\left(\frac{1}{w}\right)' = -\frac{w'}{w^2}$.

6.° $\left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u'\cdot w-uw'}{w^2}$; $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$ за $c =$ константа.

Овие формули треба добро да се запаметат!

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. а) $y=2x^3$; б) $y=\frac{x^6}{3}$.

а) $y'=(2x^3)'=2\cdot(x^3)'=2\cdot 3x^2=6x^2$.

б) $y'=\left(\frac{x^6}{3}\right)'=\frac{(x^6)'}{3}=\frac{6x^5}{3}=2x^5$.

Пример 2. $y=\sin x+3\cdot e^x-\ln x$,

$$y'=(\sin x+3\cdot e^x)'-(\ln x)'=(\sin x)'+(3\cdot e^x)'-(\ln x)'=$$

$$=\cos x+3\cdot e^x-\frac{1}{x}.$$

Пример 3. $y=x^2\cdot\cos x$,

$$y'=(x^2\cdot\cos x)'=(x^2)'\cdot\cos x+x^2\cdot(\cos x)'=$$

$$=2\cdot x\cdot\cos x-x^2\sin x.$$

Користејќи ги правилата **1.°** - **6.°** ќе ги најдеме изводите на функциите tgx, $ctgx$ и хиперболичните функции.

1) $$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

(За натаму, некои од формулите често ќе ги користиме "напамет".)

2) $$(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$3)\ (shx)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left[e^x-\left(\frac{1}{e^x}\right)\right]'=\frac{1}{2}\left[e^x-\frac{-e^x}{e^{2x}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(e^x+e^{-x})=chx.$$

$$4)\ (chx)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left[e^x+\left(\frac{1}{e^x}\right)\right]'=\frac{1}{2}\left[e^x-\frac{e^x}{e^{2x}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x})=shx.$$

$$5)\ (thx)'=\left(\frac{shx}{chx}\right)'=\frac{chx\cdot chx-shx\cdot shx}{ch^2x}=\frac{ch^2x-sh^2x}{ch^2x}=$$

$$=\frac{1}{ch^2x}.$$

$$6)\ (cthx)'=\left(\frac{chx}{shx}\right)'=\frac{shx\cdot shx-chx\cdot chx}{sh^2x}=-\frac{(ch^2x-sh^2x)}{sh^2x}=$$

$$=-\frac{1}{sh^2x}.$$

Значи:

1) $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 2) $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

3) $(shx)'=chx$; 4) $(chx)'=shx$;

5) $(thx)'=\dfrac{1}{ch^2x}$; 6) $(cthx)'=\dfrac{1}{sh^2x}$.

И овие формули, покрај оние од основните примери во разделот 1. 1. треба добро да се запаметат.

Имајќи ја предвид дефиницијата на диференцијал, од формулите 1.° - 6.° добиваме:

1.' $d(c\cdot u)=c\cdot du$, c е константа.

2.' $d(u \pm v) = du \pm dv$.

3.' $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$.

4.' $d\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{dw}{w^2}$.

5.' $d\left(\frac{u}{w}\right) = \frac{w \cdot du - u \cdot dw}{w^2}$.

ВЕЖБИ

Да се најде изводот на функцијата (1 - 8):

1. $y = x^4 - 3 \cdot x^2 + 17$.
2. $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.
3. $y = x^3 \cdot (x^2 - 4 \cdot \sqrt{x})$.
4. $y = x \cdot \ln x - x$.
5. $y = \frac{1}{\cos x}$.
6. $y = \arcsin x + \arccos x$.
7. $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
8. $y = x \cdot \ln x \cdot chx$.

Да се најде диференцијалот dy (9 - 12):

9. $y = x^2 + x \cdot 5^x$.
10. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
11. $y = \sin x - x \cdot \cos x$.
12. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Да се пресмета приближно дадениот броен израз, со помош на диференцијал (13 - 15).

13. $(0,98)^{-1}$.
14. $(17)^{-1/4}$
15. $\sqrt{82} + \sqrt[4]{82}$.

2. 2. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Сега ќе се запознаеме со една многу важна формула - формулата за извод од сложена функција, којашто се вика и **верижно правило**.

Нека $y=y(u)$ и $u=u(x)$, т.е. y е функција од u, која, од своја страна, е функција од x. Со обична замена добиваме дека $y=y(u(x))$, па можеме да сметаме дека y е функција од x. Ако претпоставиме дека постои $u'(x_0)$ и $y'(u_0)$, каде што $u_0=u(x_0)$, природно е да се запрашаме дали постои и изводот y'_x на y како функција од x во точката x_0. Следната теорема дава потврден одговор на ова прашање и истовремено го покажува начинот на наоѓање на y'_x.

Теорема 1. *(за извод од сложена функција) Ако $u(x)$ е диференцијабилна функција во точката $x=x_0$, а $y(u)$ диференцијабилна функција во $u_0=u(x_0)$, тогаш и $y(u(x))$ е диференцијабилна функција во $x=x_0$ при што е точно равенството:*

$$y'(x_0)=y'(u_0)\cdot u'(x_0),\ \text{т.е.}\ y'_x=y'_u u'_x \tag{1}$$

(y'_u е извод на y по u, а u'_x е извод на u по x.)

Доказ. Според формулата за конечно нараснување имаме:

$$\Delta y=y'_u\Delta u+\beta\cdot\Delta u,\ \text{при што}\ \lim_{\Delta u\to 0}\beta=0.$$

Тогаш

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\beta\Delta u}{\Delta x},$$

каде што $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, бидејќи по претпоставка u е диференцијабилна функција.
Сега добиваме дека:

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\beta\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x+0\cdot u'_x=y'_u\cdot u'_x,$$

со што теоремата е докажана.

Со Лајбницовата ознака $\frac{dy}{dx}$ (наместо y'; в. **1. 4.**), правилото (1) може да се запише вака:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{1'}$$

Верижното правило, т.е. теоремата 1. има голема примена при наоѓање изводи од различни функции. Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. $y=(1+x^2)^5$.

Ако ставиме $u=1+x^2$, ќе добиеме дека $y=u^5$, а поради $y'(u)=5u^4$ и $u'(x)=2x$, имаме $y'=10\cdot x\cdot(1+x^2)^4$. Овде и натаму изводот на y по x го означуваме просто y'.

Пример 2. $y=\ln(tgx)$.

Ако ставиме $u=tgx$ добивме $y=\ln u$. Тогаш:

$$u'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad y'(u)=\frac{u'}{u}\quad\text{и}\quad y'=\frac{1}{tgx\cdot\cos^2 x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

При извесна опитност, пожелно е да се избегнува воведување ознака за нова функција $u=u(x)$. Така, во горните два примера би можеле да работиме на следниов начин:

$$1)\ \left[(1+x^2)^5\right]'=5\cdot(1+x^2)^4\cdot(1+x^2)'=5\cdot(1+x^2)^4\cdot 2x=10x\cdot(1+x^2)^4;$$

$$2)\ \left[\ln(tgx)\right]'=\frac{1}{tgx}\cdot(tgx)'=\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}.$$

При уште поголема опитност, $(1+x^2)'$, односно $(tgx)'$ или воопшто u', би можел да се пресмета "напамет". Кога би работеле на тој начин во горните примери би имале:

$$1')\ \left[(1+x^2)^5\right]'=5\cdot(1+x^2)^4\cdot 2x=10x\cdot(1+x^2)^4;$$

$$2')\ \left[\ln(tgx)\right]'=\frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}.$$

Еве уште еден пример.

Пример 3. $y=\sqrt{3-x^2}$

$$y'=\left(\sqrt{3-x^2}\right)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}.$$

Понекогаш ќе биде потребно повеќе пати едноподруго да се примени формулата за извод на сложена функција. Имено, ако $y=y(u)$, $u=u(v)$,

$v=v(x)$, тогаш за функцијата $u=u(v(x))$ ќе имаме $u'_x=u'_v\cdot v'_x$, па за сложената функција:

$$y=y(u(v(x)))$$

верижното правило (1) станува:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x. \tag{2}$$

Пример 4. $y=\sin(e^{tgx})$

Ставајќи $u=e^{tgx}$, $v=tgx$, добиваме $y=\sin u$, $u=e^v$.

Тогаш:

$$u'_x=u'_v\cdot v'_x=e^v\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x},$$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}=\cos(e^{tgx})\cdot\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}.$$

И во овој случај е пожелно да не се воведуваат нови ознаки. Работејќи на тој начин, во последниот пример би имале:

$$4).\ y'=\left[\sin(e^{tgx})\right]'=[\cos(e^{tgx})]\cdot(e^{tgx})'=$$

$$=\cos(e^{tgx})\cdot e^{tgx}\cdot(tgx)'=\cos(e^{tgx})\cdot e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{e^{tgx}\cdot\cos(e^{tgx})}{\cos^2 x},$$

а ако соодветните изводи ги пресметуваме "напамет" би имале:

$$4').\ y'=\left[\sin(e^{tgx})\right]'=\cos(e^{tgx})\cdot e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 5. $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Формулата за извод од сложена функција е мошне корисна, како што ќе видиме и подолу.

Да ја искористиме сега за да го најдеме изводот на функцијата x^s, каде што s е реален број. Во претходниот раздел видовме дека, кога s е природен број, $(x^s)' = s\cdot x^{s-1}$. Овде ќе покажеме дека исто важи и кога s е произволен реален број.

Ако $x>0$, може да ставиме $x^s = e^{s\ln x}$, па

$$\left(x^s\right)' = \left(e^{s\ln x}\right)' = e^{s\ln x}\cdot(s\cdot\ln x)' = x^s\cdot\frac{s}{x} = s\cdot x^{s-1}.$$

Ако, пак, x^s е дефинирана и за $x<0$, тогаш s мора да биде рационален број; притоа $x^s = [(-1)\cdot(-x)]^s = (-1)^s\cdot(-x)^s$, како и $(-x)^s = e^{s\ln(-x)}$, тогаш:

$$\left(x^s\right)' = \left[(-1)^s\cdot(-x)^s\right]' = (-1)^s\cdot\left[(-x)^s\right]' = (-1)^s\cdot\left(e^{s\ln(-x)}\right)' =$$

$$= (-1)^s\cdot\left(e^{s\ln(-x)}\right)\cdot\left[s\ln(-x)\right]' = (-1)^s\cdot(-x)^s\cdot\frac{s}{-x}\cdot(-1) = s\cdot x^{s-1}.$$

Според тоа:

$$\left(x^s\right)' = s\cdot x^{s-1}. \tag{3}$$

Пример 6. $y = \left(1+x^2\right)^{\sqrt{2}}$.

$$y' = \sqrt{2}\cdot\left(1+x^2\right)^{\sqrt{2}-1}\cdot 2x = 2\sqrt{2}\cdot x\left(1+x^2\right)^{\sqrt{2}-1}$$

Да го пресметаме изводот на функцијата:

$$y = u^v,$$

каде што $u=u(x)$, $v=v(x)$ се диференцијабилни функции и $u>0$.
Имаме:

$$y = e^{v\ln u},$$

па по формулата за извод од сложена функција, ќе добиеме:

$$y' = \left(e^{v\ln u}\right)' = e^{v\ln u}\cdot(v\cdot\ln u)' = u^v\cdot\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right),$$

$$y' = u^{v-1}\cdot(u'v + uv'\ln u). \tag{4}$$

Пример 7. $y = x^x$ $(x>0)$; $y' = ?$

$$y'=\left(x^x\right)'=\left(e^{x\cdot\ln x}\right)'=e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=x^x\cdot(\ln x+1).$$

Изводот на функцијата $y=x^x$ може да го добиеме и така што прво ќе ја логаритмираме:

$$\ln y=x\cdot\ln x.$$

Ќе диференцираме одлево и оддесно (имајќи предвид, дека y е функција од x):

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x};\ y'=y(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1).$$

На ист начин може да го добиеме изводот на функцијата $y=u^v$, т.е. формулата (4).

Да напомниме дека функцијата x^x е дефинирана и за некои негативни вредности на x, но дека ни во една таква точка нема извод.

Општо, ако изразот y што треба да се диференцира се упростува по логаритмирање, тогаш е згодно прво да се бара $(\ln y)'$ наместо y'. Формулата за $(\ln y)'$ произлегува од правилото за извод на сложена функција:

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y},\quad \text{па } y'=y\cdot(\ln y)'. \tag{5}$$

(Поради тоа, таквиот начин на добивање на изводот се вика **логаритамско диференцирање**.)

Да забележиме дека методот за барање изводи со логатмирање претпоставува постоење на бараниот извод.

Пример 8. *Да го најдеме изводот на функцијата:*

$$y=\sqrt[5]{\frac{e^{\cos x}(x^2-1)^3}{(x^3+2)^4}}.$$

Ги логаритмираме левата и десната страна на равенството:

$$\ln y=\frac{1}{5}\cdot\cos x+\frac{3}{5}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{4}{5}\ln(x^3+2)$$

и, потоа, диференцираме:

$$(\ln y)' = -\frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cdot\frac{2x}{x^2-1} - \frac{4}{5}\cdot\frac{3x^2}{x^3+2},$$

$$y' = y(\ln y)' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{e^{\cos x}(x^2-1)^3}{(x^3+2)^4}}\left(-\sin x + \frac{6x}{x^2-1} - \frac{12x}{x^3+2}\right)^2.$$

Овој дел за извод од сложени функции ќе го завршиме со една забелешка во врска *диференцијал на сложени функции*. Имено, ако $y = y(u(x))$, и ако се исполнети условите за егзистенција на соодветните изводи, тогаш имаме:

$$dy = y'_x dx = y'_u u'_x dx.$$

Но, $u'_x dx = du$, па според тоа:

$$dy = y'_u du.$$

Гледаме дека:

$$y'_x dx = dy = y'_u du, \tag{6}$$

т.е. *формата на диференцијалот е инваријантна* - иста и во случај кога се работи со независно променливата x, како и кога се работи со u којашто е функција од x. Но, во производите $y'_x dx$ и $y'_u du$ постои таа разлика што $dx = \Delta x$ е нараснување на независната променлива x, додека du е диференцијалот на функцијата $u = u(x)$, а во општ случј имаме $du \neq \Delta u$.

ВЕЖБИ

Да се најде изводот на функцијата (**1** ÷ **6**):

1. $y = \ln\sin x$.

2. $y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

3. $y = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

4. $y = \ln(x-\sqrt{x^2+1})$.

5. $y = (\sin x)^{\ln x}$.

6. $y = x\cdot e^{-x^2}$

Со помош на логаритамско диференцирање да се најде y' за (**7** - **10**).

7. $y=e^x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

8. $y=x^{x^3}$

9. $y=\sqrt[x]{x}$. (По договор, $\sqrt[x]{x}=x^{1/x}$.)

10. $y=\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\cdot\sqrt{(x^2+2)^3}}{\sqrt{x-1}}$

11.* Провери дали функцијата $y=x^4(\ln\sqrt{x}+1)^2$ ја задоволува равенката $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

Најди го dy **(12 - 13)**

12. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

13. $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

2. 3. ИЗВОД ОД ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

Порано во (**I. 5. 4.**, Т.1) покажавме дека: ако $f(x)$ расте и е непрекината во сегментот $[a,b]$, тогаш и нејзината инверзна функција расте и е непрекината во сегментот $[f(a),f(b)]$ (и, аналогно, кога $f(x)$ опаѓа). И диференцијабилноста на $f(x)$, при соодветни претпоставки, се пренесува на нејзината инверзна функција.

Сега ќе докажеме теорема што го потврдува тоа и, со чија помош, ќе се олесни наоѓањето на извод од инверзна функција.

Теорема 1 (за извод од инверзна функција). Нека $y=f(x)$ и $x=g(y)$ се заемно инверзни растечки (или опаѓачки) функции, зададени во некои интервали. Ако во точката x постои конечен извод $f'(x)\neq 0$, тогаш во соодветната точка y, функцијата $g(y)$, исто така, има извод (по y), при што:

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{1}$$

Доказ. Од $\Delta x=g(y+\Delta y)-g(y)$ и $\Delta y\neq 0$, поради растењето на $g(y)$, следи дека $\Delta x\neq 0$, па може да се напише:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \tag{2}$$

од каде што, поради $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta x=0$ ($g(y)$ е непрекината функција според Т. 1 од **I. 5. 4.**), добиваме дека:

$$g'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Со тоа докажавме дека изводот на функцијата $x=f(y)$ постои и важи равенството (1).

Ќе ја искористиме оваа теорема за да ги одредиме изводите на циклометарските функции. Притоа ќе ни биде згодна формулата (1) да ја запишеме во обликот:

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}. \tag{3}$$

Пример 1. $y=\arcsin x$; имаме: $x=\sin y$, па $x'=\cos y$, од каде што, за $x\in(-1,1)$,

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Да појасниме зошто $\cos y$ го заменуваме со $\sqrt{1-\sin^2 y}$, а не со $\pm\sqrt{1-\sin^2 y}$. Имено, според дефиницијата на функцијата $y=\arcsin x$, y добива вредности во сегментот $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, а тогаш $\cos y$ не е негативен.

Пример 2. $y=\arccos x$; поради $x=\cos y$ и $x'=-\sin y$ за $x\in(-1,1)$, имаме:

$$y'=\frac{1}{x'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 3. $y = arctgx$; бидејќи $x = tgy$ и $x' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 y = 1 + x^2$, добиваме дека:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 4. $y = arcctgx$; од $x = ctgy$ и $x' = \frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + ctg^2 y) = -(1+x^2)$ добиваме дека:

$$y' = \frac{1}{x'} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 5. Да го најдеме изводот на функцијата $y = arshx$:

$$y = arshx \Leftrightarrow x = shy.$$

Врз основа на формулата (1), добивме:

$$y' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

** Да забележиме дека, поради $arshx = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (в. (3) во I. 3. 5.), овој резултат е добиен во пр. 5 од 2. 2. Изводите на другите инверзни хиперболични функции се определуваат во вежбите 6 - 8. Тие формули не мора да се паметат, зашто се добиваат како изводи на логаритамски функции. (За разлика од нив, пак, формулите за изводите на циклометриските функции мора да се запомнат.) **

Ќе разгледаме уште една примена на формулата за извод од инверзна функција, а имено ќе изведеме формула за изводот $\frac{dy}{dx}$ кога функцијата $y = y(x)$ е зададена во параметарски облик:

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \tag{4}$$

Да претпоставиме дека постојат изводите $x'_t = \frac{dx}{dt}$ и $y'_t = \frac{dy}{dt}$ на функциите $x(t)$ и $y(t)$ по t соодветно и дека $x(t)$ е стриктно монотона во даден интервал. Тогаш:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{x_t'},$$

од што следува дека:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=y_t'\cdot\frac{1}{x_t'}.$$

Ако ја задржиме ознаката y' за изводот на y по x, а "параметарските изводи" x_t' и y_t' ги означиме со $\dot{x}$ и $\dot{y}$ соодветно, тогаш последната формула може да ја запишеме во обликот:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \tag{5}$$

таа се вика **формула за извод на параметарски зададена функција**.

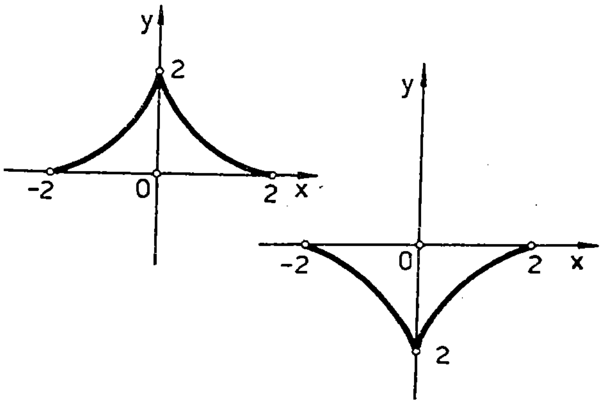
Пример 6. Да го најдеме y', ако:

$$x=2\cos^3 t,\quad y=2\sin^3 t,\quad t\in[0,\pi]. \tag{6}$$

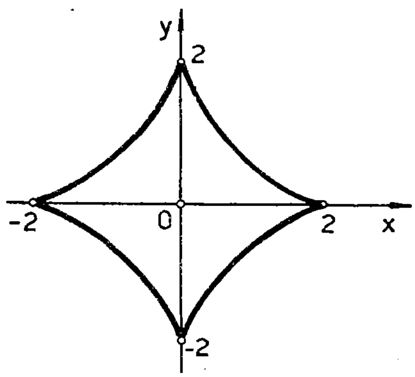
Имаме: $\dot{x}=-6\cos^2 t\cdot\sin t$, $\dot{y}=6\sin^2 t\cdot\cos t$, па

$$y'=\frac{6\sin^2 t\cdot\cos t}{-6\cos^2 t\cdot\sin t}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-tgt$$

а) б)



Црт. 1.



Црт. 2.

Од (3) со елиминирање на t ја добиваме равенката:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3},$$

од каде што $y=\pm\sqrt{\left(2^{2/3}-x^{2/3}\right)^3}$; знакот "+" важи кога $y\geq 0$ т.е. $t\in[0,\pi]$, а знакот "-" кога $y\leq 0$, т.е. $t\in[\pi,2\pi]$. Значи, со параметарските равенки (6), на два различни интервали се зададени две различни функции; нивните графици се претставени на црт. 1 а) и б) соодветно. ("Унијата", пак, на тие графици се вика **астроида**; црт. 2.)

Воочи дека за $t=\pi/2$, односно за $t=3\pi/2$ (т.е. за $x=0$) имаме $y'=\infty$.

Забелешка 1. Теоремата 1 ја докажавме при претпоставка дека $f'(x)\neq 0$. Но, таа (т.е. формулата (1)) може да се воопшти и за случајот

$$f'(x)=0 \text{ или } f'(x)=\infty$$

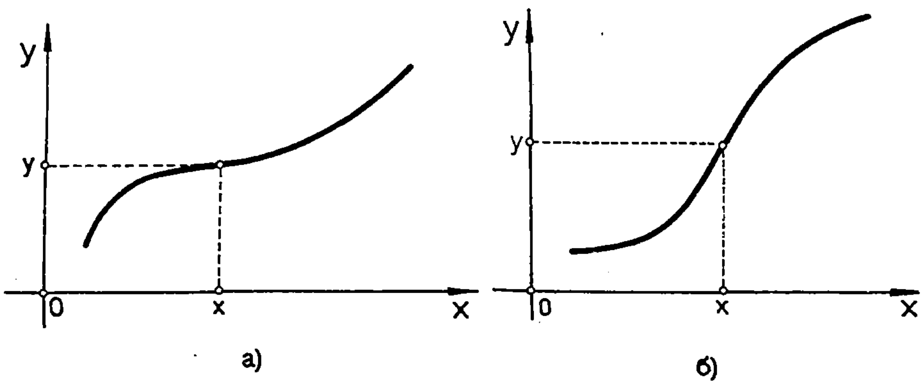
Како и погоре, доаѓаме до равенството (2). Ако притоа:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=0 \quad (\text{или } =\infty),$$

тогаш од формулата (2) следува дека:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=g'(y)=\infty \quad (\text{или, соодветно, } =0).$$

Според тоа: ако функцијата $f(x)$ има нулти (или бесконечен) извод, тогаш инверзната функција $g(y)$ во соодветната точка има бесконечен (или соодветно, нулти) извод (црт. 3.)



Црт. 3.

Така, за функцијата $f(x)=x^3$ имаме $f'(0)=0$, а за нејзината инверзна, $g(x)=\sqrt[3]{x}$, имаме $g'(0)=\infty$.

Исто така, лесно установуваме дека:

$$(\arcsin x)'=\infty$$

во точките $x=-1$ и $x=1$. Навистина, на тие точки им одговараат вредностите $y=-\pi/2$ и $y=\pi/2$ соодветно, за кои:

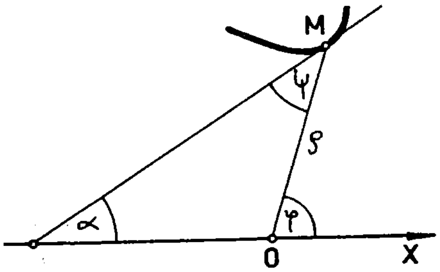
$$(\sin y)'=\cos y=0.$$

Аналогно, $(\arccos x)'=\infty$ за $x=-1$ и $x=1$.

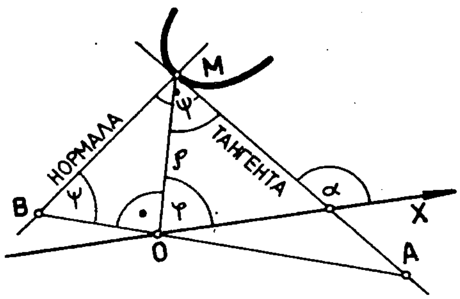
** Формулата (5) може да се искористи при задачи што се сврзани со тангента на крива, зададена во поларни координати,

$$\rho=\rho(\varphi).$$

Притоа положбата на тангентата обично се определува не со аголот α што го формира тангентата со поларната оска, туку со аголот ψ што го образува со продолжението на радиус - векторот на допирната точка M (црт. 4).



Црт. 4.



Црт. 5.

Поради врската меѓу декартовите и поларните координати,

$$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi \tag{7}$$

и фактот дека $\rho=\rho(\varphi)$, може да сметаме дека y е функција од x, зададена со параметарските равенки (7), со параметар φ. Јасно е дека:

$$tg\alpha=y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi} \quad \left(\rho'=\frac{d\rho}{d\varphi}\right), \tag{8}$$

а користејќи ги (8), $tg\,\varphi=y/x$ и (7) лесно се покажува дека (види црт. 5):

$$tg\psi=tg(\alpha-\varphi)=\frac{tg\alpha-tg\varphi}{1+tg\alpha\cdot tg\varphi}=\frac{xy'-y}{x+yy'}=\frac{\rho}{\rho'}. \tag{9}$$

(Но, за положба како на црт. 4 би добиле: $tg\,\psi=-\rho/\rho'$.)

Наместо величините T, N, S_T и S_N (разгледувани во 1. 2), вообичаено е да се разгледуваат други отсечки, имено оние што се прикажани на црт. 5, каде што правата AB е нормална на радиус векторот OM. За разлика од T, N, S_T и S_N, должините на тие отсечки се наречени **поларни должини количини** (значи: **поларна отсечка на тангентата, поларна субнормала** итн.).

Според црт. 5., имајќи предвид дека $tg\psi=\dfrac{\rho}{\rho'}$ добиваме:

$$S_N=\overline{OB}=|\rho\cdot ctg\psi|=|\rho'| \quad \text{(должина на поларната субнормала);}$$

$$S_T=\overline{OA}=|\rho\cdot tg\psi|=\left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right| \quad \text{(должина на поларната суптангента);}$$

$$T=\overline{MA}=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{OA}^2}=\left|\frac{\rho}{\rho'}\right|\sqrt{\rho^2+\rho'^2} \quad \text{(должина на поларната отсечка на тангентата);} \tag{10}$$

$$N=\overline{MB}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2} \quad \text{(должина на поларната отсечка на нормалата).}$$

**

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 3**, да се најде изводот на дадената функција.

1. $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. **2.** $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. **3.** $arctg\sqrt{x}$.

Во задачите **4 - 5**, да се најде изводот на дадената функција со помош на формулата за извод на инверзна функција.

4. $y=\ln x \quad (\Leftrightarrow x=e^y)$. **5.** $y=\sqrt[3]{x} \quad (\Leftrightarrow x=y^3)$.

Во задачите **6 - 8**, да се најдат изводите на инверзните хиперболични функции на два начина: а) како извод од логаритемски функции, б) со помош на изводите на хиперболичните функции.

6. $arthx \left(=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. **7.** $arcthx \left(=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

8. $Archx\left(=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})\right)$.

Во задачите **9 - 12** најди го y' на следните параметарски зададени функции.

9. $x=\sqrt{2}(t-\sin t),\ y=\sqrt{2}(1-\cos t)$. **10.** $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\ y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

11. $x=a\cos^4 t,\ y=a\sin^4 t\ (a>0)$. **12.*** $x=\arcsin\left(t/\sqrt{1+t^2}\right),\ y=\arccos\left(1/\sqrt{1+t^2}\right)$

Во задачите 13 - 14, да се пресметаат поларните допирни количини на дадените криви.

13.* $\rho=1+\cos\varphi,\ \varphi=\pi/3$ **(кардиоида).**

14.* $\rho^2=9\sin 2\varphi,\ \varphi=\pi/12$ **(бернулиева лемниската).**

Во диференцијалните изрази 15 - 16, да се воведат поларни координати.

15. $\dfrac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}$.　　　**16.** $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$.

17.* Да се докаже во подробности дека се точни равенствата (8) и (9):

а) $y'=\dfrac{\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}$;　　　б) $tg\psi=\dfrac{\rho}{\rho'}$.

18.* Да се докаже во подробности точноста на формулите (10).

2. 4. ПРЕГЛЕД НА ДОБИЕНИТЕ ФОРМУЛИ ЗА ИЗВОДИ

Со помош на досега изнесеното, во состојба сме да најдеме извод на која било елементарна функција. Извесна тешкотија може да претставува тоа што досега добиените резултати треба добро да се запаметат. За таа цел нив ќе ги сумираме во една таблица, претпоставувајќи насекаде дека

$$u=u(x),\qquad v=v(x)$$

се диференцијабилни функции, а $a>0$, c и k константи. При составување на таблицава, користена е и формулата за пресметување на изводи од сложени функции.

1. $(c)'=0$.　　　2. $(x)'=1$.

3. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$.　　　4. $(u+v)'=u'+v'$.

5. $(u-v)'=u'-v'$.　　　6. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{u^2}$.　　　8. $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{c\cdot v'}{v^2}$.

9. $y=y(u),\ u=u(x),\ y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

10. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, т.е. $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$, каде што $f(x)$ и $g(x)$ се заемно инверзни.

11. $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, каде што $x = x(t)$, $y = y(t)$.

12. $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$, $\rho = \rho(\varphi)$; $y' = \frac{\rho' \sin\varphi - \rho\cos\varphi}{\rho' \cos\varphi + \rho\sin\varphi}$.

13. $\left(u^k\right)' k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathrm{R})$;

14. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

15. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$;

16. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

17. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a}$;

18. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

19. $(\sin u)' = u' \cos u$.

20. $(\cos u)' = -u' \sin u$.

21. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

22. $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

23. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

24. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

25. $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

26. $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

27. $(shu)' = u' chu$.

28. $(chu)' = u' shu$.

29. $(thu)' = \frac{u'}{ch^2 u}$.

30. $(cthu)' = -\frac{u'}{sh^2 u}$.

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. $y = \frac{1}{1+x^2}$; $\qquad y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Пример 2. $y = \sqrt{1-x-x^2}$; $\qquad y' = \frac{-1-2x}{2\sqrt{1-x-x^2}}$.

Пример 3. $y = \arcsin(2 - x^2)$; $\qquad y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-(2-x^2)^2}}$.

Пример 4. $y = \arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)\sqrt{4x^2}} = \frac{2x}{(x^2+1)|x|} = \frac{2sgnx}{x^2+1}, x \neq 0.$$

ВЕЖБИ

Со помош на таблицата за изводи, да се најдат изводите на следниве функции (1 - 12):

1. $(5x+3)^{11}$.

2. $(x^4 - 5x + 6x^{-1})^{-3}$.

3. $\frac{(x^2+1)^2}{(x+x^{-1})^3}$.

4. $\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$.

5. e^{-x^2}.

6. $e^{(1-x)/(1+x)}$.

7. $\ln\sin x$.

8. $\cos(\ln x)$.

9. $(arctgx)^2$.

10. $arctgx^2$.

11. $tg(3arctgx)$.

12. $ch\sqrt{x}$.

2. 5.* ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

Нека $z = f(x,y)$ е функција од две независни реални променливи x, y дефинирана во некоја област D, и нека $M_0(a,b)$ е внатрешна точка од D (т.е.

постои број $\varepsilon > 0$, таков што множеството $\left\{X \middle| \overline{M_0X} < \varepsilon\right\}$ целото се содржи во $\boldsymbol{D}$).

Ако ставиме $y = b$, тогаш добиваме функција од една реална независна променлива:

$$z = g(x) = f(x,b).$$

Да претпоставиме дека функцијата $g(x)$ има извод $g'(x)$ во точката $x = a$. Тогаш тој извод ќе го означиме со $f'_x(a,b)$ и ќе го викаме **парцијален извод** на $f(x,y)$ **по** x во точката (a,b).

Аналогно, ако ставиме $x = a$, тогаш добиваме функција од една реална независна променлива, $z = h(y) = f(a,y)$. Ако функцијата $h(y)$ има извод во точката $y = b$, тогаш тој извод го означуваме со $f'_y(a,b)$ и го викаме **парцијален извод на** $f(x,y)$ **по** y во точката (a,b).

Ако не е неопходно да се нагласи точката (a,b), тогаш парцијалниот извод $f'_x(a,b)$ може да се означи покусо со $\frac{\partial z}{\partial x}$ (се чита: "делта зет по делта икс") или со z'_x. Обично така се означуваат парцијалните изводи на функцијата $z = f(x,y)$ во произволна точка $(x,y) \in \boldsymbol{D}$. Значи:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y). \tag{1}$$

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. $z = x^y$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$

Пример 2. $z = \ln(x^2 + \sin y)$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + \sin y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos y}{x^2 + \sin y}.$

Значи, да се пресмета (на пример) $\frac{\partial z}{\partial x}$, треба y да се смета за константа и да се бара извод по x според правилата за изводи на функции од една реална независно променлива.

За пресметување на парцијални изводи се покажува како мошне удобна ознаката $\frac{\partial}{\partial x}(...)$.

Пример 3. За $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2y$ имаме:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3-3x^2y)=3x^2-6xy,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3-3x^2y)=3y^2-3x^2.$$

ВЕЖБИ

Да се најдат парцијалните изводи на следниве функции (1 - 4).

1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$.

2. $z=\frac{x-y}{2x+y}$.

3. $z=x\sin(x+y)$.

4. $z=\arcsin\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

5.* Пресметај го изразот $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ за $z=arctg\frac{y}{x}$.

2. 6. ИЗВОДИ ОД ИМПЛИЦИТНО ДАДЕНИ ФУНКЦИИ

Како што споменавме (**I. 2. 7.**, $(*)$), ако $F(x,y)$ е функција од две независно променливи x, y и ако $y=y(x)$ е функција од независно променливата x, таква што да биде точно равенството $F(x,y(x))=0$, за секој x од дефиниционата област на $y(x)$, тогаш велиме дека $y(x)$ е **имплицитно дадена** со равенката:

$$F(x,y)=0. \tag{1}$$

Се поставува прашање како може, знаејќи го обликот на $F(x,y)$ да се определи обликот на $y(x)$, а и да се провери дали $y(x)$ е непрекината, односно диференцијабилна и да се определи изводот $y'(x)$. Еден од начините да се решат тие задачи е, решавајќи ја равенката (1) по y, да се определи експлицитниот облик на $y(x)$, па потоа да се испитува таа функција, како што се прави во следните примери.

Пример 1. *Ако* $F(x,y)=x^3+y^3-1$, *тогаш, решавајќи ја равенката* $x^3+y^3-1=0$ *по* y, *добиваме:*

$$y=\sqrt[3]{1-x^3}=(1-x^3)^{1/3},$$

од што следува дека:

$$y'=\frac{1}{3}\left(1-x^3\right)^{-2/3}\left(-3x^2\right)=-x^2\left(1-x^3\right)^{-2/3},$$

за секој $x\neq 1$; за $x=1$ имаме $y'(1)=-\infty$.

Пример 2. *Со равенката* $x^2+y^2-1=0$ *се определени безброј многу функции* $y=y(x)$ *дефинирани во сегментот* $[-1,1]$. (Во претходниот пример функцијата $y(x)$ е еднозначно определена.) Меѓу тие функции постојат само две непрекинати, а тоа се $y_1=\sqrt{1-x^2}$ и $y_2=-\sqrt{1-x^2}$. Од тоа следува:

$$y_1'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad y_2'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Но, решавањето на (1) по y не е секогаш едноставно изводливо, па затоа е пожелно директно од (1) да се добие $y'(x)$, при претпоставка дека $y(x)$ и $y'(x)$ постојат. Имено, ако во (1) се замени $y(x)$ наместо y, ќе се добие $F(x,y(x))=0$, за секое x од соодветниот интервал. Знаејќи го обликот на $F(x,y)$, по правилата за изводи, вклучувајќи го, секако, и правилото за извод од сложени функции, се добива:

$$G(x,y)+y'H(x,y)=0,\ \text{т.е.}\ y'=-\frac{G(x,y)}{H(x,y)},$$

каде што $G(x,y)$ и $H(x,y)$ ќе бидат познати функции од две независни променливи x, y, но во последната формула за y', треба y да се замени со $y(x)$.

Работејќи на тој начин во претходните примери, би добиле:

$$x^3+y^3-1=0 \Rightarrow 3x^2+3y^2y'=0, \text{ т.е. } y'=-\frac{x^2}{y^2}$$

$$x^2+y^2-1=0 \Rightarrow 2x+2yy'=0, \text{ т.е. } y'=-\frac{x}{y}$$

Да разгледаме уште два примера.

Пример 3. *Ако* $y(x)$ *е определена со равенката* $\sin(x+y)-2y=0$, *тогаш добиваме* $(\cos(x+y))(1+y')-2y'=0$, *т.е.*

$$y'=\frac{\cos(x+y)}{2-\cos(x+y)}.$$

Пример 4. *Од* $x^2+y^2+1=0$ *следува* $2x+2yy'=0$, *т.е.* $y'=-\frac{x}{y}$.

Сосема е јасно дека во последниот пример работата не е коректно изведена, бидејќи, за секој $x,y\in\mathbb{R}$, $x^2+y^2+1>0$, па значи не постои функција $y=y(x)$ определена со $x^2+y^2+1=0$ така што не може да се зборува за нејзиниот извод. Ова го сугерира прашањето дали и во третиот пример немаме иста ситуација.

** Пред да провериме дали резултатот од примерот 3 е во ред, ќе формулираме соодветна теорема за (егзистенција на непрекината и диференцијабилна) имплицитно зададена функција.

Теорема (За извод од имплицитни функции). *Нека функцијата* $z=F(x,y)$ *е непрекината во правоаголникот* $\{(x,y)|a<x-x_0<b, c<y-y_0<d\}$, *каде што* $a<b$, $c<d$ *(цртеж 1.), а ги задоволува и следниве услови:*

а) $F(x_0,y_0)=0$;

б) Парцијалните изводи F_x', F_y' постојат и се непрекинати во D, при што $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

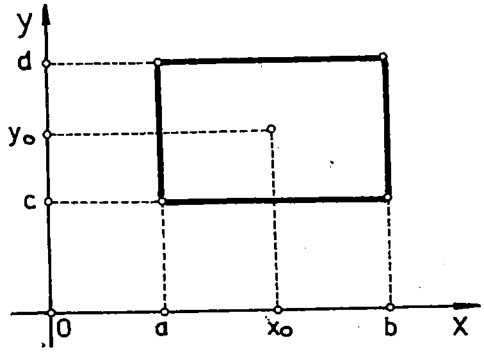
Тогаш постои $h>0$ и функција $y=f(x)$ со следниве својства:

1°. $f(x_0)=y_0$ и $f(x)$ е непрекината во $[x_0-h,x_0+h]$, и диференцијабилна во внатрешноста на сегментот.

2°. Точно е равенството $F(x,f(x))=0$ за секое $x\in[x_0-h,x_0+h]$.

3°. $$f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))},\qquad (2)$$

за секое $x\in[x_0-h,x_0+h]$. □



Цтр. 1.

Теоремата е специјален случај од поопшт резултат за функции од повеќе променливи што ќе биде докажан во третата книга (V. 2). Исто така, и поимот за непрекината функција од две променливи (што се користи во теоремата) ќе биде дефиниран во V. 1. Овде ќе се задоволиме само со констатацијата дека "обичните функции" т.е. функциите со кои, скоро исклучиво работиме, го имаат тоа својство во секоја точка, во која се дефинирани.

Сега ќе го "оправдаме" резултатот од примерот 3. Имено, функцијата $F(x,y)=\sin(x+y)-2y$, како и нејзините изводи $F'_x=\cos(x+y)$, $F'_y=\cos(x+y)-2$, се непрекинати (во целата рамнина). Покрај тоа, имаме: $F(0,0)=0$, $F'_y(0,0)=-1\neq 0$. Според тоа, постои $h>0$ и функцијата $y=y(x)$ што ја задоволува врската $\sin(x+y)-2y=0$, нерпекината во $[-h,h]$ и диференцијаблина во $(-h,h)$, при што:

$$y'(x)=-\frac{\cos(x+y(x))}{\cos(x+y(x))-2}=\frac{\cos(x+y(x))}{2-\cos(x+y(x))}.$$

Кога би сакале да ја примениме теоремата на функцијата $F(x,y)=x^2+y^2+1$ (пример 4), би добиле дека се исполнети сите услови, освен условот дека $F(x_0,y_0)=0$ за некои $x_0,y_0\in\mathbb{R}$. **$\lrcorner$**

Ќе се задржиме подолу на проблемот за одредување тангенти на некои криви од втор ред.

Пример 5. *Нека* $M_0(x_0,y_0)$ *е точка од кружницата*

$$(x-p)^2+(y-q)^2-r^2=0,$$

т.е. точно е равенството $(x_0-p)^2+(y_0-q)^2=r^2$. *За да ја најдеме равенката на тангентата во* M_0, *потребен ни е изводот на функцијата* $y=y(x)$, *определена од горните услови. Директно, или со помош на формулата (2), се добива:*

$$y'(x_0)=\frac{x_0-p}{y_0-q},$$

од што следува дека тангентата во M_0-има равенка:

$$y-y_0=-\frac{x_0-p}{y_0-q}(x-x_0),$$

т.е.

$$(x_0-p)(x-x_0)+(y_0-q)(y-y_0)=0. \tag{3}$$

Горната работа е коректна за случај кога $y_0\neq q$, т.е. $x_0\neq p\pm r$, но крајниот резултат е, сепак, точен и за $y_0=q$, бидејќи тогаш тангентата има равенка $x=x_0$ $(=p+r$ или $=p-r)$.

На сосема ист начин се покажува дека равенката на тангентата на $b^2(x-p)^2\pm a^2(y-q)^2=a^2\cdot b^2$ (елипса при изборот на знак +, а хипербола во другиот случај) во точката $M_0(x_0,y_0)$ го има следниов облик:

$$b^2(x_0-p)(x-x_0)\pm a^2(y_0-q)(y-y_0)=0. \tag{4}$$

И, на крајот, равенката на тангентата од параболата $(y-n)^2=2p(x-m)$, во точката $M_0(x_0,y_0)$ гласи:

$$(y_0-n)\cdot(y-y_0)=p(x-x_0). \tag{5}$$

ВЕЖБИ

Најди го изводот $y' = y'_x$ на следните имплицитно зададени функции (1 - 4).

1. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
3.* $x^y - y^x = 0$.
4. $x\cos y - \sin x + y\cos x = 0$.

Најди ја равенката на тангентата на дадената крива што минува низ назначената точка M (5 - 8).

5. $x^2 + y^2 = 5$, $M(1,2)$.
6. $x^2 - 6x + y^2 = 1$, $M(2,3)$.
7. $y^2 - 4y - 2x + 6 = 0$, $M(3,4)$
8. $y^2 - 2y - 2x + 7 = 0$, $M(3,1)$.

9.* Примени ја теоремата за извод на имплицитна функција во секоја од задачите (1 - 4) и увери се во "оправданоста" на добиените резултати во тие задачи.

10.* Да се покаже дека равенката на тангентата на кривата $b^2(x-p)^2 \pm a^2(y-q)^2 = a^2b^2$, во точката $M_0(x_0, y_0)$ може да се претстави и во следниов облик:

$b^2(x-p)(x_0-p) \pm a^2(y-q)(y_0-q) = a^2b^2$.

11.* Кои диференцијабилни функции се определени со:

а) $b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = 0$;

б) $b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = 0$?

12.* Да се илустрира теоремата за извод на имплицитна функција на функцијата:

$F(x,y) = xy + |xy| - 2$.

II. 3. ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ ЗА ИЗВОДИТЕ

3. 1. ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

Следново својство е познато под името **теорема на Ферма.**[1)]

Теорема 1. *Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b). Ако $f(c)$ е екстрем на функцијата $f(x)$ за некое $c \in (a,b)$, тогаш $f'(c) = 0$.*

[1)] Пјер ФЕРМА (1601 - 1665), бил советник во парламентот на градот Тулуз, Франција. Со Декарт, Ферма е основоположник на аналитичната геометрија, со Паскал основач на теоријата на веројатноста; заслужен е за многу резултати во математичката анализа и во теоријата на броевите.

Доказ. Да претпоставиме, на пример, дека $f(c)$ е максимум (црт. 1.). Ако Δx е доволно мало по апсолутна вредност, тогаш $f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$, па:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0 \text{ за } \Delta x>0,$$

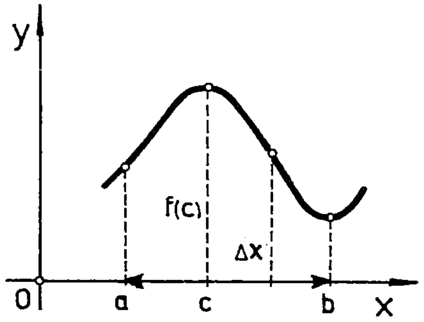
$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0 \text{ за } \Delta x<0.$$

Поради диференцијабилноста на $f(x)$ во точката c имаме:

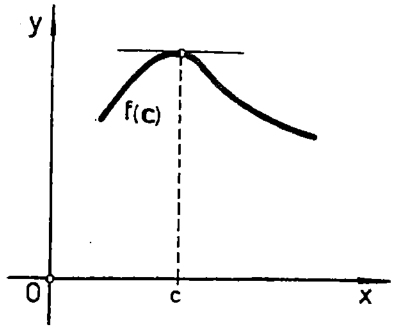
$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x},$$

па од горниве две неравенства[2] се добива дека $f'(c)\ge 0$ и $f'(c)\le 0$, што е возможно само ако $f'(c)=0$.

Во случај кога $f(c)$ е минимум, теоремата се докажува аналогно. □



Црт. 1.



Црт. 2.

Геометриски, теоремата на Ферма може да се интерпретира на следниов начин. Ако $f(x)$ е дифренцијабилна функција во интервалот (a,b) и ако $f(c)$ е екстрем на $f(c)$, каде што $c\in(a,b)$, тогаш тангентата на кривата $y=f(x)$ во точката $(c,f(c))$ е паралелна со апцисната оска (црт. 2.).

---

[2] Види својство **5** од **I. 5. 5.**

Забелешка 1. Обратното тврдење од теоремата на Ферма не е точно, т.е. една функција $f(x)$ може да биде диференцијабилна во даден интервал (a,b) и $f'(c)=0$ за $c\in(a,b)$, но $f(c)$ да не биде екстрем на $f(x)$. Така на пример, функцијата $f(x)=x^3$ е диференцијабилна во целиот интервал $(-\infty,+\infty)$ и $f'(0)=0$, но $f(0)$ не е нејзин екстрем.

Забелешка 2. Претпоставката за диференцијабилност на функцијата $f(x)$ во теоремата на Ферма не може да се изостави. На пример, $f(x)=|x|$ има екстрем во точката $x=0$, но $f'(0)$ не постои.

Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција во даден интервал (a,b). Секој број $c\in(a,b)$, за кој

$$f'(c)=0, \tag{1}$$

се вика **критична** или **стационарна точка** за $f(x)$ во (a,b).

Според теоремата на Ферма, секоја точка на локален екстрем (локален максимум или минимум) на $f(x)$ е нејзина критична точка. Од друга страна, дадена критична точка на $f(x)$ не мора да биде и точка на локален екстрем за $f(x)$ (како што покажува примерот во забелешката 1).

Пример 1. *Да ги најдеме критичните точки на функцијата:*

$$f(x)=x^4-2x^2+5.$$

За таа цел треба да ги најдеме сите реални решенија на равенката:

$$f'(x)=0, \text{ т.е. } f'(x)=4x^3-4x=0;$$

$$4x(x^2-1)=0;\ \ x_1=0,\ \ x_2=-1,\ \ x_3=1.$$

Значи, критични точки за $f(x)$ се: -1, 0 , 1 .

Ќе изнесеме сега една важна последица од теоремата на Ферма. Имено, ќе ја докажеме следнава:

Теорема 2 (за најмала и најголема вредност). *Нека $f(x)$ е непрекината функција во сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во внатрешноста на тој сегмент. Нека $c_1,c_2,\dots,c_k$ се сите критични точки на $f(x)$ во интервалот (a,b). Тогаш, најмалиот од броевите:*

$$f(a),\ f(c_1),\ f(c_2),\dots,\ f(c_k),\ f(b) \tag{2}$$

е најмала вредносӣ на функцијаӣа $f(x)$ *во сеӣменӣоӣ* $[a,b]$, *а најӣолемиоӣ од нив е најӣолемаӣа вредносӣ на* $f(x)$ *во* $[a,b]$.

Доказ. Според теоремата на Ваерштрас секоја непрекината функција во даден сегмент има најмала и најголема вредност во тој сегмент (I. 5. 6, Т. 4). Нека $f(x_1)$ е најмала вредност на $f(x)$ во сегментот $[a,b]$. Ако x_1 е некој од броевите a или b, тогаш теоремата е точна. Ако, пак, $x_1 \neq a,b$, тогаш $f(x_1)$ е екстрем на $f(x)$ во интервалот (a,b) и според теоремата на Ферма ќе биде $f'(x_1)=0$, т.е. x_1 е еден од броевите, $c_1,c_2,\dots,c_k$. Сличен е доказот на теоремата и за случај на најголема вредност на $f(x)$.

Да разгледаме еден пример.

Пример 2. *Да ӣи најдеме најмалаӣа и најӣолемаӣа вредносӣ на функцијаӣа:*

$$f(x)=x^2(1-x)$$

во сеӣменӣоӣ $[-1,1]$.

Критичните точки на $f(x)$ ќе ги најдеме од равенката:

$$f'(x)=0, \text{ т.е. } f'(x)=2x-3x^2=0;\ x(2-3x)=0.$$

Значи, критични точки се $c_1=0$ и $c_2=2/3$, и обете се наоѓаат во интервалот $(-1,1)$. Бидејќи:

$$f(-1)=2, \qquad f(c_1)=0, \qquad f(c_2)=\frac{4}{27}, \qquad f(1)=0,$$

следува дека најголемата вредност на $f(x)$ е 2 (за $x=-1$), а најмалата е 0 (за $c_1=0$ и за $x=1$).

ВЕЖБИ

Да се најдат критичните точки на функцијата $y=f(x)$ (1 - 4).

1. $y=2x^5-10x+7$, во $(-\infty,+\infty)$.
2. $y=x^3+3x-1$, во $(-\infty,+\infty)$.
2. $y=x\ln x$, во $(0,+\infty)$.
4. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$, во $(-2,+\infty)$.

Да се најдат точките на кривата $y=f(x)$ во кои тангентата е паралелна со x - оската (**5 - 8**).

5. $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$. **6.** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

7. $f(x)=x^2e^{-x}$. **8.** $y=\sqrt{4-x}$.

Да се најде најмалата вредност (НМВ) и најголемата вредност (НГВ) на функцијата $f(x)$ во дадениот сегмент $[a,b]$ (**9 - 14**).

9. $f(x)=x^2-4x+6$, $[-3,10]$. **10.** $f(x)=2^x$, $[-1,5]$.

11. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, $[0,2]$. **12.** $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$, $[-1,2]$.

13. $f(x)=x^3-12x+10$, $[-3,3]$. **14.** $f(x)=\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}$, $[0,100]$.

15. Функцијата $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ во краевите на сегментот $[0,3]$ има вредност: $f(0)=-1$ и $f(3)=7/2$. Стационарни точки се: $x_1=0$ и $x_2=2$ (провери!). Дали може да заклучиме дека -1 е НМВ, а $7/2$ е НГВ на $f(x)$ во $[0,3]$? Провери дека $f(1/2)=-3/2<-1$ и $f(5/4)=21/4>7/2$. Дали ова е во противречност со теоремата 2?

3. 2. ТЕОРЕМА НА РОЛ

Теоремата на Ферма ќе ја искористиме при доказот на следниов резултат, наречен **теорема на Рол.**[1]

Теорема 1. *Нека $f(x)$ е непрекината функција во сегментот $[a,b]$, $a<b$, диференцијабилна во внатрешноста на тој сегмент и $f(a)=f(b)$. Тогаш постои $c\in(a,b)$, таков што $f'(c)=0$.*

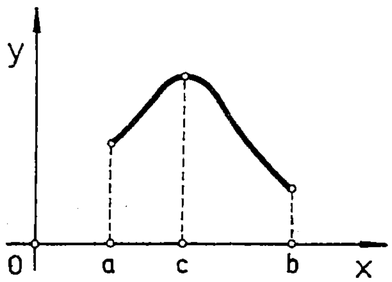
Доказ. Поради непрекинатоста, функцијата $f(x)$ има и најмала, и најголема вредност во сегментот $[a,b]$.

1) Ако $f(a)=f(b)$ не е најголема вредност на $f(x)$ во $[a,b]$, тогаш за некој $c\in(a,b)$, $f(c)$ е најголема вредност на оваа функција (црт. 1.); значи, $f(x)$ ќе биде екстрем, па според теоремата на Ферма ќе биде $f'(c)=0$.

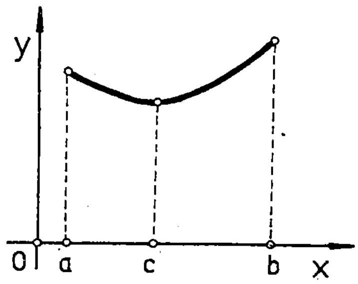
---

[1] Мишел РОЛ (1652 - 1719) - Француски математичар; тој ја докажал наведената теоре-ма за полиноми (по степените на x).

2) Ако $f(a)=f(b)$ е најголема, но не и најмала вредност на функцијата $f(x)$ во сегментот $[a,b]$, тогаш пак за некој $c\in(a,b)$, $f(c)$ ќе биде најмала вредност на $f(x)$, па по теоремата на Ферма пак добиваме дека $f'(c)=0$ (црт. 2.).



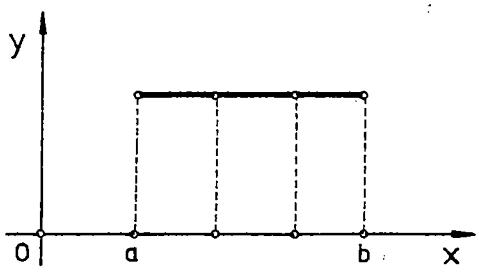
Црт. 1.



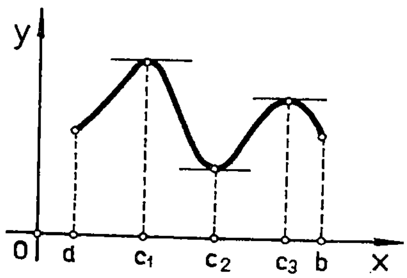
Црт. 2.

3) На крајот, $f(a)=f(b)=k$ нека биде и најмала, и најголема вредност на $f(x)$ во сегментот $[a,b]$. Тогаш, очигледно, $f(x)=k$ за секое $x\in[a,b]$, па имаме $f'(x)=0$ за секое $x\in(a,b)$ (црт. 3.). □

Да забележиме дека при направените претпоставки теоремата на Рол ја установува егзистенцијата, но не и единственоста на точката c со наведеното својство (црт. 4.).



Црт. 3.



Црт. 4.

Да разгледаме една примена од теоремата на Рол во теоријата на равенкиите.

Теорема 2. *Ако равенката:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x = 0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

има позитивен корен x_0, *тогаш и равенката:*

$$n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0 \tag{2}$$

има позитивен корен, помал од x_0.

Навистина, во тој случај, за функцијата

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x$$

имаме: $f(0) = f(x_0) = 0$, $f(x)$ е непрекината во сегментот $[0, x_0]$ и е диференцијабилна во внатрешноста на тој сегмент. Од теоремата на Рол следува дека постои број c:

$$0 < c < x_0, \text{ таков што } f'(c) = 0,$$

т.е. равенката (2) има позитивен корен, помал од x_0. □

ВЕЖБИ

1. Провери ја теоремата на Рол на функцијата $f(x) = 4x - x^2 - 2$ на сегментот $[1,3]$.
2. Покажи дека меѓу нулите на функцијата $f(x) = 3 + 2x - x^2$ се наоѓа корен на нејзиниот извод. Објасни го тоа графички.
3. Провери ја теоремата на Рол на конкретната функција $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
4. За $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ имаме: $f(-1) = f(1) = 0$, а $f'(x) = -2/3\sqrt[3]{x}$ не прима вредност 0 за ниеден $x \in [-1,1]$. Дали ова е во спротивност со теоремата на Рол?
5. Конструирај го лакот на кривата $y = \sqrt{|x|}$ на сегметот $[-1,1]$. Зошто на тој лак нема тангента, паралелна на x - оската? (Кој услов од теоремата на Рол не е исполнет?)

3. 3. ТЕОРЕМА НА ЛАГРАНЖ

Едно воопштување на теоремата на Рол е теоремата на Лагранж[1], или, како инаку се вика, **теорема за средна вредност**. Тоа е следнава:

Теорема 1. *Ако* $f(x)$ *е нейрекинаѿа функција во сегменѿоѿ* $[a,b]$ $(a<b)$ *и диференцијабилна во внаѿрешносѿа на ѿој сегменѿ, ѿогаш йосѿои* $c\in(a,b)$, *ѿаков шѿо:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{1}$$

Доказ. Да ја формираме помошната функција $g(x)=kx+f(x)$, $(k=const)$, така да бидат задоволени претпоставките од теоремата на Рол во сегментот $[a,b]$. За да биде $g(a)=g(b)$, треба да е

$$ka+f(a)=kb+f(b), \text{ т.е.}$$

$$k=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

Тогаш, според теоремата на Рол, постои $c\in(a,b)$, таков што $g'(c)=0$, т.е.

$$k+f'(c)=0,$$

од каде што, поради (2), се добива (1). □

Формулата (1) често се запишува во обликот:

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c).$$

Ако се стави $b=a+h$, $h>0$ (црт. 1.), тогаш таа го добива обликот

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h), \text{ каде што } 0<\theta<1,$$

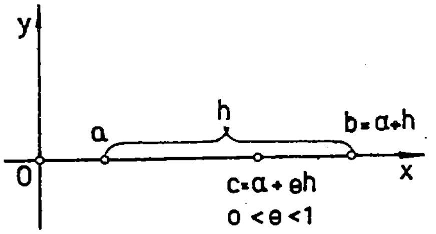
или, при други ознаки,

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta x\cdot f'(x+\theta\Delta x),\ 0<\theta<1. \tag{3}$$

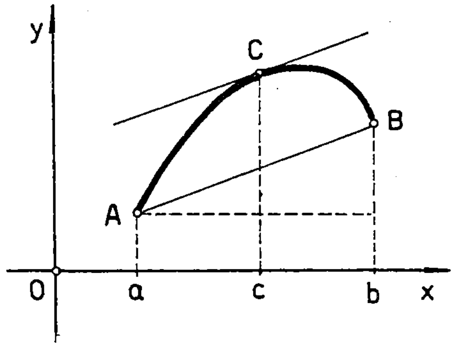
---

[1] Жозеф Луи ЛАГРАНЖ (Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813), роден во Турин, Франција, бил водечки математичар во XVIII век, а има големи заслуги за развитокот и на механиката.

Да дадеме геометриска интерпретација на теоремата на Лагранж. Нека $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$ се две точки од графикот на функцијата $y=f(x)$ која ги задоволува условите од теоремата на Лагранж во сегментот $[a,b]$. Тогаш, на лакот AB од графикот на оваа функција, постои точка c во која тангентата повлечена на графикот од функцијата е паралелна со правата AB (црт. 2.).



Црт. 1.



Црт. 2.

Да забележиме дека теоремата на Лагранж може да се смета за воопштување на теоремата на Рол, бидејќи ако $f(b)=f(a)$ $(a<b)$, тогаш $0=(b-a)\cdot f'(c)$, т.е. $f'(c)=0$.

На два примера сега ќе покажеме како може да се примени теоремата на Лагранж за докажување на некои неравенства.

Пример 1. $e^x>1+x$, за $x\neq 0$.

Ова неравенство е очигледно, ако се нацрта графикот на функцијата $f(x)=e^x$ и графикот на $g(x)=1+x$. Но, да ја докажеме неговата точност со средствата на анализата.

Да ја примениме теоремата на Лагранж на функцијата $f(x)=e^x$ во сегментот $[0,x]$, $x>0$. Тогаш $e^x-1=x\cdot e^c$, $0<c<x$, па поради $e^c>1$, имаме $e^x>1+x$.

За $x<0$, теоремата на Лагранж ја применуваме на $f(x)=e^x$ во сегментот $[x,0]$ и добиваме дека $1-e^x=-xe^c$, $x<c<0$, од каде што, поради $e^c<1$, пак добиваме дека $e^x>1+x$.

Пример 2. $\ln(1+x) < x$, за $x > 0$.

Ја разгледуваме функцијата $f(x) = \ln(1+x)$ во сегментот $[0,x]$.

Според теоремата на Лагранж добиваме дека:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} < 1,$$

(бидејќи $c > 0$), од каде што, поради $x > 0$, се добива дека $\ln(1+x) < x$.

Ќе изнесеме и две интересни последици од теоремата на Лагранж.

Теорема 2. *Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината во сегментот* $[a,b]$, *диференцијабилна во* (a,b) *и* $f'(x) = 0$ *за секој* x *од тој интервал, тогаш* $f(x)$ *е константна функција во* $[a,b]$.

Доказ. Нека $a < x \le b$ и да ја разгледаме $f(x)$ на сегментот $[a,x]$. Според теоремата на Лагранж, постои $c \in (a,x)$ таков што

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(c),$$

а бидејќи $f'(c) = 0$, добиваме $f(x) = f(a) = const$. □

Оваа теорема може да се искористи за докажување на некои идентитети.

Пример 3. *Ќе покажеме дека равенството:*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

е точно за секој $x \in [-1,1]$.

За таа цел ќе ја разгледаме функцијата $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Имаме:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \text{ за секој } x \in (-1,1),$$

па според теоремата 2., $f(x) = c$ $(= const.)$ за секој $x \in (-1,1)$. Бидејќи:

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

таа константа е $c=\frac{\pi}{2}$, а бидејќи и $f(1)=\frac{\pi}{2}=f(-1)$ следува дека $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ за секој $x\in[-1,1]$.

И следнава теорема е последица од теоремата на Лагранж.

Теорема 3. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати во сегментот $[a,b]$ и имаат еднакви изводи во интервалот (a,b), тогаш тие функции се или еднакви, или, пак, се разликуваат за една адитивна константа.*

Доказ. За функцијата $h(x)=f(x)-g(x)$ се исполнети условите од теоремата 2.:

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0 \text{ за секој } x\in[a,b],$$

па $h(x)=c\ (=const.)$, т.е. $f(x)=g(x)+c$. □

Пример 4. *Ќе покажеме дека* $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$ *за секој* $x\in[-1,1]$.

Функциите $f(x)=\sin(\arccos x)$ и $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ се непрекинати во сегментот $[-1,1]$ и диференцијабилни во интервалот $(-1,1)$, при што:

$$f'(x)=\cos(\arccos x)\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Според теоремата 3., $f(x)=g(x)+c$. Оттука

$$c=f(0)-g(0)=\sin(\arccos 0)-\sqrt{1-0^2}=\sin\frac{\pi}{2}-1=0,$$

па $f(x)=g(x)$. Значи

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2} \text{ за секој } x\in[-1,1].$$

ВЕЖБИ

1. Запиши ја формулата на Лагранж и најди го c за функцијата:

   а) $f(x)=4x-x^2$ на сегментот $[1,2]$; б) $f(x)=\sqrt{1+x}$ на сегментот $[0,3]$;

   в) $f(x)=x^3-3x^2/2$, $[-1,2]$.

2. Во која точка тангентата на кривата е паралелна со тетивата AB, ако:

   а) $f(x)=4-x^2$, $A(-2,0)$ и $B(0,2)$; б) $f(x)=3x-x^3$, $A(-1,-2)$ и $B(1,2)$?

3. Покажи дека теоремата на Лагранж не може да се примени на дадената функција во назначениот интервал:

   а) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, на $[1,3]$; б) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$, на $[0,2]$.

   Објасни го тоа графички.

4. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=\left|2x-x^2\right|$ на сегментот $[1,3]$. Зошто овде не може да се повлече тангента, паралелна на отсечката AB: $A(1,1)$, $B(3,3)$? Дали е тоа во противречност со теоремата на Лагранж?

5. Докажи ја точноста на неравенството:

   а) $\left|arctgb-arctga\right|\le\left|b-a\right|$; б) $shx>x$, $x>0$.

6. Докажи го идентитетот:

   а) $\arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $x\in[0,1]$; б) $arctgx+arctg\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $x>0$

7. Одреди за кои вредности на x е точно равенството:

   а) $\arcsin x+\arccos\sqrt{1-x^2}=0$; б) $arcctg\dfrac{1}{x}-arctgx=\pi$.

8. Во кој интервал функциите $f(x)$ и $g(x)$ се еднакви меѓу себе?

   а) $f(x)=\cos(\arcsin x)$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$; б) $f(x)=ch^2x$, $g(x)=1+sh^2x$.

9. Имаме: $(\ln x)'=1/x$ и $\left[\ln(-x)\right]'=1/x$, но сепак функциите не се разликуваат за адитивна константа (т.е. не важи заклучокот од теоремата 3.). На што се должи тоа?

3. 4. ТЕОРЕМА НА КОШИ И ПРАВИЛО НА ЛОПИТАЛ

Веќе имавме можност да се увериме во големата важност на поимот граница при функциите; меѓу другото, со негова помош дојдовме до поимот за извод на една функција. Сега, пак, ќе видиме како може со помош на изводите да се пресметуваат границите на некои функции. Правилото по кое тие граници се пресметуваат е познато како *Лопиталово правило*. Пред да се запознаеме со него, ќе ја докажеме следнава:

Теорема 1. (*Теорема на Коши*[1]) *Нека за функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се исполнети следниве услови:*

(i) $f(x)$ *и* $g(x)$ *се непрекинати во* $[a,b]$,

(ii) $f(x)$ *и* $g(x)$ *се диференцијабилни во интервалот* (a,b),

(iii) $g'(x) \neq 0$ *во интервалот* (a,b).

Тогаш, постои број $c \in (a,b)$, *таков што*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1}$$

Доказ. Да покажеме, прво, дека именителот $g(b)-g(a)$ на левата страна од (1) не е нула (зашто, во спротивниот случај, тој израз не би имал смисла). Ако би било $g(b)=g(a)$, тогаш според теоремата на Рол, изводот $g'(x)$ во некоја точка од (a,b) би бил нула, што противречи на условот (iii); значи, $g(b) \neq g(a)$.

Сега да ја формираме помошната функција

$$h(x) = f(x) + kg(x), \quad k = const.$$

Функцијата $h(x)$ е непрекината во сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во неговата внатрешност. Константата k ќе ја определиме така што да биде $h(a)=h(b)$, па тогаш, според теоремата на Рол, ќе имаме дека $h'(c)=0$ за некој $c \in (a,b)$.

---

[1] Огист Луи КОШИ (Augustin Louis Cauchy, 1789 - 1857), голем француски математичар.

Од $h(a)=h(b)$ имаме:

$$f(a)+kg(a)=f(b)+kg(b),$$

а оттука, поради $g(a)\neq g(b)$ добиваме:

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}.$$

Бидејќи, пак, $h'(x)=f'(x)+kg'(x)$, имаме:

$$0=h'(c)=f'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{f(a)-g(b)}g'(c), \text{ т.е.}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=f'(c),$$

од каде што, по делењето со $g'(c)$ (а тоа е можно, зашто $g'(c)\neq 0$), го добиваме равенството (1). □

Да забележиме дека, за $g(x)=x$, од теоремата на Коши ја добиваме теоремата на Лагранж.

Теоремата на Коши ќе ја искористиме за докажување на следнава:

Теорема 2. (Правило на Лопитал [1]).

Нека за функциите $f(x)$ и $g(x)$ се исполнети следниве услови:

(i) *$f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни во некоја околина на точката a (освен, можеби, во самата точка a),*

(ii) $g'(x)\neq 0$ за $x\neq a$,

(iii) *$f(x)$ и $g(x)$ се стремат кон нула кога $x\to a$.*

Ако постои границата

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ тогаш постои и } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

и точно е равенството

[1] Гијом Франсоа ЛОПИТАЛ (Guillaume Francoiz L'Hopital, француски математичар, ученик на J. Бернули; познат главно како автор на првиот систематски курс по диференцијално сметање.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2}$$

Доказ. Според (iii), $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Можеме да сметаме дека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се дефинирани за $x=a$ со равенствата:

$$f(a)=0,\quad g(a)=0.^{2)}$$

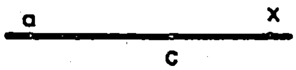
Според тоа, $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати во точката a, па значи и секаде (според (i)) во некоја околина на a.

Бидејќи $g'(x)\neq 0$ за $x\neq a$, следува дека $g(x)=g(x)-g(a)\neq 0$ (зашто, кога би било $g(x)-g(a)=0$, според теоремата на Рол би имале точка c меѓу a и x, во која $g'(c)=0$). Поради тоа, имајќи предвид дека се исполнети сите услови од теоремата на Коши во интервалот со краеви a и x, ќе имаме:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

за некој c што лежи меѓу a и x (црт. 1). Ако $x\to a$, тогаш е јасно дека и $c\to a$, па

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \square$$



Црт. 1

(Главната цел на Лопиталовото правило е: пресметувањето на границата на количник од *функции* да го сведе на количникот од нивните *изводи* (ако последнава граница постои), којашто често се пресметува поедноставно.)

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{e^x}=0$;

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1$.

---

2) Ова допуштање нема да се одрази на постоењето и вредноста на границата на количникот f/g, зашто точката $x=a$ не влегува во доменот на f/g (инаку би било $g(a)\neq 0$).

Лопиталовото правило може да се примени и повеќе пати едно по друго:

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{\cos^4 x}(-2\cos x\sin x)+\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)=3.$$

Забелешка. Лопиталовото правило има и поширока примена, т.е. се применува и за пресметување граници што се сведуваат на неопределени изрази од обликот $\frac{\infty}{\infty}$, како во случај кога $x\to a$ (a - реален број), така и во случај кога $x\to\infty$; и при неопределените изрази од обликот $\frac{0}{0}$ правилото е точно за случајот $x\to\infty$. Последниве тврдења нема да ги докажеме[3], иако нив натаму ќе ги користиме.

Да разгледаме неколку примери.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0;$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0;$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{e^x}=0.$

Пример 7. Да ја пресметаме границата на функцијата $y=x^x$ кога $x\to 0$. Бидејќи мора да е $x>0$, за $z=\ln y=x\ln x$ имаме: $\lim\limits_{x\to 0^+}z=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$. (пример 5), од каде што добиваме $\lim\limits_{x\to 0^+}y=1$.

---

3) Види Фихтенголц, ОМА том I, стр. 212 - 214.

ВЕЖБИ

Во задачите **1** и **2**, запиши ја формулата на Коши и најди го c за функциите $f(x)$ и $g(x)$:

1. $f(x)=x^3+1, \quad g(x)=3-x^2$ на $[0,2]$;

2. $f(x)=\cos x, \quad g(x)=\sin x$ на $[0,\pi/2]$.

Во задачите **3** и **4**, установи дали постои точка c во назначениот интервал, така што формулата (1) од теоремата на Коши да важи за функциите $f(x)$ и $g(x)$:

3. $f(x)=x^2+x, \quad g(x)=3-x^4$ на $[-1,1]$;

4. $f(x)=x^2-2x, \quad g(x)=(x-1)^3$ на $[-1,2]$?

Објасни го заклучокот.

Со помош на Лопиталовото правило да се пресметаат границите (**5 - 9**):

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^n-2^n}$.

8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-\cos x}{x^2}$.

10. Да се пресмета $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$. Дали може да се примени Лопиталовото правило?

Најди ги границите (**11 - 16**).

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx}{\ln x}$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 2x}{\ln x}$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 2x}{\ln x}$.

17.* Докажи го Лопиталовото правило (Теорема 2) за случајот на неопределеност од обликот $\frac{0}{0}$, кога аргументот x се стреми кон бесконечна граница: $a=+\infty$ (или $a=-\infty$) т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (*)$$

Упатство: Воведи смена $x=1/t$, т.е. $t=1/t$. Ако $x \to +\infty$, тогаш $t \to 0^+$, и обратно. Поради $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ кога $x \to +\infty$, се добива $f(1/t) \to 0$ и $g(1/t) \to 0$ кога $t \to 0^+$, а поради постоењето на границата $f'(x)/g'(x) \to L$ кога $x \to +\infty$, следува дека $\dfrac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \to L$ кога $t \to 0^+$. Сега, кон $f(1/t)$ и $g(1/t)$ може да се примени Теоремата 2; се добива (*).

II. 4. МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМИ

4. 1. ИСПИТУВАЊЕ НА МОНОТОНОСТА СО ПОМОШ НА ИЗВОДИ

Да видиме како може да се искористи знакот на изводот за испитување на монотоноста на дадената функција.

Ќе почнеме со еден едноставен резултат којшто тврди дека: во точка каде што тангентата е насочена "нагоре" (т.е. зафаќа остар агол со позитивниот дел на x - оската) функцијата расте, т.е. кривата "се дига" (црт. 1.), а во точка каде што тангентата е насочена "надолу", функцијата опаѓа, т.е. кривата "се спушта". Имено, важи следнава теорема:

Теорема 1 (*Монотоност во точка*). *Нека функцијата $f(x)$ има извод во точката x_0.*

1.° *Ако $f'(x_0) > 0$, тогаш $f(x)$ расте во точката x_0.*

2.° *Ако $f'(x_0) < 0$, тогаш $f(x)$ опаѓа во точката x_0.*

Поинаку запишано:

	Ако	тогаш при $x < x_0$ и близу x_0	а при $x > x_0$ и близу x_0
1°	$f'(x_0) > 0$	$f(x) < f(x_0)$	$f(x_0) < f(x)$
2°	$f'(x_0) < 0$	$f(x) > f(x_0)$	$f(x_0) > f(x)$

Доказ. Ќе ги докажеме само тврдењата под 1°; доказот на тврдењата под 2° е сосема аналоген на тој од 1°.

Изводот $f'(x_0)$ е граница на количникот:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

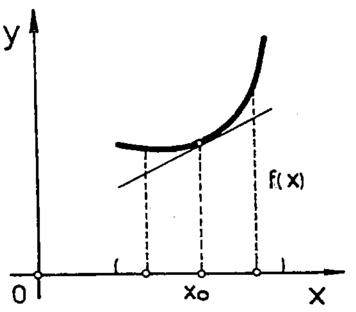
кога $\Delta x \to 0$. Изводот е позитивен; поради тоа, количникот (1) е позитивен за доволно мали Δx. Тоа значи дека, ако точката $x=x_0+\Delta x$ се наоѓа близу и десно од x_0, така што Δx е мало и п о з и т и в н о, тогаш и броителот во (1) е позитивен, така што:

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)>f(x_0).$$

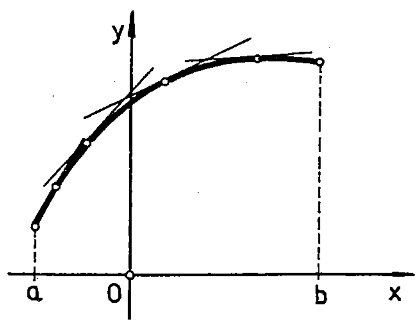
Аналогно, ако $x=x_0+\Delta x$ е близу x_0 и лево од x_0, т.е. Δx е мало по апсолутна вредност и н е г а т и в н о, тогаш:

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)<f(x_0).$$

На црт. 1. е илустриран случајот 1°.



Црт. 1.



Црт. 2.

Следниот резултат се однесува не кон една одделна точка, туку кон цел интервал.

Теорема 2 (*Доволен услов за монотоност*). *Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b).*

1°. *Ако $f'(x)>0$ за секој $x\in(a,b)$, тогаш $f(x)$ расте во (a,b).*

2°. *Ако $f'(x)<0$, за секој $x\in(a,b)$, тогаш $f(x)$ опаѓа во (a,b).*

Доказ. Ќе го докажеме тврењето 1°; тврдењето 2° се докажува аналогно.

Нека $x_1,\ x_2 \in (a,b)$ и $x_1 < x_2$. За функцијата $f(x)$ на сегментот $[x_1,x_2]$ се исполнети условите од теоремата на Лагранж, па:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c),\ \ x_1<c<x_2.$$

Бидејќи $f'(x)>0$ за секој $x\in(a,b)$, а $c\in(a,b)$, следува дека $f'(c)>0$, па $f(x_2)-f(x_1)>0$, т.е.

$$f(x_1)<f(x_2),$$

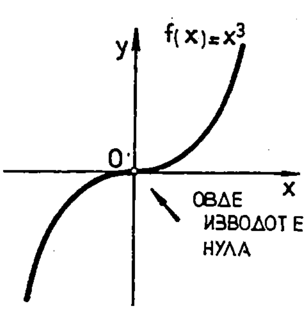
што значи дека $f(x)$ (строго монотоно) расте во интервалот (a,b). □

Заклучокот на теоремата 2 е наполно убедлив и геометриски очевиден: ако тангентата во сите точки од (a,b) е насочена нагоре, тогаш кривата се дига (црт. 2.).

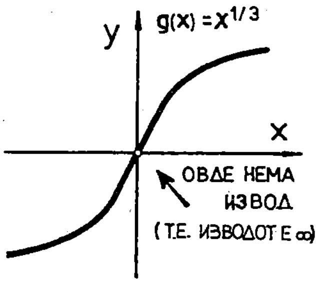
Да разгледаме еден пример.

Пример 1. а) *За функцијата* $f(x)=\sin x$ *во интервалот* $(-\pi/2,\pi/2)$ *имаме* $f'(x)=\cos x>0$*; според* 1° *од теорема 2, функцијата* $\sin x$ *расте во интервалот* $(-\pi/2,\pi/2)$.

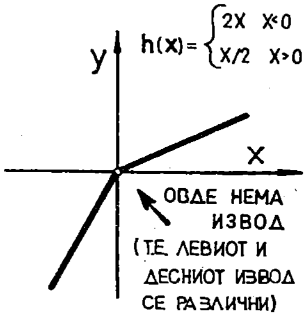
б) *За функцијата* $y=e^{-x}$ *имаме* $y'=-e^{-x}<0$ *за секој* $x\in(-\infty,+\infty)$*; според* 2° *од теоремата 2, функцијата* e^{-x} *опаѓа во интервалот* $(-\infty,+\infty)$.



Црт. 3.



Црт. 4.



Црт. 5.

Во врска со теоремата 2, да забележиме дека обратното не важи, т.е. една функција може да биде стриктно монотона во некој интервал, а сепак, таа да не е диференцијабилна во некои точки од тој интервал или, пак, ако е диференцијабилна во целиот интервал, може да има точки од тој интервал, во кои изводот не е позитивен.

Пример 2. *Да ги разгледаме функциите:*

$$f(x)=x^3, \quad g(x)=x^{1/3}, \quad h(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 0 \\ x/2, & x>0 \end{cases}.$$

Изводите на сите овие функции при $x \neq 0$ постојат и се позитивни; меѓутоа: $f'(0)=0$, а $g(x)$ и $h(x)$ немаат извод во точката $x=0$. Сепак, сите три функции растат во интервалот $(-\infty,+\infty)$ (црт. 3, 4, 5).

Значи, неравенството $f'(x)>0$ е доволен, но не и потребен услов за строго растење на функцијата $f(x)$. Но, кога се работи за нестрога монотоност (т.е. за неопаѓање или нерастење), точна е следнава теорема:

Теорема 3 *(Потребен и доволен услов за нестрога монотоност). Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b).*

1°. *$f(x)$ не опаѓа во (a,b) ако и само ако $f'(x)\geq 0$ за секој $x\in(a,b)$.*

2°. *$f(x)$ не расте во (a,b) ако и само ако $f'(x)\leq 0$ за секој $x\in(a,b)$.*

Доказ. Ќе го докажеме само делот 1°.

Да претпоставиме дека $f(x)$ не опаѓа во интервалот (a,b). Потоа нека x е произволна точка од (a,b) и $\Delta x>0$, при што $x+\Delta x\in(a,b)$. Тогаш, поради неопаѓањето на $f(x)$ имаме $f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$, а поради $\Delta x>0$, добиваме:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

Границата на овој количник кога $\Delta x\to 0$ е $f'(x)$; бидејќи тој количник е ненегативен, следува дека $f'(x)\geq 0$. Истото се добива и при претпоставката кога $\Delta x<0$.

Обратно, нека $f'(x) \geq 0$ за секој $x \in (a,b)$ и $a < x_1 < x_2 < b$. По теоремата на Лагранж добиваме дека:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), \ x_1 < c < x_2. \tag{1}$$

Бидејќи $c \in (a,b)$, следува дека $f'(c) \geq 0$, па од (1) имаме дека $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$; тоа значи дека $f(x)$ не опаѓа во интервалот (a,b). □

Теоремата 2. ни овозможува да ја решиме задачата: да се најдат интервалите на растење, односно опаѓање на дадената диференцијабилна функција $f(x)$. Имено, во интервалите, во кои $f'(x) > 0$, функцијата расте, а во интервалите во кои $f'(x) < 0$ таа опаѓа. Граници на тие интервали ќе бидат точки во кои $f'(x) = 0$ или пак, $f'(x)$ не постои (вклучувајќи ги симболите $-\infty$ и $+\infty$).

Да разгледаме неколку примери.

Пример 3. *Да ги најдеме интервалите на растење и опаѓање на функцијата* $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. *Имаме:*

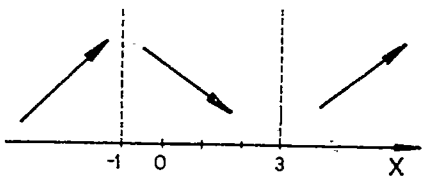
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3);$$

за $x < -1$ имаме: $x + 1 < 0$ и $x - 3 < 0$, па $f'(x) < 0$;

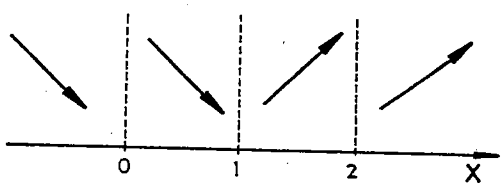
за $-1 < x < 3$: $x + 1 > 0$ и $x - 3 < 0$, па $f'(x) < 0$;

за $x > 3$: $x + 1 > 0$ и $x - 3 > 0$, па $f'(x) > 0$.

Според тоа, функцијата расте во интервалите $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$, а опаѓа во интервалот $(-1,3)$. Тоа е претставено шематски на црт. 6.



Црт. 6.



Црт. 7.

Пример 4. *Да ги најдеме интервалите на монотоност на функцијата*

$$f(x) = (x^2 - 2x)^{1/3}.$$

Да воочиме, прво, дека $f(x)$ е дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}$. Имаме:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-2x)^{-2/3}\cdot(2x-2)=\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}.$$

Функцијата нема (конечен) извод во точките $x_1=0$ и $x_2=2$ ($f'(x)$ не е дефинирана во тие точки), а $f'(1)=0$. Поради тоа треба да го разгледаме знакот на $f'(x)$ во интервалите: $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ и $(2,+\infty)$.

Знакот на $f'(x)$ зависи само од броителот, затоа што именителот е позитивен за секој $x\neq 0;2$. Бидејќи $x-1>0$ за $x>1$, а $x-1<0$ за $x<1$, следува дека:

$$f'(x)>0 \text{ за секој } x>1 \text{ и } x\neq 2,$$

$$f'(x)<0 \text{ за секој } x<1 \text{ и } x\neq 0.$$

Значи:

за $x\in(-\infty,0)$ и $x\in(0,1)$ функцијата опаѓа,

за $x\in(1,2)$ и $x\in(2,+\infty)$ функцијата расте (црт. 7).

Да забележиме дека $f(x)$ опаѓа во точката $x=0$, а расте во $x=2$, во што можеме да се увериме со непосредна проверка. Затоа можеме да заклучиме дека:

$f(x)$ опаѓа во интервалот $(-\infty,1)$, а

$f(x)$ расте во интервалот $(1,+\infty)$.

⌈** Во врска со монотоноста, ќе разгледаме уште еден поим. Функцијата $f(x)$, дефинирана на *конечен* интервал (a,b), се вика **монотона по делови**, ако интервалот (a,b) може да се разбие на конечен број подинтервали, така што во секој од тие подинтервали функцијата $f(x)$ да е монотона.

На црт. 8 е претставен графикот на (непрекината) функција што е монотона по делови на интервалот (a,b), а на црт. 9 (непрекинатата) функција што не е монотона по делови на интервалот $(0,b)$.

Теорема 4. (Доволен услов за монотоност по делови). Нека за функцијата $f(x)$ во интервалот (a,b) се исполнети следниве услови:

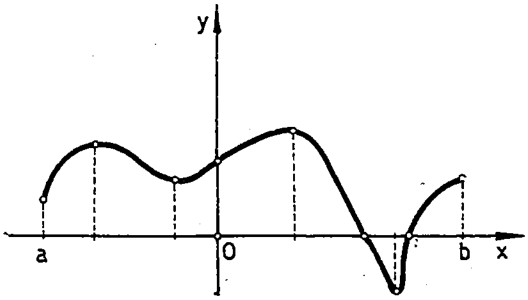
i) $f(x)$ *има непрекинат извод,*

ii) $f'(x)$ *има само конечен број корени.*

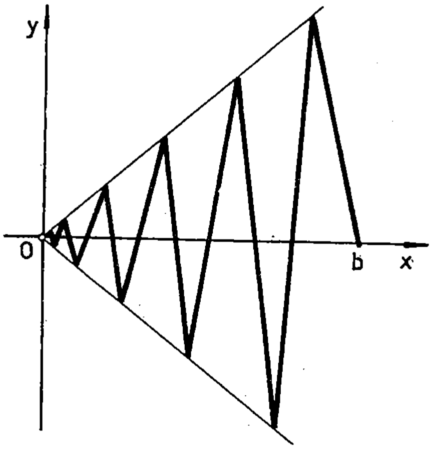
Тогаш функцијата $f(x)$ *е монотона по делови во* (a,b).

Доказ. Ако $x_1, x_2 \in (a,b)$ се две точки во кои изводот $f'(x)$ има спротивен знак, т.е. $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$, тогаш меѓу тие две точки има корен од $f'(x)$ (коешто следува од теоремата за меѓувредност на непрекинатата функција). Поради тоа, меѓу два последователни корени на изводот, неговиот знак не се менува: или е тој позитивен, или е негативен во целиот тој интервал. Но, тогаш, според Теоремата 2. од разделот 4. 1., $f(x)$ или расте или опаѓа меѓу два последователни корени. □

Од оваа теорема следува дека: полиномите, дробно - рационалните и ирационалните функции се монотони по делови. Истото тоа важи за поголемиот број функции што обично се среќаваат во анализата. **)



Црт. 8.



Црт. 9.

ВЕЖБИ

1. Дадена е функцијата:

а) $f(x)=x^2-2x+1$; б) $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Покажи дека $f(x_1)<f(2)<f(x_2)$, ако $x_1<2<x_2$ и x_1, x_2 се "доволно близу" до 2.

2. Покажи дека дадената функција $f(x)$ строго расте во целиот интервал во кој е дефинирана.

а) $f(x)=shx$; б) $f(x)=\ln x$; в) $f(x)=\arcsin x$.

3. Провери која од следниве финкции (строго) расте односно опаѓа во наведениот интервал:

а) $y=arcctgx$ во $(-\infty,+\infty)$; б) $y=x^2-2x$ во $(1,+\infty)$;

в) $y=x^2-2x$ во $(0,+\infty)$; г)* $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 0, \\ x, & x<0. \end{cases}$ во $(-\infty,+\infty)$.

4. Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases} 1/x, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Покажи дека:

а) $f'(x)<0$ за секој $x\neq 0$ б) $f'(0)$ не постои;

в) $f(x)$ не е опаѓачка во интервалот $(-\infty,+\infty)$.

Дали последниот факт е во противречност со теоремата 2?

Во задачите 5 - 14 најди ги интервалите на растење и опаѓање на дадените функции. Притоа се претпоставува дека тие интервали треба да се содржат во дефиниционото множество на функцијата и да бидат "максимални" (што е можно поголеми).

5. $f(x)=2x-x^2$.

6. $f(x)=chx$.

7. $f(x)=2x^3-3x^2-12x$.

8. $f(t)=\frac{t^2}{2}+3t^{1/3}$

9. $g(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

10. $h(t)=t^2(1-t)^{1/3}$.

11. $\varphi(s)=\frac{s}{3}+s^{2/3}-3s^{1/3}$.

12. $\psi(z)=3z^{1/3}-5z^{1/5}$.

13. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

14. $g(y)=y^4-2y^2+4$.

4. 2. МАКСИМУМИ И МИНИМУМИ

Ако некоја функција $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b) и ако $f(x_0)$ е екстрем за $x_0 \in (a,b)$, тогаш, според теоремата на Ферма, $f'(x_0)=0$. Обратното, меѓутоа, како што забележавме порано, не мора да биде точно. Заради тоа се наложува задачата за определување дополнителни услови, при кои од диференцијабилноста на $f(x)$ во близина на x_0 би следувало дека $f(x_0)$ е екстрем. Тоа е содржината на следнава теорема:

Теорема 1 (*Доволен услов за екстрем*). *Нека $f(x)$ е непрекината функција во интервалот (x_0-h,x_0+h) и диференцијабилна за секој x во овој интервал, освен можеби за x_0. Точни се следниве тврдења:*

1.° *Ако $f'(u)f'(v)<0$ за секои $u\in(x_0-h,x_0)$ и $v\in(x_0,x_0+h)$, тогаш $f(x_0)$* е екстрем;

а) *за $f'(u)>0$ и $f'(v)<0$ тој екстрем е максимум,*

б) за $f'(u)<0$ и $f'(v)>0$ тој екстрем е минимум.

2.° *Ако $f'(u)f'(v)>0$ за секои $u\in(x_0-h,x_0)$ и $v\in(x_0,x_0+h)$, тогаш $f(x_0)$ не е екстрем.*

Геометриски, теоремава е речиси очигледна ако се има предвид теоремата 2 од разделот **4. 1.** (црт. 1 - 3).

Доказ. Ќе го докажеме само тврдењето под 1.° а). Тврдењата 1.° б) и 2.° се докажуваат аналогно.

Да претпоставиме дека $f'(u)>0$ и $f'(v)<0$ за секое $u\in(x_0-h,x_0)$, $v\in(x_0,x_0+h)$. Функцијата $f(x)$ ги задоволува претпоставките од теоремата на Лагранж во однос на $[x_1,x_0]$ и $[x_0,x_2]$, каде што $x_1\in(x_0-h,x_0)$, $x_2\in(x_0,x_0+h)$. Според тоа имаме:

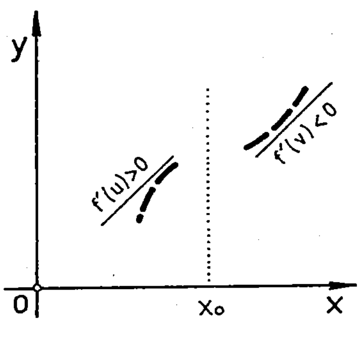
$$f(x_0)-f(x_1)=(x_0-x_1)f'(u_0),\quad u_0\in(x_1,x_0),$$

$$f(x_2)-f(x_0)=(x_2-x_0)f'(v_0),\quad v_0\in(x_0,x_2).$$

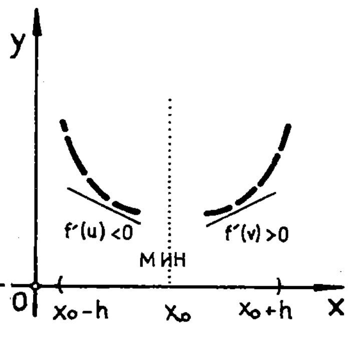
Од првото од овие равенства, поради $x_0-x_1>0$ и $f'(u_0)>0$, се добива дека $f(x_0)>f(x_1)$, додека од второто равенство, аналогно, се добива дека $f(x_0)>f(x_2)$, па $f(x_0)$ е максимум. □

Од изнесеното и од теоремата на Ферма, можеме да го извлечеме следниов заклучок:

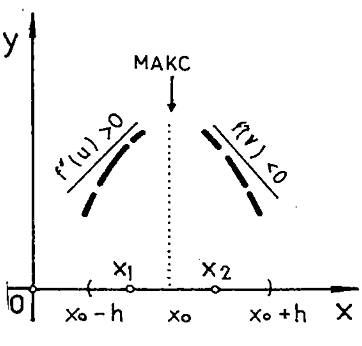
Екстремните точки на функцијата $f(x)$ треба да се бараат меѓу оние точки x_0 за кои е или $f'(x_0)=0$ (кога $f(x)$ е диференцијабилна во x_0), или, пак, $f(x)$ нема (конечен) извод во x_0.



Црт. 1.



Црт. 2.



Црт. 3.

Пример 1. *Да ги најдеме точките на екстрем на функцијата:*

$$y = x^2 - 4|x-1| + 2.$$

Оваа функција можеме да ја претставиме вака:

- за $x<1$: $\quad y_1 = x^2 + 4x - 4 + 2 = (x+2)^2 - 6,$

- за $x>1$: $\quad y_2 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2.$

Да ги најдеме точките во кои $y' = 0$ и точките во кои y' не постои. Имаме:

$$y_1' = 2(x+2) = 0, \quad x_1 = -2, \quad (x_1 < 1),$$

$$y_2' = 2(x-2) = 0, \quad x_2 = 2, \quad (x_2 > 1),$$

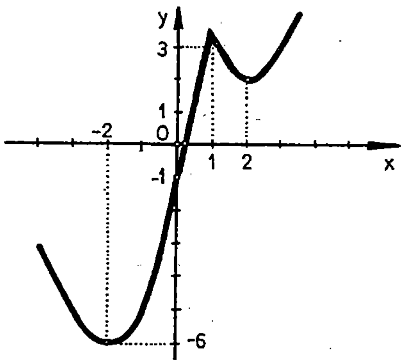
а бидејќи $y_1'(1^-) = 6^-$ и $y_2'(1^+) = -2^-$, следува дека $y = y(x)$ нема извод во точката $x_3 = 1$. Натаму, за $0 < \delta < 1$, имаме:

$y_1'(-2-\delta) = -2\delta < 0, \quad y_1'(-2+\delta) = 2\delta > 0,$ па $y(-2) = -6$ е минимум;

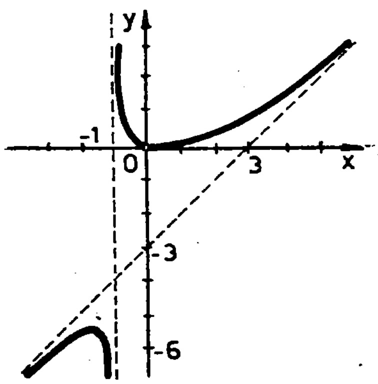
$y_2'(2-\delta) = -2\delta < 0, \quad y_2'(-2+\delta) = 2\delta > 0,$ па $y(2) = 2$ е минимум;

$y_1'(1-\delta) = 2(3-\delta) > 0, \quad y_2'(1+\delta) = 2(-1+\delta) < 0,$ па $y(1) = 3$ е максимум.

Значи: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ се точки на минимум, а $x_3 = 1$ е точка на максимум. Графикот на функцијата е претставен на црт. 4.



Црт. 4.



Црт. 5.

Во примерот 2, I. 5. 8, од непрекинатоста заклучивме дека постојат екстреми, но не бевме во состојба нив да ги најдеме. Со помош на погоре добиените резултати, тие екстреми би можеле да ги најдеме. Овде ќе разгледаме и еден пример, на кој ќе покажеме како може да се применат овие резултати за испитување на функциите.

Пример 2. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

Дефиниционата област е $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Правата $x=-1$ е асимптота, при што добиваме дека $\lim\limits_{x\to-1^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} y=+\infty$. Исто така, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$. Поради $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)=-3$, добиваме дека $y=x-3$ е друга асимптота.

Го наоѓаме изводот $y'=\dfrac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$.

Функцијата е диференцијабилна во секоја точка од дефиниционата област, од што следува дека екстремите можат да постојат само ако $y'(x)=0$, т.е. за $x_1=0$ и $x_2=-4$. За доволно мал позитивен ε имаме: $y'(-\varepsilon)<0$, $y'(\varepsilon)>0$, $y'(-4-\varepsilon)>0$, $y'(-4+\varepsilon)<0$. Според тоа, $y(0)=0$ е минимум, а $y(-4)=-\dfrac{256}{27}$ е максимум.

Да ги претставиме добиените резултати со една шема, а потоа да го скицираме графикот на функцијата (црт. 5.).

x	$-\infty$		-4		1	-1		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-9\frac{13}{27}$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	

↗ функцијата расте

↘ функцијата опаѓа

ВЕЖБИ

Во задачите 1 - 6 најди ги сите локални максимуми и минимуми на зададените функции.

1. $f(x)=x^3+3x^2-9x.$

2. $g(x)=2x^3-15x^2+36x+5.$

3. $f(x)=x^2-|2x-1|+1.$

4. $g(x)=|1-x^3|.$

5. $f(x)=\dfrac{2x-1}{1+x^2}.$

6. $g(x)=\sqrt[3]{3x-x^3}.$

За дадената функција, во задачите 7 - 16, одреди ги:

а) доменот,

б) асимптотите,

в) интервалите на монотоност,

г) екстремите

Потоа, да се скицира графикот.

7. $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$

8. $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$

9. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}.$

10. $y=\sin^4 x+\cos^4 x.$

11. $y=x\cdot\ln x.$

12. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

13. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$

14. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}.$

15. $y=(1+x)^{1/x}.$

16. $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$

Да се скицираат кривите, дадени со параметарските равенки (17 - 18), составувајќи, претходно, соодветни таблици.

17.* $x=2t-t^2,\ \ y=3t-t^3.$

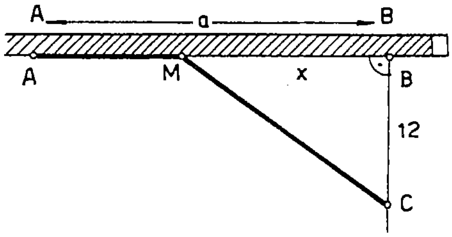
18.* $x=\dfrac{t^2}{t-1},\ \ y=\dfrac{t}{t^2-1}.$

4. 3. ЗАДАЧИ ЗА НАЈМАЛА И НАЈГОЛЕМА ВРЕДНОСТ

Во математиката и во нејзините примени, многу често се среќава задачата: да се испита дали дадена функција $f(x)$ има најголема вредност (НГВ f), односно најмала вредност (НМВ f), во својот домен или во дел од доменот.

Ако доменот (односно разгледуваниот дел) е сегмент $[a,b]$, тогаш, според теоремата на Ваерштрас, функцијата има и НГВ и НМВ. Начинот на добивање на тие вредности, во случајот кога функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во неговата внатрешност (a,b), го разгледавме во **3. 1.** (Т. 2, Пр. 2 и вежбите 9 - 13). Овде ќе го разгледаме уште следниов

Пример 1. *Моторен чамец се движи по права река со брзина* $13\,km/h$, *од точката* A *кон точката* B *(црт. 1). На кое место* M *треба да се симне човекот од чамецот, за да стигне за најкусо можно вкупно време до точката* C, *оддалечена* $12\,km$ *од точката* B, *ако брзината на пешачењето е* $5\,km/h$?



Црт. 1.

Решение. Прво, забележуваме дека точката M треба да биде меѓу A и B (како на црт. 1). Ако ставиме $a=\overline{AB}$ и $x=\overline{MB}$, тогаш за времето t, што е потребно за човекот да стигне од A до C, ќе имаме:

$$t=\frac{a-x}{13}+\frac{\sqrt{144+x^2}}{5},\text{ при што } x\in[0,a].$$

Функцијата $t(x)$ ги задоволува условите на Т.2 од **3. 1**, при што:

$$t'=-\frac{1}{13}+\frac{x}{5\sqrt{144+x^2}},$$

а лесно се утврдува дека $x=5$ е единственото решение на равенката $t'=0$. Според тоа:

1) НМВ $t(x)$ е најмалиот од броевите

$$t(0)=\frac{a}{13}+\frac{13}{5},\quad t(5)=\frac{a-5}{13}+\frac{13}{5},\quad t(a)=\frac{\sqrt{144+a^2}}{5}$$

за $a>5$ (а тоа е $t(5)$), односно:

2) НМВ $t(x)$ е помалиот од броевите

$$t(0)=\frac{a}{13}+\frac{13}{5},\quad t(a)=\frac{\sqrt{144+a^2}}{5}$$

за $a \leq 5$.

Од сето тоа следува дека за $a > 5$, човекот треба да слезе од чамецот на $5\ km$ пред да стигне до B, а за $a \leq 5$, тој треба да тргне пеш кон C директно од точката A.

(Заклучокот е сосема јасен во случајот 2), додека во 1) се потребни извесни усилби за да се утврди дека $t(5) < t(a)$. Но, ако претходно се воочи дека $t'(0) < 0$, лесно се заклучува дека во $[0,5)$ $t(x)$ опаѓа, а во $(5,a]$ расте, т.е. во $x = 5$ функцијата $t(x)$ има минимум.)

Натаму често ќе ги применуваме следните две својства.

Теорема 1. *Нека функцијата $f(x)$ е непрекината во интервалот (a,b) и нека $x_0 \in (a,b)$ е единствениот број од (a,b) таков што $f(x_0)$ е (локален) екстрем.*

а) Ако $f(x_0)$ е минимум, тогаш тој е НМВ f на (a,b).

б) Ако $f(x_0)$ е максимум, тогаш тој е НГВ f на (a,b).

(Упатство за доказ на оваа теорема е дадено во вежбата 13.) □

Теорема 2. *Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b), x_0 е единственото решение на равенката $f'(x)=0$, такво што $x_0 \in (a,b)$, и нека*

$$A = \lim_{x \to a^+} f(x), \quad B = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

а) Ако $f(x_0) \leq A$ и $f(x_0) \leq B$, тогаш $f(x_0)$=НМВ f во (a,b).

б) Ако $f(x_0) \geq A$ и $f(x_0) \geq B$, тогаш $f(x_0)$=НГВ f во (a,b). □

Забелешка 1. Заклучоците на Т. 1 и Т. 2 остануваат во сила и кога за интервалот (a,b) се допушти да биде бесконечен: $a=-\infty$, односно $b=+\infty$ (т.е. и за интервалите $(-\infty,b), (a,+\infty), (-\infty,+\infty)$, при $a,b \in \mathbb{R}$), $a^+ = -\infty$ и $b^- = +\infty$, како и A, B да е некој од симболите $-\infty, +\infty$. Исто така, заклучоците на Т. 1 и Т. 2 важат кога $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ при претпоставка дека $x_0 \in (a,b)$.

Пример 2. *Да ја најдеме НМВ и НГВ на функцијата* $f(x)=x\ln x$ *во целиот домен* $(0,+\infty)$.

Решение. Поради $f(x)\to+\infty$ кога $x\to+\infty$, следува дека не постои НГВ f. Ќе покажеме дека НМВ $f=-1/e=f(1/e)$ и тоа на два начина.

1) Воочуваме, прво, дека $f(x)$ е непрекината и диференцијабилна во $(0,+\infty)$, при што $f'(x)=\ln x+1$. Равенката $f'(x)=0$ има единствено решение $x=1/e$, и $f'(x)<0$ за $x\in(0,1/e)$, $f'(x)>0$ за $x\in(1/e,+\infty)$.

Значи, $f(1/e)$ е единствениот екстрем на $f(x)$ и тоа минимум. Така, според Т. 1, $f(1/e)=-1/e=$НМВ f.

2) Имајќи предвид дека $A=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, $B=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, како и неравенствата: $-1/e<A, -1/e<B$, до горниот заклучок доаѓаме и според Т. 2.

Пример 3. *Да ги определиме броевите* $x,y\in\mathbb{R}$ *така што:*

$$z=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$$

да прими најмала можна вредност при условот $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

Решение. Прво, од условот $(1/x)+(1/y)=1$ следува дека $x,y\neq 0;1$, како и дека $y=x/(x-1)$, па

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2-2x+2}{x^2}=z(x).$$

Задачата се сведува на наоѓање НМВ на функцијата $z(x)$ за вредностите на x различни од 0 и 1, т.е. во $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. Воочуваме дека

$$\lim_{x\to 0} z=+\infty,\ \lim_{x\to 1} z=1,\ \lim_{x\to\pm\infty} z=1.$$

Потоа, од $z'(x)=(2x-4)/x^3$ следува дека $x=2$ е единственото решение на равенката $z'(x)=0$, како и дека:

$$z'(x)>0 \text{ за } x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty),\quad z'(x)<0 \text{ за } x\in(0,1)\cup(1,2).$$

Имајќи предвид дека $f(2)=1/2$, заклучуваме (и според Т. 1 и според Т. 2) дека $\frac{1}{2}$=НМВz во $(1,+\infty)$. Покрај тоа, имаме $z>1$ во $(-\infty,0)\cup(0,1)$, па значи $\frac{1}{2}$= = НМВz во целиот домен. Од сето тоа следува дека $x=2=y$ се бараните броеви.

Пример 4. *Да се најдат НМВ и НГВ на функцијата:*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

во целиот домен.

Решение. Функцијата $f(x)$ е дефинирана во интервалот $(0,2)$ и, притоа,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty=\lim_{x\to 2^-} f(x).$$

Поради тоа, $f(x)$ нема НГВ во $(0,2)$. $f(x)$ е диференцијабилна во $(0,2)$:

$$f'(x)=(1-x)/\left(2x-x^2\right)^{3/2} \text{ и } x=1$$

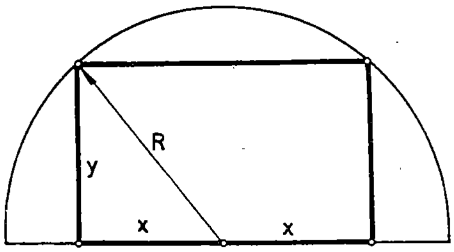
е единственото решение на равенката $f'(x)=0$. Користејќи ја Т. 2, добиваме дека НМВf =1 за $x=1$.

Задачите за најмала и најголема вредност честопати имаат облик на геометриски и аритметички теореми или произлегуваат од проблеми од други области, како што беше случајот со Пр. 1. Во тие случаи, за решавањето на задачата, неопходна е некоја претходна подготовка: на почетната формулација од прашањето треба да му се даде вид на задача за најголема и најмала вредност на некоја функција, зададена во извесен интервал. Таа постапка ќе ја илустрираме и со еден пример од геометријата.

Пример 5. *Во полукруг со радиус r вписан е правоаголник (црт. 2) со најголема плоштина. Да се одредат неговите димензии.*

Решение. Нека $2x$ и y се страните на правоаголникот; плоштината ќе биде $P=2xy$. Од $x^2+y^2=r^2$ добиваме:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}, \text{ па } P=2x\sqrt{r^2-x^2}$$



Црт. 2.

во $(0,r)$. Поради $\lim\limits_{x\to 0^+} P = \lim\limits_{x\to r^-} P = 0$ и фактот што $P'(x)=0$ има единствено решение $x=r/\sqrt{2}$, добиваме дека НГВ$P=r^2$ за $x=r/\sqrt{2}=y$. Значи, димензиите на правоаголникот се:

$$2x=r\sqrt{2} \text{ и } y=r/\sqrt{2}.$$

При барањето најмала и најголема вредност на дадена функција, во некои случаи, позгодно е да се разгледа некоја друга, "поедноставна" функција наместо дадената (се разбира, ако новата функција има екстреми во истите точки како првобитната).

Пример 6. *Да се најде НМВ и НГВ на:*

$$f(x)=\sqrt{(4-x^2)(2+x^2)}$$

во областа на дефинираност.

Решение. Доменот на функцијата $f(x)$ е сегментот $[-2,2]$. Таа добива најмала и најголема вредност во истите точки во кои ги добива и функцијата $g(x)=[f(x)]^2$, т.е.

$$g(x)=(4-x^2)(2+x^2)=8+2x^2-x^4,$$

разгледувана во истиот сегмент $[-2,2]$. Ставајќи $x^2=t$, доаѓаме до функцијата $8+2t-t^2$ на $[0,4]$. Од тоа следува дека НГВ$g=9$ за $t=1$, а НМВ$g=0$ за $t=4$.

Според тоа, функцијата $f(x)$ достигнува најголема вредност во точките $x_1=-1$ и $x_2=1$, при што НГВ$f=f(\pm 1)=3$, а најмала - во краевите на сегментот $[-2,2]$, при што НМВ$f=f(\pm 2)=0$.

Забелешка 2. Слични упростувања можевме да направиме и во Пр. 4 и Пр. 5. Навистина, ако во Пр. 5 ставиме $z=P^2$ и $t=x^2$, доаѓаме до задача за наоѓање НГВ$z(t)$, $z=t(r^2-t)$, во $(0,r^2)$, а од својствата на квадратната функција (дури и без користење на поимот извод) добиваме дека НГВ се добива за $t=r^2/2$, т.е. за $x=r/\sqrt{2}$. Во Пр. 4, ставајќи $g(x)=2x-x^2$ (т.е. $g(x)=1/f^2(x)$), добиваме дека НМВ$f=$(НГВ$g)^{-1/2}$.

ВЕЖБИ

Да се најдат НМВ и НГВ на дадената функција во назначениот интервал (1 - 4).

1. $y=x^3-12x+1,\ [-3,3].$

2. $y=\dfrac{x^2-x+2}{2+x-x^2},\ [-4,4].$

3. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1},\ [0,5].$

4. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1},\ [0,+\infty).$

Да се најдат НМВ и НГВ на дадената функција во нејзиниот домен (5 - 12).

5. $y=x^2\cdot\ln\dfrac{1}{x}.$

6. $y=x^3\cdot\ln x.$

7. $y=x\cdot e^{-x}.$

8. $y=x/\sqrt{x^2+1}.$

9. $f(x)=x\sqrt{2-x^2}.$

10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$

11. $f(x)=\sqrt{(1+2x^2)\cdot(1-x^2)}.$

12. $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}.$

13.* Нека функцијата $f(x)$, определена и непрекината во отворениот интервал (a,b) има минимум во точката $x_0\in(a,b)$ и тој е единствениот екстрем на $f(x)$ во (a,b). Да се докаже дека $f(x_0)$ е НМВ на $f(x)$ во (a,b).

Упатство: Претпостави дека постои точка x_1, таква што $f(x_1)<f(x_0)$ и разгледај го сегментот со краеви x_0 и x_1 - во него $f(x)$ е непрекината, па има НГВ, на пример во точката x_2; x_2 не може да се совпадне со x_0 или со x_1, па $f(x_2)$ е максимум. Тоа значи дека во (a,b) има два екстрема, што претставува противречност.

14. Да се разложи бројот 12 на два собирока така што нивниот производ да биде најголем.

15. Нека x и y се ненегативни броеви и $x^2+y^2=1$.

а) Која е најмалата вредност на изразот $2x^3+y^3$?

б) Која е најмалата вредност на изразот kx^3+y^3, каде што k е позитивна константа?

16. Во правоаголен триаголник со хипотенуза 16 cm и агол од 60° , впишан е правоаголник, чија основа лежи на хипотенузата. Колкави мора да бидат димензиите на правоаголникот, за неговата плоштина да биде најголема?

17. Да се најде најблиската точка на кривата:

а) $y=\sqrt{x^2-10x+21}$ до точката $(1,0)$,

б) $y=x^2$ до правата $y=4x-5$.

18. Од сите правоаголници што имаат дадена дијагонала d, да се најде оној што има најголема плоштина.

19. Кои се најекономичните размери на цилиндричен резервоар (затворен и одозгора и одоздола) со даден волумен V ?

20. Темињата на еден правоаголник се наоѓаат: во координатниот почеток, на x - оската, на y - оската и на параболата $y=4-x^2$. Од сите такви правоагоници во првиот квадрант да се најде оној што има најголема плоштина.

21. Низ точката $A(3,0)$ е повлечена права што ја сече кривата $y=x^2$, $0\leq x\leq 3$, во точката M. Колку мора да биде коефициентот на правецот на правата AM, за да биде најголема плоштината на триаголникот ограничен со таа права, со x - оската и со правата што минува низ M, парарлелно со y - оската?

22. Да се определат димензиите на отворен базен со квадратно дно со волумен 32 m^3 така што за изградбата на неговите ѕидови и дно да се потроши најмало количество материјал.

23. Треба да се направи кутија со волумен 4 500 cm^3, во облик на квадар отворен одозгора, со страни на дното што се однесуваат како 2:1. Колкави треба да бидат димензиите на кутијата, за да се потроши најмалку материјал?

24. Да се најде точка на кривата $y=x^{3/2}$ што е најблиска до точката $(4,0)$.

II. 5. ВТОР ИЗВОД И НЕГОВИ ПРИМЕНИ

5. 1. ВТОР ИЗВОД

Ако една функција $f(x)$ е диференцијабилна на еден интервал (или на унија од интервали), тогаш изводот $f'(x)$ е функција, $g(x)$, дефинирана на тој интервал. Функцијата $g(x)$ може да биде диференцијабилна на дадениот интервал, или на дел од него. Во тој случај, изводот $g'(x)$ се вика **втор извод** на $f(x)$ и се означува со $f''(x)$.

Според тоа:

$$f''(x)=(f'(x))', \text{ т.е. } y''=(y')'.$$

Во таа смисла, изводот $f'(x)$ се вика **прв извод** на $f(x)$.

На пример, за $y=x^3-6x^2+7x$ имаме:

$$y' = 3x^2 - 12x + 7, \quad y'' = 6x - 12.$$

Да забележиме дека, ако $y'' > 0$ во некој интервал, тогаш функцијата y' расте во тој интервал, а ако $y'' < 0$, тогаш y' опаѓа (теорема 2 од **4. 1.**)

Сега ќе видиме како може да се искористи вториот извод за да се утврди дали постои екстрем на $f(x)$ во некоја точка x_0. Притоа се користи знакот на вториот извод во самата точка x_0. Имено, ќе ја докажеме следнава теорема:

Теорема 1 *(Егзистенција на екстрем преку вториот извод). Нека функцијата $f(x)$ има прв и втор непрекинат извод во интервалот $(x_0 - h, x_0 + h)$ $h > 0$ и нека:*

$$f'(x_0) = 0 \quad и \quad f''(x_0) \neq 0.$$

Тогаш, $f(x_0)$ е екстрем, при што:

а) *за $f''(x_0) < 0$, $f(x_0)$ е максимум,*

б) *за $f''(x_0) > 0$, $f(x_0)$ е минимум.*

Доказ. Нека е, на пример, $f''(x_0) < 0$. Поради непрекинатоста на $f''(x)$, според Т. 1 од **I. 5. 6**, постои околина на x_0 во која $f''(x) < 0$, т.е. $(f'(x))' < 0$; според Т. 1 од **4. 1**, тоа значи дека функцијата $f'(x)$ опаѓа во точката x_0. Бидејќи $f'(x_0) = 0$, следува дека постои $\delta > 0$ $(\delta < h)$, таков што:

$$f'(u) > 0 \text{ за } x_0 - \delta < u < x_0 \quad \text{и} \quad f'(v) < 0 \text{ за } x_0 < v < x_0 + \delta.$$

Од ова, пак, според Т. 1 од **4. 2** заклучуваме дека $f(x_0)$ е максимум.

На ист начин се расудува и во случајот $f''(x_0) > 0$. □

За илустрација ќе разгледаме два примера.

Пример 1. *Да ги најдеме локалните максимуми и минимуми на функцијата*

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

Имаме: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, па

$$f'(x) = 0 \text{ за } x_1 = -1,\ x_2 = 1 \text{ и } x_3 = 0.$$

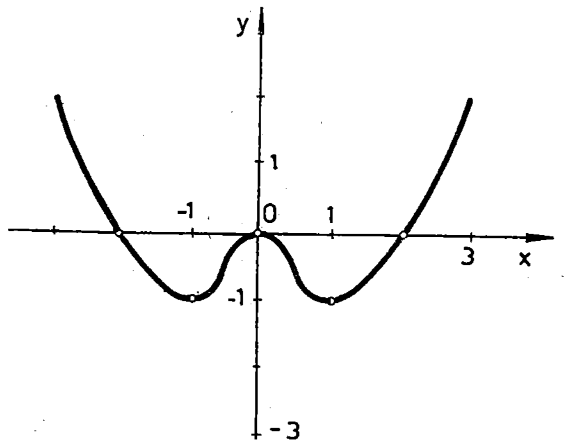
За да утврдиме дали овие три стационарни точки се точки на екстрем, ќе ја искористиме теоремата 2. Имаме: $f''(x)=12x^2-4$ и

$f''(-1)=8>0$, па $f(-1)=-1$ е минимум,

$f''(1)=8>0$, па $f(1)=-1$ е минимум,

$f''(0)=-4<0$, па $f(0)=0$ е максимум.

На црт. 6. е претставен графикот на функцијата $f(x)=x^4-2x^2$.



Црт. 6.

Пример 2. *За функцијата* $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$ (Пр. 2 од **4. 2**) *имаме:*

$$y'=\frac{x^4+4x^3}{(x+1)^4}=0 \text{ за } x_1=0 \text{ и } x_2=-4, \text{ а } y''=\frac{12x^2}{(x+1)^5}.$$

Бидејќи $y'(-4)=0$, а $y''(-4)=-192/243<0$, според Т.1 заклучуваме дека $y(-4)=-256/27$ е максимум, а до тој заклучок дојдовме и порано (Пр. 2 во **4. 2**).

Теоремата **1** не можеме да ја искористиме за да одговориме на прашањето дали $y(0)=0$ е екстрем, затоа што $y''(0)=0$ (т.е. не се исполнети условите на Т. 1). Сепак, поради $y''>0$ во $(-1,0)\cup(1,+\infty)$, y' расте во точката $x_0=0$, па поради $y(0)=0$, добиваме дека $y(0)$ е минимум. (Се разбира, до истиот заклучок би можело да се дојде само со анализа на првиот извод.)

Пример 3. *Да се вратиме на Пр. 1 од 4.3. во случајот $a>5$. Таму видовме дека $t'(x)=0$ за $x=5$, а заклучокот дека $t(5)=\frac{a-5}{13}+\frac{13}{5}$ е бараната НМВ е последица на секое од следниве две вистинити тврдења (за $a>5$):*

1) $\frac{a-5}{13}+\frac{13}{5}<\frac{\sqrt{144+a^2}}{5}$;

2) $t(5)=\frac{a-5}{13}+\frac{13}{5}$ е минимум за $t(x)=\frac{a-x}{13}+\frac{\sqrt{144+x^2}}{5}$.

До заклучокот 2) дојдовме со испитување на знакот на изводот:

$$t'(x)=-\frac{1}{13}+\frac{x}{5\sqrt{144+x^2}},$$

при што претходно добивме дека $x=5$ е единственото решение на равенката $t'(x)=0$. Од вториот извод,

$$t''(x)=144/5\left(144+x^2\right)^{3/2} \text{ и } t''(5)>0,$$

заклучуваме дека $t(5)$ е минимум.

Со неколку геометриски примени на вториот извод ќе се сретнеме и во следните два параграфа, а овде ќе се задржиме уште на толкувањето на вториот извод како забрзување.

Да потсетиме, прво, дека изминатиот пат $s=s(t)$ при некое движење е растечка диференцијабилна функција, при што првиот извод $s'(t)=v(t)$ е брзината на движењето. (Сакајќи "мирувањето" да го сметаме за специјален вид движење, допуштаме $s(t)$ да биде неопаѓачка функција.)

Како што е обичај во механиката, количникот:

$$a_{cp}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

се вика **средно забрзување** на движењето[1], а граничната вредност:

---

[1] Да се види **1. 3.**

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=v'(t)=s''(t) \qquad (1)$$

- **забрзување** на движењето. (Во случај кога $s''(t)<0$, тоа е, всушност, **забавување**.)

Значи, *вториот извод на патот по времето може да се толкува како забрзување на движењето.*

Пример 4. а) *При рамномерно праволиниско движење имаме:*

$$s=c\cdot t \;\; (c=const.), \;\; v=s'=c, \;\; a=s''=0$$

(т.е. "нема забрзување").

б) При $s=t^3+4t$, $t\in[0,+\infty)$, имаме $v=s'=3t^2+4$, $a=6t$

- забрзувањето е пропорционално со времето.

в) При $s=100t-t^2$, $t\in[0,50]$, имаме $v=100-2t$, $a=-2$

- забрзувањето е "забавување".

Во врска со забрзувањето a е **вториот Њутнов закон**, којшто се однесува на движењето на честица со маса m по некоја права. Во секој момент на времето, забрзувањето a на таа честица и силата F што дејствува на неа се сврзани со релацијата:

$$F=m\cdot a. \qquad (2)$$

При $a>0$, силата F е позитивна, т.е. го турка телото во "позитивна" насока. Бидејќи забрзувањето е извод од брзината, Њутновиот закон може да се запише во обликот:

$$F=m\cdot\frac{dv}{dt}. \qquad (2')$$

Силата што го принудува едно тело да паѓа на Земјата се вика **тежина** на телото. Според Галилеј, тело што слободно паѓа секогаш има едно исто забрзување g. Затоа, означувајќи ја тежината со Q, имаме:

$$Q=m\cdot g. \qquad (3)$$

Значи, тежината на телото зависи само од неговата маса.

(Да забележиме дека патот при слободно паѓање е $s=g\cdot t^2/2$. Оттука:

$$s''=g. \qquad (4)$$

Според тоа, законот на Галилеј добива вид: *забрзувањето на сите тела при слободно паѓање имаат една иста константна вредност.)*

Кога движењето се врши по x - оската (или, воопшто, по права) според законот $x = x(t)$, вториот извод се зема по дефиниција да е забрзување на движењето. (Притоа, овде не се прават никакви ограничувања за функцијата $x(t)$, освен што се бара постоење на нејзиниот прв и втор извод.)

** Во случај на произволно рамнинско движење, дадено со равенките:

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

проекциите M_x и M_y од материјалната точка M (што ја земаме како претставник на движењето) врз координатните оски се движат праволиниски, а нивните забрзувања $a_x = x''(t)$, $a_y = y''(t)$ се компоненти на забрзувањето $\vec{a}$. Како и брзината, забрзувањето $\vec{a}$ е вектор, но за разлика од брзината, тој не е паралелен со тангентата. **

Ќе изведеме, сега, формула за наоѓање втор извод на функција, зададена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$. Како и порано, со $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ ќе ги означуваме првите и вторите изводи на x и y, сметајќи ја t за независно променлива, додека y', y'' ќе бидат ознаки за изводите на функцијата $y = y(x)$ определена со горните параметарски равенки.

Со помош на правилото за извод од инверзна функција, во разделот **2. 3** покажавме дека $y' = \dot{y}/\dot{x}$. Од тоа, користејќи го правилото за извод од сложена функција (**2. 2**) и Лајбницовата ознака за извод (**1. 4**), добиваме:

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}}, \text{ т.е.}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}. \tag{5}$$

Пример 5. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ (**циклоида**);

$$\dot{x} = 1 - \cos t, \dot{y} = \sin t, \ddot{y} = \cos t, \ddot{x} = \sin t;$$

$$y'' = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \sin t}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4\sin^4 2t}.$$

за изводите $x' = x'_y$, $x'' = x''_y$ имаме:

$$x' = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}, \quad x'' = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}. \tag{5'}$$

Така, за дадениот пример добиваме:

$$x'' = \frac{\cos t - 1}{\sin^3 t}.$$

Вториот извод од имплицитно дадена функција се наоѓа по правилото за извод од сложени функции.

Пример 6. $x^2 - y^2 = 1, \quad y = y(x);$

$$x - yy' = 0, \quad y' = \frac{x}{y}; \quad 1 - y'^2 - yy'' = 0, \quad y'' = \frac{1 - y'^2}{y} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 4** да се најде y''.

1. $y = x^3 + 3x^2 - 5.$

2. $y = e^{-x^2}.$

3. $y = \cos^2 x.$

4. $y = (1 + x^2) arctg x.$

5. Да се покаже дека:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

при што се претпоставува дека $u = u(x)$, $v = v(x)$ и нивните први и втори изводи постојат во соодветен интервал.

Во задачите **6 - 8** да се најде $g''(a)$ за дадените податоци.

6. $g(x) = x^3 f(x),\ a = 1,\ f(1) = 3,\ f'(1) = -1/2,\ f''(1) = -4.$

7. $g(x) = f(x)h(x),\ a = 0,\ f(0) = 2,\ f'(0) = -4,\ f''(0) = 1/5,\ h(0) = 10,\ h'(0) = 2,\ h''(0) = -1.$

8. $g(x) = \sqrt{1 - f(x)},\ a = -2,\ f(-2) = -3,\ f'(-2) = 3,\ f''(-2) = 5.$

9. Да се повтори работата во Пр. 2 и Пр. 3 од разделот **4. 3**, со примена на втор извод.

Во **10 - 11** провери дали функцијата y ја задоволува дадената "диференцијална" равенка.

10. $y = xe^{2x},\ y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$

11. $y = e^{3x} \sin 2x,\ y'' - 6y' + 13y = 0.$

Во задачите **12 - 15** најди го $y''(x)$ за соодветната функција $y(x)$ зададена параметарски или имплицитно.

12. $x = 5\cos 2t, \ y = 5\sin 2t.$

13. $x = arctgt, \ y = \ln(1+t^2).$

14. $x^2 + y^2 = 1.$

15. $y = x + chy.$

Во **16 - 17**, да се замени променливата x со нова променлива t.

16. $(1-x^2)y'' - xy' + a^2 y, \ x = \cos t.$

17. $x^2 y'' + 3xy' + y, \ x = e^t.$

18. Подвижна честица со маса од $50g$, во некој момент има забрзување $6 cm/s^2$. Колкава е силата што дејствува на честицата во тој момент?

19. Тело со маса $20g$ го туркаат по хоризонтална подлога без триење во правецот на некоја права. Брзината на телото се изразува со формулата $v = (t^2/5) + 2t, 0 \le t \le 10$, каде што v се мери во cm/s, а t - во секунди. На што е еднаква силата, применета на телото при $t=1$? При $t=5$? При $t=10$?

20. Зрно со маса $40g$ излетува од оружје во хоризонтален правец и веднаш влегува во леплива течност, каде што се движи праволиниски. Растојанието, поминато од зрното се изразува со формулата $s = 10-(10-t)^4$ при $0 \le t \le 10$, каде што s се мери во сантиметри, а времето t во секунди. Со колкав отпор (со колкава сила) течноста му се спротивставува на зрното при $t=1$? При $t=7$? $t=9$?

21. Тело со маса од $400 kg$ е сместено во хидрауличен лифт, којшто го турка нагоре. Со каква сила треба лифтот да дејствува на телото, за тоа да се движи со константно забрзување од $1/2 \ m/s^2$?

5.2. КОНКАВНОСТ, КОНВЕКСНОСТ, ПРЕВОИ

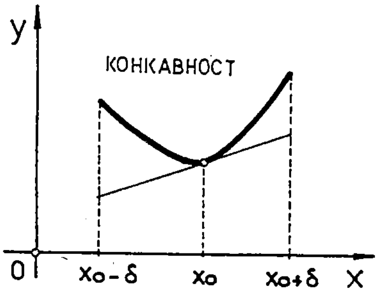
Овде ќе продолжиме со примената на втор извод.

Знакот на вториот извод на една функција обично дава дополнителна информација за таа функција и за природата на "искривеноста" на нејзиниот график. Во таа смисла, корисно е воведувањето на наредните неколку поими.

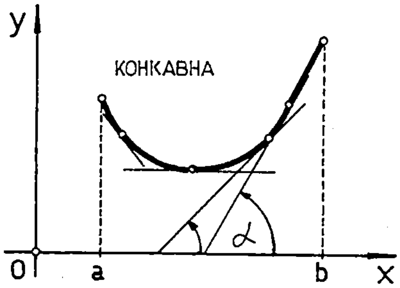
Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во точката $x = x_0$ и нека кривата (L) е нејзиниот график.

За кривата (L) велиме дека е **конкавна или длабната нагоре** (т.е. во однос на позитивниот дел на y - оската) **во точката** $x = x_0$, ако постои околина на

x_0, $|x-x_0|<\delta$, таква што, при $x \neq x_0$, (L) да лежи над тангентата, повлечена во точката $x=x_0$ (црт. 1.). За (L) велиме дека е **конкавна** (или **длабната**) **во интервалот** (a,b) ако таа е конкавна во секоја точка $x \in (a,b)$ (црт. 2.).

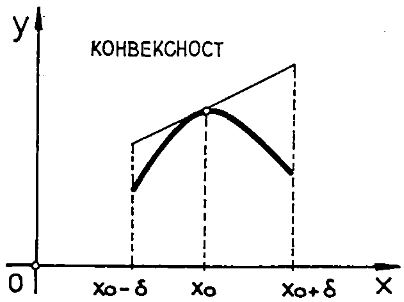


Црт. 1.

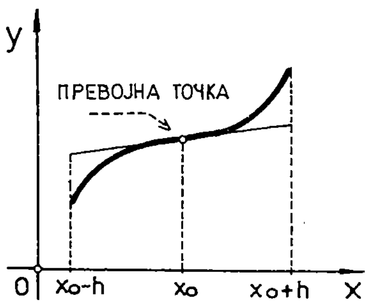


Црт. 2.

За кривата (L) велиме дека е **конвексна** или **бабната нагоре** (т.е. во однос на позитивната насока на y- оската) **во точката** $x=x_0$, ако постои околина на x_0, $|x-x_0|<\delta$, таква што, при $x \neq x_0$, (L) лежи под тангентата на (L) повлечена во точката $x=x_0$ (црт. 3.). За (L) велиме дека е **конвексна** (или **бабната**) **во интервалот** (a,b), ако таа е конвексна во секоја точка $x \in (a,b)$.



Црт. 3.



Црт. 4.

Точката $x = x_0$ се вика **превојна точка** (или **превој**) на кривата (L), ако во доволно мала околина на x_0, $|x - x_0| < \delta$, при $x < x_0$ и $x > x_0$ (L) е расположена на разни страни од тангентата во x_0 (и, следствено, ја менува насоката на искривеност). Еден таков случај е претставен на црт. 4.

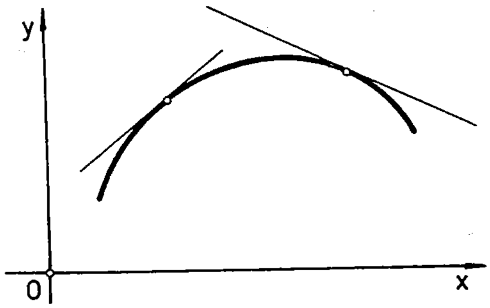
За функцијата $f(x)$ што има втор извод, претходните поими се тесно сврзани со знакот на $f''(x)$.

Имено, нека функцијата $f(x)$ има втор извод во некој интервал. Ако во тој интервал:

$$f''(x) > 0,$$

тогаш функцијата $f'(x)$ расте. Тоа значи дека при движењето по графикот на $f(x)$ одлево надесно, наклонот на тангентата (т.е. коефициентот на праве-цот) расте: тангентата се врти во насока обратна од вртењето на стрелките кај часовникот (црт. 2.). Притоа, графикот "се свиткува", останувајќи (во таа околина) над тангентата, т.е. тој е конкавен.

Аналогно, ако $f''(x) < 0$, $f'(x)$ опаѓа, тангентата се врти како стрелката кај часовникот и графикот лежи под своите тангенти, т.е. тој е конвексен (црт. 5.).



Црт. 5.

Овие согледувања ќе ги формулираме во вид на теорема.

Теорема 1 (*Доволни услови за конкавносӣ / конвексносӣ.*) *Нека функцијаӣа* $f(x)$ *има ӣрв и вӣор неӣрекинаӣ извод во инӣервалоӣ*

$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\delta>0$, *и нека* (L) *е графикот на* $f(x)$

а) Ако $f''(x_0)>0$, *тогаш* (L) *во точката* $(x_0, f(x_0))$ *е конкавна.*

б) Ако $f''(x_0)<0$, *тогаш* (L) *во точката* $(x_0, f(x_0))$ *е конвексна.* □

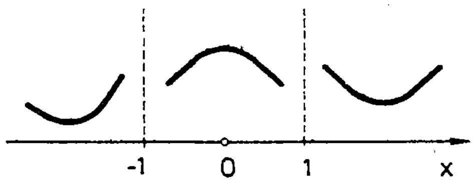
(Аналитички доказ на оваа теорема ќе дадеме на крајот од овој раздел.)

Оваа теорема ни овозможува да ја испитаме природата на искривувањето кај графикот на една таква функција, т.е. да ги одредиме интервалите на конкавност, односно конвексност.

Пример 1. *Да се најдат интервалите на конкавност / конвексност за функцијата:*

$$y=x^4-6x^2+8.$$

Решение. Имаме: $y'=4x^3-12x$, $y''=12(x^2-1)$; за $|x|<1$ имаме $y''(x)<0$, а за $|x|>1$, пак, $y''(x)>0$. Врз основа на теорема 1 заклучуваме дека графикот на дадената функција, во интервалот $(-1,1)$ е конвексен, а во интервалите $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$, тој е конкавен. На црт. 6. е претставена природата на искривеноста на графикот во назначените интервали.



Црт. 6.

Како последица од теоремата 1 добиваме:

Теорема 2 *(Потребен услов за превој.) Ако функцијата* $f(x)$ *има прв и втор непрекинат извод во интервалот* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, *и ако точката* $(x_0, f(x_0))$ *е превој на нејзиниот график, тогаш* $f''(x_0)=0$.

Навистина, ако $(x_0, f(x_0))$ е превојна точка, тогаш не може да биде $f''(x_0) > 0$ (затоа што тогаш, според теорема 1, графикот би бил конкавен во таа точка); аналогно, не може да биде ни $f''(x_0) < 0$. Преостанува, значи, да биде $f''(x_0) = 0$. □

Од теорема 1 следува дека: *превојните точки на графикот на дадена функција $f(x)$ треба да се бараат меѓу точките x за кои:*

а) $f''(x) = 0$, б) $f''(x) = \infty$ или в) $f''(x)$ *не постои.*

За точките што задоволуваат некои од условите а) - в) се вели дека се **критични за превој**.

Да забележиме дека не мора во секоја точка, во која е исполнет некој од тие услови, да има превој.

Пример 2. *За функцијата:*

$$y = x^4$$

имаме: $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$ *и* $y'' = 0$ *при* $x = 0$, *но за* $x = 0$ *како што знаеме, графикот на функцијата нема превој, туку е конкавна.*

Значи, потребниот услов за превој во теоремата 2, не е доволен. Следната теорема дава критериум за постоење или непостоење превој во точката x_0.

Теорема 3 (*Доволен услов за превој*). *Нека функцијата $f(x)$ има непрекинат прв извод во некоја околина на точката x_0 (а и во самата точка x_0) и нека, за некој $h > 0$, $f(x)$ има втор извод во двата интервала $(x_0 - h, x_0), (x_0, x_0 + h)$ (притоа, во x_0, вториот извод може и да не постои). Ако:*

$$f''(u) \cdot f''(v) < 0,$$

за секој $u \in (x_0 - h, x_0)$ и за секој $v \in (x_0, x_0 + h)$, тогаш точката $M(x_0, f(x_0))$ е превој за графикот на $f(x)$. Ако, пак, $f''(u) \cdot f''(v) > 0$ (за u и v од назначените интервали), тогаш $M(x_0, f(x_0))$ не е превојна точка. □

Со други зборови:

Теорема 3'. *Ако $f'(x_0)$ постои и е конечен, а $f''(x)$ го менува знакот при премин на x низ точката x_0, тогаш графикот на функцијата $f(x)$ има превој во точката $M(x_0, f(x_0))$.* Ако, пак, *$f''(x)$ го запазува знакот, тогаш нема превој.*

(Оваа теорема, од геометриски причини можеме да ја сметаме за очигледна последица на теоремата 1. Да забележиме дека прецизен доказ на теоремата 3 може лесно да се даде ако се искористи теоремата 4, подолу.) □

Пример 3. *За функцијата $y = x^{5/3}$ имаме:*

$$y' = \frac{5}{3}x^{2/3} \quad y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Во точката $x = 0$, вториот извод е бесконечен (а првиот извод е $y'(0) = 0$), па таа точка е **критична за превој**.

За $x < 0$ имаме $y''(x) < 0$, а за $x > 0$: $y''(x) > 0$, што значи дека y'' го менува знакот кога x ќе "премине" преку точката $x = 0$. Според теоремата 3, точката $(0,0)$ е превојна за графикот на дадената функција.

Пример 4. *За функцијата $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$ имаме:*

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}, \quad y'' = \frac{12x^2}{(x+1)^5}.$$

Вториот извод е нула $(y'' = 0)$ за $x = 0$, па $x = 0$ е критична точка за превој.

За $x > 0$ имаме $y''(x) > 0$, а и за $x < 0\,(-1 < x < 0)\, y''(x) > 0$, што значи дека y'' не го менува знакот кога x ќе премине преку точката $x = 0$. Според теоремата 3, графикот на функцијата нема превој во точката $x = 0$.

Да забележиме дека во точката $x = -1$ вториот извод е бесконечен и, во нејзина близина, го менува знакот ($y'' < 0$ за $x < -1$, а $y'' > 0$ за $x > -1$), т.е. природата на искривеноста на графикот се менува. Сепак, графикот нема превој во точката $x = -1$, затоа што функцијата не е дефинирана во таа точка.

┌** Доказ на теоремата 1.

Ќе докажеме, прво, една теорема што ќе ја искористиме за докажување на теоремата 1.

Теорема 4. *Нека функцијата* $f(x)$ *има прв извод во интервалот* (x_0-h, x_0+h) *и нека:*

$$g(x)=f(x)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)-f(x_0).$$

Тогаш графикот (L) *на* $f(x)$:

(i) *е конкавен* $\Leftrightarrow g(x_0)=0$ *е минимум;*

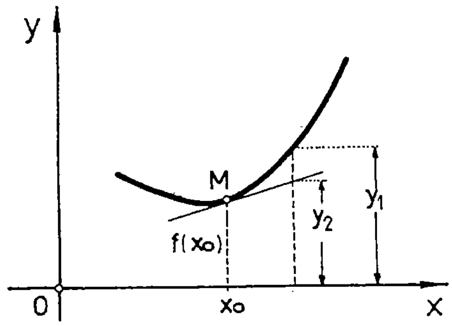
(ii) *е конвексен* $\Leftrightarrow g(x_0)=0$ *е максимум;*

(iii) *има превој во точката* $M(x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow g(x_0)=0$ *не е екстрем на функцијата* $g(x)$.

Доказ. Ако ставиме:

$$y_1=f(x),\quad y_2=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0),$$

воочуваме дека $g(x)=y_1-y_2$ е разлика меѓу ординатите на точките од кривата (L) и од тангентата на таа крива во точката $M(x_0, f(x_0))$ (црт. 7). Имајќи го тоа предвид, како и дефинициите на соодветните поими, лесно може да се комплетира доказот на теоремата.



Црт. 7.

Сега ќе ја докажеме теоремата 1. Ако $g(x)$ е определена како и во теоремата 4, добиваме:

$$g'(x)=f'(x)-f'(x_0) \text{ и } g''(x)=f''(x).$$

(Да се внимава на тоа дека $f'(x_0)$ е константа!). Според тоа, имаме: $g'(x_0)=0$ и $g''(x_0)=f''(x_0)$. Ако $g''(x_0)=f''(x_0)>0$, тогаш (според теоремата 3 од 2. 4.), $g(x_0)=0$ е минимум, па значи (L) е конвексна во $M(x_0, f(x_0))$; од исти причини, за $g''(x_0)=f''(x_0)<0$ (L) е конкавна во M. **]

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 10** да се најдат интервалите на конкавност / конвексност, како и превојните точки на графикот од дадената функција.

1. $y=x^3-3x^2+1$. **2.** $y=x^3-12x+11$.

3. $y=x^4-6x^2+7$. **4.** $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

5. $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$. **6.** $y=(x-2)(x^2+1)^{-1/2}$.

7. $y=e^{1/x}$. **8.** $y=(1+x)^{1/x}$.

9. $y=x^{-1/2}\ln x$. **10.** $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Во задачите **11 - 14** испитај дали графикот на дадената функција има превој во точката $x=0$. Потоа, одреди ги интервалите на искривеност.

11. $y=x^5$. **12.** $y=\ln(1+x)$.

13. $y=x^{4/3}$. **14.** $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

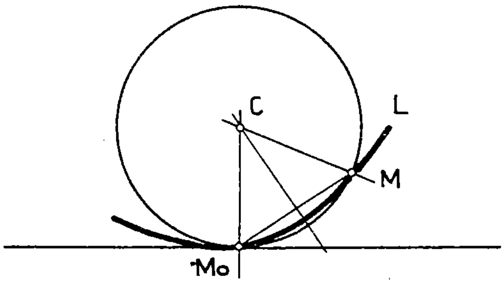
15.* Увери се дека вториот извод на функцијата $y=|1-x^2|$, во точката $x=1$, не постои. Потоа, докажи дека графикот на таа функција, во таа точка има превој.

5. 3. ОСКУЛАТОРНА КРУЖНИЦА. КРИВИНА НА КРИВА

Ќе разгледаме уште еден геометриски проблем за чие разрешување се користи вториот извод.

Нека е дадена кривата (L) и една точка M_0 од таа крива, во која (L) има тангента. Низ точката M_0 минуваат безброј многу кружни линии што имаат иста тангента со (L). Лакот на секоја од нив во околината на M_0 може да се смета за претставник на лакот на (L). Се наложува задачата меѓу сите овие кружници да се определи "најдобриот" претставник на (L) во "близината" на точката M_0.

За таа цел, во близина на M_0, избираме точка M што не лежи на тангентата во M_0 (црт. 1.). Јасно е дека постои само една кружница што минува низ M и M_0, а во M_0 има заедничка тангента со (L). Ако M се менува така што се стреми кон M_0, секако и кружницата се менува. Ако постои определена гранична кружница кога $M \to M_0$, природно е да сметаме дека таа е бараниот најдобар претставник на (L) во точката M_0. За неа велиме дека е **оскулаторна кружница** на (L) во точката M_0.



Црт. 1.

Да разгледаме два примера.

Пример 1. *Да претпоставиме дека* (L) *е кружница, или лак од кружница. Тогаш, за кои било точки* M_0, M *од* (L), *кружницата што минува низ* M *и* M_0, *а во* M_0 *има иста тангента како и* (L), *се совпаѓа со дадената кружница. Според тоа:*

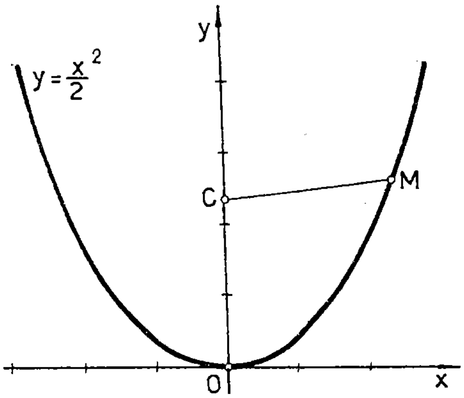
Секоја кружница (L) *се совпаѓа со оскулаторната кружница во која било своја точка.*

(Овој резултат има соодветна аналогија со фактот дека една права се совпаѓа со тангентата во која било своја точка.)

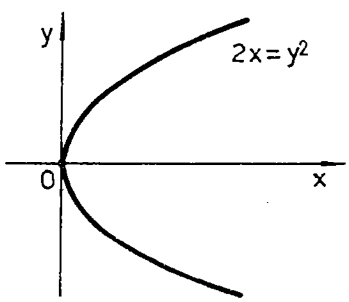
Пример 2. *Да ја определиме оскулаторната кружница на параболата* $y = x^2/2$ *во нејзиното теме* $O(0,0)$.

За таа цел, да избереме точка $M(x,x^2/2)$ од параболата и да ја определиме точката $C(0,q)$ од y- оската, така што да биде $\overline{OC}=\overline{CM}$, т.е. $q=\sqrt{x^2+(q-x^2/2)^2}$ (црт. 2).

По средувањето, се добива $q=1+x^2/4$, т.е. $q\to 1$ кога $x\to 0$. Според тоа, бараната оскулаторна кружница има равенка $x^2+(y-1)^2=1$. Од причини на симетрија, $(x-1)^2+y^2=1$ е равенката на оскулаторната кружница на параболата $2x=y^2$ во нејзиното теме $(0,0)$.



Црт. 2.



Црт. 3.

Следната теорема ни дава доволен услов за егзистенција на оскулаторна кружница како и можност за нејзиното одредување.

Теорема 1 (*за оскулаторна кружница*). *Нека функцијата* $y=f(x)$ *има непрекинати прв и втор извод во точката* $x=x_0$, *при што* $y''\neq 0$. *Тогаш кривата* (L) *што е график на дадената функција има оскулаторна кружница во точката* $M_0(x_0,y_0)$ *чиј центар е* $C(p,q)$ *и радиус* r *:*

$$p=x_0-\frac{y_0'\left(1+y_0'^2\right)}{y_0''},\quad q=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''},\quad r=\frac{\left(1+y_0'^2\right)^{3/2}}{|y_0''|}. \qquad (1)$$

Доказ на оваа теорема ќе биде даден во разделот **6. 5**, а тука ќе извршиме кратка дискусија.

Равенката на оскулаторната кружница го има обликот:

$$(X-p)^2+(Y-q)^2=r^2,$$

каде што p, q, r се определени со (1), а (X,Y) е произволна точка од кружницата.

Применувајќи ги формулите (1) на параболата $y=x^2/2$, при $x_0=0$, добиваме: $y_0=0$, $y'=x$, $y_0'=0$, $y''=1=y_0''$. Според тоа: $p=0$, $q=1$, $r=1$, т.е. го добиваме истиот резултат како и во Пр. 2. Но, формулите (1) не би можеле да се применат на параболата $y^2=2x$ во точката $(0,0)$, бидејќи овде имаме $y'=+\infty, y''=-\infty$. Сепак, ако равенката на една крива (во близината на нејзина точка M_0) може да се претстави во облик $x=x(y)$, каде што $x(y)$ задоволува соодветни услови како во Теорема 1, тогаш ги имаме следниве формули:

$$p=x_0+\frac{1+x_0'^2}{x_0''},\quad q=y_0-\frac{x_0'\left(1+x_0'^2\right)}{x_0''},\quad r=\frac{\left(1+x_0'^2\right)^{3/2}}{\left|x_0''\right|} \tag{1'}$$

Со помош на тие формули добиваме дека оскулаторната кружница на параболата $y^2=2x$ во темето $(0,0)$ е определена со: $p=1, q=0, r=1$.

Формулите (1) би можеле да се применат и за кружницата $x^2+y^2=R^2$, освен во $(\pm R,0)$, каде што се применливи формулите (1'). И со тие формули, лесно се проверува резултатот од Пр. 1, т.е. дека: $p=q=0$, $r=R$.

Лакот од кривата, во близината на допирната точка, може подобро да се апроксимира со лакот на оскулаторната кружница отколку со тангентата. Затоа, таа кружница се користи за воведување на многу важниот поим: **кривина на крива** во дадена точка. Секако, природно е да се смета дека една кружница има иста закривеност во секоја своја точка и дека таа закривеност е поголема кај кружницата со помали радиуси. Затоа по дефиниција земаме кривината K на кружницата со радиус R да е:

$$K=\frac{1}{R}. \tag{2}$$

Ако (L) е дадена крива и M_0 е точка на (L), тогаш под **кривина** K на (L) **во точката** M_0 ја подразбираме кривината на оскулаторната кружница на (L) во M_0.

Според тоа, ако (L) е график на функцијата $y=f(x)$, којашто има втор непрекинат извод во точката M_0, тогаш за кривината K во M_0 имаме:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y_0'^2\right)^{3/2}}. \tag{3}$$

Радиусот на оскулаторната кружница, т.е. $r=1/K$, се вика **радиус на кривината** на (L) во M_0, а нејзиниот центар $C(p,q)$ се вика **центар на кривината** на (L) во M_0. Самата оскулаторна кружница се вика **кружница** (или **круг) на кривината** во дадената точка.

Забелешка. Како и кај други математички поими, така и кај поимот кривина, постои можност за поинаков пристап на дефинирање. Имено, погоре дадената дефиниција на кривина е индиректна затоа што во неа се користи поимот оскулаторна кружница. Сега ќе дадеме директна дефиниција, користејќи го поимот лак, што подетално (а и попрецизно) ќе биде разгледуван подоцна, во делот интегрално сметање (**III. 4. 5** и **III. 6. 1**).

Да претпоставиме дека (L) е глатка крива (т.е. има тангента во секоја точка) и M_0 е една фиксна точка од (L) (црт. 4).

Повлекуваме тангента (t_0) во M_0 и (t) во една произволна точка M од (L). Аголот (помалиот) меѓу овие тангенти ќе го означиме со ω, а должината на лакот M_0M со $\overset{\frown}{M_0M}$ или, покусо, со s.

Количникот $\dfrac{\omega}{\overset{\frown}{M_0M}}$, т.е. $\dfrac{\omega}{s}$ ќе го наречеме средна кривина на (L) меѓу M_0 и M и ќе го означиме со $K_{ср}$. Значи:

$$K_{ср}=\frac{\omega}{\overset{\frown}{M_0M}}=\frac{\omega}{s}.$$

Притоа, аголот ω зависи од s, т.е. $\omega=\omega(s)$ е функција од s, таква што $\omega(0)=0$. Бројот K, пак, определен со:

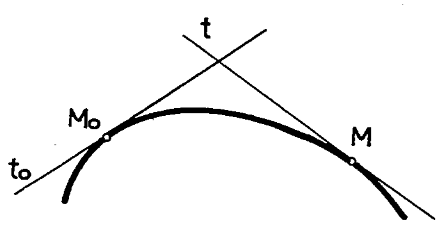
$$K=\lim_{M\to M_0} K_{ср}=\lim_{s\to 0}\frac{\omega}{s}$$

го викаме **кривина на кривата** (L) **во точката** M_0. Според тоа:

$$K = \lim_{s \to 0} \frac{\omega(s)}{s}. \tag{4}$$

Претпоставувајќи дека $\omega(s)$ е диференцијабилна во $s=0$, добиваме дека $K=\omega'(0)$, т.е.

$$K = \left(\frac{d\omega}{ds}\right)_{s=0}. \tag{5}$$



Црт. 4.

Да видиме сега како се доаѓа до формулата (3) со помош на новата дефиниција (4), т.е. (5).

Да претпоставиме дека (L) е график на функцијата $f(x)$ што ги задоволува условите, споменати во теоремата 1. Нека $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$ се точки од (L) и нека α_0 и α се соодветните агли меѓу тангентите и позитивната насока на x - оската. Аголот ω меѓу тие тангенти, изразен со α_0 и α, за положбата како на црт. 5. ќе биде:

$$\omega = \alpha_0 + \pi - \alpha,$$

а за случајот како на црт. 6. ќе биде:

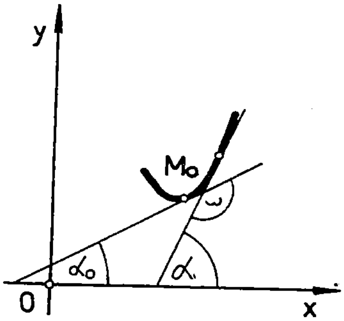
$$\alpha = \omega + \alpha_0, \text{ т.е. } \omega = \alpha - \alpha_0.$$

Според тоа, $d\omega = \pm d\alpha$, т.е. $d\omega = |d\alpha|$.

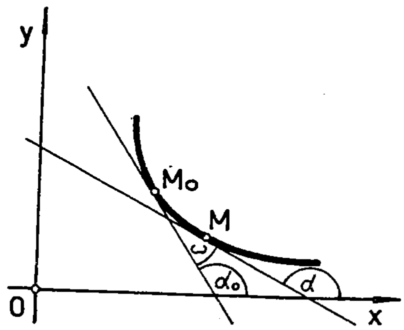
Од друга страна знаеме дека $tg\alpha = y'$, па значи:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = dy' = y'' \cdot dx, \text{ т.е.}$$

$$d\alpha = \cos^2 x \cdot y'' dx = \frac{1}{1+tg^2 x} \cdot y'' dx = \frac{y'' dx}{1+y'^2}. \tag{6}$$



Црт. 5.



Црт. 6.

Ни преостанува да го определиме ds. Во **III. 4. 5** и **III. 6. 1** ќе покажеме дека $ds = = \sqrt{1+y'^2} \cdot dx$. Користејќи го тоа и (6), добиваме:

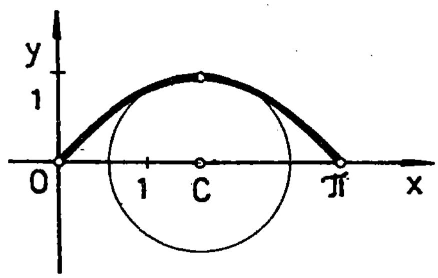
$$K = \frac{d\omega}{ds} = \frac{|d\alpha|}{ds} = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}},$$

т.е. формулата (3).

Пример 3. *Да ја најдеме кривината K и равенката на кружницата на кривината на синусоидата $y = \sin x$ во точката $M(\pi/2, 1)$.*

Имаме: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y'(\pi/2) = 0$, $y''(\pi/2) = -1$, па:

$$K = \frac{|-1|}{\left(1+0^2\right)^{3/2}} = 1, \quad r = \frac{1}{K} = 1, \quad \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \text{ (црт. 7.).}$$



Црт. 7.

ВЕЖБИ

Да се најде равенката на оскулаторната кружница на дадената крива, во укажаната точка (1 - 4).

1. $y=3x^2-x^3,\ (2,4).$

2. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ (0,1).$

3. $y^2=4ax,\ (x_0,y_0),\ a>0.$

4. $x^3+y^3=3axy,\ (3a/2,3a/2).$

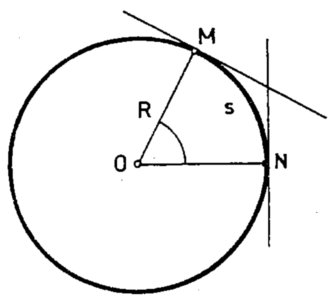
5. Да се покаже дека средната кривина кај кружница со радиус R, на кој било нејзин дел, е иста,

$K_{ср}=\dfrac{1}{R}$. **Упатство.** Црт. 9.

6. Да се напише формула за кривината K на крива зададена во параметарски облик, како и за координатите p,q на центарот на кривината. Потоа, да се најде K во произволна точка за кривата:

а) $x=a(\cos t+t\cdot\sin t),\ y=a(\sin t-t\cdot\cos t)$;

б) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.



Црт. 9.

7. Да се најде екстремната вредност на кривината за кривата

$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0<t<2\pi.$

8. Да се напише формула за кривината K на крива зададена во поларни координати.

Потоа, да се најде K во произволна точка на кривата:

а) $\rho = a(1+\cos\varphi)$; б) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

9. Дали права има оскулаторна кружница во некоја точка?

Во задачите **9 - 12**, најди го **темето на кривата** (L) (т.е. точката T во која (L) има најголема кривина).

10.* $y = \ln x$. **11.** $xy = 1$.

12. $y = x^2 - 4x + 5$. **13.** $y = \sin x$.

Множеството од центрите на кривината од една крива обично претставува линија што се вика **еволута**.

Во задачите **14 - 21** да се најде равенката на еволутата на дадената крива.

14.Й $y^2 = 2(x+1)$. **15.** $4x^2 + 9y^2 = 36$.

16. $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$. **17.** $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

18. $x = 2cht,\ \ y = sht$. **19.** $x = 3t^2,\ \ y = 2t^3$.

20. $\rho = e^{2\varphi}$. **21.** $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

5. 4. ШЕМА ЗА ИСПИТУВАЊЕ ФУНКЦИИ И КОНСТРУКЦИЈА НА ГРАФИЦИ

Графикот на дадена функција дава можност да се согледаат брзо и убаво многу својства на таа функција. Затоа е важно и е мошне корисно да се конструира графикот на функцијата. (Така, ние тоа го правевме на неколку етапи во оваа книга: кај граници и непрекинатост (без изводи!), а и порано - кај табеларно задавање на функции. (правејќи таблица за добивање што повеќе точки од графикот.)

За да може да се нацрта графикот на дадена функција, претходно треба да се спроведе една постапка, наречена "*испитување на функцијата*". Таа постапка е применлива за многу функции што се дадени со формула и се состои, обично, од следниве чекори (т.е. задачи).

1°. *Одредување на доменот* D_f *на* $f(x)$ *и неговите меѓи.* Доменот на функцијата се состои најчесто од некој интервал или од дисјунктна унија интервали. Во тој случај се посочуваат краевите на сите тие интервали (вклучувајќи ги и симболите $+\infty$ и $-\infty$, ако учествуваат како краеви на некој од тие интервали).

2°. *Проверување симетрии (парност, непарност, периодичност) и наоѓање на нулите на функцијата* (ако има и ако е можно). Во некои случаи постои можност да се согледаат интервалите во кои функцијата е позитивна или негативна; корисно е и тие да се одбележат.

3°. *Барање асимптоти и лимеси* во меѓните точки на доменот (по потреба - еднострани лимеси).

4°. *Пресметување на* $f'(x)$, наоѓање на неговите корени (ако има и ако е можно) и интервалите на растење односно опаѓање; проверување на секој од корените на $f'(x)$ дали е точка на на екстрем и наоѓање на екстремите; исто така, се одбележуваат точките во кои $f'(x)$ станува бесконечен или не постои.

5°. *Пресметување на* $f''(x)$[1], наоѓање на неговите корени (ако е можно), а потоа наоѓање на интервалите на конкавност, односно конвексност и наоѓање на превојните точки.

За поголема прегледност, добиените резултати во чекорите 1° - 5° обично се сместуваат во една таблица. Потоа, користејќи го сето тоа, се конструира графикот на функцијата. За поголема прецизност при цртањето, може да се пресметаат координатите на дополнителни точки од графикот (покрај нулите, "екстремните" точки и превоите) и по потреба, наклонот на тангентата во таква точка. (Специјално, корисно е да се одреди точката $(0, f(0))$, т.е. пресекот на графикот со y - оската, ако $f(0)$ постои.)

Ќе разгледаме три примери. Во нив ќе ги употребуваме симболите $f(+\infty), f(-\infty)$ како скратени записи за едностраните граници: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ соодветно, $f'(a^+)$ - наместо десен извод во точката $x=a$ и сл.

Пример 1. *Да ја испитаме функцијата:*

$$f(x)=x^4-6x^2+5$$

и да го нацртаме нејзиниот график.

---

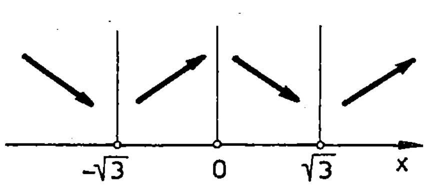
[1] Да забележиме дека, често пати, заради сложеноста на вториот извод, поекономично е да се работи само со првиот извод, т.е. екстреми може да се испитуваат и без вториот извод.

Решение. 1°. Функцијата $f(x)$ е полином; таа е дефинирана насекаде, т.е. $D_f=(-\infty,+\infty)$; меѓи на D_f, значи, се симболите $-\infty$ и $+\infty$.

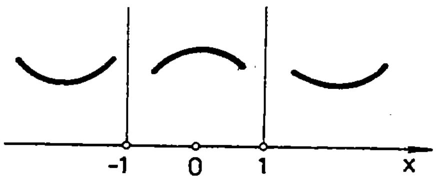
2°. Доменот D_f е симетрично множество и за секој $x\in D_f$ имаме $f(-x)=(-x)^4-6(-x)^2+5=x^4-6x^2+5=f(x)$, што значи дека $f(x)$ е парна, па нејзиниот график е симетричен спрема y - оската. (Затоа е доволно функцијата да се испита во интервалот $[0,+\infty)$.)

Корените на равенката $x^4-6x^2+5=0$ (при $z=x^2$; $z^2-6z+5=0$, $z_1=1, z_2=5$), $x_{1,2}=\pm 1$ и $x_{3,4}=\pm\sqrt{5}$ се нули на функцијата.

3°. Графикот на полиномна функција нема никакви асимптоти; значи, $f(x)$ нема асимптоти. При $x\neq 0$ имаме $f(x)=x^4\left[1-\left(6/x^2\right)+\left(5/x^4\right)\right]$. При доволно големи $|x|$, изразот во средните загради има вредности блиски до 1, па $f(x)\to+\infty$ кога $x\to-\infty$, односно $x\to+\infty$. Овие лимеси ги запишуваме и вака: $f(-\infty)=f(+\infty)=+\infty$.



Црт. 1.



Црт. 2.

4°. $f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$; $f'(x)=0$ за $x=0, x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$. Ако $x\in(0,\sqrt{3})$, тогаш $f'(x)<0$, т.е. $f(x)$ опаѓа, а ако $x>\sqrt{3}$, тогаш $f'(x)>0$, т.е. $f(x)$ расте; за $x<-\sqrt{3}$ и $x\in(-\sqrt{3},0)$ - симетрично (црт. 1.). Според тоа и теоремата 2 (доволни услови за екстрем) од **5. 2**, заклучуваме дека $f(x)$ во точката $x=0$ има максимум, $f(0)=5$, а во точката $x=\sqrt{3}$ има минимум $f(\sqrt{3})=-4$ (симетрично: $f(-\sqrt{3})=-4$ е минимум). Изводот $f'(x)$ постои и е конечен во секоја точка од $(-\infty,+\infty)$.

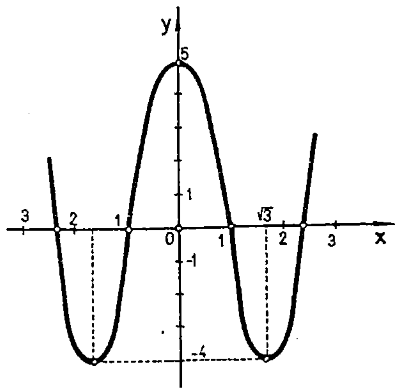
5°. $f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$; $f''(x)=0$ за $x=1$ и $x=-1$. Ако $x\in(1,+\infty)$, тогаш $f''(x)>0$ (симетрично: $f''(x)>0$ за $x\in(-\infty,-1)$), т.е. графикот на $f(x)$ е конкавен, а ако $|x|<1$, тогаш $f''(x)<0$, т.е. графикот на $f(x)$ е конвексен (црт. 2.). Според тоа и теоремата $3'$ (доволен услов за превој) од разделот **5. 2.** добиваме дека при $x=1$ и при $x=-1$ има превојни точки $(1,0)$ и $(-1,0)$ соодветно.

Добиените резултати ќе ги сместиме прегледно во следнава таблица 1.

Користејќи го прегледот на резултатите од таблица 1, лесно ќе го конструираме графикот на $f(x)$ (црт. 3.)[2]; тој дава убава информација за својствата на функцијата $f(x)$.

Таблица 1.

x	$-\infty$ $\;-\sqrt{5}$ $\;-\sqrt{3}$ $\;-1$ $\;0$ $\;1$ $\;\sqrt{3}$ $\;\sqrt{5}$ $\;+\infty$
y	$+\infty$ $\;0$ $\;-4$ $\;0$ $\;5$ $\;0$ $\;-4$ $\;0$ $\;+\infty$
	$+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$
y′	$-$ $\;0$ $\;+$ $\;0$ $\;-$ $\;0$ $\;+$
	$\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$
y″	$+$ $\;0$ $\;-$ $\;0$ $\;+$
	$\cup$ | $\cap$ | $\cup$



Црт. 3.

Пример 2. *Да ја испитаме функцијата:*

$$y=\frac{x^2+3}{x+1}$$

и да го нацртаме нејзиниот график.

---

[2] На координатните оски на црт. 3. се земени различни мерни единици.

Решение. 1°. Функцијата $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}=x-1+\dfrac{4}{x+1}$ е дефинирана за секој $x\neq-1$, т.е. доменот $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Меѓи на D се: $-\infty,-1,+\infty$.

2°. Функцијата нема симетрии и нема нули. За $x>-1$: $y>0$, а за $x<-1$: $y<0$; за $x=0$ имаме $y=3$, т.е. $(0,3)$ е точка од графикот.

3°. Да видиме дали има коса асимптота, $y=ax+b$. Имаме:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x(x+1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{x+1}-x\right]=-1;$$

значи, правата $y=x-1$ е десна коса асимптота. Истите вредности за a и b се добиваат и кога $x\to-\infty$, па таа права е и лева коса асимптота.

Останува да ги испитаме уште едностраните граници при меѓите на доменот. Имаме:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+3}{x+1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3}{x+1}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x+1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x+1}=+\infty.$$

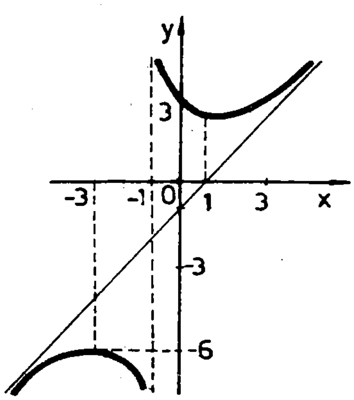
4°. $y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$; $y'=0$, т.е. $x^2+2x-3=0$ за $x=-3$ и $x=1$. Ако $x<-3$, тогаш, $y'>0$, т.е. y расте, а ако $x>-3$ (но $x<-1$), тогаш $y'<0$, т.е. y опаѓа; следствено, во точката $x=-3$ функцијата има максимум, $y(-3)=-6$. За $x<1$ (но $x>-1$) $y'<0$, т.е. функцијата опаѓа, а за $x>1$ имаме $y'>0$, т.е. функцијата расте; значи, во точката $x=1$ функцијата има минимум, $y(1)=2$.

5°. $y''=\dfrac{8}{(x+1)^3}$; за $x>-1$ имаме $y''>0$, што значи дека графикот е конкавен во интервалот $(-1,+\infty)$, а $y''<0$ за $x<-1$, т.е. графикот е конвексен во $(-\infty,-1)$. Вториот извод го менува знакот во близина на точката $x=-1$, а сепак во таа точка нема превој (Зошто?).

Резултатите се сместени во таблица 2, а графикот е на црт. 4.

Таблица 2.

x	$-\infty \quad -3 \quad\quad -1$	$1 \quad +\infty$
y	$+\infty \quad -6 \quad -\infty$ $-$	$+\infty \quad 2 \quad +\infty$ $+$
y'	$0 \quad\quad -\infty$	$+\infty \quad\quad 0$
y''	$-$	$+$



Црт. 4.

Пример 3. *Да ја испитаме функцијата:*

$$y = e^{-x^2}$$

и да го нацртаме нејзиниот график.

Решение. Дефинирана е за секој x.

$$y(0) = 1;\ \lim_{x\to\infty} y = 0;\ y' = -2x \cdot e^{-x^2},\ y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

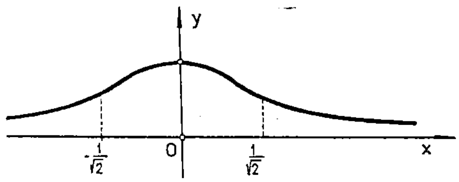
Имаме, значи, $y'(x) = 0$ само за $x = 0$; поради $y''(0) = -2 < 0$, $y(0) = 1$ е максимум.

Потоа, $y''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$; $y'(x) < 0$ за $x \in \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ и

$y''(x) > 0$ за $x \in \left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right) \cup \left(1/\sqrt{2}, +\infty\right)$. Добиените резултати ќе ги сместиме во една шема (табл. 3.), а потоа користејќи ја шемата, ќе го скицираме графикот на оваа функција, познат под името **крива на Гаус** или крива на **нормална распределба на веројатноста** (црт. 5.).

Таблица 3.

x	$-\infty \quad -1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 1/\sqrt{2} \quad +\infty$
y	$0 \nearrow 1/\sqrt{2} \nearrow 1 \searrow 1/\sqrt{2} \searrow 0$
y'	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad -$
y''	$+ \quad 0 \quad + \quad 0 \quad +$



Црт. 5.

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 16** да се испита дадената функција и да се скицира нејзиниот график.

1. $y=x^3-3x+2$.

2. $y=x^3-3x^2+1$.

3. $y=x^4-4x^3+4x^2$.

4. $y=(x+1)^2(x-1)^3$.

5. $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

6. $y=\dfrac{x^2+1}{1-x}$.

7. $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

8. $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

9. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

10. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

11. $y=x\ln x$.

12. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

13. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

14. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

15. $y=(1+x)^{1/x}$.

16. $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

(За вежб. 7 - 16, в. и вежб. 11 - 20 во разделот 4. 2.)

II. 6. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

6. 1. ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ОД ПОВИСОК РЕД

Во **5. 1.** го воведовме поимот втор извод на функција како "извод од изводот":

$$y'' = (y')'.$$

Слично дефинираме $y''' = (y'')'$ и велиме дека y''' е **трет извод** на функцијата y. Најопшто, ставаме:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)',$$

и велиме дека $y^{(n)}$ е n**- ти извод** на y $(n = 1,2,3,\ldots)$. Притоа, со $y^{(0)}$ е означена самата функција y.

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. $y = arctgx$. *Имаме:*

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'' = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2};$$

$$y''' = -\frac{2\left(1+x^2\right)^2 - 2x \cdot 2\left(1+x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Пример 2. $y = \sin x$. *Имаме, по ред:*

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2),$$

$$y'' = \cos(x + \pi/2) = \sin(x + 2\pi/2),$$

$$y''' = \cos(x + 2\pi/2) = \sin(x + 3\pi/2),$$

Со индукција по n, добиваме:

$$y^{(n)} = \sin(x + n\pi/2).$$

Пример 3. $y=\ln x$. *Имаме:* $y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$,

$$y'''=\frac{1\cdot 2}{x^3},\; y^{iv}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ldots;$$

индуктивно:

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}\quad (n\geq 1).$$

Нека сега u и v се две функции и нека секоја од нив има изводи заклучно со n - тиот. Тогаш за n - тиот извод на нивниот производ е точна **Лајбницовата***) **формула**:

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\ldots+\binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i)},\text{ каде што } u^{(0)}=u,\; v^{(0)}=v. \tag{2}$$

Доказ. Како што веќе знаеме,

$$(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v',$$

од каде што се добива:

$$(u\cdot v)''=(u'v+u\cdot v')'=u''v+u'v'+u'v'+u\cdot v''=u''v+2u'v'+u\cdot v'',$$

со што се покажува дека Лајбницовата формула е точна за $n=1;\,2$. Нека

$$(u\cdot v)^{(k)}=u^{(k)}v+\binom{k}{1}u^{(k-1)}\cdot v'+\ldots+\binom{k}{k-1}u'v^{(k-1)}+u\cdot v^{(k)}.$$

Тогаш:

$$(u\cdot v)^{(k+1)}=\left[u^{(k)}v+\binom{k}{1}u^{(k-1)}\cdot v'+\ldots+\binom{k}{k-1}u'v^{(k-1)}+u\cdot v^{(k)}\right]'=$$

$$=u^{(k+1)}v+u^{(k)}\cdot v'+\binom{k}{1}u^{(k)}v'+\binom{k}{1}u^{(k-1)}v''+\ldots\ldots+\binom{k}{k-1}u''\cdot v^{(k)}+u'v^{(k)}+u\cdot v^{(k+1)}=$$

---

*) Готфрид Вилхелм ЛАЈБНИЦ (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 - 1716) - подеднакво знаменит како филозоф и како математичар. Покрај тоа, тој бил правник, дипломат, теолог, геолог, историчар, економист и лингвист. Лајбниц го пронашол диференцијалното сметање по Њутн, но независно од него. Тој бил претходник на математичката логика, а ги измислил детерминантите и конструирал сметачка машина.

$$=u^{(k+1)}v+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]u^{(k)}v'+\ldots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]u'v^{(k)}+u\cdot v^{(k+1)}=$$

$$=u^{(k+1)}v+\binom{k+1}{1}u^{(k)}v'+\ldots+\binom{k+1}{k}u'v^{(k)}+u\cdot v^{(k+1)}.$$

Со тоа Лајбницовата формула е докажана. □

Пример 4. *Да го најдеме* n *- тиот извод на функцијата* $y=x^2e^x$. *Ако ставиме* $u=e^x$ *и* $v=x^2$, *ќе добиеме дека* $u=u'=u''=\ldots=u^{(n)}=e^x$; $v=x^2$, $v'=2x$, $v''=2$, $v'''=\ldots=v^{(n)}=0$. *По Лајбницовата формула добиваме*

$$\left(x^2e^x\right)^{(n)}=x^2e^x+2nxe^x+n(n-1)e^x.$$

По аналогија со дефиницијата на диференцијал на функција (во разделот **1. 4.**) ставаме:

$$d^ny=y^{(n)}dx^n \tag{3}$$

и за d^ny велиме дека е **диференцијал од n - ти ред** за функцијата y. Во таа смисла, за dy велиме дека е **диференцијал од прв ред**.

Од следните разгледувања се гледа дека диференцијалите од повисок ред може да се дефинираат на ист начин како и изводите од повисок ред. Имено,

$$d^2y=y''dx^2=y''dx\cdot dx=(y')'dx\cdot dx=(y'dx)'dx=(dy)'dx=d(dy)$$

и, индуктивно, ако $d^{n-1}y=d(d^{n-2}y)$, тогаш:

$$d^ny=y^{(n)}dx^n=(y^{(n-1)}dx^{n-1})'dx=d(d^{n-1}y).$$

Со тоа е покажано дека диференцијалот од n - ти ред на дадена функција е диференцијал од нејзиниот диференцијал од $(n-1)$ - ви ред.

Да разгледаме два примера.

Пример 5. *За функцијата* $y=e^x$ *имаме:* $y'=e^x$, $y''=e^x,\ldots,$ $y^{(n)}=e^x$, *па:*

$$dy=e^xdx,\ d^2y=e^xdx^2,\ldots,\ d^ny=e^xdx^n.$$

Пример 6. *Ако* $y=\ln x$, *тогаш* $y'=\dfrac{1}{x}, y''=-\dfrac{1}{x^2}, y'''=\dfrac{1\cdot 2}{x^3},\ldots,$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$$

Така: $dy=\dfrac{dx}{x},\ d^2y=-\dfrac{dx^2}{x^2},\ \ldots,\ d^ny=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}\cdot dx^n.$

На ист начин како формулата (2) може да се докаже дека е точна следнава формула:

$$d^n(u\cdot v)=(d^nu)v+\tbinom{n}{1}d^{n-1}u\cdot dv+\ldots+\tbinom{n}{n-1}du\cdot d^{n-1}v+u\cdot d^nv, \tag{4}$$

каде што $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се n пати диференцијабилни функции; по аналогија со формулата (2), и оваа формула може да се нарече **Лајбницова формула** за n - тиот диференцијал од производ на две функции.

На крајот, да воочиме дека инваријантноста на обликот на диференцијалот од прв ред што беше искажана во **2. 2.** не се запазува при диференцијалите од повисок ред. Имено, ако $y=f(u), u=g(x)$, од $dy=f'(u)\cdot du$ се добива:

$$d^2u=d(du)=(f'(u)\cdot du)'\cdot du=f''(u)\cdot du\cdot du+f'(u)(du)'du=$$

$$=f''(u)du^2+f'(u)d^2u.$$

Забелешка. За означување на изводите од повисок ред ги користиме ознаките $y'',y''',\ldots,y^{(n)}$ или $f''(x),\ f'''(x),\ldots,f^{(n)}(x)$ - ознаки што потекнуваат од Ојлер и Лагранж. Наместо горните, често се користи Лајбницовата ознака:

$$\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\ \text{соодветно.}$$

Ако, пак, ставиме $f(x)$, тогаш пишуваме:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x),\ \frac{d^3}{dx^3}f(x),\ \ldots,\frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

ВЕЖБИ

1. Да се најде y''' ако $y=(x^2+1)^5$.

2. Да се најде $f'''(2)$, ако $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$.

Да се најде $y^{(n)}$ за функцијата **3 - 8**:

3. $y=\sin ax$.

4. $y=\dfrac{1}{(3x+2)^4}$.

5. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

6.* $y=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

7. $y=arthx$.

8.* $y=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

9. Да се најде $y^{(50)}$, ако $y=x^2e^{2x}$.

Да се најде вредноста на n - тиот извод при $x=0$ за следните функции (**10 - 12**).

10. $y=2^x+2^{-x}$.

11. $y=x^ke^{ax}$.

12. $y=\arcsin x$.

Да се покаже дека дадената функција ја задоволува дадената "диференцијална" равенка (**13 - 15**).

13. $y=\sin(m\arcsin x)$, $(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$.

14. $y=arctgx$, $(1+x^2)y'''+4xy''+2y'=0$.

15. $x(t)=2\sin pt+3chpt$, $x^{(4)}-p^4x=0$.

16.* Ако $y=\arcsin x$, покажи дека:

а) $(1-x^2)y''-xy'=0$;

б) $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$.

Во задачите (**17 - 22**), да се најде укажаниот диференцијал.

17. $y=\sin 3x$, $d^2y=?$

18. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $d^2y=?$

19. $y=x^2\ln x$, $d^3y=?$

20. $y=xe^{-x}$, $d^4y=?$

21. $y=5\sin(3x+1)$, $d^ny=?$

22. $y=\ln(1-x)$, $d^ny=?$

23.* Да се докаже Лајбницовата формула за диференцијал од n - ти ред (формула (4)).

24. Да се најде d^5u^2, каде што u е петпати диференцијабилна функција.

25. Дали заклучокот за "инваријантност на формата на диференцијали" од крајот на разделот **2. 2.** е точен и за диференцијали од повисок ред?

26. Да се покаже дека: ако $y=f(u), u=ax+b$, каде што a и b се константи, а f е n - пати диференцијабилна функција, тогаш $d^ny=f^{(n)}(u)du^n$. Дали овој резултат е во спротивност со заклучокот од вежбата 25?

27. Ако a е корен на равенката:

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0,$$

да се покаже дека функцијата $y = e^{ax}$ ја задоволува "диференцијалната" равенка:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

28.* Ако во 27 a е корен од m - ти ред $(m \geq 2)$, да се покаже дека, за секој $k: 0 \leq k < m$, $y = x^k e^{ax}$ е решение на споменатата диферецијална равенка.

29. Да се изведе формула за извод од трет ред од параметарски зададена функција.

6. 2. ТЕЈЛОРОВА ТЕОРЕМА ЗА ПОЛИНОМИ

Сега ќе видиме како може еден полином $p(x)$, зададен по степените на x, да се претстави по степените на $x - a$, каде што a е даден реален број. За таа цел, да го разгледаме полиномот:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

каде што $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ се константи. Ако го замениме x со $t + a$, при тоа a е произволен реален број, а потоа полиномот го уредиме по степените од t, ќе добиеме:

$$p(t + a) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n,$$

каде што $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ се некои нови константи. Ако повторно се вратиме на старата променлива x, ќе добиеме дека:

$$p(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \ldots + A_n(x - a)^n. \qquad (1)$$

Така, гледаме дека секој полином од n - ти степен по x може да се напише во облик на полиномот од n - ти степен по разликата $(x - a)$. За да ги определиме коефициентите $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ќе побараме n пати извод од полиномот $p(x)$ претставен во обликот (1):

$$\begin{aligned} p'(x) &= A_1 + 2A_2(x - a) + \ldots + nA_n(x - a)^{n-1} \\ p''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot A_2 + \ldots + (n-1) \cdot n \cdot A_n (x - a)^{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \cdot A_n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Заменувајќи го x со a, од (1) и (2) добиваме:

$$p(a)=A_0,\ p'(a)=1!\cdot A_1,\ p''(a)=2!\cdot A_2,\ \dots\ ,\ p^{(n)}(a)=n!\cdot A_n,$$

така што (1) го добива обликот:

$$p(x)=p(a)+\frac{p'(a)}{1!}(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (3)$$

Формулата (3) е позната под името **Тејлорова формула**[1] за полиноми и покажува како може да се определи еден полином ако е позната вредноста на полиномот и сите негови изводи за една иста вредност $x=a$.

Пример 1. *Да го претставиме по степените на* $x-2$ *полиномот:*

$$p(x)=2x^3-5x^2-x+7.$$

Имаме: $p(2)=1,$

$p'(x)=6x^2-10x-1,$ $p'(2)=3,$

$p''(x)=12x-10,$ $p''(2)=14,$

$p'''(x)=12,$ $p'''(2)=12.$

Формулата (3), за овој полином, ќе биде:

$$p(x)=1+\frac{3}{1!}(x-2)+\frac{14}{2!}(x-2)^2+\frac{12}{3!}(x-2)^3, \text{ т.е.}$$

$$p(x)=2(x-2)^3+7(x-2)^2+3(x-2)+1.$$

Ќе покажеме овде на еден пример како може корисно да се примени формулата (3) за пресметување вредности на полиноми.

Пример 2. *Нека* $p(x)=x^3-2x^2+1$; да пресметаме $p(0{,}98)$.

Полиномот $p(x)$ ќе го развиеме претходно по степените од разликата $(x-1)$. Имаме:

$$p(x)=x^3-2x^2+1,\quad p'(x)=3x^2-4x,\quad p''(x)=6x-4,\quad p'''(x)=6;$$
$$p(1)=0,\qquad p'(1)=-1,\qquad p''(1)=2,\qquad p'''(1)=6.$$

Според Тејлоровата формула,

$$p(x)=p(1)+\frac{p'(1)}{1!}(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3=$$
$$=-(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3,$$

[1] Брук ТЕЈЛОР (Brook Taylor, 1685 - 1731) - англиски математичар, следбеник на Њутн.

од каде што се добива:

$$p(0,98) = 0,02 + 0,0004 - 0,000008 = 0,020392.$$

ВЕЖБИ

Полиномот $p(x)$ да се разложи по степените на $x-a$ (**1** - **2**).

1. $p(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, \quad a = -1.$

2. $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4, \quad a = 2.$

Да се пресмета вредноста на полиномот $p(x)$ за дадената вредност на $x = x_0$ (**3** - **4**).

3. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3, \quad x_0 = 1,98.$ **4.** $p(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1, \quad x_0 = 2,3.$

5. $p(x) = 4 - 2x + 3x^2 + x^3,$ а) $x_0 = -1,002$; б) $x_0 = -0,997$; со точност до 0,001

6. Нека $p(x)$ е полином од четврти степен, таков што:

$$p(2) = -1, p'(2) = 0, p''(2) = 2, p'''(2) = -12, p^{(4)}(2) = 24.$$

Да се пресмета: $p(-1)$; $p'(0)$; $p''(1)$.

7. Нека $p(x)$ е полином од n - ти степен и $a \in \mathbb{R}$, така што:

$$p(a) = p'(a) = \ldots = p^{(k-1)}(a) = 0, \quad p^{(k)}(a) \neq 0, \quad k \geq 2.$$

Да се покаже дека $p(x)$ има екстрем за $x = a$ ако бројот k е парен.

6. 3. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА ЗА ПРОИЗВОЛНА ФУНКЦИЈА

Фактот што секој полином $p(x)$ може да се претстави во обликот (3) од **2. 1.** сугерира да се испита можноста за претставување на *произволна* функција $f(x)$ во облик сличен со (3).

Нека $f(x)$ е $n+1$ пат диференцијабилна функција во некоја околина (α,β) на точката a. Тогаш за функцијата $f(x)$ можеме да го составиме полиномот:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a^2) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (1)$$

Да воочиме дека:

$$p(a)=f(a),\ p'(a)=f'(a),\ \ldots,\ p^{(n)}(a)=f^{(n)}(a),$$

т.е. полиномот и неговите изводи, до n - тиот заклучно, во точката a имаат исти вредности како функцијата $f(x)$ и нејзините изводи.

Во општ случја $f(x)\neq p(x)$. Разликата меѓу $f(x)$ и $p(x)$ ќе ја означиме со $R_n(x)$, т.е. $R_n(x)=f(x)-p(x)$, па значи:

$$f(x)=p(x)+R_n(x). \tag{2}$$

Изразот $R_n(x)$, наречен **остаточен член**, да го напишеме во облик:

$$R_n(x)=\frac{R(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{3}$$

каде што, при фиксирани a и x $(x\neq a)$, $R(x)$ има определено значење, кое понатаму ќе го означуваме со R. Да го напишеме (2) во развиена форма:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{R}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4}$$

Нашата задача е да ја определиме величината $R_n(x)$, т.е. R.

Ќе покажеме дека постои $\xi\in(a,x)$, $a<x<\beta$, така што:

$$R=f^{(n+1)}(\xi).$$

За таа цел ќе ја формираме помошната функција од t $(a\le t\le x)$:

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\ldots-$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{R}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}. \tag{5}$$

Според (4) и (5), имаме $F(a)=0$ и $F(x)=0$. Бидејќи $f(t)$ е $n+1$ пат диференцијабилна во сегментот $[a,x]$, во тој сегмент е диференцијабилна и $F(t)$. Значи, за функцијата $F(t)$ се исполнети сите претпоставки од теоремата на Рол на сегментот $[a,x]$, па според тоа, постои ξ: $a<\xi<x$, таков што:

$$F'(\xi)=0. \tag{6}$$

Да го пресметаме $F'(t)$ од (5):

$$F'(t)=-f'(t)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+f'(t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+$$

$$+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-...-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^n+\frac{R}{n!}(x-t)^n, \text{ т.е.}$$

$$F'(t)=\frac{R}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Од ова, поради (6), добиваме:

$$0=\frac{R}{n!}(x-\xi)^n-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$

а поради $a<\xi<x$, имаме и $R=f^{(n+1)}(\xi)$.

Овде можеме да ставиме $\xi=a+\vartheta(x-a)$, при што $0<\vartheta<1$. Сега равенството (4) можеме да го напишеме на следниов начин:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{7}$$

Равенството (7) се вика **Тејлорова формула** за функцијата $f(x)$, а

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{8}$$

се вика **остаточен член** даден во **Лагранжова форма**.

Формулата (7) ја докажавме за $a<x$, но може лесно да се види дека таа е точна и за $a>x$. Со тоа ја докажавме следнава:

Теорема 1. *Ако $f(x)$ е $n+1$ пат диференцијабилна функција во некој сегмент, тогаш таа може да се претстави во обликот (7), при што x и a му припаѓаат на разгледуваниот сегмент, а $\xi=a+\vartheta(x-a)$, $0<\vartheta<1$.* □

Пример 1. *Да ја најдеме Тејлоровата формула за функцијата:*

$$f(x)=x\ln x \text{ за } a=2.$$

$$f(x)=x\ln x, \qquad f(2)=2\ln 2;$$
$$f'(x)=\ln x+1, \qquad f'(2)=\ln 2+1;$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}, \qquad f''(2)=\frac{1}{2};$$
$$f'''(x)=-\frac{1}{x^2}, \qquad f'''(2)=-\frac{1}{2^2}.$$

Со индукција по n, лесно се покажува дека:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \text{ за } n\geq 2, \qquad f^{(n)}(2)=(-1)^n\frac{(n-2)!}{2^{n-1}}.$$

Според формулата (7), ќе имаме:

$$x\ln x=2\ln 2+\frac{\ln 2+1}{1!}(x-2)+\frac{1}{2!2}(x-2)^2-\frac{1}{3!2}(x-2)^3+\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{(n-2)!}{n!2^{n-1}}(x-2)^n+R_n(x),$$

каде што:

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(n+1)\xi^n}(x-2)^{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{n(n+1)[2+\vartheta(x-2)]^n},$$
$$\xi=2+\vartheta(x-2), \quad 0<\vartheta<1.$$

Да забележиме дека Тејлоровата формула (7) може да се напише и во поинаков облик, на пример, ако ставиме $x-a=\Delta x$, добиваме:

$$f(a+\Delta x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\Delta x+\frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}. \tag{9}$$

Според тоа, имајќи предвид дека $d^nf(x)=f^{(n)}(x)\Delta x^n$, (7) добива облик

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{1!}+\frac{d^2f(a)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(a)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}. \tag{10}$$

Така, за функцијата $f(x)$ од примерот 1, ќе имаме:

$$f(2+\Delta x)=2\ln 2+(1+\ln 2)\Delta x+\frac{\Delta x^2}{2!2}-\frac{\Delta x^3}{3!2}+\ldots+\frac{(-1)\Delta x}{(n-1)n\cdot 2^{n-1}}+R_n(x),$$

односно:

$$f(x)=2\ln 2+df(2)+\frac{d^2f(2)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(2)}{n!}+R_n(x),$$

каде што:

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}\Delta x^{n+1}}{n(n+1)[2+\vartheta\Delta x]^n}=\frac{d^{n+1}f(2+\vartheta\Delta x)}{(n+1)!}.$$

ВЕЖБИ

Да се напише Тејлоровата формула за функцијата $f(x)$ (**1 - 4**).

1. $f(x)=x^3\ln x,\quad a=1.$

2.* $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2},\quad a=2.$

3. $f(x)=x^2+x+\sqrt{x},\quad a=1.$

4. $f(x)=(3x-1)^{2/3},\quad a=1.$

Да се напише Тејлоровата формула за функцијата $f(x)$ заклучно со укажаниот член (**5 - 7**).

5. $f(x)=x^{-1/2}$, по $(x-2)$, до членот што го содржи $(x-2)^3$.

6. $f(x)=\ln^2 x$, по $(x-1)$, до членот со $(x-1)^4$.

7. $f(x)=e^{x^2}$, по x до членот со x^3.

6. 4. МАКЛОРЕНОВА ФОРМУЛА ЗА НЕКОИ ФУНКЦИИ

Ако во формулата (7) од разделот **6. 3.** ставиме $a=0$, ќе добиеме еден специјален случај од Тејлоровата формула:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+R_n, \tag{1}$$

каде што:

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\vartheta\cdot x),\quad 0<\vartheta<1; \tag{2}$$

таа се вика **Маклоренова формула.**[1)]

Ќе ја напишеме Маклореновата формула на неколку конкретно зададени функции.

Пример 1. $f(x)=e^x$.

Бидејќи $f^{(n)}(x)=e^x$ и $f^{(n)}(0)=1$, имаме:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\vartheta x},\quad 0<\vartheta<1. \tag{3}$$

Пример 2. $f(x)=\sin x$.

Имаме: $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ n=1,2,\ldots;$

од ова, при парно n добиваме $f^{(2k)}(0)=0$, а при непарно n:

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k \text{ и } \sin\left(\vartheta\cdot x+\frac{2k+1}{2}\cdot\pi\right)=(-1)^k\cos\vartheta x, \text{ па}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_n, \tag{4}$$

$$R_n=(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\cos\vartheta x,\quad 0<\vartheta<1.$$

Пример 3. $f(x)=\ln(1+x)$. Имаме:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f(0)=0,\ f^n(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!, \text{ па}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+R_n, \tag{5}$$

$$R_n=(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}},\quad 0<\vartheta<1.$$

[1)] Колин МАКЛОРЕН (Colin Maclaurin, 1698 - 1746) - шкотски математичар.

Да забележиме дека Маклореновата (и, општо, Тејлоровата) формула на една функција $f(x)$ можеме да ја запишеме "комплетно" (т.е. за кој било $n \in \mathbb{N}$) само ако можеме да го најдеме n - тиот извод на таа функција за произволен број n. Инаку, честопати не е можно или не е потребно тоа да се направи, туку во Маклореновата формула, за дадена функција $f(x)$, се зема само одреден број (2, 3 или повеќе) членови.

Пример 4. *Да ја напишеме Маклореновата формула за*

$$f(x) = \sqrt{1+4x}$$

заклучно со третиот член (т.е. членот што го содржи третиот извод). Имаме:

$$f(x) = (1+4x)^{1/2}, \quad f'(x) = 2\cdot(1+4x)^{-1/2},$$

$$f''(x) = -4\cdot(1+4x)^{-3/2}, \quad f'''(x) = 24\cdot(1+4x)^{-5/2};$$

$$f(0), \quad f(0) = 2, \quad f''(0) = -4, \quad f'''(\vartheta x) = 24\cdot(1+4\vartheta x)^{-5/2}.$$

Според (1) и (2):

$$f(x) = 1 + 2x - \frac{4}{2!}\cdot x + \frac{24x^3}{3!}\cdot(1+4\vartheta x)^{-5/2}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

ВЕЖБИ

Да се напише Маклореновата формула за функцијата $f(x)$ за произволен n (**1 - 10**).

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$.

4. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

5. $f(x) = \sqrt{1-2x}$.

6. $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$.

7. $f(x) = \cos x$.

8. $f(x) = e^{3x}$.

9. $f(x) = \sin 3x$.

10. $f(x) = Arth\, x \left(= \ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Да се напише Маклореновата формула за функцијата $f(x)$ до укажаниот член (**11 - 14**).

11. $f(x) = arctg x$, до членот со третиот извод.

12. $f(x)=\arcsin x$, до членот со третиот извод.

13. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$, до членот со вториот извод.

14. $f(x)=e^{-x^2/2}$, до членот со вториот извод.

6. 5. ПРИМЕНА НА ТЕЈЛОРОВАТА ФОРМУЛА

Тејлоровата формула има многу примени. Овде ќе изнесеме неколку.

Прво, да воочиме дека Тејлоровата формула е воопштување на Лагранжовата теорема (за $n=1$, Тејлоровата формула се сведува на Лагранжовата). Според тоа, неа можеме да ја искористиме за изучување на функциите во иста смисла како теоремата на Лагранж. Ќе ја докажеме точноста на следнава:

Теорема 1 (за екстреми и превои). *Нека $f(x)$ е n пати диференцијабилна функција во сегментот $[x_0,-h,x_0+h]$ $(h>0)$, при што n - тиот извод е непрекината функција, и нека:*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогаш:

(i) за $n=2k$, $f(x_0)$ е екстрем, и тоа максимум ако $f^{(2k)}(x_0)<0$, а минимум ако $f^{(2k)}(x_0)>0$;

(ii) за $n=2k+1$, $f(x_0)$ не е екстрем, а $(x_0,f(x_0))$ е превојна точка за графикот на дадената функција.

Доказ. Да се потсетиме дека $f(x_0)$ е минимум ако $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$, а максимум ако $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$, при доволно мало $|\Delta x|$.

Ќе го избереме Δx така мало по апсолутна вредност што во интервалот $(x_0-|\Delta x|,x_0+|\Delta x|)$, $f^{(n)}(x)$ да има ист знак како и $f^{(n)}(x_0)$, што е можно поради непрекинатоста на $f^{(n)}(x)$. Тогаш имаме:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{\Delta x^n}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

(i) За $n=2k$ имаме $\Delta x^n>0$, што значи при:

$f^{(n)}(x_0)>0$ ќе биде $\Delta y>0$, па $f(x_0)$ е минимум;

$f^{(n)}(x_0)<0$ ќе биде $\Delta y<0$, па $f(x_0)$ е максимум.

(ii) За $n=2k+1$, Δx го менува знакот, па и Δy го менува знакот. Следствено, $f(x_0)$ не е екстрем, а $(x_0, f(x_0))$ е превојна точка. □

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+3$; $f'(x)=4x^3+12x^2+12x+4=$ $=4(x+1)^3$, *па за* $x=-1$ *може да има екстрем. Бидејќи* $f''(-1)=f'''(-1)=0$ *и* $f^{IV}(-1)=24\neq 0$, $f(-1)=2$ *е минимум на* $f(x)$.

Пример 2. $f(x)=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x$; $f'(x)=5x^4-20x^3+30x^2-$ $-20x+5=5(x-1)^4$, *па за* $x=1$ *може да постои екстрем. Меѓутоа:* $f''(1)=f'''(1)=f^{IV}(1)=0$ *и* $f^{V}(1)=120\neq 0$, *па* $f(1)=1$ *не е екстрем.* Точката (1,1) е превојна точка на графикот.

Пример 3. $y=chx+\cos x$.

$y'=shx-\sin x,\qquad y'=0$ за $x=0$;

$y''=chx-\cos x,\qquad y''(0)=0$;

$y'''=shx+\sin x,\qquad y'''(0)=0$;

$y^{IV}=chx+\cos x,\qquad y^{IV}(0)=2>0$

Значи, $y(0)=2$ е екстрем.

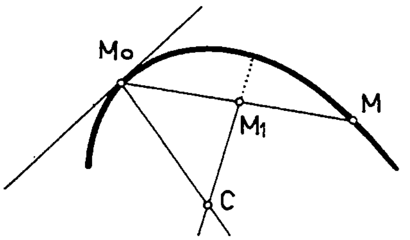
Тејлоровата формула може да се искористи и за докажување на теоремата за осулаторна кружница од **5. 3**.

Теорема 2. *Нека функцијата* $y=f(x)$ *има непрекинати прв и втор извод во точката* $x=x_0$, *при што* $y''\neq 0$. *Тогаш кривата* (L) *што е график на дадената функција има оскулаторна кружница во точката* $M_0(x_0,y_0)$ *чиј центар е* $C(p,q)$ *и радиус* r *:*

$$p=x_0-\frac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''},\quad q=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''} \tag{1}$$

$$r=\frac{(1+y_0'^2)^{3/2}}{|y_0''|},\quad K=\frac{1}{r}. \tag{2}$$

Доказ. Да избереме точка M на (L). Бидејќи M_0 има координати x_0 и y_0, можеме да ставиме $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Центарот $C(p,q)$ на кружницата што минува низ M и M_0, а има иста тангента со (L) во M_0, го добиваме како пресек на нормалата на кривата во M_0 и симетралата на отсечката MM_0 (црт.1.).



Црт. 1.

Претпоставуваме прво дека $y_0' = f'(x_0) \neq 0$. Тогаш равенката на нормалата на (L) во M_0 е:

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0), \tag{3}$$

а равенката на симетралата на отсечката MM_0:

$$y-y_0-\frac{\Delta y}{2}=-\frac{\Delta x}{\Delta y}\left(x-x_0-\frac{\Delta x}{2}\right). \tag{4}$$

Со елиминирање на y од равенките (3) и (4), добиваме:

$$(y_0'\Delta x-\Delta y)\cdot x=\frac{y_0'}{2}\Delta y^2+x_0y_0'\Delta x+\frac{y_0'}{2}\Delta x^2-x_0\Delta y. \tag{5}$$

Според Тејлоровата формула ((9) од **6. 3.**),

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f'(x_0)+\frac{\Delta x^2}{2}f''(\xi), \text{ т.е.}$$

$$\Delta y = y_0'\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} y''(\xi) \tag{6}$$

каде што ξ е меѓу x_0 и $x_0 + \Delta x$. Заменувајќи го Δy од (6) во (5), добиваме:

$$-\Delta x^2 y''(\xi)\cdot x = y_0'\Delta y^2 + 2x_0 y_0'\Delta x + y_0'\Delta x^2 - 2x_0 y_0'\Delta x - x_0\Delta x^2 y''(\xi),$$

$$y''(\xi)\cdot x = -y_0'\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 - y_0' + x_0 y''(\xi). \tag{7}$$

Ако пуштиме $\Delta x \to 0$, тогаш имаме $y''(\xi) \to y''(x_0) = y_0''$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to y_0'$, па поради $y_0'' \neq 0$, од (7) добиваме:

$$x = x_0 - (y' + y'^3)/\,y_0'', \text{ што значи } p = x_0 - y_0'(1 + y_0'^2)/\,y_0''.$$

Заменувајќи го ова во равенката (3), добиваме:

$$y = y_0 - \frac{1}{y_0'}\cdot\left(x_0 - \frac{y_0'\left(1 + y_0'^2\right)}{y_0''} - x_0\right) = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''},$$

па $q = y_0 + \left(1 + y_0'^2\right)/\,y_0''$.

За $y' = 0$, равенката на нормалата во M_0 ќе биде $x = x_0$, па тогаш $p = x_0$. Ставајќи $x = x_0$ во (4), добиваме $y - y_0 - \dfrac{\Delta y}{2} = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}\cdot\dfrac{\Delta x}{2}$,

т.е.
$$y = y_0 + \frac{\Delta y}{2} + \frac{\Delta x^2}{2\Delta y} = y_0 + \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2\Delta y}.$$

Заменувајќи го овде (6), кое поради $y_0' = 0$ станува $\Delta y = \dfrac{\Delta x^2}{2}\cdot y''(\xi)$, добиваме:

$$y = y_0 + \frac{4 + \Delta x^2 y''^2(\xi)}{4y''(\xi)}, \text{ а по } \Delta x \to 0\text{: } y = y_0 + \frac{1}{y_0''}$$

т.е. $q = y_0 + 1/\,y_0''$. Значи, формулите (1) се точни и при $y' = 0$.

Радиусот r се пресметува како растојание меѓу точките $M_0(x_0,y_0)$ и $C(p,q)$. Прит[illegible]лесно се добива (2), со што доказот е комплетиран. □

Маклореновата формула може да се искористи и за приближни пресметувања и гранични вредности. Овие нејзини примени ќе ги илустрираме со неколку примери.

Пример 4. *Да ја [illegible]ресметаме приближната вредност на бројот* e *со апсолутна грешка помала од 0,01.*

Ја земаме Те[illegible]овата формула за функцијата e^x при $a=0$ (в. пример 1 од **6. 4.**). Од не[illegible] добиваме приближното равенство

$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\,(|R_n|),\quad R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x},\quad 0<\theta<1,$$

па за $x=1$ имаме:

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Бидејќи во задачата се бара (приближно) да се пресмета e со апсолутна грешка помала од 0,01, потребно е да биде $|R_n|<0,01$. Од

$$|R_n|=\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},$$

добиваме дека за $n=5$ е точно неравенството $|R_n|<\frac{1}{240}$. Значи,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!},\ \text{т.е.}\ e\approx 2{,}72\ \text{(со точност 0,01).}$$

Пример 5. *Да видиме со каква грешка може да се пресмета* $\sin x$ *за* $x\in[0,\pi/4]$.

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\sin x$. Според примерот 2 од **6. 4**, функцијата $\sin x$ може приближно да се претстави со својот Тејлоров полином на следниов начин:

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\cdot(|R_{2k}|),$$

при што, поради $R_{2k}=(-1)^k\dfrac{\cos\theta x}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1},\ 0<\theta<1$, имаме:

$$\left|R_{2k}\right|\le\frac{1}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}$$

Ако функцијата $\sin x$ ја разгледуваме во сегментот $[0,\pi/4]$, тогаш добиваме:

$$\left|R_{2k}\right|\le\frac{(\pi/4)^{2k+1}}{(2k+1)!}<\frac{(0{,}8)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

На пример, ако се пресметува $\sin x$, за $x\in[0,\pi/4]$ по формулата $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$, тогаш за апсолутната грешка ја добиваме следнава оценка:

$$\left|R_6\right|<\frac{(0{,}8)^7}{7!}=\frac{4^7}{5^7\cdot 7!}<0{,}0003.$$

Пример 6. *Да ја пресметаме границата:*

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}.$$

Оваа граница можеме да ја пресметаме со последователно применување на Лопиталовото правило, но може и со помош на Тејлоровата формула. Имаме:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdot\cos\vartheta' x,\quad e^{-x^2/2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}\cdot e^{-\theta x^2}$$

$$\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=-\frac{1}{12}-x^2(\ldots)\to-\frac{1}{12}.$$

Значи, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{x^2/2}}{x^4}=-\dfrac{1}{12}$.

Пример 7. *Да ја пресметаме и границата:*

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x\cdot(x+1)}{x^3}.$$

Имаме:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \cdot e^{\vartheta x}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \cdot \cos \vartheta_2 x,$$

$$\frac{e^x \sin x - x \cdot (x+1)}{x^3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + x(\ldots) \to \frac{1}{3}.$$

ВЕЖБИ

Да се испита дали функцијата $f(x)$ (во задачите **1 - 4**), во критичните точки, има екстрем или превој.

1.* $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$.

2. $y = 2\sin x - e^x + e^{-x}$.

3. $y = x - arctgx$.

4. $y = \sin x + \cos x \quad (0 \le x \le 2\pi)$

Да се оцени апсолутната грешка R во секое од следниве приближни равенства (**5 - 6**):

5. $tg\, x \approx x + \frac{x^3}{3}$ за секој $x \in [-0{,}1; 0{,}1]$.

6. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$ за секој $x \in [0{,}1]$.

7. За какви x е точно приближното равенство $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ $(0{,}0001)$?

Да се пресмета, со апсолутна грешка R помала од укажаната (**8 - 10**):

8. $\sqrt{5}$, $R < 10^{-4}$.

9. $\sqrt[3]{1050}$, $R < 10^{-3}$.

10. $\cos 9^\circ$, $R < 10^{-5}$.

11.* $\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{e}$, $n \in N$.

12.* $1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$, $x > 0$.

Да се пресметаат границите (**13 - 16**):

13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{x^2}$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{x^2}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{tg\, x}\right)$.

II. 7. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

Во задачите **1 - 6**, да се најде, по дефиниција, изводот на дадената функција.

1. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

2. $y=\sqrt[3]{x-1}$.

3. $y=1/x^n,\ n\in N$.

4. $y=\sin^2 x$.

5. $y=e^{3x}$.

6. $y=\ln(x^2+4)$.

7. Најди ја равенката ма тангентата во произволна точка (x_0,y_0) од параболата $y^2=4ax\ (a>0)$. Потоа, покажи дека: а) субнормалата е константна $(=2a)$, б) субтангентата се преполовува со темето на параболата.

8. На параболата $y=2+x-x^2$ да се најде точка $M(x,y)$, таква што тангентата повлечена во M да биде паралелна со: а) оската OX; б) правата $y=x-2$; в) оската OY.

9. Покажи дека суптангентите на елипсата $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ и кружницата $x^2+y^2=a^2$ во точките со еднакви апсциси се еднакви. Каков начин на конструирање тангента на елипса произлегува од тоа?

10. Скицирај ја кривата $y^2=(x-1)(x-2)^2$ и покажи дека таа прави јамка меѓу $x=1$ и $x=2$. Потоа, најди ги:

а) аголот меѓу кривата и оската OX, во секоја од нејзините пресечни точки со OX;

б) точките на јамката во кои тангентата на кривата е паралелна со оската OX.

Во задачите **11 - 16** да се најдат:

а) пресечните точки на кривите, потоа

б) коефициентите на правците на тангентите во тие точки, на крајот,

в) аголот φ меѓу кривите во секоја од пресечните точки.

(Направи груба скица на кривите.)

11. $y=e^x,\quad y=x^2+1$.

12. $y^2=4ax,\quad x^2=4ay\ (a>0)$.

13. $y=\sin x,\quad y=\cos x$.

14. $8y=8+5x-2x^2,\quad 2y=x+1/x$.

15.* $y^2=x^2(4-x^2),\quad y=0$.

16.* $x^2+y^2=8\cdot x,\quad y^2=x^3/(2-x)$.

17.* Да се докаже дека збирот на отсечките, отсечени со координатните оски од тангентата повлечена во произволна точка на параболата $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ е еднаква со $a\ (a>0)$.

18. Да се определи a така што дадената права да биде тангента на дадената крива:

а) $y=ax$, $y=e^x$; б) $y=x$, $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$.

19. Една точка се движи по оската OX според законот: $x=10t+5t^2$, каде што t е време мерено во секунди, а x растојание мерено во метри. Да се пресмета средната брзина за интервалот $20\leq t\leq 20+\Delta t$, ако е: а) $\Delta t=1$; б) $\Delta t=0{,}1$; в) $\Delta t=0{,}01$. г) Да се најде моментната брзина за $t=20$.

20. Една точка прави хармониски осцилации по законот $x=5\sin 2t$. Да се најде моментната брзина на точките во моментот: а) $t=t_0$; б) $t=\pi/3$.

21. Да се најде моментната аглова брзина на тело што се врти, ако во моментот t аголот на вртење е $\varphi=t^2-2t+2$.

Во следните задачи (**22** - **30**) даден е законот на патот, при што се претпоставува дека: движењето е праволиниско, патот се мери во метри (m), а времето - во секунди (s).

22. Ако $x=t^2-6t+8$, најди ја вредноста на x кога брзината е $6\ m/s$.

23. Ако $x=t^3-9t^2+36t$, колку е t кога брзината е $9\ m/s$? Најди го забрзувањето во тој момент.

24. Нека $x=2t^3-9t^2+12t+5$. Најди го забрзувањето кога брзиината е нула.

25. Нека $x=t^3-4t^2+4t-5$. Во кој момент забрзувањето е $10\ m/s^2$? Колку е брзината во тој момент?

26. Материјална точка се движи по хоризонталната оска , по законот:

$$x(t)=t^3-3t^2-9t+5.$$

Таа се движи во позитивна насока (т.е. одлево надесно) кога брзината е позитивна, а во негативна насока (т.е. оддесно налево) кога брзината е негативна.

Во кои интервали материјалната точка се движи во позитивна, а во кои во негативна насока?

27. Две честици се движат по хоризонталната оска по законите:

$$x_1=t^3-4t^2+5t,\quad x_2=8t^2-2t^3-4t.$$

а) Во кои моменти тие имаат иста положба?

б) Најди ги брзините и забрзувањето на секоја честичка кога тие последен пат имаат иста положба.

28. Тело е исфрлено вертикално нагоре од врвот на една зграда, висока $80m$. Неговата висина на подножјето во произволен момент t е дадена со

$$y=80+64t-16t^2.$$

Да се најде: а) почетната брзина, б) времето што е потребно да ја достигне највисоката точка, в) максималната брзина над врвот од зградата и г) брзината кога ќе удри на земја.

29. Топче, исфрлено право нагоре со брзина $96m/\sec$, се движи според законот:

$$y = 96t - 16t^2,$$

каде што y е висината на почетната точка, а t е времето во секунди по фрлањето на топчето. Најди ја брзината на топчето по 2 секунди. Дали таа се уште се крева или паѓа? Колку секунди ќе продолжи да се крева? Колку високо топчето ќе оди?

30. Едно тело е исфрлено нагоре. Кога тоа ја достигнало максималната висина од својот пат, било фрлено второ тело со иста почетна брзина како и првото. На која висина ќе се сретнат телата, ако висината до која се фрлаат телата е $49m$?

31. Едно тело што се наоѓа во точката B на висина $H = 45m$ од Земјата, почнува слободно да паѓа. Истовремено, од точката A, која се наоѓа на $21\,m$ подолу од B, е исфрлено нагоре второ тело. Да се најде почетната брзина v_0 на второто тело, ако се знае дека двете тела паднале на земјата истовремено.

32. $f(x) = (x-2)|x|$.

33. $f(x) = x|x-1|$.

34. $f(x) = \ln|x^2 - 5x + 6|$.

35. $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Во задачите **36 - 39** да се испита дали функцијата $f(x)$ има бесконечен двостран или (различни) еднострани изводи во назначената точка.

36. $y = \sqrt{|x|}$, $x = 0$.

37. $y = \sqrt{|x-2|}$, $x = 2$.

38. $y = \sqrt{1-x^2}$, $x = 1$.

38. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$, $x = 2$.

Да се најде равенката на левата и равенката на десната тангента на дадената крива во назначените точки x_0 (**40 - 41**).

40. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ (x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$ во $x_0 = 1$.

41. $\begin{cases} -x^2 - 2x, & x \le 0 \\ 2x - x^2, & x > 0 \end{cases}$ во $x_0 = 0$.

42. Нека $f(x)$ е позитивна диференцијабилна функција. Да се докаже дека кривите:

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = f(x)\sin ax$$

се допираат, т.е. имаат исти тангенти во заедничките точки.

43. Да се пресмета должината на: отсечката на тангентата, суптангентата, отсечката на нормалата и субнормалата во произволна точка од кривата:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

44. Една материјална точка се движи по законот $x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t$, $y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$; $\omega > 0$ е константа. Да се определи траекторијата и брзината на движењето.

45. Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција. Да се најде y' ако

а) $y=f(x^2)$; б) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

46. Да се најде $f'(0)$, ако $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-1000)$.

47. Нека $f(x)=x^n \sin\frac{1}{x}$ за $x \neq 0$ и $f(0)=0$. Да се определи природниот број n, така што $f(x)$, за $x=0$:

а) да е непрекината; б) да е диференцијабилна; в) да има непрекинат извод.

48. Нека $\varphi(x)$ е непрекината функција во точката $x=a$. Да се докаже дека функцијата $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ е диференцијабилна во $x=a$ и да се најде $f'(a)$.

49. Нека $\varphi(x)$ е непрекината функција во точката $x=a$. Да се најде левиот и десниот извод на функцијата:

$$f(x)=|x-a|\varphi(x)$$

во $x=a$. При кој услов $f(x)$ е диференцијабилна во $x=a$?

50. Заменувајќи го нараснувањето на функцијата со диференцијал, приближно да се најде:

а) $e^{0,2}$; б) $\ln 1{,}01$; в) $arctg 1{,}02$; г) $\sin 31^\circ$.

Во задачите **51** - **56** да се најде изводот на дадената функција.

51. $y=\ln\sqrt{\dfrac{3-2x}{3+2x}}$.

52. $y=\arccos\sqrt{x}$.

53. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

54. $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot arctg\dfrac{x\sqrt{3}}{1+x^2}$.

55. $y=(x^4+1)^{3x}$.

56. $xy+\sin y=0, \quad y=y(x)$.

57. $x^2y+xy^2=2, \quad y=y(x)$.

Во задачите **57** - **60** да се најде равенката на тангентата (t) на дадената крива.

58. $x^2+y^2-4x-2y=0$, (t) да е паралелна со $y=2x+1$.

59. $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$, во точката за $x=4$.

60. $x^2+2x-y^2+4y=0$, (t) да е нормална на правата $x+y=1$.

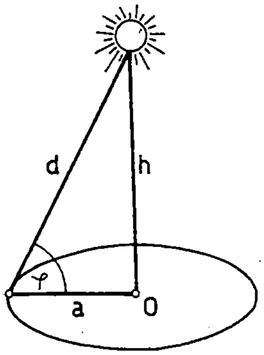
61. Да се најде најмалата и најголемата вредност на функцијата $f(x)$ во назначениот сегмент:

а) $f(x)=|x^2-3x+2|$, $[-10,10]$; б) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $[-1,1]$.

62. Да се најде точката M_1 на кружницата $x^2+y^2=1$ што е најблиска до точката $A(1,1)$, како и точката M_2 што е најоддалечена од A.

63. Над центарот од една кружна маса со радиус a е поставена светилка. На каква висина h треба да се наоѓа светилката за да биде крајот на масата најмногу осветлен?

Упатство. Осветленоста се пресметува по формулата $I=(k\sin\varphi)/d^2$, каде што k е константа, определена од јачината на светилката (в. и црт. 1.).



Црт. 1.

64. За функцијата $f(x)=1-\sqrt[5]{x^2}$ имаме: $f(-1)=f(1)=0$, но $f'(x)=-2/\left(5\cdot\sqrt[5]{x}\right)$ не прима вредност 0 за ниедно x. Дали овој факт е во спротивност со теоремата на Рол?

65. Докажи дека равенката $x^3+6x-5=0$ има точно еден реален корен.

66.* Со помош на Роловата теорема, докажи дека равенката $x^4-4x-3=0$ нема повеќе од два реални корени. Потоа, со помош на теоремата на Болцано - Коши, да се установи дека два реални корена навистина постојат.

67.* Да се докаже неравенството:

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a} \quad \text{за} \quad 0<a<b.$$

68. Да се докаже идентитетот:

$$arctg\frac{1+x}{1-x}=arctgx+\frac{\pi}{4}, \quad \text{за} \quad x\neq 1$$

69. Одреди за кои вредности на x е точно равенството:

а) $arctgx+arcctgx=\pi/2$; б) $\arccos\frac{1-x^2}{1-x}=2arctgx$

70. Дали може да се примени теоремата на Коши на функциите $f(x)=x^2+4$ и $g(x)=x^2/\left(1+x^2\right)$ на сегментот $[-2,2]$?

Со помош на Лопиталовото правило да се најдат границите (71 - 76).

71. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,x-x}{x-\sin x}$.

72. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

73. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

74. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctg\,x}{x^3}$.

75. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+2^{-x}-2}{x^2}$.

76. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{x^m-1}-\dfrac{n}{x^n-1}\right)$, $m,n\in\mathbb{N}$.

77. Во што е грешката на следново расудување, засновано на Лопиталовото правило:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-2x}{2+4x}=\lim_{x\to0}\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}?$$

78. Ако $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, тогаш $f(x)\cdot g(x)$ при $x\to a$ е неопределеност од втор вид $0\cdot\infty$. Сведи ја таа неопределеност на обликот $0/0$ или ∞/∞. Тогаш најди:

а) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\ln x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tg\,x$; в) $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

79. Нека $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$. Сведи ја неопределеноста $f(x)-g(x)$ (од обликот $\infty-\infty$) на обликот $0\cdot\infty$, а потоа - на обликот $0/0$ или ∞/∞. Тогаш најди:

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; в)* $\lim\limits_{x\to0}\left(ctg^2x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

80. Нека $y=[f(x)]^{g(x)}$. Запиши ги условите за $f(x)$ и $g(x)$ при кои y е неопределеност од видот:

1) 0^0, 2) ∞^0, 3) 1^∞.

Потоа пресметувањето на лимес од y при $x\to a$ сведи го (со логаритмирање) на лимес од неопределност $0.\infty$.

Упатство. $y=[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$,

$$\lim_{x\to a}y=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)}. \tag{*}$$

81. Користејќи ја задачата 80 и (*), пресметај:

а) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{tg\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\ln x}$.

82. Дадени се точките $x=2$, $x=1$, $x=-0{,}5$, $x=-3$. Во кои од тие точки функцијата $y=3x-x^3$ а) расте, б) опаѓа?

Во задачите **83 - 87** да се најдат:

а) интервалите на растење и опаѓање,

б) локалните екстреми (ако постојат),

в) НГВ и НМВ (ако постојат).

83. $f(x)=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x+\frac{9}{4}$. **84.** $f(x)=xe^{-x^2}$.

85. $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$. **86.** $f(x)=x^3/(x^4+27)$.

87. $f(x)=(2x+1)(x-2)^{2/3}$.

88. Меѓу правоаголниците со дадена дијагонала d, најди го оној што има најголема плоштина.

89. Какви треба да бидат димензиите на отворена кутија со квадратна основа, за нејзиниот волумен да изнесува $V=1000\ cm^3$, а да се потроши најмалку материјал за ѕидовите?

90. Да се најде точка на x - оската, од која отсечката AB се гледа под најголем агол, ако $A(0,4)$ и $B(0,9)$.

91. Да се најдат висината H и радиусот r на цилиндар, со најголем волумен, што може да се впише во топка со радиус R.

92. Да се најдат висината H и радиусот r на конус со најголем волумен, што може да се впише во топка со радиус R.

93. Од лим треба да се направи резервоар во облик на цилиндар, отворен одозгора ("без капак"); со волумен: а) $8\pi\ m^3$; б) v. Колкави треба да бидат радиусот r на основата и висината H на цилиндарот за да се потроши најмалку лим?

94. Треба да се направи конусна инка ("конус без основа") од лим, со генератриса а) $15\ cm$, б) s. Колкава треба да биде висината H на инката, за да биде нејзиниот волумен најголем?

95. Да се најде висината H на прав кружен конус, со најмал волумен, опишан околу топка со радиус R.

96. Да се најде висината на прав кружен конус, со најмал волуман, опишан околу прав кружен цилиндар со дадени: радиус r и висина h (притоа, основата на конусот лежи во рамнината на едната основа на цилиндарот).

97. Да се најде радиусот r на цилиндар, со најголема плоштина, впишан во конус со: а) радиус 4 и висина 12; б) радиус 6 и висина 8; в) радиус R и висина H.

98.* Да се најде односот $s:r$ на генератрисата и радиусот на конус којшто има максимален волумен при дадена плоштина P. Во каков однос се во тој случај, плоштината M на бочната површина и плоштината B на основата?

99. Низ која точка на елипсата:

а) $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$, б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

треба да се повлече тангента, за плоштината на триаголникот, ограничен од таа тангента и позитивните делови на координатните оски да биде најмала?

100.* Еден сад е наполнет со вода до висина H. Од мал отвор на вертикалниот ѕид на садот истечува хоризонтално млаз вода, којшто под влијание на Земјината тежа паѓа на хоризонталната подлога на садот на оддалеченост x од ѕидот. На која висина y треба да се наоѓа отворот за x да биде максимална?

101. Еден стадион треба да претставува правоаголно поле со области во вид на полукруг приклучени кон две негови спротивни страни. Периметарот на стадионот треба да биде 300 m. При кои димензии стадионот би имал најголема плоштина?

102. Да се најде трапез со најголема плоштина што е впишан во полукруг со радиус r и поголемата основа е дијаметарот на полукругот.

103. Патник оди од точката A, којашто се наоѓа на прав пат, во местото B што е оддалечено 8 km од патот. Растојанието од A до B е 17 km. На кое место патникот треба да скршне од патот за да стигне до B во најкусо време, ако неговата брзина по патот е 5 km/h, а по беспаќето е 3 km/h?

104. Еден канал се влива во река под прав агол. Ширината на каналот, односно реката е: а) 27 m и 64 m; б) a и b соодветно. Која е најголемата должина d на брод што може да вплови од каналот во реката (и обратно)?

105. Жица со должина s треба да се пресече на два дела, d_1 и d_2, од кои d_1 треба да се свитка во кружница, а d_2- во квадрат. При која должина на секој од деловите збирот од плоштините на кругот и квадратот ќе биде: а) најмал, б) најголем?

106. Да се најде точка на параболата $y^2=x$ што е најблиску до точката $A(2,0)$.

Во задачите **107 - 108** да се најдат превојните точки и интервалите на искривеноста на кривата $y=f(x)$.

107. $y=1+(x-2)^{5/3}$. **108.** $y=\frac{x^3}{x^2-3}$.

109. За кои вредности на a кривата $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2+1$ ќе биде конкавна на целата бројна оска?

110. За кои вредности на a и b точката $M(1,3)$ е превојна точка за кривата $y=ax^3+bx^2$?

111. Да се најде равенката на оскулаторната кружница на кривата $y=x^2(3-x)$ во точката, во која тангентата е паралелна со x оската и има позитивна апсциса.

112. За $y=\dfrac{ax}{a+x}$, ако r е радиус на кривината во произволна точка (x,y), покажи дека:

$$\left(\frac{2r}{a}\right)^{2/3}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Во задачите **113 - 116** најди ја кривината на дадената крива.

113. $9ay^2=x(x-3a)^2$ во произволна точка.

114. $2y=ax^2+by^2+2cxy$ (конусен пресек) во точката $(0,0)$.

115. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ (циклоида) во произволна точка.

116. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (елипса) на крајот од главната оска.

117. Да се најдат точките во кои кривината на кривата $y=ch x$ е најголема.

118. Докажи дека еволута на кривата

а) $x=-a(\ln tg\dfrac{x}{2}+\cos t),\ y=a\sin t$ (трактриса) е $Y=ach\dfrac{X}{a}$;

б) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (астроида) е $(X+Y)^{2/3}+(X-Y)^{2/3}=2a^{2/3}$ (пак астроида).

Во задачите **119 - 124** да се испита дадената функција и да се скицира нејзиниот график.

119. $y=\dfrac{8}{x^3}-\dfrac{6}{x}$.

120. $y=(x-2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

121. $y=16x(x-1)^3$.

122. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

123. $y=\sqrt{x^3/(x-2)}$.

124. $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+\sin x}$.

125. $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$; најди y''.

126. $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$; најди y'''.

127. Нека $f(t)=(t-1)^{1/2}\cdot g(t)$ и $g(5)=-1$, $g'(5)=1/3$, $g''(5)=2$, $g'''(5)=10$. Најди го $f'''(5)$.

128. Нека $G(x)=xF(\sqrt{x})$ и $F'(3)=6$, $F''(3)=-1$, $F'''(3)=2$. Најди $G'''(9)$.

129. $y=5-3\cos^2 x$; а) најди $y^{(n)}$; б) $y=x^3\ln x$; в) најди $y^{(n)}$ за $n>3$.

130. Провери дали функцијата:

$$y = x^n[a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)]$$

ја задоволува "диференцијалната" равенка:

$$x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y = 0.$$

131. Да се претстави функцијата $y = 2^x$ во вид на полином од трет степен по x.

132. Пресметај со точност до 10^{-3}:

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\sqrt[7]{129}$.

III ИНТЕГРАЛИ

Во оваа глава се изучуваат основните својства на интегралите, основните методи и техники за интегрирање на некои класи елементарни функции, како и некои примени во геометријата и механиката. Поимот определен интеграл овде се воведува прво како "примитивен определен интеграл" - со помош на примитивна функција, а потоа како "риманов интеграл" - со помош на интегрални суми. Притоа се покажува дека, за непрекинатите функции, овие два поима се совпаѓаат.

III. 1. НЕОПРЕДЕЛЕН И ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

1.1. ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА; НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

За разлика од диференцијалното сметање каде што се врши диференцирање, т.е. се "бараат" изводи на дадени функции, во интегралното сметање се решава обратната задача: **за дадена функција** $f(x)$ **се бара функција чиј извод е еднаков на** $f(x)$. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. *Ако е дадена функцијата* $2x$, *тогаш како решение на горната задача се јавува секоја од функциите:* x^2, x^2+1, x^2-4, *затоа што изводот на секоја од нив е* $2x$. *Уште повеќе, за секој реален број* C, *т.е. реална константа* C[1], *изводот на функцијата* x^2+C *е* $2x$, *па и*

[1] Натаму ќе велиме само константа C, подразбирајќи дека станува збор за реална константа.

шоа е решение на погоре формулираната задача за "дадената" функција $2x$.

Пример 2. *За функцјата* $1/2\sqrt{x}$, *функцијата* $\sqrt{x}+C$, *за секоја константа* C *е решение на изнесената задача во интервалот* $(0,+\infty)$, *затоа што за секој* x *од тој интервал е точно равенство* $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+C\right)=1/2\sqrt{x}$.

Пример 3. *Нека* $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$; *тогаш, за секоја константа* C *и за секој* $x\in(-1,1)\left(\sqrt{1-x^2}+C\right)'=-x/\sqrt{1-x^2}$, *така што за дадената функција* $f(x)$ *решение на нашата задача во интервалот* $(-1,1)$, *претставува секоја од функциите* $\sqrt{1-x^2}+C$, *каде што* $C\in\mathbb{R}$ *е произволна константа.*

Погоре изнесените примери ја сугерираат следната дефиниција.

Ако функцијата $f(x)$ е дефинирана во интервалот (α,β) и ако $F(x)$ има извод во тој интервал, при што е точно равенството:

$$F'(x)=f(x), \tag{1}$$

за секој $x\in(\alpha,\beta)$, тогаш велиме дека $F(x)$ е **примитивна функција** на $f(x)$ во (α,β). (Да повториме дека се допушта некој од α, β, па дури и двата, да е бесконечен.) Според тоа ги имаме следниве можности:

а) $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, $(\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\alpha<x<\beta\}$,

б) $\beta\in\mathbb{R}$, $(-\infty,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<\beta\}$,

в) $\alpha\in\mathbb{R}$, $(\alpha,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\alpha<x\}$ и

г) $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Од горните примери следува дека:

(i) x^2+C е примитивна функција за $2x$ во $(-\infty,+\infty)$;

(ii) $\sqrt{x}+C$ е примитивна функција за $1/2\sqrt{x}$ во $(0,+\infty)$;

(iii) $\sqrt{1-x^2}+C$ е примитивна функција за $-x/\sqrt{1-x^2}$ во $(-1,1)$.

Во сите три случаи заклучокот важи за произволен реален број C, т.е. за произволна константа C.

Од својСтвото што ќе го докажеме подолу ќе следува дека појавувањето на произволна константа е општа законитост.

Теорема 1. *Нека* $F(x)$ *е примитивна функција за* $f(x)$ *во* (α,β). *Тогаш,* $G(x)$ *е примитивна функција за* $f(x)$ *во* (α,β) *ако и само ако постои константа* C, *таква што:*

$$G(x)=F(x)+C, \tag{2}$$

за секое $x\in(\alpha,\beta)$.

Доказ. Од (2) и претпоставката дека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$, добиваме: $G'(x)=F'(x)=f(x)$, за секое $x\in(\alpha,\beta)$, т.е. дека $G(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во (α,β).

Да претпоставиме сега дека $H(x)$ е произволна примитивна функција за $f(x)$ во (α,β), т.е. дека $H'(x)=f(x)$ во (α,β). Тогаш имаме: $(H(x)-F(x))'=f(x)-f(x)=0$, во (α,β), па според теоремата 2 од **II. 3. 3**, постои константа C, таква што $H(x)-F(x)=C$ во (α,β), т.е. $H(x)=F(x)+C$. □

Докажаната теорема може да се формулира и на следниов начин:

Теорема 1'. *Ако* $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во (α,β), тогаш $\{F(x)+C | C\in\mathbb{R}\}$ е множество од сите примитивни функции за $f(x)$ во (α,β).

При дадена функција $f(x)$, со $\int f(x)dx$ ќе го означиме множеството од сите примитивни функции за $f(x)$ во даден интервал (α,β). Ќе велиме дека $\int f(x)dx$ е **неопределен интеграл** на $f(x)$ во (α,β), $f(x)$ е **подинтегрална функција**, а $f(x)dx$ **подинтегрален израз** (или подинтегрален диференцијал), а $\int$ е **знак** за интеграл. Гледаме дека во ознаката $\int f(x)dx$ не фигурира интервалот (α,β), но тој во секој конкретен случај треба да се подразбира.

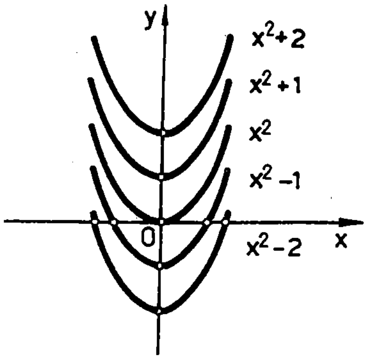
(Може да се постави прашањето зошто се појавува dx, т.е. зошто не се пишува, на пример, $\int f(x)$ наместо $\int f(x)dx$. Може да се одговори дека тоа се работи од историски причини, но, исто така, е точно (како што ќе видиме во 1. 2) дека прифатената ознака го олеснува наоѓањето на соодветниот неопределен интеграл.)

При горните претпоставки се покажува корисно $F(x)+C$ да го сметаме за **општ израз** за $\{F(x)+C | C \in \mathbb{R}\}$, па според тоа ќе имаме:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \tag{3}$$

каде што C се вика **интеграциона константа**.

Да потсетиме уште еднаш, дека во (3) $F(x)$ е која било, дадена, примитивна функција за $f(x)$ во (α,β).



Црт. 1.

Користејќи ја новата ознака резултатите од горните примери можат да се интерпретираат како што следува:

i') $\int 2xdx = x^2+C$; ii') $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}+C$; iii') $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{1-x^2}+C$.

Ако ставиме

$$y = \int f(x)dx = F(x)+C,$$

неопределениот интеграл $\int f(x)dx$ може геометриски да се интерпретира како еднопараметарска фамилија "паралелни" криви. Така $y=\int 2xdx = x^2+C$ е фамилијата параболи добиени од параболата $y=x^2$ со нејзино поместување, така што темето се движи по ординатната оска. На црт. 1. се нанесени пет такви параболи.

Од дадената дефиниција за примитивна функција, а потоа и за неопределен интеграл, ако се има притоа предвид и таблицата од **II. 2. 4.** за изводи од основните елементарни функции, ги добиваме следниве формули (**таблица на основни интеграли**):

I. $\int 0\cdot dx = C.$

II. $\int 1\cdot dx = x + C.$

III. $\int x^s dx = \dfrac{x^{s+1}}{s+1}+C,\ s\in\mathbb{R},\ \ s\neq -1.$

IV. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C.$

V. $\int e^x dx = e^x + C.$

VI. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq 1.$

VII. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

VIII. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

IX. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C.$

X. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C.$

XI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C.$

XII. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

XIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

XIV. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

XV. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C.$

XVI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$

Интегралите од горната таблица ќе ги викаме и **таблични интеграли**; тие треба добро да се запомнат, заедно со интегралите од вежбата **22.**

Имајќи ја предвид горната таблица, а и воопшто проблемот за интегрирање, ќе направиме неколку забелешки.

Забелешка 1. Наоѓањето на $\int f(x)dx$ се сведува на наоѓање на една примитивна функција $F(x)$ за $f(x)$, т.е. таква што да биде $F'(x) = f(x)$ за секој x од соодветниот интервал. За разлика од диференцирањето, дури и во случај на едноставна елементарна функција $f(x)$, не постои општ метод за определување на една примитивна функција $F(x)$.

Забелешка 2. Понатаму ќе покажеме (в. **5. 3**, Т. 4) дека ако $f(x)$ е непрекината во (α,β), тогаш постои примитивна функција $F(x)$ за $f(x)$ во (α,β). Но, оваа теорема ни малку не ја олеснува задачата за наоѓање на таква функција $F(x)$, а таму каде што успеваме да најдеме примитивна функција, споменатиот резултат не го користиме. Овде е место да споменеме дека постојат едноставни, непрекинати, елементарни функции чии примитивни функции не се елементарни. Такви се, на пример, функциите e^{x^2}, e^x/x, $\sin x/x$, $\cos x/x$.

Забелешка 3. Во ниеден од табличните интеграли не е споменат интервалот (α,β) за кој важи соодветната формула. За еден дел од тие формули (I, II, V, VI, VII, VIII, XV) тој "интервал" е $(-\infty,+\infty)$, т.е. $\mathbb{R}$, но кај другите тоа не е случај. И формулата XIV не е проблематична; тука, имено, интервалот е $(-1,1)$. Но, во преостанатите формули тој интервал не е еднозначно определен. Да се задржиме на IV. Имено, јасно е дека $\ln x$ е примитивна функција за $1/x$ во $(0,+\infty)$, а од исти причини, $\ln(-x)$ е примитивна функција за $1/x$ во $(-\infty,0)$. Според тоа, точно е равенството $(\ln|x|)'=1/x$ во $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, т.е. во една унија од два интервала. Ова ни сугерира да речеме дека "$\ln|x|$ е примитивна за $1/x$ во $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$", па се поставува сега прашањето дали со десната страна од IV се добива множеството од *сите* функции $F(x)$ така што $F'(x)=1/x$ на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$? Одговорот е негативен: на пример, функцијата:

$$F(x)=\begin{cases}\ln x & \text{за } x>0\\ \ln(-x)+1 & \text{за } x<0,\end{cases}$$

не може да се добие од $\ln|x|+C$, за ниедна вредност на C. Значи, формулата IV е точна во секој од интервалите $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$, но не и во нивната унија. Слична ситуација имаме и во IX, X, XII и XVI.

Забелешка 4. Не ретко, при решавање неопределени интеграли, студентот ќе добие резултат различен од резултатот наведен во соодветната збирка задачи. Тоа се уште не значи дека е направена грешка, бидејќи може да се случи резултатите да се разликуваат за адитивна константа, а во тој случај тие нема ни да бидат различни. Така и обата резултата во XI (а и во XIV) се точни, бидејќи $arctgx+arcctgx=\pi/2=\arcsin x+\arccos x$. Во случај, пак, кога решавачот не ќе биде во состојба да покаже дека резултатите се разликуваат за адитивна константа, не му преостанува ништо друго туку да ја провери точноста со диференцирање на добиениот резултат.

Забелешка 5. Да претпоставиме дека $F(x)$ е примитивна функција за функцијата $f(x)$ во интервалот (α,β), каде што α е реален број $(\alpha\neq-\infty)$. Ако $f(x)$ и $F(x)$ се дефинирани за α и ако е точно равенството:

$$f(\alpha)=F'(\alpha^+)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{F(\alpha+\Delta x)-F(\alpha)}{\Delta x},$$

тогаш ќе велиме дека $F(x)$ е **примитивна функција** за $f(x)$ во $[\alpha,\beta)$. Слично се определува примитивна функција и во $(\alpha,\beta]$, а потоа, ако $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во (α,β), $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, при што $F'(\alpha^+)=f(\alpha)$, $F'(\beta^-)=f(\beta)$, тогаш за $F(x)$ велиме дека е **примитивна функција** за $f(x)$ во $[\alpha,\beta]$. Обопштувањето може да оди и натаму: ако $F(x)$ е дефинирана за α, но $\lim\limits_{x\to\alpha^+} F'(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=+\infty$ (или $-\infty$), или ако $F(x)$ е дефинирана за β, но $\lim\limits_{x\to\beta^-} F'(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=+\infty$ (или $-\infty$), или ако има место и едниот и другиот случај, тогаш пак можеме да сметаме дека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во $[\alpha,\beta]$. За илустрација на последново обопштување да се вратиме на Примерите 2 и 3. Имено, во Примерот 2 можеме да сметаме дека $\sqrt{x}+C$ е примитивна функција за $1/2\sqrt{x}$ во $[0,+\infty)$, а во Примерот 3, $\sqrt{1-x^2}+C$ може да се смета за примитивна функција на $-x/\sqrt{1-x^2}$ во $[-1,1]$.

ВЕЖБИ

1. За функцијата $f(x)$ во а) - в) најди ја онаа примитивна функција $F(x)$ чијшто график минува низ точката $M(0,2)$:

а) $f(x)=2x$; б) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; в) $f(x)=\sin x$.

2. Нека α, β, γ и δ се такви што $\alpha<\gamma<\delta<\beta$. Да се покаже дека, ако $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во (α,β), тогаш $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ и во (γ,δ).

Во секоја од задачите **3 - 5** да се определи функцијата $F(x)$ што ги задоволува условите:

$F(-2)=3$, $F(1)=-2$, $F'(x)=f(x)$ за секој $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, при што:

3.* $f(x)=\dfrac{1}{x}$; **4.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; **5.** $f(x)=\dfrac{2}{3}\cdot x^{-1/3}$.

6. Дали за определувањето на $F(x)$ во задачите **3 - 5** е доволен само еден од условите $F(-2)=3$, $F(1)=-2$?

Да се покаже дека се точни следниве резултати (**7 - 12**):

7. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \ln(e^x+1)+C$ во $(-\infty,+\infty)$

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin x^2$ во $[-1,1]$.

9. $\int tg^2 x dx = tg\, x - x + C$ во $\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

10.* $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ во $[0,+\infty)$ (Да се објасни зошто може равенството да се смета за точно и за $x=0$).

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$ во $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

12. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = -\sqrt{1+\ln x}\cdot(\ln x - 2)+C$ во $(\frac{1}{e},+\infty)$.

Да се покаже дека (**13 - 14**):

13. $\int |x| dx = \frac{1}{2}\cdot x|x| + C.$

14. $\int 3|x| x\, dx = |x| x^2 + C.$

15. Да се наведат интервалите во кои е точна формулата:

а) IX, б) X, в) XII, г) XIV, д) XVI.

Да се покаже дека (**16 - 18**):

16. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

17. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

18. $\int df(x) = f(x)+C = \int f'(x)dx$

19. Да се открие грешката во следниот "доказ":

Од равенствата:

$$\int 2xdx = x^2 + C \quad \text{и} \quad \int 2xdx = x^2+1+C$$

следува дека $x^2+1+C = x^2+C$, т. е. $1=0$(?!).

20. Дали е точно равенството:

$\int 2xdx = x^2 + C^2,$

каде што C е произволна константа?

21. Со диференцирање на соодветната десна страна, да се покаже точноста на табличните интеграли I - XVI.

22. Да се покаже (за $a>0$) точноста на следниве "таблични" интеграли:

XI'. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \quad (= -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C)$

XII'. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$ XIII'. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

XIV'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (= -\frac{1}{a} \arccos\frac{x}{a} + C)$

XV'. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$ XVI'. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$

23. Да се најдат "таблични" интеграли за хиперболичните функции, соодветни на VII, VIII, IX, i X.

1. 2. МЕТОД НА НЕПОСРЕДНО ИНТЕГРИРАЊЕ

Овде ќе покажеме дека при решавање на интеграли не е битно дали променливата под знакот на интегралот е независнопроменлива или функција.

Ќе ја докажеме прво следнава

Лема. *Нека $F(u)$ е примитивна функција за $f(u)$ во (α,β) и нека е $\varphi(x)$ диференцијабилна функција во (a,b) таква што $\varphi(x) \in (\alpha,\beta)$ за секое $x \in (a,b)$. Тогаш, $F(\varphi(x))$ е примитивна функција за $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ во (a,b).*

Доказ. Да ставиме $u = \varphi(x)$. Според правилото за извод на сложена функција (Теорема 1 од **II. 2. 2.**) имаме:

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}F(u) = \frac{d}{du}F(u)\cdot\frac{du}{dx} = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x),$$

што требаше и да се докаже. □

Како последица, се добива следнава:

Теорема. *Ако при условите на лемата е точно равенството*

$$\int f(u)du = F(u) + C, \tag{1}$$

тогаш е точно и равенството

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C. \qquad (2)$$

Споредувајќи ги равенствата (1) и (2) воочуваме дека со смената $u=\varphi(x)$, $du=\varphi'(x)dx$ и двете добиваат иста форма, но притоа во (1) u е независна, а во (2) зависно променлива. (Ова својство е и една од причините што интегралот се означува со $\int f(x)dx$, а не, на пример, со $\int f(x)$.) □

Резултатот од теоремата може да се искаже и на следниов начин: **при решавање на интегралот $\int f(u)du$ работиме на ист начин кога u е зависно променлива, како и кога u е независно променлива, а тоа е всушност, и методот на непосредно интегрирање**. Овој метод се состои во тоа што **при решавање на интегралот $\int g(x)dx$ се прават обиди да се определат функции со следниве својства:**

(i) $f(\varphi(x)\varphi'(x))=g(x)$,

(ii) интегралот $\int f(u)du=F(u)+C$, го знаеме.

Тогаш го определуваме и дадениот интеграл со:

(iii) $\int g(x)dx=F(\varphi(x))+C$.

Во конкретна примена на овој метод важна е умешноста дадена функција $g(x)$ да се претстави во облик $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, т.е. $g(x)dx$ во облик $f(u)du$, при што интегралот $\int f(u)du$ ни е претходно познат.

Примери.

Користејќи ја формулата:

$$\int x dx=\frac{x^2}{2}+C,$$

добиваме:

1) $\int \sin x\cdot\cos x dx=\int \sin x\cdot d(\sin x)=\dfrac{(\sin x)^2}{2}+C$

2) $\int \dfrac{arctgx}{1+x^2}dx=\int arctgx\cdot(arctgx)'dx=\int arctgx\cdot d(arctgx)=$

$$=\frac{(arctgx)^2}{2}+C$$

По потреба, се вршат и некои очигледни трансформации, како, на пример, следниве:

а) $dx=d(x+b)=\frac{1}{a}\cdot d(ax)$, каде што a и b се константи, $a\neq 0$,

б) $x^s ds=\frac{1}{1+s}d\left(x^{s+1}\right),\ s\neq -1.$

Еве уште неколку примери:

3) $\int 2(2x+3)^7 dx=\int (2x+3)^7 d(2x+3)=\frac{1}{8}(2x+3)^8+C;$

4) $\int 4\sin 4x\,dx=\int \sin 4x\,d(4x)=-\cos 4x+C;$

5) $\int ctg\,x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C;$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{1-(x/3)^2}}=\int \frac{d(x/3)}{\sqrt{1-(x/3)^2}}=\arcsin\frac{x}{3}+C.$

Во сите 6 примери се користени соодветни таблични интеграли од таблицата во **1. 1**, со таа разлика што овде наместо независнопроменливата x стои соодветна функција $u=\varphi(x)$, но притоа новата променлива u експлицитно не се ни појавува.

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 14** да се определи $\int f(x)dx$ каде што $f(x)$ е:

1. $\frac{1}{x+3}$; **2.** $\sqrt{x-5}$; **3.** $2xe^{x^2}$; **4.** $\frac{\ln^3 x}{x}$;

5. $2x\left(x^2+1\right)^8$; **6.** $\frac{2x}{1+x^2}$; **7.** $\frac{e^x}{e^x+1}$; **8.** $e^{\sin x}\cos x$;

9. $\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$; **10.** $\frac{-6x}{2-3x^2}$; **11.** $\frac{3}{4-9x^2}$;

12. $2xch\,x^2$; **13.** $\frac{1}{2\sqrt{x}sh^2(\sqrt{x})}$; **14.** $\frac{1}{2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

15. Да се покаже дека

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C \text{ во } \left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Упатство: $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

1. 3. ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Интегралите се користат за пресметување на мерните карактеристики на разни геометриски објекти, а, исто така, и за пресметување на мерните карактеристики на соодветни поими од физиката и други научни области. При овие пресметувања се користат определени интеграли, што можат да се дефинираат и директно (како што ќе видиме во **5. 1**), но овде тоа ќе го направиме со помош на поимот за примитивна функција, т.е. со помош нанеопределен интеграл.

Нека за функцијата $f(x)$ постои примитивна функција во интервалот (α,β); во овој случај велиме дека $f(x)$ е **интеграбилна** во (α,β). Да претпоставиме дека $F(x)$ е една примитивна функција за $f(x)$ во (α,β) и да земеме $a,b\in(\alpha,\beta)$. Тогаш разликата

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

ја означуваме со $\int_a^b f(x)dx$ и ја викаме **определен интеграл на** $f(x)$ **со долна граница** a **и горна граница** b. Значи,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b \tag{1}$$

За да покажеме дека $\int_a^b f(x)dx$ е еднозначно определен број, треба да покажеме дека тој не зависи од изборот на примитивната функција $f(x)$.

Навистина, ако $G(x)$ е која било примитивна функција за $f(x)$ во (α,β), тогаш постои константа C таква што

$$G(x) = F(x) + C,$$

за секој $x \in (\alpha,\beta)$. Според тоа, ќе имаме:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Од дадената дефиниција е јасно и како се пресметува еден определен интеграл. Имено, се решава интегралот $\int f(x)dx = F(x) + C$, потоа се пресметува разликата $F(b) - F(a)$, при што $F(x)$ е која било примитивна функција за $f(x)$ во (α,β).

Примери.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$,

2) $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \big|_1^e = \ln e = 1$,

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \big|_{-\pi}^{\pi} = -[\cos\pi - \cos(-\pi)] = -(-1+1) = 0$,

4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \cos x dx = \sin x \big|_{-\pi/2}^{\pi/6} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Непосредно од равенството (1), се добиваат следниве **својства на определените интеграли**:

1.° $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$;

2.° $\int_a^a f(x)dx = 0;$

3.° $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

4.° $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx;$

притоа a, b, c се произволни броеви од соодветниот интервал (α,β).

Треба специјално да се истакне равенството **1°** кое кажува дека:

5.° *Вредноста на еден определен интегал не зависи од ознаката на променливата што се наоѓа под знакот на интегралот.*

Да претпоставиме сега дека a е даден реален број од интервалот (α,β), а x е променлива од истиот интервал. Тогаш:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

т.е.

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt \qquad (2)$$

Според тоа:

6.° *Ако* $F(x)$ *е примитивна функција за* $f(x)$ *во* (α,β) *и ако* $a \in (\alpha,\beta)$, *тогаш е точно равенството (2), за секое* $x \in (\alpha,\beta)$.

7.° $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ *е примитивна функција за* $f(x)$ *во* (α,β) *определена со условот* $G(a) = 0$.

Забелешка 1. Не е грешка ако $\int_a^x f(t)dt$ се означи со $\int_a^x f(x)dx$, но тогаш појавувањето на x како горна граница не треба да се меша со појавувањето на x како променлива во подинтегралниот израз. Поради можната конфузија, во практиката треба да се избегнува горната ситуација кога x се појавува во двојно својство.

Претпоставувајќи дека $a,b \in (\alpha,\beta)$ во равенството (1) ја исклучивме секоја од можностите $a=\alpha$, $a=\beta$, $b=\alpha$, $b=\beta$. Тука, при одредени претпоставки, ќе изнесеме **два вида обопштувања** на поимот за определен интеграл, преку кои ќе бидат допуштени сите четири наброени равенства.

I. *Ќе се задржиме прво на случајот кога* $\beta=+\infty$ (*ќе земеме* $b=\beta$) *и кога* $a \in (\alpha,\beta)$. Во овој случај интегралот $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ го дефинираме со:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(a)\right], \tag{3}$$

при што $F(x)$ е една примитивна функција за $f(x)$ во (α,β) и при што претпоставуваме дека границата на десната страна во (3) постои. Интегралот, пак, $\int_{+\infty}^{a} f(x)dx$ го дефинираме со:

$$\int_{+\infty}^{a} f(x)dx = -\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{3'}$$

Пример 5. *Да го пресметаме интегралот* $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. *Бидејќи* $\int\frac{dx}{1+x^2} = = arctgx + C$ *и* $arctg0 = 0$, *имаме*

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}.$$

За случајот кога $\alpha=-\infty$, за секој $a\in(-\infty,\beta)$, интегралот $\int\limits_{a}^{-\infty} f(x)dx$ го дефинираме со:

$$\int\limits_{a}^{-\infty} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\big(F(b)-F(a)\big), \tag{4}$$

а потоа интегралот $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ со:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{-\infty} f(x)dx. \tag{4'}$$

Сега може да се воведе поим и за интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ со помош на двата погоре дефинирани интеграли. Имено, тој интеграл го дефинираме со:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx, \tag{5}$$

при што претпоставуваме дека постојат и двата интеграла на десната страна од (5).

Да забележиме дека, во горната дефиниција за $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, наместо 0 може да се земе кој било реален број a, зашто според својството **3°**, и обопштеното својство **4°** за кое може да се покаже дека важи и за овој вид интеграли, добиваме:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Определените интеграли кај кои барем една граница е бесконечна ќе ги викаме **несвојствени**. Притоа, кога границите на десните страни во (3) и (4) постојат и се конечни, за соодветните несвојствени интеграли велиме дека се **конвергентни**. Во спротивен случај за нив велиме дека се **дивергентни**. Интегралот од левата страна на (5) го викаме **конвергентен** ако и двата интеграла на десната страна во (5) се конвергентни, а **дивергентен** во спротивниот случај.

Пример 6. *Несвојствениот интеграл* $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ *е дивергентен, зашто:*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$$

II. *Може да се воведе уште еден вид несвојствени интеграли.* Пак нека $F(x)$ е една примитивна функција за $f(x)$ во (α,β) и нека $b \in (\alpha,\beta)$. Ако постои $\lim\limits_{x\to\alpha^+} F(x)$, тогаш го дефинираме интегралот $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ со:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\alpha^+} \left(F(b) - F(a)\right). \tag{6}$$

Во овој случај велиме дека $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ е **конвергентен несвојствен интеграл**. Ако $F(x)$ е непрекината во $[\alpha,\beta)$ (но не мора и диференцијабилна во α), тогаш (6) се сведува на:

$$\int_{\alpha}^{b} F(x) = F(b) - F(\alpha). \tag{6'}$$

Во случај да не постои (конечна) границата $\lim\limits_{x\to\alpha^+} F(x)$, велиме дека интегралот

$\int\limits_{\alpha}^{b} f(x)dx$ е **дивергентен**. Слично, ако $a \in (\alpha,\beta)$ и ако постои границата

$\lim\limits_{x\to\beta^-} F(x)$, (конечна!) тогаш го определуваме интегралот:

$$\int\limits_{a}^{\beta} f(x)dx = \lim_{x\to\beta^-}\left(F(b)-F(a)\right). \tag{7}$$

за кој во овој случај велиме дека е **конвергентен**, додека во спротивниот случај

за $\int\limits_{a}^{\beta} f(x)dx$ ќе велиме дека е **дивергентен** несвојствен интеграл. Ако $F(x)$ е

непрекината (но не мора и диференцијабилна) во β, равенството (7) добива вид:

$$\int\limits_{a}^{\beta} f(x)dx = F(\beta)-F(a). \tag{7'}$$

Примери:

5) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{0}^{1} = 2,$

6) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{0}^{1} = \dfrac{\pi}{2},$

7) $\int\limits_{0}^{\pi/2} ctg\, x dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{\cos x dx}{\sin x} = \int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln(\sin x)\Big|_{0}^{\pi/2} =$

$$= \ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \lim_{x\to 0}\ln(\sin x) = 0 - \lim_{x\to 0}\ln(\sin x) = +\infty;$$

дадениот интеграл е дивергентен.

На крајот, нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во секој од интервалите (α,β) и (β,γ) и нека $a \in (\alpha,\beta)$, $b \in (\beta,\gamma)$. Ако е конвергентен секој од интегралите $\int_a^\beta f(x)dx$ и $\int_\beta^b f(x)dx$, тогаш **конвергентен** ќе биде и интегралот $\int_a^b f(x)dx$ којшто го дефинираме со:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx. \tag{8}$$

Во спротивен случај за несвојствениот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ велиме дека е **дивергентен**.

Забелешка 2. Во сите обопштувања на поимот определен интеграл (во (3) - (5), (6) - (8)) се претпоставува дека $F(x)$ е дадена примитивна функција во соодветниот интервал. Поради тоа неопходно е да се покаже дека резултатот не зависи од изборот на примитивната функција. Тоа е точно, а доказот му го препуштаме на читателот.

ВЕЖБИ

1. Да се докаже тврдењето во забелешката 2.

2. а) Да се образложи зошто следниов резултат не е точен:

$$\int_{-1}^{e} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1.$$

б) Дали се точни резултатите: $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1 = \int_{-1}^{-e} \frac{dx}{x}$?

Да се пресметаат интегралите (**3** - **9**):

3. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$; **4.** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$; **5.** $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2-4}$;

6. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{(1+\ln x)dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}$; 7. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; 9. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{ch^2 x}$;

Да се пресметаат следниве несвојствени интеграли, или да се установи дека се дивергентни (**10 - 17**):

10. $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}\quad (a>1)$; 11. $\int\limits_{0}^{+\infty} -e^{-kx}kdx\quad (k>0)$;

12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctgxdx}{x^2+1}$; 13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$;

14. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin xdx$; 15. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^p}$;

16. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 17. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$.

III. 2. ОСНОВНИ МЕТОДИ НА ИНТЕГРИРАЊЕ

2. 1. МЕТОД НА РАЗЛОЖУВАЊЕ

Покрај методот на непосредно интегрирање, кој го разгледавме во **1. 2**, овде ќе изнесеме уште три општи методи за решавање на интегралите.

Во овој раздел ќе се запознаеме со својството на **линеарност на интегралите**.

Користејќи ја линеарноста на операторот диференцирање, ќе докажеме дека и интегрирањата (неопределено или определено) го имаат истото својство, т.е. ќе ја докажеме следнава:

Теорема (за линеарност на интегралите) *Нека A е дадн реален број, $f(x)$ и $g(x)$ интеграбилни функции во (α,β) и $a,b\in(\alpha,\beta)$. Тогаш и функциите $Af(x)$, $f(x)+g(x)$ се интеграбилни во (α,β) и притоа се точни равенствата:*

(i) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$

(ii) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(i') $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$

(ii') $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Доказ. Нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$, а $G(x)$ примитивна функција за $g(x)$, во еден ист интервал (α,β). Тогаш за $x\in(\alpha,\beta)$, имаме:

$$(AF(x))' = AF'(x) = Af(x),$$

$$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x),$$

т.е. добиваме дека $AF(x)$ е примитивна функција за $Af(x)$, а $F(x)+G(x)$ примитивна функција за $f(x)+g(x)$. Од тоа следува дека се точни (i) и (ii). Потоа, имаме и:

$$\int_a^b Af(x)dx = AF(b)-AF(a) = A(F(b)-F(a)) = A\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a)) =$$

$$=(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a)) =$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx,$$

со што е комплетиран доказот. □

Забелешка 1. Строго земено, за $A=0$ равенството (i) би гласело $C=0$, за произволно $C \in \mathbb{R}$, што не е точно, па затоа би требало да се претпостави дека $A \neq 0$. Но, таква претпоставка и не е неопходна, бидејќи "равенство на неопределени интеграли" е, всушност, "равенство до адитивна константа".

Докажаната теорема претставува основа за **интегрирање со метод на разложување**. Тој метод се состои во тоа што **пресметувањето на левите страни од** (i), **односно** (ii) **се сведува на пресметување на соодветните десни страни**.

Попрецизно е да се рече дека се користи следново равенство:

$$\int [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x)] dx =$$

$$= A_1 \int f_1(x) dx + A_2 \int f_2(x) dx + \ldots + A_n \int f_n(x) dx \tag{1}$$

каде што $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се константи, а $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ функции што се интеграбилни во еден ист интервал (α, β). (Притоа, при пресметувањето на поединечните интеграли од десната страна не се води сметка за интеграционите константи, туку на крајот се зема една произволна константа.)

Да разгледаме неколку примери:

1) $\int (8x^3 - 2x + 3) dx = 8\int x^3 dx - 2\int x dx + 3\int dx =$

$$= 8\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 3x + C = 2x^4 - x^2 + 3x + C.$$

2) $\int \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^3} dx = \int \left(x - \frac{1}{x} + x^{-3} \right) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot x^{-2} + C.$$

3) $\int \left(6\sqrt{x} - x\sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(6x^{1/2} - x^{7/5} + \frac{1}{3} x^{-1/2} \right) dx =$

$$=6\frac{x^{1/2+1}}{1+1/2}-\frac{x^{7/5+1}}{1+7/5}+\frac{\frac{1}{3}x^{-1/2+1}}{1-1/2}+C=4x^{3/2}-\frac{5}{12}x^{12/5}+\frac{2}{3}x^{2/3}+C=$$

$$=4x\sqrt{x}-\frac{5}{12}x^2\sqrt[5]{x^2}+\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}+C.$$

4) $\int tg^2 x dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=tg\,x-x+C.$

Пример 5. *За да го решиме интегралот* $\int\frac{dx}{(x-2)x(x+1)}$, *ќе ги определиме константите* A_1, A_2, A_3, *така што*

$$\frac{1}{(x-2)x(x+1)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x+1}, \qquad (*)$$

да биде точно за секое $x\neq 2, 0, -1$. Претпоставувајќи дека тие константи сме ги определиле, ќе добиеме:

$$\int\frac{dx}{(x-2)x(x+1)}=A_1\ln|x-2|+A_2\ln|x|+A_3\ln|x+1|+C,$$

каде што C е интеграциона константа.

За да ги определиме константите A_1, A_2, A_3, се ослободуваме од именителите во $(*)$ и добиваме:

$$1=A_1x(x+1)+A_2(x-2)(x+1)+A_3(x-2)x=$$

$$=x^2(A_1+A_2+A_3)+x(A_1-A_2-2A_3)-2A_2,$$

при што ова равенство треба да биде точно за секое $x\neq 2, 0, -1$, од што следува $-2A_2=1$, $A_1-A_2-2A_3=0$, $A_1+A_2+A_3=0$. Решавајќи го системот од три линеарни равенки со три непознати, добиваме:

$$A_2=-\frac{1}{2},\quad 3A_3=-2A_2\Rightarrow A_3=\frac{1}{3},\quad A_1=\frac{1}{6}.$$

Од сето тоа следува:

$$\int \frac{dx}{(x-2)x(x+1)} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}\right| + C.$$

Ова равенство е точно во секој од интервалите $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$.

Пример 6. *Нека p и q се дадени реални броеви, такви што $p \neq q$ и $p \neq -q$. Поради,*

$$\sin px \cdot \cos qx = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\right],$$

имаме:

$$\int \sin px \cdot \cos qx \cdot dx = \frac{1}{2}\int \sin(p+q)x dx + \frac{1}{2}\int \sin(p-q)x dx =$$

$$= \frac{1}{2(p+q)}\int \sin(p+q)x d\left[(p+q)x\right] + \frac{1}{2(p-q)}\int \sin(p-q)x d\left[(p-q)x\right] =$$

$$= -\frac{1}{2(p+q)}\cos(p+q)x - \frac{1}{2(p-q)}\cos(p-q)x + C.$$

ВЕЖБИ

Во задачите (1 - 7) да се определи $\int f(x)dx$ ако $f(x)$ е дадена со:

1. $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$; **2.** $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$; **3.** $\dfrac{1}{\cos^4 x}$; **4.** $\dfrac{1}{\cos^6 x}$;

5. $\dfrac{x^4}{1+x^2}$; **6.** $\sin 3x \sin 5x$; **7.** $\cos 3x \cos 5x$.

8. Во теоремата ги докажавме равенствата (i) и (ii) при претпоставка дека постојат десните страни. Дали истиот доказ би важел и при претпоставка дека постојат соодветните леви страни?

Во задачите (9 -12) да се определи $\int f(x)dx$ ако $f(x)$ е дадена со:

9. $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$; **10.** $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$;

11. $\frac{1}{x^4-1}$; **12.** $\frac{1}{x^3+8}$.

Упатство: Опрдели ги броевите A_1, A_2, B, B_1, B_2 такви што:

9) $\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{x+1}$;

10) $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B_1x+B_2}{x^2+1}$;

11) $\frac{1}{x^4-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B_1x+B_2}{x^2+1}$;

12) $\frac{1}{x^3+8}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{B_1x+B_2}{x^2-2x+4}$.

Да се пресметаат следниве определени интеграли (**13** - **20**):

13. $\int_0^8\left(3\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$. **14.** $\int_1^4\frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$.

15. $\int_0^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$. **16.** $\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. $\int_0^1\frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$. **18.** $\int_0^{\pi/2}\sin^3 t dt$

19. $\int_{-1}^1\frac{y^5\cdot dy}{y+2}$. **20.** $\int_0^1\frac{t^3dt}{t^8+1}$.

2. 2. МЕТОД НА ИНТЕГРИРАЊЕ ПО ДЕЛОВИ

Не постои општа формула за интегрирање на производ од две функции, но сепак постои можност интегрирањето на призвод од две функции да се сведе на интегрирање на друг, "позгоден" призвод, како што покажува следнава:

Теорема. (за парцијално интегрирање) *Нека* $u(x)$ *и* $v(x)$ *се диференцијабилни функции во* (α,β). *Ако* $F(x)$ *е примитивна функција за* $v(x)u'(x)$ *во* (α,β), *тогаш* $G(x)=uv-F(x)$ *е примитивна за* $u(x)v'(x)$ *во истиот интервал* (α,β).

Доказ. Од направените претпоставки следува дека $G(x)$ е диференцијабилна во (α,β), како и дека:

$$G'(x)=(uv)'-F'(x)=u'v+uv'-vu'=uv',$$

што и требаше да се докаже. □

Резултатот од докажаната теорема може да се искаже и со помош на следнава формула:

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx. \tag{1}$$

Методот на интегрирање по делови, всушност, се базира на формулата (1), па затоа (1) се вика **формула за интегрирање по делови**, т.е. **формула за парцијална интеграција**. Таа формула може да се запише и во следнава "форма на диференцијали":

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{1'}$$

Формулата за парцијална интеграција кај определените интеграли го има следниов облик:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{2}$$

Примери.

1) $\int xe^x dx=\int x\left(e^x\right)' dx=xe^x-\int e^x x'dx=$

$=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=$

$=e^x(x-1)+C$, во $(-\infty,+\infty)$

2) $\int x\ln x dx=\int(\ln x)\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' dx=$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{4}x^2+C,\text{ во }(0,+\infty)$$

3) $\int\ln x dx=\int\ln x\cdot(x)'dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=$

$$=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C,\text{ во }(0,+\infty)$$

4) $\int arctgx dx=\int arctgx(x)'dx=xarctgx-\int\frac{x}{1+x^2}dx=$

$$=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C,\text{ во }(-\infty,+\infty)$$

Во изнесените примери е користена формулата за парцијална интеграција во облик (1). Примената на формулата во диференцијалниот облик (1') ќе ја илустрираме со наредните примери.

1') $\int xe^x dx=\int xd\left(e^x\right)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$;

2') $\int x\ln x dx=\int(\ln x)\cdot d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}d(\ln x)=$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x}=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$$

5) $\int x^n\ln x dx=\int\ln x\cdot d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}d(\ln x)=$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^n dx=$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C,\text{ за }n\neq-1.$$

Да разгледаме и неколку примери на определени интеграли.

6) $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int\limits_0^{\pi} \cos x \cdot \cos x dx = \int\limits_0^{\pi} \cos x \cdot d(\sin x) =$

$$= \sin x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x d(\cos x) =$$

$$= (0-0) + \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(1-\cos^2 x\right) dx = \int\limits_0^{\pi} dx - \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x dx,$$

од каде што, $2\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int\limits_0^{\pi} dx = \pi$, и конечно: $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$.

7) $\int\limits_0^1 x(arctgx)dx = \int\limits_0^1 arctgx \cdot d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot d(arctgx) =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} arctgx \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi-2}{4}.$$

8) $\int\limits_0^1 x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^1$ (види пример 2).

Овој интеграл е несвојствен. Бидејќи, пак, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \ln x}{2} = 0$, добиваме дека тој е конвергентен, така што (имајќи предвид дека $\ln 1 = 0$) добиваме:

$$\int_0^1 x\ln x dx = -\frac{1}{4}.$$

За пресметување на некои интеграли нужно е повеќе пати да се примени формулата за парцијално интегрирање. Таков е случајот со следниве два примера:

9) $$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d\left(e^x\right) = x^2 e^x - \int e^x d\left(x^2\right) =$$
$$= x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int xd\left(e^x\right) =$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

10) $$\int e^x \sin x dx = \int \sin x d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x) =$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x d\left(e^x\right) =$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x), \text{ т.е.}$$
$$\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx,$$

од каде што се добива дека:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

За да се избегне ваквото повторување на постапката, може да се користи следнава **обопштена формула за парцијално интегрирање**:

$$\int uv^{(n)}dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}vdx \qquad (3)$$

каде што u и v се n пати диференцијабилни функции од x.

Доказ. Со примена на формулата за парцијално интегрирање, добиваме:

$$\int uv^{(n)}dx = uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)}dx,$$

$$\int u'v^{(n-1)}dx = u'v^{(n-2)} - \int u''v^{(n-2)}dx,$$

. . . .

$$\int u^{(n-1)}v'dx = u^{(n-1)}v - \int u^{(n)}vdx,$$

од каде, пак, со последователна замена, се добива формулата (3). □

Пример 11. Да го пресметаме интегралот $\int x^3 \sin x dx$.

Ќе ставиме $u = x^3$ и $v^{(n)} = \sin x$. Поради $u' = 3x^2$, $u'' = 6x$, $u''' = 6$, $u^{(n)} = 0$ за $n \geq 4$, можеме во формулата (2) да земеме $n = 3$, а тогаш:

$$v''' = \sin x, \ v'' = -\cos x, \ v' = -\sin x, \ v = \cos x,$$

така што ќе добиеме:

$$\int x^3 \sin x dx = x^3(-\cos x) - 3x^2(-\sin x) + 6x\cos x - 6\sin x + C =$$
$$= -x^3\cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - 6x\sin x + C.$$

ВЕЖБИ

Со помош на формулата за парцијално интегрирање, да се решат интегралите (1 - 6):

1. $\int x\cos x dx$;

2. $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

3. $\int \arccos x dx$;

4. $\int \sin(\ln x) dx$;

5. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

6.* $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$.

Со помош на обопштената формула за парцијално интегрирање да се решат интегралите (7 - 8):

7. $\int x^3 \cos x dx$;

8. $\int x^4 e^x dx$.

Со помош на формулата за парцијално интегрирање да се пресметаат следниве несвојствени интеграли (или да се утврди нивната дивергентност) (9 - 14):

9. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$;

10. $\int_1^e \ln x dx$;

11. $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$;

12. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$;

13. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx, \quad (a>0)$; **14.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx, \quad (a>0)$.

2. 3. НЕКОЛКУ РЕКУРЕНТНИ ФОРМУЛИ

Методот на интегрирање по делови (парцијално интегрирање) ќе го искористиме за наоѓање на неопределените интеграли:

$$\int \sin^n x dx, \qquad \int \cos^n x dx, \qquad \int \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^n},$$

каде што n е природен број. За $n=1$ имаме:

1) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

2) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

3) $\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} arctg \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \ a>0$;

4) $\int \frac{dx}{x^2-b^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right| + C, \ a=-b^2<0$

Според тоа, за да се пресметаат дадените три интеграли, доволно е да се најдат формули со кои пресметувањето на секој од нив би се свело на пресметување интеграли од ист вид, но со показател на подинтегралната функција помал од n. Овде ќе покажеме дека за секој од дадените три интеграли постојат такви формули.

Ќе го разгледаме, прво, интегралот:

$$I_n = \int \sin^n x dx, \ n \geq 2.$$

Имаме:

$$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x d\left(\sin^{n-1} x\right) =$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\cos^2 x\sin^{n-2}x dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2}x dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x dx-(n-1)\int\sin^n x dx=$$

$$=\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

од каде што се добива дека:

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}, \text{ т.е.}$$

$$\int\sin^n x dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x dx. \tag{1}$$

Во горниот доказ, како што читателот сам може да види, користена е формулата за интегрирање по делови.

На сосема ист начин се добива дека е точна и следнава формула:

$$\int\cos^n x dx=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx. \tag{2}$$

Формулите, како што се (1) и (2), при кои се намалува (т.е. се **редуцира**) степенот на подинтегралната функција (или на некој нејзин "дел"), натаму се применуваат со враќање, т.е. се применуваат "повторително", "рекурентно", па затоа и се викаат **редукциони** или **рекурентни формули**.

Да разгледаме два примера.

1) $$\int\sin^4 x dx=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}\int\sin^2 x dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}\int dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+C;$$

2) $$\int\cos^5 x dx=\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{5}\int\cos^3 x dx=$$

$$=\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int\cos x dx.$$

Да ја докажеме, сега, следнава рекурентна формула за третиот интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{1}{2a(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}}\right]. \qquad (3)$$

И овде земаме $n \geq 2$.

Доказ. Ако во интегралот $\int \frac{xdx}{(x^2+a)^{n-1}}$ ставиме $dv = dx$ и $u = \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}$, ќе добиеме дека $v = x$, $du = -\frac{2(n-1)xdx}{(x^2+a)^n}$, па по формулата за парцијално интегрирање имаме:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^{n-1}} = \frac{x}{\left(x^2+a\right)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+a\right)^n} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a\right)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(x^2+a)dx}{\left(x^2+a\right)^n} - 2(n-1)\int \frac{adx}{\left(x^2+a\right)^n},$$

од каде што добиваме,

$$2a(n-1)\int \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^n} = \frac{x}{\left(x^2+a\right)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^{n-1}},$$

а оттука и формулата (3). □

Пример 3. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} =$

$$= \frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3} + \frac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2} + \frac{15}{24}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2}+\frac{15x}{48\left(x^2+1\right)}+\frac{15}{48}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2}+\frac{15x}{48\left(x^2+1\right)}+\frac{15}{48}arctgx+C.$$

Добиените рекурентни формули можат да се пренесат и на определените интеграли од соодветните функции, што ние овде ќе го илустрираме преку следниве примери.

Пример 4. *Да ставиме:*

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx.$$

За $n=0;1$ имаме $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. За $n\geq 2$ според (1) добиваме:

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Ако $n=2k$ е парен број, добиваме:

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\frac{(2k-1)\cdot(2k-3)}{2k(2k-2)}I_{2k-4}=...=$$

$$=\frac{(2k-1)\cdot(2k-3)...3\cdot 1}{2k(2k-2)...4\cdot 2}I_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}.$$ [1)]

За $n=2k+1$ непарно, имаме:

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)...4\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)...3\cdot 1}I_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Пример 5. *Да го пресметаме несвојствениот интеграл*

[1)] Притоа, производот $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$ се означува кратко со $(2k-1)!!$, а $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)$ - со $(2k)!!$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}, \text{ каде што } n \geq 1.$$

За $n=1$ имаме $I_1 = arctgx\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, а за $n \geq 2$, според (3), добиваме:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot I_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot I_{n-1},$$

затоа што $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} = 0$ за $n \geq 2$.

Од $I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot I_{n-1}$, сега, добиваме:

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot I_{n-1} = \frac{(2n-3)\cdot(2n-5)}{2(n-1)2(n-2)} \cdot I_{n-1} = \ldots =$$

$$= \frac{(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2(n-1)2(n-2)\cdots 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1} I_n = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Пример 6. *Ќе најдеме рекурентна формула за интегралот*

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

каде што a е позитивен реален број, а n ненегативен цел број.

Потоа ќе го пресметаме и определениот интеграл

$$J_n = \int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

За $n = 0; 1$ имаме: $I_0 = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = -\sqrt{a^2-x^2} + C$, $J_1 = a$.

Нека $n \geq 2$; имаме:

$$I_n = \int \frac{x^{n-1} x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int x^{n-1} d\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) =$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx =$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

од што следува дека:

$$I_n = -\frac{1}{n} x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2(n-1)}{n} I_{n-2}.$$

Имајќи ја предвид последнава рекурентна формула, за J_n добиваме:

$$J_n = -\frac{1}{n} x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a + \frac{a^2(n-1)}{n} J_{n-2} = \frac{a^2(n-1)}{n} J_{n-2}.$$

За $n = 2k$ имаме:

$$J_{2k} = \frac{a^2(2k-1)}{2k} J_{2k-2} = \frac{a^4(2k-1)\cdot(2k-3)}{2k\cdot 2(k-1)} J_{2k-4} =$$

$$= \ldots = \frac{a^{2k}(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

За $n = 2k+1$, пак, се добива:

$$J_{2k+1} = \frac{a^2 \cdot 2k}{2k} J_{2k-1} = \frac{a^4 2k \cdot 2(k-1)}{(2k+1)\cdot(2k-1)} J_{2k-3} =$$

$$= \ldots = \frac{a^{2k} \cdot 2^k \cdot k!}{(2k+1)!!} \cdot J_1 = \frac{a^{2k+1} \cdot 2^k \cdot k!}{(2k+1)!!}.$$

ВЕЖБИ

Со примена на формулите (1) - (3) да се најдат интегралите (1 - 8):

1. $\int \sin^5 x dx$,

2. $\int \cos^6 x dx$,

3. $\int \cos^3 4x dx$,

4. $\int \sin^4 3x dx$,

5. $\int \frac{dx}{\left(x^2+5\right)^3}$,

6. $\int \frac{dx}{\left(9-x^2\right)^4}$,

7. $\int \frac{dx}{\left(81x^2-5\right)^3}$,

8. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^3}$.

Аналогно на формулите (1) и (2) да се покаже дека за секој природен број $k \neq 1$ се точни следниве формули (9 - 10):

9. $\int \frac{dx}{\sin^k x} = -\frac{\cos x}{(k-1)\sin^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1}\int \frac{dx}{\sin^{k-2} x}$,

10. $\int \frac{dx}{\cos^k x} = \frac{\sin x}{(k-1)\cos^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1}\int \frac{dx}{\cos^{k-2} x}$.

Користејќи ги формулите од претходните две задачи, да се пресметаат интегралите (11 - 14):

11. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$,

12. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$,

13. $\int \frac{dx}{\sin^4 5x}$,

14. $\int \frac{dx}{\cos^4 8x}$.

Да се пресметаат интегралите (15 - 17):

15. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$,

16. $\int\limits_0^{\pi} \sin^n x dx$,

17. $\int\limits_0^{\pi} \cos^n x dx$.

Да се докажат формулите 18 и 19, а потоа да се пресметаат интегралите 20 и 21:

18. $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x dx, \quad n \geq 2$.

19. $\int x^n \cos x dx = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)\int x^{n-2}\cos x dx, \quad n \geq 2$.

20. $\int\limits_0^{\pi} x^n \sin x dx$, **21.** $\int\limits_0^{\pi} x^n \cos x dx$.

Со примена на формулата за парцијално интегрирање да се докажат формулите **22 - 25**:

22. $\int tg^n x dx = \dfrac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2} x dx, \quad n \geq 2.$

23. $\int ctg^n x dx = -\dfrac{ctg^{n-1}x}{n-1} - \int ctg^{n-2} x dx, \quad n \geq 2.$

24. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx.$

25. $\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x} dx.$

26. Користејќи ја рекурентната формула од задачата 25, да се пресмета интегралот:

$$\Gamma(n+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

2. 4. ИНТЕГРИРАЊЕ СО МЕТОД НА ЗАМЕНА

Методот на непосредна интеграција е наједноставниот вид на метод на замена, бидејќи при него го користиме интегралот $\int f(u)du$, за решавање на интегралот $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Смислата на "непосредноста" на интегрирањето е во тоа што првиот интеграл е табличен, па затоа "новата променлива" u не се ни појавува. Многу често интегралот $\int f(u)du$ не е табличен, но е поедноставен од дадениот интеграл, па затоа за неговото интегрирање е позгодно да се работи со u, а не со x.

Тоа ќе го илустрираме со следниов, едноставен:

Пример 1. *За да го најдеме интегралот* $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$, *со помош на* *методот на непосредна интеграција, се наметнува за* $\varphi(x)$ *да се избере функцијата* $\sqrt{x+1}$, *од што ќе следува дека* $\varphi'(x)=1/2\sqrt{x+1}$, *па значи:*

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=f\left(\sqrt{x+1}\right)\frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

т.е. $f\left(\sqrt{x+1}\right)=\dfrac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$. Од сето тоа следува дека:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}=\int\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}d\sqrt{x+1},$$

но интегралот од десната страна не е табличен. Затоа, поедноставно е да се стави $u=\sqrt{x+1}$, па би добиле:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}=2\int\frac{u}{u+1}du=2\int\frac{u+1-1}{u+1}du=$$

$$=2\left[\int du-\int\frac{du}{u+1}\right]=2\left(\int du-\int\frac{d(u+1)}{u+1}\right)=$$

$$=2(u-\ln(u+1))+C=2\left(\sqrt{x+1}-\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right)+C.$$

(Во $\ln(u+1)$ не ставивме знак за апсолутна вредност, бидејќи од замената се гледа дека $u\geq 0$.)

Се разбира, новата променлива не мора да биде означена со u, ниту пак $\sqrt{x+1}$ е единствениот можен избор за нова променлива. Во конкретниот случај дури е и подобро таа нова променлива да биде $\sqrt{x+1}+1$, т.е. да се стави $t=\sqrt{x+1}+1$. Од тоа следува дека $dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$, т.е. $dx=2\sqrt{x+1}dt=$ $=2(t-1)dt$, од каде што добиваме:

$$I=2\int\frac{t-1}{t}dt=2\left[\int dt-\int\frac{dt}{t}\right]=2(t-\ln t)+C=$$

$$=2\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}-2\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)+C_1,$$

каде што $C_1=2+C$.

Да воочиме дека при оваа варијанта методот на замена се реализира на следниов начин. Се тргнува од "непознат" интеграл $\int g(x)dx$ при што $g(x)$ е, секако, познатата функција интеграбилна во даден интервал (a,b). Потребно е да се изберат функции $\varphi(x)$ и $f(u)$ такви што:

$$f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=g(x),$$

за секој $x\in(a,b)$, при што за секој таков x, $\varphi(x)\in(\alpha,\beta)$. Функцијата $f(u)$ треба да биде таква што да може да се најде примитивна функција $F(u)$ за $f(u)$ во (α,β). На крајот се добива дека $F(\varphi(x))$ е примитивна функција за $g(x)$ во (a,b).

Да разгледаме уште еден пример:

Пример 2. $I=\int tg^4x dx$. *Вршиме смена* $tg\,x=t$, *од каде што добиваме:*

$$dt=\frac{dx}{\cos^2 x}=\left(1+tg^2x\right)dx=\left(1+t^2\right)dx,$$

а оттука, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Така имаме:

$$I=\int\frac{t^4}{t^2+1}dt=\int\frac{\left(t^2+1\right)^2-2t^2-1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\left(t^2+1\right)dt-\int\frac{2t^2+1}{t^2+1}dt=\frac{t^3}{3}+t-\int\frac{2t^2+2-1}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{(tg\,x)^3}{3}-tg\,x+arctg(tg\,x)+C$$

Имајќи предвид дека $tg\,x$ има прекин за секое $x=(2k+1)\pi/2$, треба да се работи во секој интервал од облик $((2k-1)\pi/2,(2k+1)\pi/2)$. Ако се има предвид тоа што:

$$arctg(tg\,x) = x - k\pi, \text{ за } (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

доаѓаме до заклучок дека:

$$I = \frac{(tg\,x)^3}{3} - tg\,x + x - k\pi + C =$$

$$= \frac{(tg\,x)^3}{3} - tg\,x + x + C_1,$$

така што не би добиле погрешен резултат, дури и да ставиме $arctg(tg\,x) = x$, коешто е точно само за $k = 0$.

Во случај на определен интеграл нема потреба да се преминува на старата променлива. Така имаме:

$$\int_0^1 tg^4 x dx = \int_0^1 \frac{t^4}{t^2+1} dt = \left(\frac{t^3}{3} - t + arctg t\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{2}\right) - (0 - 0 + 0) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

Многу често се врши смената $x = \varphi(t)$, па даден интеграл $\int g(x)dx$ се сведува на решавање на интегралот $\int g(\varphi(t))\varphi'(t)dx$. При ова, ако $\int g(x)dx$ се интегрира во интервалот (a,b) и ако $\int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ се интегрира во (α,β), тогаш функцијата $\varphi(t)$ треба да биде таква што за секоја вредност $x_0 \in (a,b)$ да постои $t_0 \in (\alpha,\beta)$, со својството $\varphi(t_0) = x_0$. Потоа, ако $H(t)$ е примитивна функција за $\int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, тогаш $H(\varphi(x))$ ќе биде примитивна функција за $g(x)$, при што $t = \varphi^{-1}(x)$ е инверзната функција за $x = \varphi(t)$. Определувањето на таква инверзна функција е еднозначно секогаш кога $\varphi(t)$ е стриктно монотона во (α,β).

Пример 3. *Нека* $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$. *Функцијата* $\sqrt{1-x^2}$ *е дефинирана во* $[-1,1]$, *а во целиот тој сегмент е непрекината, па значи интеграбилна* *во* $(-1,1)$. *Се наметнува смената* $x=\sin t$, *при што, ако земеме* $t\in(-\pi/2,\pi/2)$ *ќе добиеме дека* $t=\arcsin x$, *а и двата горенаведени услова се исполнети.* Имаме:

$$I=\int\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t dt=\int\cos t\cos t dt=\int\cos^2 t dt=$$

$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C=$$

$$=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{\sin t\cos t}{2}+C=$$

$$=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C.$$

Да забележиме дека овде може да се смета дека условот за интеграбилност важи и во крајните точки на интервалот $(-1,1)$, т.е. во сегментот $[-1,1]$.

Применувајќи го горниот резултат за определениот интеграл $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx=J$, добиваме:

$$J=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4. *Интегралот* $\int x\sqrt[3]{1-x^2}dx=I(x)$, *може да се реши со непосредна интеграција; имено, имаме:*

$$I(x)=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{1/3}d\left(1-x^2\right)=-\frac{3}{8}\left(1-x^2\right)^{4/3}+C,$$

и тоа е точно за секое $x\in(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Во овој случај смената $x=\sin t$ не би била можна бидејќи како и да се менува t, би имале $x\in[-1,1]$.

Да забележиме дека не постои општ метод за решавање со метод на замена, но, сепак, за некои класи функции, што ќе бидат разгледани во **3. 3**, познати се "задоволителни" замени.

Пример 5. *Да го разгледаме интегралот* $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, *каде што a е позитивен реален број, а n природен број. За* $n=0$ *и* $n=1$ *имаме*

$$I_0 = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$I_1 = \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{d\left(a^2-x^2\right)}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Преостанува да го пресметаме I_n за $n \geq 2$.

Ја вршиме смената $x = a\sin t$, каде што $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Тогаш добиваме:

$$I_n = \int \frac{a^n \sin^n t a\cos t dt}{a\sqrt{\cos^2 t}} = a^n \int \sin^n t dt$$

(овде $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$, бидејќи $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0$.)

Користејќи ја рекурентната формула (1) од **2. 3**,

$$\int \sin^n t dt = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} t\cos t + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} t dt,$$

добиваме:

$$I_n = a^n\left\{-\frac{1}{n}\sin^{n-1} t\cos t + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{a^{n-2}}I_{n-2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{n}(a\sin t)^{n-1}a\cos t + \frac{n-1}{n}a^2 I_{n-2} =$$

$$= -\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{n-1}{n}a^2 I_{n-2},$$

со што ја добивме истата формула како и во разделот **2. 3**.

ВЕЖБИ

Да се реши со соодветна замена интегралот $\int f(x)dx$ (1 - 5), каде што $f(x)$ е:

1. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$. **3.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$. **5.** $\frac{x^5}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Во задачите **6 - 12** да се реши интегралот $\int f(x)dx$ со некоја од смените $t=\sin x$, $t=\cos x$, каде што $f(x)$е дадена со:

6. $\sin^3 x$. **7.** $\cos^5 x$. **8.** $\sin^{11} x$. **9.** $\frac{1}{\sin x}$.

10. $\frac{1}{\cos x}$ **11.** $\frac{1}{\sin^3 x}$. **12.** $\frac{1}{\sin x\cos^2 x}$.

Со помош на соодветни смени да се решат определените интеграли (**13 - 16**).

13. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$. **14.** $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

15. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. **16.** $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

17. Да се покаже дека, ако $f(x)$ и $g(x)$ се интеграбилни на $[-a,a]$, тогаш:

а) $f(x)$ е парна $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$,

б) $g(x)$ е непарна $\Rightarrow \int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$.

III. 3. ИНТЕГРИРАЊЕ НА НЕКОИ КЛАСИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

3. 1. ИНТЕГРИРАЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Рационалните функции претставуваат една од ретките класи функции чиишто интеграли се елементарни функции. Поради тоа, една од задачите при решавањето на интегралите од функции што не се рационални, е, со соодветна замена, да се премине во интеграл од рационална функција.

Да се потсетиме дека, рационална е секоја функција во облик:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се полиномни функции. Ако n е степен на полиномот $P(x)$, а m степен на полиномот $Q(x)$ и ако $n \geq m$, тогаш со делење $f(x)$ може да се претстави во облик:

$$f(x)=S(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}, \tag{1'}$$

при што $S(x)$ е полином со степен $n-m$, а $P_1(x)$ полином со степен $n_1<m$. Имајќи предвид дека делењето на $P(x)$ со $Q(x)$, како и интегрирањето на $S(x)$ се лесно изводливи, ќе претпоставиме дека во (1) имаме $n<m$. Натаму, можеме да го определиме најголемиот заеднички делител $D(x)$ за $P(x)$ и $Q(x)$ (на пример, со помош на алгоритмот на Евклид), така што ќе добиеме:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)\cdot D(x)}{Q_1(x)\cdot D(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

каде што $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ се заемно прости (т.е. за нив најголемиот заеднички делител е $D_1=1$). Поради тоа можеме да претпоставиме, уште, дека $P(x)$ и $Q(x)$ во (1) се заемно прости, т.е. дека $P(x)/Q(x)$ е правилна дропка. Од чисто технички причини ќе претпоставиме дека коефициентот пред највисокиот степен во $Q(x)$ е 1.

Според теоремата за разложување рационални функции (Т.2 од **I. 3. 2**), $P(x)/Q(x)$ може на единствен начин да се претстави како збир од **прости дропки**, т.е. на функции од обликот:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

каде што $k \in \mathbb{N}$, $A,B,a,p,q \in \mathbb{R}$, $p^2-4q<0$.

Од тоа следува дека интеграл од $P(x)/Q(x)$ се наоѓа со помош на интеграли од прости дропки, а тоа веќе знаеме да го работиме.

Имено, за простите дропки од првиот вид имаме:

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \begin{cases} A\ln|x-a|+C, & \text{за } k=1 \\ C-A/[(k+1)(x-a)^{k-1}], & \text{за } k \geq 2. \end{cases}$$

За да го решиме интегралот од вториот вид прости дропки, триномот x^2+px+q ќе го претставиме во обликот:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}=t^2+b^2,$$

каде што $t=x+p/2$ и $b^2=\left(4q-p^2\right)/4$. Ставајќи $M=b$, $N=B-Ap/2$, ќе имаме:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int \frac{Mt+N}{\left(t^2+b^2\right)^k}dt=\frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+b^2\right)}{\left(t^2+b^2\right)^k}+N\int \frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}.$$

Претпоследниот интеграл се сведува на табличен, а последниот се решава со рекурентната формула (3) од **2. 3**, при што, за $k=1$, имаме:

$$\int \frac{dt}{t^2+b^2}=\frac{1}{b}arctg\frac{t}{b}+C$$

Во **I. 3. 2.** (Т. 2) објаснивме како една правилна дропка $P(x)/Q(x)$ се претставува како збир на прости дропки, при што разгледавме и неколку примери. Овде ќе направиме неколку повторувања.

Прво, $Q(x)$ се претставува во облик:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\beta_s}, \qquad (2)$$

каде што $r,s\geq 0,\ r+2s=stQ,$[1] $\alpha_\gamma,\beta_\lambda\in\mathbb{N},\ a_\nu,p_\lambda,q_\lambda\in\mathbb{R},\ p_\lambda{}^2-4q<0$.

Потоа, за секој множител $(x-a)^\alpha$ од Q, на дропката P/Q и одговара збир од прости дропки во обликот:

$$\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-a} \qquad (3)$$

каде што $A_1,A_2,\ldots,A_\alpha\in\mathbb{R}$. Во иста смисла, на секој множител $\left(x^2+px+q\right)^\beta$, одговара збир од прости дропки во облик:

$$\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^\beta}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_\beta+C_\beta}{x^2+px+q}. \qquad (4)$$

Така, при претпоставка дека $Q(x)$ е претставен во обликот (2), треба да сме во состојба да ги најдеме $A_\nu,B_\lambda,C_\lambda$.Тоа се изведува по "**методот на неопределени кофициенти**". Имено, се формира збирот од сите збирови (3) и (4), а потоа тој збир се сведува на заеднички именител $Q(x)$. Броителот се средува по степените на x, а коефициентите ги изедначуваме со соодветните коефициенти на $P(x)$, и така добиваме систем равенки од кои ги наоѓаме "непознатите константи", $A_{\nu i},B_{\lambda j},C_{\lambda j}$.

Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. *Ако* $f(x)=(2x^2+2x+13)/(x-2)\left(x^2+1\right)^2$, *тогаш:*

$$f(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2},$$

[1] Со stQ е означен степенот на полиномот Q.

а од ова, како што покажавме во Пр.3 од **I. 3. 2**, *следува дека:* $A=1$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-3$, $E=-4$, т.е.

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\int f(x)dx=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-2arctgx+\frac{3}{2\left(x^2+1\right)}-4\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Последниот интеграл од десната страна се наоѓа со помош на рекурентната формула (3) од **2. 3**, т.е.:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1},$$

па, од сето тоа следува дека:

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{4x-3}{2\left(x^2+1\right)}-4arctgx+K^{2)}$$

Пример 2. *Да го решиме интегралот:*

$$\int\frac{\left(x^2-x-2\right)dx}{(x+1)^3(x-1)}.$$

Имаме:
$$\frac{x^2-x-2}{(x+1)^3(x-1)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1} \tag{4}$$

$$x^2-x-2=A(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)^2(x-1)+D(x+1)^3,$$

од каде, по средување на десната страна, добиваме:

$$x^2-x-2=(C+D)x^3+(B+C+3D)x^2+(A-C+3D)x+(-A-B-C+D).$$

2) Овде и во наредните примери од овој раздел, интеграционата константа ќе ја означуваме со K.

Сега, со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени од x, го добиваме следниов систем од линеарни равенки,

$$\begin{aligned} C+D &= 0 \\ B+C+3D &= 1 \\ A-C+3D &= -1 \\ -A-B-C+D &= -2 \end{aligned}$$

чие решение е: $A=0,\ B=\frac{3}{2},\ C=\frac{1}{4},\ D=-\frac{1}{4}$. Според тоа имаме:

$$\int\frac{\left(x^2-x-2\right)dx}{(x+1)^3(x-1)}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+K.$$

Забелешка 1. Во Пр.2 коефициентот A пред највисокиот степен на именителот на дропките од десната страна во (4) е еднаков на 0, поради што десната страна е еднаква на $\frac{x-2}{(x+1)^2(x-1)}$, а не на $\frac{x^2-x-2}{(x+1)^3(x-1)}$ (на прв поглед).

Меѓутоа, лесно се гледа дека $\frac{x^2-x-2}{(x+1)^3(x-1)}=\frac{x-2}{(x+1)^2(x-1)}$, што го објаснува резултатот $A=0$. Тоа значи дека претходно требаше да го извршиме кратењето, па потоа разложувањето на прости дропки, иако и вака се добива точен резултат (решавањето е коректно). Ако претходно извршевме кратење, технички решавањето ќе го олесневме зашто, покрај намалениот број "пресметувања", ќе требаше да решаваме и систем од линеарни равенки со една непозната помалку.

Пример 3. *Да го решиме интегралот* $I=\int_{-1}^{0}\frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)^2}$.

Најнапред ќе го решиме неопределениот интеграл (т.е. ќе најдеме една примитивна функција за подинтегралната функција). Работејќи како погоре, имаме:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2},$$

од каде што,

$$x=A(x-2)^2+B(x-1)+C(x-1)(x-2).$$

Константите A, B, и C можат да се определат како и во примерот 1. Постои, меѓутоа, и друг начин за нивно определување. Имено, последново равенство е идентично (задоволено за секое x), така што, за да добиеме три равенки (колку што имаме непознати), доволно е на x да му дадеме три различни вредности (меѓу нив наједноставни равенки се добиваат ако на x му се зададат како вредности корените на именителот во дадената дропка). Според реченото имаме:

за $x=1$: $1=A$

за $x=2$: $2=B$

и, да земеме уште, $x=0$: $0=4A-B+2C$, така што: $A=1$, $B=2$, $C=-1$. Сега,

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}=\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}+K,$$

а оттука,

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}=\left(\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{3}.$$

Пример 4. *Нека е* $I=\int\frac{x^3+2}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx$. *Подинтегралната функција ќе ја раставиме на следниов начин:*

$$\frac{x^3+2}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Работејќи како погоре, по ред, добиваме:

$$x^3+2=$$

$$=(A+D)x^4+(D+E)x^3+(2A+B+D+E)x^2+(B+C+D+E)x+(A+E+C);$$

$$A+D=0,\ D+E=1,\ 2A+B+D+E=0,\ B+C+D+E=0,\ A+E+C=2;$$

$$A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{3}{2},\ C=\frac{1}{2},\ D=-\frac{1}{4},\ E=\frac{5}{4}.$$

Така,

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{-3x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\frac{1}{4}\int\frac{-x+5}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{5}{4}arctgx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{8}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{5}{4}arctgx+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctgx\right]+K=$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right)+\frac{x+3}{4\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{2}arctgx+K.$$

Забелешка 2. На почетокот од овој раздел спомнавме дека, *во принцип, интегралот од секоја рационална функција е решлив.* Ако ги погледнеме, пак, досега решените примери ќе видиме дека за да се реализира разложувањето на подинтегралната функција на прости дропки (а потоа да се изврши интегрирањето), нужно е претходно $Q(x)$ во (1) да се разложи на линеарни и квадратни фактори. Последново, меѓутоа, не е секогаш ефективно изводливо, иако во принцип тоа е можно. На пример, лесно се утврдува дека x^3-x+1 има само еден реален корен, па значи овој полином може да се претстави во облик

$x^3 - x + 1 = (x-a)(x^2 + px + q)$, $p^2 - 4q < 0$. Но, ако читателот се обиде да ги најде a, p и q ќе се соочи со големи тешкотии, и покрај тоа што постојат и формули за решавање на равенки од трет степен ([19], кн. II и [18]). Уште поголеми проблеми настануваат кога $Q(x)$ има степен $m \geq 5$, зашто, во општ случај, не е можно ефективно да се реализира разложувањето. Во овој случај (за читателот дури и кога $m \geq 3$) разложувањето на $Q(x)$ ќе може да го реализираме само ако $Q(x)$ има некој специјален облик (на пример, ако $Q(x) = 0$ е биномна, триномна, симетрична равенка) што ќе го илустрираме во примерот 5, односно, уште во еден случај што ќе го коментираме во примерот 6. Но, во општ ваков случај (кога не е можно ефективно разложување на $Q(x)$), мора да се употребат некои методи за приближно интегрирање, како што ќе видиме во **6. 5**.

Пример 5. *Да го пресметаме интегралот:*

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{9x^4 + 9x^3 - 18x + 36}{x^6 - 7x^3 - 8} dx$$

Равенката $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ е триномна која со смената $x^3 = t$ преминува во квадратна равенка $t^2 - 7t - 8 = 0$ чиишто корени се $t_1 = 1$, $t_2 = 8$. Натаму, бидејќи $t^2 - 7t - 8 = (t+1)(t-8)$, имаме дека:

$$x^6 - 7x^3 - 8 = (x^3+1)(x^3-8) = (x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4).$$

Сега продолжуваме како и во претходните примери:

$$\frac{9x^4 + 9x^3 - 18x + 36}{(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1},$$

$$9x^4 + 9x^3 - 18x + 36 =$$

$$= (A+B+C+E)x^5 + (2A-B-2C+D+E+F)x^4 + (4A+B-2D+F)x^3 +$$

$$+ (A-8B+C-8E)x^2 + (2A+8B-2C+D-8E-8F)x + 4A - 8B - 2D - 8F$$

Константите A, B, C, D, E, F, ги определуваме решавајќи го системот линеарни равенки:

$$\begin{aligned} A+B+C+E &= 0 & \qquad 2A-B-2C+D+E+F &= 9 \\ 4A+B-2D+F &= 9 & A-8B+C-8E &= 0 \\ 2A+8B-2C+D-8E-8F &= -18 & 4A-8B-2D-8F &= 36 \end{aligned}$$

Го добиваме следново решение на системот: $A=2, B=-2, C=-2, D=-2,$ $E=2, F=-1$, така што го имаме следново разложување:

$$\frac{9x^4+9x^3-18x+36}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+1}-\frac{2x+2}{x^2+2x+4}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Така, конечно добиваме:

$$I=\left[2\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+4}\right]_3^{+\infty}=\ln\frac{304}{7}.$$

Пример 6. *Даден е интегралот:*

$$I=\int\frac{2x^4-x^3+10x^2-6x}{x^3-x^2+4x-4}dx.$$

Со претходно делење добиваме:

$$\frac{2x^4-x^3+10x^2-6x}{x^3-x^2+4x-4}=2x+1+\frac{3x^2-2x+4}{x^3-x^2+4x-4}.$$

За решавање на равенката $x^3-x^2+4x-4=0$ ќе го користиме следново својство за корените на полиномите: **ако коефициентот пред највисокиот степен на полиномот е 1 и ако полиномот има рационални корени, тогаш тие се делители на слободниот член.** (Т. 8 од I. 3. 1). Бидејќи, во нашиов случај, делителите на слободниот член се $\pm1, \pm2, \pm4$, пробаме дали некој од овие броеви ја задоволува нашата равенка: лесно се гледа дека за $x=1$ равенката е задоволена. Тоа го овозможува следново разложување:

$$x^3-x^2+4x-4=(x-1)\left(x^2+4\right),$$

така што:

$$\frac{2x^4-x^3+10x^2-6x}{x^3-x^2+4x-4}=2x+1+\frac{3x^2-2x+4}{x^3-x^2+4x-4}.$$

Натаму продолжуваме како и во другите примери.

$$\frac{3x^2-2x+4}{x^3-x^2+4x-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4},$$

$$3x^2-2x-+4=(A+B)x^2+(C-B)x+4A-C,$$

па константите A, B и C ги определуваме од системот

$$A+B=3, \quad C-B=-2, \quad 4A-C=4.$$

отука добиваме: $A=1$, $B=2$, $C=0$, а тогаш:

$$I=\int(2x+1)dx+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2xdx}{x^2+4}=x^2+x+\ln|x-1|+\ln\left(x^2+4\right)+K.$$

Во случај кога во (2) имаме $s=0$, т.е. кога $Q(x)$ се претставува во облик:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_r)^{\alpha_r},$$

каде што сите броеви $a_1,a_2,\dots,a_r$ се различни меѓу себе, тогаш велиме дека $a_1,a_2,\dots,a_r$ се **полови на правилната дропка** $f(x)=P(x)/Q(x)$, а за α_i дека е **ред на полот** a_i $(i=1,2,\dots,r)$. Во тој случај, за разложувањето на $f(x)$ како збир од прости дропки постои, релативно, едноставна формула. Имено, ако се стави $f_\nu(x)=(x-a_\nu)^{\alpha_\nu}f(x)$, тогаш:

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{f_\nu^{(k)}(a_\nu)}{k!(x-a_\nu)^{\alpha_\nu-k}}. \tag{5}$$

(Потсетуваме дека $0!=1$.)

Пример 7. *Да го решиме интегралот* $\int\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^3}$.

Имаме:

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3},\ f_1(x)=\frac{1}{(x+1)^3},\ f_2(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$$

(полови се: $a_1=1$ и $a_2=-1$); $f_1'(x)=-3/(x+1)^4$, $f_1''(x)=12/(x+1)^5$;

$$f_2'(x)=-3/(x-1)^4,\ f_2''(x)=12/(x-1)^5;$$

$$f_1(a_1)=f_1(1)=1/8,\ f_1'(1)=-3/16,\ f_1''(1)=3/8;$$

$$f_2(a_2)=f_2(-1)=-1/8,\ f_2'(-1)=-3/16,\ f_2''(-1)=-3/8.$$

Според (5), имаме:

$$f(x)=\frac{1}{8(x-1)^3}-\frac{3}{16(x-1)^2}+\frac{3}{16(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)^3}-\frac{3}{16(x+1)^2}-\frac{3}{16(x+1)},$$

од што конечно следува:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^3}=-\frac{1}{16(x-1)^2}+\frac{3}{16(x-1)}+\frac{3}{16}\ln|x-1|+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}-\frac{3}{16}\ln|x+1|+C$$

Наоѓањето на интеграли од правилни рационални дропки (степенот на броителот е помал од степенот на именителот) може значително да се упрости со помош на **методот на Остроградски**[1], којшто овозможува да се издвои дробно - рационалниот дел од интегралот по чисто алгебарски пат. Овој метод ќе го илустрираме со еден пример.

Пример 8. *Да се пресмета интегралот:*

$$I=\int\frac{4x^4-6x^2-2x}{\left(x^3+1\right)^3}dx.$$

Решение. Ако $Q(x)$ е полином со повеќекратни корени, а $P(x)$ полином чиј степен е помал од степенот на $Q(x)$, тогаш:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{X(x)}{d(x)}+\int\frac{Y(x)}{q(x)}dx, \tag{6}$$

каде што: $d(x)$ е најголемиот заеднички делител на $Q(x)$ и $Q'(x)$; потоа, $q(x)=Q(x)$: $d(x)$; $X(x)$ и $Y(x)$ се полиноми со неопределени коефициенти, чии степени се помали за единица од степените на $d(x)$ и $q(x)$, соодветно. Неопределените коефициенти на $X(x)$ и $Y(x)$ се пресметуваат со диференцирање на идентичното равенство (6). (Оваа постапка е, имено, позната како **метод на Остроградски**).

Во нашиов пример, според погоре кажаното, имаме:

$$\int\frac{4x^4-6x^2-2x}{\left(x^3+1\right)^3}dx=\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{\left(x^3+1\right)^2}+\int\frac{Kx^2+Lx+M}{x^3+1}dx,$$

[1] Михаил Василевич ОСТРОГРАДСКИ (1801 - 1861), руски математичар

а оттука, по диференцирањето и средувањето, добиваме:

$$4x^4-6x^2-2x=Kx^8+(-A+L)x^7+(-2B+M)x^6+(-3C+K)x^5+(5A-4D+2L)x^4+$$
$$+(4B-5E+2M)x^3+(3C-6F+K)x^2+(2D+L)x+E+M$$

па, изедначувајќи ги коефициентите пред еднаквите степени од x, добиваме систем од девет непознати, чие решение е:

$$A=B=C=0,\ D=-1,\ E=0,\ F=1,\ K=L=M=0\ .$$

Според тоа, конечно добиваме:

$$I=\frac{-x^2+1}{(x^3+1)^2}+C_1,$$

каде што C_1 е интеграциона константа.

ВЕЖБИ

Да се најдат интегралите од рационалните функции (1 - 10)

1. $\dfrac{1}{4x^2+10x-24}$.

2. $\dfrac{2x}{x^2+3x-4}$.

3. $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

4. $\dfrac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}$.

5. $\dfrac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}$.

6. $\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$.

7. $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$.

8. $\dfrac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}$.

9.* $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$.

10. $\dfrac{3x+1}{x(1+x^2)^2}$

11. Да се пресмета $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}$, а) со методот на Остроградски;

б) со рекурентната формула (3) од **2. 3.**

12. Да се пресмета $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$ на два начина:

а) со методот на Остроградски; б) со помош на (5), користејќи го резултатот од Пр. 7.

Да се пресметаат определените интеграли (**13 - 18**):

13. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

14. $\int_{-1}^1 \frac{x^5dx}{x+2}$.

15. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

16. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$.

17.* $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x}$.

18. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

3. 2. ИНТЕГРИРАЊЕ НА НЕКОИ АЛГЕБАРСКИ ФУНКЦИИ

Во овој и следните раздели, како што веќе забележавме во **3. 1**, ќе ги разгледаме интегралите на неколку класи функции, коишто со соодветна замена се трансформираат во интеграли од рационални функции.

I. Разгледувањето ќе го започнеме со неколку примери.

Пример 1. *Ставајќи* $x=t^6,\ t>0$, *во интегралот*

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}},$$

добиваме:

$$\sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2,\ dx=6t^5dt,$$

а, потоа,

$$I=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int \frac{t^3dt}{t+1}=6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln(t+1)+C=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$$

Пример 2. *Интегралот*

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$$

се решава со смената $t=\sqrt{2x+1}$ од каде, $x=\frac{t^2-1}{2}$, $dx=tdt$,така што:

$$I=\int\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C.$$

Пример 3. *На сличен начин интегралот*

$$I=\int\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

го решаваме со смената $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, од каде што,

$$\frac{x-1}{x+1}=t^2,\ x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx=\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2},$$

така што добиваме:

$$I=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2}=4\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}.$$

Решавајќи го последниов интеграл по методот разгледан во разделот **3. 1**, добиваме:

$$I=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2arctgt+C=2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2-1}\right)-2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$

Притоа е користено:

$$\frac{1+t}{1-t}=\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)\Big/\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(x+1+\sqrt{x^2-1}\right)^2.$$

Вториот и третиот пример се специјални случаи на интеграли во облик:

$$1.^\circ\quad \int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$$

каде што $R(u,v)$ е рационална функција од u, v[1]. Секој интеграл од овој вид со смената:

$$t=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ \text{т.е.}\ x=\frac{\beta-\delta t^n}{\gamma t^n-\alpha},\tag{1}$$

се сведува на интеграл од рационална функција.

Првиот пример е специјален случај на интеграл во облик:

$$1.'\quad \int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r,\dots,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s\right)dx$$

каде што сите показатели r, ..., s се рационални. Доведувајќи ги на заеднички именител n, овој вид интеграли се сведува на претходниот и се решава со смената (1), т.е. по воведувањето на таа смена добиваме интеграл од рационална функција. (Во примерот 1 имаме $r=1/2$, $s=1/3$, па значи $n=6$.).

II. Овде ќе се задржиме уште на еден вид интеграли, наречени **биномни**. Тоа се, имено, интегралите од облик:

---

[1] Рационална функција $R(u,v)$ од две променливи u, v е функција што претставува количник на два полинома по променливите u, v, какви што се, на пример,

$$\frac{u+v^2}{u(v+3)},\ \frac{u^3-5uv}{u^2+v^2},\ \frac{u^4-2uv^2+3v}{u^3+2u-5}\ \text{и др.},$$

не се рационални по u, v, на пример, следниве функции:

$$\frac{u^2+e^u}{u-v},\ \frac{u\cos v}{u(v+2)}\ \text{и др.}$$

2.° $\int x^p\left(ax^q+b\right)^r dx$,

каде што p, q и r се рационални броеви. Во случај кога r е цел број биномниот интеграл 2° се сведува на интеграл од претходниот вид, а имено на интеграл во облик $\int R\left(x^p,x^q\right)dx$. Затоа натаму ќе претпоставуваме дека $r=\frac{m}{s}$ е рационален број што не е цел. Решавањето на интегралите во облик 2° се реализира со смените изнесени во следната теорема, со кои се добиваат интеграли од рационални функции.

Теорема. *Нека во* **2**° s *е именишелош на r. Тоїаш:*

(i) *Ако* $\frac{p+1}{q}$ *е цел број, со сменаша:*

$$ax^q+b=t^s$$

иншеїралош 2° *се сведува на иншеїрал од рационална функција.*

(ii) *Ако* $\frac{p+1}{q}+r$ *е цел број, шоїаш иншеїралош* **2**° *се сведува на иншеїрал од рационална функција со сменаша:*

$$ax^q+b=x^qt^s,\ \text{т.е.}\ a+bx^{-q}=t^s.\ \square$$

Доказот на теоремата ќе му го оставиме на читателот. Овде, на два примера ќе ја илустрираме примената на оваа теорема.

Пример 2. *Да ѓо пресмешаме иншеїралош:*

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx.$$

Овде $p=-1/2$, $q=1/4$, $r=1/3$ и бидејќи $\frac{p+1}{q}=2$ е цел број, ја користиме смената $1+x^{1/4}=t^3$ и добиваме, $dx=12x^{3/4}t^2dt$, $x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx=$ $=x^{-1/2}t12x^{3/4}t^2dt=12t^3x^{1/4}dt=12t^3\left(t^3-1\right)dt$, а потоа (кога x се менува од 0 до 1, t се менува од 1 до $\sqrt[3]{2}$):

$$I=12\int_0^{\sqrt[3]{2}} t^3\left(t^3-1\right)dt=\left(\frac{12}{7}t^7-3t^4\right)\Bigg|_1^{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\frac{12}{7}\cdot 4\cdot\sqrt[3]{2}-6\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{12}{7}+3=\frac{9}{7}+\frac{6}{7}\sqrt[3]{2}$$

Пример 3. *Во интегралот:*

$$I=\int\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x^3}\,dx=\int x^{1/2}\left(1+x^3\right)^{1/2}dx$$

имаме $p=1/2,\ q=3,\ r=1/2$. Бидејќи $\frac{p+1}{q}=\frac{1}{2}$ не е цел број, но $\frac{p+1}{q}+r=1$ е цел број, интегралот го решаваме со смената:

$$1+x^3=x^3t^2,\ \text{т.е.}\ x^{-3}+1=t^2,$$

од каде што имаме

$$dx=-\frac{2}{3}x^4t\,dt,\ x=\left(t^2-1\right)^{-1/3},$$

така што:

$$I=-\frac{2}{3}\int x^{1/2}x^{3/2}t\cdot x^4t\,dt=-\frac{2}{3}\int x^6t^2dt=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{3t}{4\left(t^2-1\right)}+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=$$

$$=\frac{3x^2\cdot\sqrt{1+x^3}}{4\sqrt{x}}+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^3}+x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}-x\sqrt{x}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{8}\left[2x\sqrt{x}\sqrt{1+x^3}+\ln\left(1+2x^3+2x\sqrt{x+x^4}\right)\right]+C.$$

Забелешка. Во средината на минатиот век П. Л. Чебишев[2] има докажано дека, кога $p,\ q$ и r се рационални броеви, но ниеден од броевите $r,\ \frac{p+1}{q}$,

[2] Пафнутиј Лвович ЧЕБИШЕВ (1821 - 1894), голем руски математичар.

$\frac{p+1}{q}+r$ не е цел број, тогаш не постои елементарна функција $F(x)$ што е примитивна функција за $x^p\left(ax^q+b\right)^r$.

III. Сега ќе ги разгледаме интегралите од облик:

3.° $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$,

каде што $a\neq 0$ и барем еден од b, c е различен од 0, а $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ е рационална функција од x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Овој вид интеграли се решава со две **Ојлерови**[3] **смени**.

(i) За $a>0$ ја користиме смената:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}\quad \text{(или: } \sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}\text{)},$$

од каде што по квадратирањето и средувањето добиваме:

$$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=t-\frac{\left(t^2-c\right)\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b},$$

така што:

$$I=\int R\left(\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},\ t-\frac{\left(t^2-c\right)\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}\right)\cdot\left(\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}\right)'dt,$$

што претставува интеграл од рационална функција по t.

Пример 6. *За интегралот* $I=\int\sqrt{9x^2+1}\,dx$ *имаме:*

$$\sqrt{9x^2+1}=t-3x;\ x=\frac{t^2-1}{6t};\ dx=\frac{t^2+1}{6t^2}dt,$$

---

[3] Леонард ОЈЛЕР (Leonhard Euler, 1707 - 1783), Швајцарец, член на Петроградската академија, поголемиот дел од животот работел во Русија. Ојлер е еден од најплодните математичари.

$$I=\int\left(t-\frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{t^2+1}{6t^2}dt=\frac{1}{12}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{t^2}{2}+2\ln|t|-\frac{1}{2t^2}\right)+C.$$

Бидејќи (од смената) $t=\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)$, конечно добиваме:

$$I=\frac{1}{24}\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)^2+\frac{1}{6}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)-\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)^2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{9x^2+1}+\frac{1}{6}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)+C.$$

(ii) Да го разгледаме, сега, случајот кога $a<0$. Сега, претходната смена не е можна, но во овој случај ги разгледуваме само оние функции $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ при кои дискриминантата на триномот ax^2+bx+c е позитивна, а тогаш $ax^2+bx+c=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, каде што x_1 и x_2 се реални корени на дадениот трином. (Во спротивниот случај дефиниционата област на функцијата $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ би била или празното множество $\varnothing$, кога дискриминантата е негативна, или, пак, едноелементно множество, кога дискриминантата е 0.) Во овој случај ја користиме смената:

$$\sqrt{a(x-x_1)\cdot(x-x_2)}=(x-x_1)t, \tag{2}$$

од каде што, по квадрирањето, добиваме:

$$x=\frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2},$$

така што:

$$I=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$= \int R\left(\frac{ax_2 - x_1t^2}{a-t^2}, \frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}\right)\cdot\left(\frac{ax_2 - x_1t^2}{a-t^2}\right)' dt$$

претставува интеграл од рационална функција. (Уште една ваква смена види во вежбата 12.)

Пример 7. $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$.

Имаме, по ред: $\sqrt{1-x^2} = (x+1)t$, $x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$, $dx = -\frac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$ така што:

$$I = \int \frac{-4t\left(t^2+1\right)^2 dt}{\left(1-t^2+1+t^2\right)^2 \cdot t\left(t^2+1\right)^2} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

IV. Натаму ќе изнесеме и други смени, покрај Ојлеровите, за решавање на овој вид интеграли. На крајот од овој раздел, меѓутоа, ќе разгледаме уште два вида интеграли, што претставуваат специјален облик од интегралите **3**° За првиот вид од овие интеграли ќе се запознаеме со нов метод за нивно решавање, а потоа ќе видиме како на нив, со една едноставна смена, се сведува другиот вид интеграли што сега ќе ги решаваме.

4.° $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

каде што $a \neq 0$, а $P_n(x)$ е полином од n - ти степен.

Најнапред ќе го разгледаме неопределениот интеграл:

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+k}}, \qquad (3)$$

каде што $k \neq 0$ е реален, а n природен број.

Со помош на формулата за интегрирање по делови добиваме:

$$I_n = \int x^{n-1} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2+k}} = \int x^{n-1} d\left(\sqrt{x^2+k}\right) =$$

$$= x^{n-1} \cdot \sqrt{x^2+k} - (n-1)\int x^{n-2} \cdot \sqrt{x^2+k}\, dx =$$

$$= x^{n-1} \cdot \sqrt{x^2+k} - (n-1)\int \frac{x^n + kx^{n-2}}{\sqrt{x^2+k}} dx =$$

$$= x^{n-1} \cdot \sqrt{x^2+k} - (n-1)I_n - k(n-1)I_{n-2}, \text{ т.е.}$$

$$I_n = \frac{1}{n} \cdot x^{n-1} \cdot \sqrt{x^2+k} - \frac{k(n-1)}{n} I_{n-2}.$$

Ако ја примениме доволен број пати последнава формула ќе добиеме дека:

$$I_n = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{x^2+k} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}, \tag{4}$$

каде што $Q_{n-1}(x)$ е некој полином од $(n-1)$ - в степен, а λ е некој реален број. Од изнесеното лесно може да се види дека е и

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{x^2+k}} = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{x^2+k} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}, \tag{5}$$

каде што, како и погоре, $Q_{n-1}(x)$ е некој полином од $(n-1)$ - в степен и λ - реален број, а читателот може сам да се увери, работејќи на ист начин како и погоре, дека формула од ист облик се добива и во случајот кога наместо $\sqrt{x^2+k}$ се земе $\sqrt{k^2-x^2}$

Пример 8. *Нека* $I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

Според напред изнесеното имаме:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = (Ax+B) \cdot \sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

За определување на константите A, B, и λ, горното равенство прво ќе го диференцираме, а потоа ќе го помножиме со $\sqrt{1-x^2}$. Натаму го користиме методот на неопределени коефициенти изложен во **2. 1.** Според тоа, имаме:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = A\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{x(Ax+B)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x^2 = A\left(1-x^2\right) - x(Ax+B) + \lambda, \quad x^2 = -2Ax^2 - Bx + A + \lambda,$$

$$A = -\frac{1}{2}, \; B = 0, \; \lambda = \frac{1}{2}$$

и конечно,

$$I = -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

Според изнесеното за интегралите од видот опфатен со формулата (5), може да се заклучи дека аналогно на таа формула ќе се добие и формула за интегралот од видот **4°**., т.е.

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{6}$$

каде што, пак, $Q_{n-1}(x)$ е полином од $(n-1)$ - в степен и λ некој реален број. При тоа, коефициентите од полиномот $Q_{n-1}(x)$ и бројот λ се определуваат како во примерот 8.

Пример 9. *Интегралот:*

$$I = \int x^2\cdot\sqrt{x^2+4x+1}\,dx$$

не е од типот **4°** *, меѓутоа со множење и делење на подинтегралната функција со* $\sqrt{x^2+4x+1}$ *се сведува на тој тип:*

$$I = \int\frac{x^4+4x^3+x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx.$$

Според (6) имаме:

$$\int \frac{x^4+4x^3+x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\cdot\sqrt{x^2+4x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$$

а оттука, по ред, добиваме:

$$\frac{x^4+4x^3+x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}}=$$

$$=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\cdot\sqrt{x^2+4x+1}+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+1}};$$

$$x^4+4x^3+x^2=$$

$$=4Ax^4+(14A+3B)x^3+(3A+10B+2C)x^2+(2B+6C+D)x+C+2D+\lambda;$$

$$4A=1,\quad 14A+3B=4,\quad 6A+10B+C=1,\quad 4B+2C+D=0,\quad C+2D+\lambda=0;$$

$$A=\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{6},\ C=-\frac{17}{24},\ D=\frac{47}{12},\ \lambda=-\frac{171}{24}$$

Според тоа,

$$I=\frac{1}{24}\left(6x^3+4x^2-17x+94\right)\cdot\sqrt{x^2+4x+1}-\frac{171}{24}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}.$$

Поради

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-3}}=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|,$$

конечно добиваме:

$$I=\frac{1}{24}\left(6x^3+4x^2-17x+94\right)\sqrt{x^2+4x+1}-\frac{171}{24}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+K.$$

V. Интегралите од типот

5.° $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

со смената $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$ преминуваат во интеграл од типот 4°; овде $a\neq 0$ и барем еден од b, c е различен од нула, а n е природен број.

Пример 10. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^3\cdot\sqrt{x^2+2x}}$.

Ако ставиме $x+1=\dfrac{1}{t}$, имаме: $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$, $x=\dfrac{1-t}{t}$, па:

$$I=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3}\cdot\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\cdot\frac{1-t}{t}}}=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Имајќи го предвид примерот 8, имаме:

$$I=\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{2}\arcsin t+C,$$

а, потоа

$$I=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{1+x}+C.$$

ВЕЖБИ

Да се реши интегралот $\int f(x)dx$ (1 - 7) ако $f(x)$ е дадена со:

1. $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}}$. **2.** $x\cdot\sqrt[3]{x+2}$.

3. $\dfrac{1}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{3/2}}$.

4. $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$.

5. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

6. $\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$.

7. $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Да се решат неопределените интеграли од следниве функции (8 - 11), со помош на Ојлеровите смени:

8. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{1+4x-5x^2}}$.

10. $\dfrac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}$.

11. $\dfrac{1}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

12. Да се покаже дека: ако $c>0$, тогаш

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \quad (a\neq 0)$$

може да се реши со смената: $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$.

Користејќи ја таа смена, да се решат неопределените интеграли од следниве функции:

а) $3x^3/\sqrt{1+x^2}$; б) од зад. 9; в) од зад. 10.

Да се решат следниве биномни интеграли (13 - 14)

13. $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx$;

14. $\int x^{3/2}(1+x)^{1/2}dx$.

15.* Да се докажат тврдењата (i) и (ii) во теоремата.

Да се најдат интегралите (16 - 20):

16. $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}$;

17. $\int\dfrac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

18. $\int\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$;

19. $\int\dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$;

20. $\int\dfrac{dx}{(x+2)^2\cdot\sqrt{1+x^2}}$.

Да се пресметаат определените интеграли (**21** - **24**):

21. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; **22.** $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$;

23. $\int\limits_0^a \sqrt{ax-x^2dx}$; **24.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+5x+1}}$.

3. 2.' ЕЛИПТИЧНИ ИНТЕГРАЛИ

Блиски до интегралите во обликот:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

коишто ги разгледавме во **3. 2**, а како нивно воопштување, можат да се сметаат следниве два вида интеграли:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx, \tag{1}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx, \tag{2}$$

каде што $a \neq 0, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, а $R(u,v)$ е рационална функција од две независно променливи.

Во општ случај интегралите (1) и (2) не се решливи со помош на елементарни функции. Во овој случај, кога не постојат елементарни функции што би биле примитивни за подинтегралните функции во (1) и (2), овие два интеграла се викаат **елиптични**. Името елиптични за интегралите (1) и (2) доаѓа оттаму што за прв пат тие се јавиле во врска со решавањето на задачата за ректификација на елипса (в. вежба 13 од **4. 5**). Во некои посебни случаи, овие два вида интеграли можат да се решаваат со помош на елементарни функции; во тие случаи (1) и (2) се викаат **псевдоелиптични** интеграли. На пример, ако полиномите од трети, односно од четврти степен што се јавуваат под квадратниот корен во (1) и (2) имаат двократен реален корен α, тогаш поради:

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)^2(x-\beta),$$

$$ax^4+bx^2+cx+d = (x-\alpha)^2 P_2(x),$$

каде што $P_2(x)$ е полином од втор степен, тогаш со извлекување надвор од коренот на множителот $x-\alpha$, интегралот (1) ќе премине во интеграл од облик

$1°$, а (2) во интеграл од облик $2°$ од **3. 2**; ако и P_2 има двократен корен, тогаш (2) ќе премине во интеграл од рационална функција. Покрај овие случаи, интегралите (1) и (2) се псевдоелиптични и во други случаи, како што се, на пример, следниве:

1) $$\int \frac{10x^3+6x^2+9x+2}{\sqrt{4x^3+6x-1}}dx=(x+1)\sqrt{4x^3+6x-1}+C;$$

2) $$\int \frac{\left(1+x^4\right)dx}{\left(1-x^4\right)\sqrt{1-x^4}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}+C;$$

3) $$\int \frac{\left(6x^4+1\right)dx}{\sqrt{2x^4+1}}=x\sqrt{2x^4+1}+C;$$

итн.

Натаму ќе претпоставуваме дека (1) и (2) се елиптични интеграли. Поради важноста на овие интеграли во примената на интегралното сметање, се појавува потребата од табелирање (изготвување на таблици) и изработка на графици на функциите определени со овие интеграли. Составувањето на такви таблици и графици, при произволни коефициенти a, b, c, d и e е мошне тешко. Поради тоа претходно се решава задачата за сведување на овие интеграли на неколку, попрости вида интеграли што содржат, по можност, помалку произволни константи. Пред да се задржиме на ова сведување, да забележиме дека е доволно да се ограничиме на интегралите од типот (2), зашто на тој тип лесно се сведуваат интегралите од типот (1). Навистина, секој полином од трети степен со реални коефициенти нужно има реален корен (види вежба 2 во **I. 5. 6** и Т. 6 во **I. 3. 1**), па ако α е реален корен на полиномот ax^3+bx^2+cx+d, тогаш овој полином може да се разложи во следниов вид:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)\left(x^2+px+q\right),$$

каде што p и q се реални броеви. Ако ја извршиме смената $x-\alpha=t^2$, ќе добиеме дека:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx=$$

$$=\int R\left(t^2+\alpha,t\sqrt{at^4+b_1t^2+c_1}\right)dt=$$

$$=\int Q\left(t,\sqrt{at^4+b_1t^2+c_1}\right)dt,$$

каде што: $b_1 = a(2\alpha + p), c_1 = a(\alpha^2 + q), Q(u, v)$ е рационална функција по u и v. Последниот од горните интеграли е од типот (2).

Според Т. 12 од **I. 3. 1**, еден полином од четврти степен може да се разложи во вид:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)\left(x^2 + p_2 x + q_2\right), \tag{3}$$

$p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$. Се покажува дека постојат смени (на кои овде нема да се задржуваме) коишто, имајќи го предвид разложувањето (3), интегралите од типот (2) ги трансформираат во видот:

$$\int \frac{R_1\left(t^2\right)dt}{\sqrt{A\left(1 + mt^2\right)\left(1 + nt^2\right)}}, \tag{4}$$

каде што $R_1(u)$ е рационална функција, а $A, m, n \in \mathbb{R}$. Се покажува, исто така, дека при секоја комбинација на апсолутните вредности и знаците на константите A, m и n, постои смена којашто интегралот (4) го трансформира во следниов **каноничен вид**:

$$\int \frac{R_2\left(z^2\right)dz}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - k^2 t^2\right)}}, \tag{5}$$

каде што $R_2(u)$ е, пак, рационална функција, а k - реален број таков што $0 < k < 1$. Натаму, ако се одвои целиот (полиномниот) дел од $R_2\left(z^2\right)$, а останатиот нејзин дел, кој би бил правилна дропка, се разложи на прости дропки, тогаш каноничниот интеграл (5) ќе се разложи така што, освен интегралите (во неговото разложување) што се интегрираат со елементарни функции, ќе се појават некои од следниве три **стандардни интеграли**:

$$1^\circ \quad \int \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - k^2 t^2\right)}}; \qquad 2^\circ \quad \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - k^2 t^2\right)}}$$

$$3^\circ \quad \int \frac{dz}{\left(1 + hz^2\right)\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - k^2 t^2\right)}}, \quad 0 < k < 1, \tag{6}$$

каде што во последниот интеграл h може да биде и комплексен број. Интегралите (6), како што покажал Лиувил[1] не се решливи со помош на елементарни функции. Нив Лежандр[2] ги нарекол **елиптични интеграли соодветно од: прв, втор и трет вид**.

Натаму, Лежандр овие интеграли ги упростил со помош на смената $z=\sin\varphi,\ \varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$1'.\quad \int\frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\cdot\left(1-k^2t^2\right)}}=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

$$2'.\quad \int\frac{z^2dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\cdot\left(1-k^2t^2\right)}}=\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

$$3'.\quad \int\frac{dz}{\left(1+hz^2\right)\sqrt{\left(1-z^2\right)\cdot\left(1-k^2t^2\right)}}=\int\frac{d\varphi}{\left(1+h\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

На тој начин се добиваат следниве **елиптични интеграли од прв, втор и трет вид соодветно, дадени во облик на Лежандр**:

$$1''.\quad \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\qquad 2''.\quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

$$3''.\quad \int\frac{d\varphi}{\left(1+h\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ 0<k<1. \tag{7}$$

Ако се земе предвид дека интегралите (7), за $\varphi=0$, се еднакви на нула, тогаш во нив можат да се пресметаат произволните константи што се јавуваат при интегрирањето. Така, првите два од овие интеграли, коишто се посебно

---

[1] Жозеф ЛИУВИЛ (Jozeph Liouville, 1809 - 1882) - француски математичар

[2] Адријан Мари ЛЕЖАНДР (Adrien Marie Legendre, 1752 - 1833) - познат француски математичар

важни и често се среќаваат во примената, ќе дадат две наполно определени функции, коишто Лежандр ги означил со $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$, соодветно. Овие две функции се вбројуваат меѓу функциите што се добро изучени и на широко користени. За нив, како од Лежандр, којшто изработил опширни таблици за различни вредности на параметрите k и φ, така и од други научници, најдени се многу интересни својства, на кои ние овде нема да се задржиме.

3. 3. ИНТЕГРАЛИ ОД НЕКОИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

I. Ќе ги разгледаме, прво, интегралите од следниов облик:

1.° $\int R(\sin x,\cos x)dx$,

каде што $R(\sin x,\cos x)$ е рационална функција по $\sin x$ и $\cos x$.

(i) Општата смена за овој вид интеграли, со која **1°** преминува во интеграл од рационална функција, е:

$$tg\frac{x}{2}=t, \qquad (-\pi<x<\pi). \tag{1}$$

Тогаш, за $x\in(-\pi,\pi)$, имаме:

$$x=2arctgt, \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

а потоа,

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

така што, за интегралот **1°** , добиваме:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt,$$

па подинтегралната функција во последниот интеграл е рационална по t.

Да забележиме дека, во извршената смена се ограничуваме на разгледување на функцијата $R(\sin x, \cos x)$ само во интервалот $(-\pi, \pi)$. На конкретните примери читателот сам ќе може да се увери, со диференцирање, дека добиеното решение на неопределениот интеграл е точно и во секој од интервалите $(k\pi, (k+2)\pi)$, k - цел број. Возможно е, меѓутоа, да се изгубат решенијата за $x = k\pi$ во случајот кога функцијата $R(\sin x, \cos x)$ е диференцијабилна за $x = k\pi$.

Пример 1. *Користејќи ја погоре спомената смена, како и изразите за* dx *и* $\cos x$, *имаме:*

$$\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = 2\int \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^2+1-t^2\right)}dt =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{2-1-t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{dt}{1+t^2} - \int dt =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t - t + C = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Пример 2. *Да го пресметаме интегралот:*

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

Работејќи како и во претходниот пример (земајќи предвид дека за $x = 0$, $t = 0$, а за $x = \pi$, t се стреми кон $+\infty$), имаме:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2} =$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{5}}{5}\pi.$$

Да разгледаме три специјални случаи за интегралите од обликот 1° .

(ii) Ако $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тогаш покрај смената (1), која е општа, можеме да ја примениме смената:

$$\sin x=t,\quad \cos x\,dx=dt, \tag{2}$$

со што интегралот 1° ќе се трансформира во интеграл од рационална функција. Навистина, ако важи горниот услов за $R(\sin x,\cos x)$, добиваме дека функцијата:

$$\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$$

ќе биде парна по $\cos x$ и секаде (каде што ќе се јави) $\cos x$ ќе биде степенуван со некој парен показател. Поради $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, $\cos^4 x=\left(1-\sin^2 x\right)^2,\ldots$, добиваме дека:

$$\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}=Q(\sin x),$$

каде што Q е некоја рационална функција. На тој начин добиваме дека:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}\cos x\,dx=\int Q(t)dt.$$

Пример 3. *Во интегралот:*

$$I=\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$$

подинтегралната функција е непарна по $\cos x$. *Затоа, со смената* $\sin x=t$, *ќе добиеме:*

$$I=\int\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\cos x\,dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}d(\sin x)=$$

$$=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=2arctgt-t+C=$$

$$=2arctg(\sin x)-\sin x+C.$$

(iii) Ако $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тогаш, слично како и во (ii), со смената:

$$\cos x=t,\quad -\sin x\,dx=dt, \tag{3}$$

интегралот 1° се трансформира во интеграл од рационална функција по t.

Пример 4. $I=\int\frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^2 x}$.

Ако ја запишеме подинтегралната функција во облик $\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}$, *лесно се уверуваме дека таа е непарна по* $\sin x$, *така што ја користиме смената* $\cos x=t$, $-\sin x\,dx=dt$ *и добиваме:*

$$I=\int\frac{2\sin x\cos x}{2-\cos^2 x}dx=\int\frac{2t\,dt}{t^2-2}=\int\frac{d\left(t^2-2\right)}{t^2-2}=$$

$$=\ln|t^2-2|+C=\ln|\cos^2 x-2|+C=$$

$$=\ln\left(1+\sin^2 x\right)+C.$$

(iv) Нека $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$.

Во овој случај подинтегралната функција во 1° станува рационална по t ако ја воведеме смената:

$$tgx=t,\quad (-\pi/2<x<\pi/2). \tag{4}$$

Навистина, ако го замениме $\sin x$ со $\cos x\,tgx$, тогаш промената на знаците на $\sin x$ и $\cos x$ е еквивалентна со промената на знакот на $\cos x$ во изразот $\cos x\,tgx$. По извршената замена на $\sin x$ со $\cos x\,tgx$, функцијата $R(\sin x,\cos x)$ ќе се трансформира во некоја рационална функција по $\cos x$ и tgx во која

$\cos x$ насекаде ќе се јавува степенуван со парен показател. Бидејќи, пак, парните степени од $\cos x$ можат да се претставаат како рационални функции од $tg x$, зашто $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$, а $tg x = t$, имаме и $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, добиваме дека:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int Q(t)dt,$$

каде што $Q(t)$ е рационална функција по t.

Пример 5.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{tg x}{tg x + 1}dx = \int \frac{t\,dt}{(t+1)\left(t^2+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(t^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}arctgt + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(1+tg^2 x\right) - \frac{1}{2}\ln|1+tg x| + \frac{x}{2} + C.$$

II. Да видиме како се пресметуваат интегралите од следниов облик:

2.° $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$; $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$; $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$.

(в. и пр. 6 од **2. 1.**)

Ако ги земеме предвид тригонометриските равенства:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right],$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right],$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right],$$

тогаш интегралите 2° се решаваат со метод на разложување (в. **2. 1.**).

Пример 6.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos 3x) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{6}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

III. Бо интегралите од облик:

3.° $\int R(\sin ax, \cos bx, tg\, px, ctg\, qx) dx$

каде што R означува рационална функција по $\sin ax$, $\cos bx$, $tg\, px$, $ctg\, qx$, а a, b, p, q се рационални броеви, со помош на елементарни трансформации подинтегралната функција може да се сведе на рационална функција по $\sin t$, $\cos t$ (интеграли од обликот $1°$), ако се земе $t = x/s$ (т.е. $x = st$) при што s е најмалиот заеднички содржател за именителите од a, b, p, q.

Пример 7.

$$\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}} dx = \text{(за } x = 6t) = 6\int \frac{\cos 3t\, dt}{\sin 2t} =$$

$$= 6\int \frac{\cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t}{2\sin t \cos t} dt = 3\int \frac{1 - 4\sin^2 t}{\sin t} dt =$$

$$= 3\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + 12\cos t + C = 3\ln\left|tg\frac{x}{12}\right| + 12\cos\frac{x}{6} + C.$$

IV. Да ги разгледаме, сега, интегралите од видот:

4.° $\int \sin^k x \cos^m x dx$.

Ако k и m се цели броеви, тогаш според изнесеното во (ii) - (iv) за интегралите од видот $1°$, овие интеграли се решаваат со некоја од смените:

1) при m непарен: $\sin x = t$,

2) при k непарен: $\cos x = t$,

3) при k и m парни: $tg\, x = t$.

Да забележиме дека честопати, пред да се искористат споменатите смени, згодно е да се изврши претходно трансформирање на подинтегралната функција. На пример, таму каде што може да се примени смената $tg\,x = t$, згодно е да се искористат равенствата:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 8. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x\,dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x \cdot d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

** Ако се k и m (рационални) дропки, тогаш ставајќи $\sin x = t$ во **4°** , ќе добиеме:

$$\int \sin^k x \cos^m x\,dx = \int t^k\left(1-t^2\right)^{(m-1)/2} dt.$$

Последниот интеграл е биномен, така што тој може да се реши (т.е. подинтегралната функција има примитивна функција што е елементарна) во еден од случаите кога еден од броевите (в. Забел. во **3. 2**):

$$\frac{k+1}{2}, \ \frac{m-1}{2}, \ \frac{k+m}{2} \text{ е цел.}$$

Пример 9. *За интегралот:*

$$I = \int \frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos x \sin x}dx = \int \sin^{-1/2} x \cos^{-3/2} x\,dx$$

имаме $k = -\frac{1}{2}$, $m = -\frac{3}{2}$ *и, бидејќи* $\frac{k+m}{2} = -1$ *е цел број, со смената* $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$, *го добиваме биномниот интеграл:*

$$I = \int t^{-1/2}\left(1-t^2\right)^{-5/4} dt$$

кој е решлив во елементарни функции. Решението е:

$$I = 2\sqrt{tg\,x} + C. \ **$$

V. Интегралите од обликот

5.° $I = \int P(x)\sin ax\,dx,\ J = \int Q(x)\cos bx\,dx,$

каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми, се решаваат со методот на интегрирање по делови (парцијално интегрирање). Имено ставајќи, на пример, за првиот од интегралите,

$$u = P(x),\ du = P'(x)dx,\ dv = \sin ax,\ v = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

добиваме:

$$\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}P(x)\cos ax + \frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax\,dx.$$

Продолжувајќи аналогно, ќе го намалуваме степенот на полиномот под знакот на интегралот, така што на крајот ќе дојдеме до еден од интегралите $\int \sin ax\,dx$ или $\int \cos ax\,dx$.

Пример 10. $I = \int \left(x^2 + 4x - 5\right)\sin 3x\,dx.$

Интегрирајќи по делови, ќе добиеме:

$$I = -\frac{1}{3}\left(x^2 + 4x - 5\right)\cos 3x + \frac{1}{3}\int (2x+4)\cos 3x\,dx,$$

$$\int (2x+4)\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}(2x+4)\sin 3x - \frac{1}{3}\int 2\sin 3x\,dx,$$

така што:

$$I = -\frac{1}{3}\left(x^2 + 4x - 5\right)\cos 3x + \frac{1}{9}(2x+4)\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

Интегралите:

$$\int P(x)\sin^k x\,dx,\ \int Q(x)\cos^m x\,dx,$$

(k, m - природни броеви) се сведуваат на интегралите од типот **5°** .

Тврдењето е последица од фактот што функциите $\sin^k x$, $\cos^m x$ секогаш можат да се претставаат како збир од синуси и косиниси на аргументи од облик px, p - природен број. На пример,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \sin x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\left[\sin(2x+x) - \sin(2x-x)\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \text{ итн.}$$

Општо, имајќи претставување за $\sin^k x$, аналогно разложување за $\sin^{k+1} x$ можеме да добиеме со множење, во разложувањето за $\sin^k x$ со $\sin x$, а потоа да ги искористиме формулите:

$$\sin x \cdot \cos px = \frac{1}{2}\sin(p+1)x - \frac{1}{2}\sin(p-1)x,$$

$$\sin x \cdot \sin px = \frac{1}{2}\cos(p-1)x - \frac{1}{2}\cos(p+1)x,$$

Слично за разложувањето на $\cos^m x$.

ВЕЖБИ

Со помош на соодветна смена, да се решат следниве интеграли од видот I° **(1 - 10)**·

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+2\sin x - \cos x}$.
4. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$.
5. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\, dx}{1+\cos^2 x}$.
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$.
7. $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx$.
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4}$.
9. * $\displaystyle\int \frac{dx}{5\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin 2x}$.
10. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^n x}dx$.

Да се решат интегралите (**11 - 14**).

11. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$.

12. $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$.

13. $\int \cos 2x \cos 3x\, dx$.

14. $\int \sin x \sin 2x \cos 3x\, dx$.

Да се решат интегралите од обликот (**15 - 16**):

15. $\int \sin x \cos \frac{x}{2} dx$.

16. $\int tg \frac{x}{2} \sin x\, dx$.

Да се решат интегралите (**17 - 18**):

17. $\int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx$.

18. $\int \cos^2 3x \sin^4 3x\, dx$.

Да се решат следниве определени интеграли (**19 - 22**):

19. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$.

20. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

21. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x}$.

22. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

3. 4. ИНТЕГРАЛИ ОД ХИПЕРБОЛИЧНИ ФУНКЦИИ. ТРИГОНОМЕТРИСКИ И ХИПЕРБОЛИЧНИ СМЕНИ

Интегрирањето на рационалните функции по shx и chx е наполно аналогно на она од **3. 3.** за тригонометриските функции. Решавањето на еден дел интеграли од хиперболични функции може успешно да се реализира со помош на следниве идентични равенства (нивната проверка е едноставна, па му ја оставаме на читателот):

1) $ch^2x - sh^2x = 1$;

2) $sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1)$;

3) $ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x + 1)$;

4) $shx \cdot chx = \frac{1}{2} sh2x$.

Примери.

1. $$\int sh^2 x dx = \int \frac{1}{2}(ch2x-1)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int d(sh2x) - \frac{1}{2}\int dx =$$
$$= \frac{1}{4}sh2x - \frac{1}{2}x + C.$$

2. $$\int ch^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int (ch2x+1)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(ch^2 2x + 2ch2x + 1\right)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (ch4x+1)dx + \frac{1}{2}\int ch2x\, dx + \frac{1}{4}\int dx =$$
$$= \frac{1}{32}sh4x + \frac{1}{4}sh2x + \frac{3}{8}x + C.$$

Во некои случаи, се разбира, одредени интеграли можат полесно и побрзо да се решат со помош на смена (поточно, со непосредно интегрирање), како што се гледа од следниов:

Пример 3. $$\int sh^3 x\, dx = \int sh^2 x \cdot shx\, dx =$$
$$= \int \left(ch^2 x - 1\right)\cdot d(chx) = \frac{1}{3}ch^3 x - chx + C.$$

И кај интегралите од хиперболични функции, аналогни на обликот 1° од **3. 3**, може да се воведе аналогна "општа" смена, со што тие се трансформираат во интеграли од рационални функции. Имено, интегралите од видот:

$$\int R(shx, chx)dx,$$

со смената $th\frac{x}{2} = t$ се трансформираат во интеграли од рационални функции по t. Лесно се проверува дека:

$$shx = \frac{2th\frac{x}{2}}{1-th^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad chx = \frac{1+th^2\frac{x}{2}}{1-th^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

а поради тоа што $ch^2\frac{x}{2}=\dfrac{1}{1-th^2\frac{x}{2}}$ од $th\frac{x}{2}=t$ добиваме:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ch^2\frac{x}{2}}dx=dt, \qquad dx=2ch^2\frac{x}{2}dt=\frac{2}{1-th^2\frac{x}{2}}dt,$$

т.е.

$$dx=\frac{2dt}{1-t^2},$$

така што, за разгледуваниот вид интеграли, добиваме:

$$\int R(shx,chx)dx=\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1-t^2}=$$

$$=\int Q(t)dt,$$

каде што $Q(t)$ е рационална функција по t.

Пример 4. *Да го решиме интегралот:*

$$I=\int\frac{dx}{2shx+3chx}.$$

Според изнесеното имаме:

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}+\frac{3+3t^2}{1-t^2}}=2\int\frac{dt}{3t^2+4t+3}=$$

$$=2\int\frac{dt}{3\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+3-\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{t+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{3t+2}{\sqrt{5}}+C=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{3th\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

Да се вратиме, сега, на еден вид интеграли од ирационални функции што порано ги разгледавме, коишто овде ќе ги решаваме со користење на погоре разгледаните интеграли и интегралите од тригонометриски функции разгледани во 3. 3. Имено, за пресметување на интегралите од облик

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

ги користевме Ојлеровите смени. Со тригонометриските, а и со хиперболичните смени што сега ќе ги изнесеме, пресметувањето на овие интеграли често пати е побрзо и полесно. Најнапред да забележиме дека со смената:

$z=\sqrt{a}(x+b/2a)$, за $a>0$, т.е $z=\sqrt{-a}(x+b/2a)$, за $a<0$,

функцијата $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ може да се доведе во еден од следниве три облици:

а) $Q\left(z,\sqrt{k^2-z^2}\right)$; б) $Q\left(z,\sqrt{k^2+z^2}\right)$; в) $Q\left(z,\sqrt{z^2-k^2}\right)$

каде што Q е рационална функција (од своите аргументи). За случаите а) - в) може да се извршат, соодветно, **смените**:

а) $z=k\sin t$, односно $z=k\cos t$ (или $z=kth\,t$)

б) $z=ktg\,t$ (или $z=ksh\,t$)

в) $z=\dfrac{k}{\cos t}$, односно $z=\dfrac{k}{\sin t}$ (или $z=kch\,t$)

Ќе го илустрираме тоа со неколку примери.

Пример 5. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=$ (земаме $x=\sin t$) $=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,dt=$

$$=\int\sin^2 t\,dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 6. $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1+x^2}}=$ (ставаме $x=tg\,t$) $=\int\cos t\,dt=$

$$=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Пример 7. $\int\sqrt{x^2-1}\,dx=$ (земаме $x=ch\,t$) $=\int sh^2t\,dt=$

$$=\frac{1}{2}\int(ch2t-1)dt=\frac{1}{4}sh2t-\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

Пример 8. $I=\int\sqrt{9x^2+1}\,dx$ (Пр. 6 во 3. 2).

Со смената $x=\frac{1}{3}sh\,t$, добиваме $dx=\frac{1}{3}ch\,t\,dt$, $\sqrt{9x^2+1}=\sqrt{sh^2t+1}=ch\,t$, па

$$I=\int ch\,t\cdot\frac{1}{3}ch\,t\,dt=\frac{1}{3}\int ch^2t\,dt=\frac{1}{6}\int(1+ch2t)dt=$$

$$=\frac{1}{6}\left(t+\frac{1}{2}sh2t\right)+C=$$

$$=\left[sh\,t=3x,\ t=Arsh3x=\ln\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)+\frac{1}{6}sh\,t\cdot ch\,t+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{9x^2+1}+C$$

ВЕЖБИ

Да се пресметаат интегралите во следниве функции (**1** - **6**):

1. sh^4x. **2.** $sh^2x\cdot ch^2x$. **3.** $shx\cdot ch^3$.

4. $\dfrac{1}{shx\cdot ch^2x}$. **5.** $\dfrac{1}{sh^2x\cdot ch^2x}$. **6.** $\dfrac{1}{shx+2chx}$.

Со помош на тригонометриски и хиперболични смени да се решат интегралите од следните функции (**7** - **11**):

7. $\sqrt{3-2x-x^2}$. **8.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}$. **9.** $\sqrt{x^2-4}$;

10. $\left(x^2+x+1\right)\cdot\sqrt{x^2+x+1}$. **11.** $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

3. 5. ИНТЕГРАЛИ ОД ЦИКЛОМЕТРИСКИ, ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ ФУНКЦИИ

Да разгледаме неколку вида интеграли во кои се среќаваат циклометарски, експоненцијални и логаритамски функции.

Интегралите од видот:

1.° $\int f(\arcsin x)dx$,

со смената $\arcsin x = t$ (тогаш $x=\sin t$ и $dx=\cos t\,dt$), се сведуваат на:

$$\int f(t)\cos t\,dt.$$

Аналогно, интегралите од видот:

1_1° $\int f(\arccos x)dx$,

со смената $\arccos x = t$ се сведуваат на:

$$-\int f(t)\sin t\,dt.$$

Ако $f(t)$ е полином, тогаш последните (трансформираните) интеграли се решаваат со методот на парцијална интеграција.

Пример 1.

$$\int (\arccos x)^2 dx = -\int t^2 \sin t \, dt =$$

$$= t^2 \cos t - 2\int t \cos t \, dt =$$

$$= t^2 \cos t - 2t \sin t - 2\cos t + C =$$

$$= (\arccos x)^2 x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + C.$$

Да ги разгледаме интегралите од видот:

2.° $\int P(x) \arcsin x \, dx$,

каде што $P(x)$ е полином. Ако го користиме методот на парцијална интеграција, ставајќи:

$$u = \arcsin x, \; du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$dv = P(x)dx, \; v = P_1(x)$ (последниов е полином), добиваме:

$$\int P(x) \arcsin x \, dx = P_1(x) \arcsin x - \int \frac{P_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Аналогно за интегралите од видот:

2_1°. $\int P(x) \arccos x \, dx$.

И интегралите од типот:

3.° $\int P(x) arctgx \, dx$,

односно,

3_1°. $\int P(x) arcctgx \, dx$,

каде што, пак, $P(x)$ е полином, се решаваат со методот на парцијална интеграција. Ако, на пример, за 3° ставиме:

$$u = arctgx, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad dv = P(x)dx, \quad v = P_1(x),$$

Ќе добиеме:

$$\int P(x) arctgx\, dx = P_1(x) arctgx - \int \frac{P_1(x)}{1+x^2} dx.$$

Пример 2. $J = \int 3x^2 arctgx\, dx.$

Интегрирајќи по делови (парцијална интеграција), добиваме:

$$J = x^3 arctgx - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = x^3 arctgx - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= x^3 arctgx \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Интегралите од типот:

4.° $\int f\left(a^x\right) dx,$

со смената $a^x = t$ преминуваат во: $\frac{1}{\ln a} \int \frac{f(t)}{t} dt.$

Пример 3.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{t^2 - 6t + 13} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-3)^2 + 4} = \frac{1}{2} arctg \frac{t-3}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{e^x - 3}{2} + C.$$

Интегралите, пак,

5.° $\int P(x) a^x dx,$

каде што $P(x)$ е полином, се решаваат со метод на интегрирање по делови, ставајќи:

$u = P(x),\ dv = a^x dx$.

Да разгледаме еден пример:

Пример 4.

$$\int (x^2-2x)2^x dx = \frac{1}{\ln 2}(x^2-2x)2^x - \frac{1}{\ln 2}\int (2x-2)2^x dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}(x^2-2x)2^x - \frac{2}{(\ln 2)^2}(x-1)2^x + \frac{2}{(\ln 2)^2}\int 2^x dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}(x^2-2x)2^x - \frac{2}{(\ln 2)^2}(x-1)2^x + \frac{2}{(\ln 2)^3}2^x + C.$$

На крајот, ќе ги разгледаме уште следниве два вида интеграли:

6.° $\int P(\ln x)dx$, $P(x)$ - полином;

7.° $\int P(x)(\ln x)^m dx$, $P(x)$ - полином; $m \in \mathbb{N}$.

Интегралите од видот 6°, со смената $\ln x = t$ $(x = e^t,\ dx = e^t dt)$ се сведуваат на интегралите од видот 5°:

$$\int P(\ln x)dx = \int P(t)e^t dt,$$

додека, пак, интегралите од видот 7°, се решаваат со помош на методот на парцијална интеграција.

Пример 5. $I = \int (2x+1)(\ln x)^2 dx$.

Ставајќи $u = (\ln x)^2,\ dv = (2x+1)dx$, добиваме:

$$I = (x^2+x)(\ln x)^2 - \int (2x+2)\ln x\, dx.$$

Натаму, ставајќи $u_1 = \ln x,\ dv_1 = (2x+2)dx$, и применувајќи го уште еднаш истиот метод, ќе добиеме:

$$I = (x^2+x)(\ln x)^2 - (x^2+2x)\ln x + \int (x+2)\, dx =$$

$$= (x^2+x)(\ln x)^2 - (x^2+2x)\ln x + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

ВЕЖБИ

Да се пресметаат интегралите од следниве функции (1 - 6):

1. $(\arcsin x)^2$.
2. $(x^2+1)\arcsin x$.
3. $x^2 arctg 3x$.
4. $\dfrac{e^{3x}+3e^{2x}}{e^{2x}+e^x-2}$.
5. $\ln^3 x+2\ln^2 x+\ln x$.
6. $(3x^2+1)(\ln x)^2$.

III. 4. ПРИМЕНИ НА ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

4. 1. ДОЛЖИНИ, ПЛОШТИНИ, ВОЛУМЕНИ

Геометриското претставување на реалните броеви (I. 1. 8) доведува до поимот должина на отсечка, а со негова помош се воведува поимот *должина на лак на крива.*

Должината на отсечки се користи и за дефинирање плоштина на многуаголник, постепено преку плоштина на: квадрат, правоаголник, паралелограм и триаголник. Потоа, со помош на плоштина на многуаголник се воведува поимот *плоштина на произволни рамнински*, а и нерамнински *ликови.*

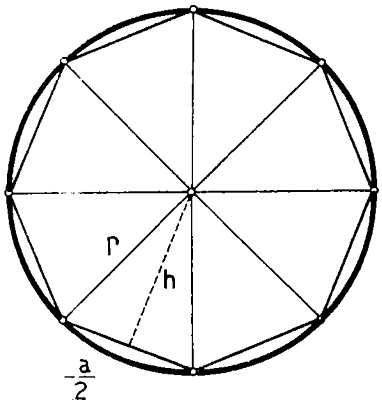
Слична е ситуацијата со поимот волумен: прво се дефинира волумен на коцка, паралелопипд, призма, пирамида, цилиндар, конус и топка, а потоа се воведува и поимот *волумен на произволно геометриско тело.*

Подробно и прецизно спроведување на таа задача бара поголема подготовка. Покрај другото, би требало да се дефинираат поимите: *крива, рамнински лик, геометриско тело,* а потоа и нивните мерни карактеристики: должина, плоштина и волумен. Овде нема да се задржиме на таа задача, а сите тие поими ќе ги сметаме за *интуитивно јасни.* Од тоа ќе следува дека и "доказите" што ќе ги дадеме подолу не ќе бидат математички доволно строги, зашто ќе користиме поими што претходно не сме ги дефинирале ("строго"), како и својства што не сме ги докажале ("строго").

Затоа читателот што не ќе биде задоволен со овој пристап (а студентите што се заинтересирани за строго математичко фундирање на оваа материја не треба да бидат задоволни) ќе треба да користат поисцрпни книги.

Сепак, со цел да ги илустрираме проблемите и соодветните начини на нивно решавање, ќе се задржиме на прашањето за дефинирање, а воедно и пресметување, на должината на кружницата, односно плоштината на кругот, со даден радиус r.

Да впишеме во кружницата правилен n - аголник со темиња $A_0, A_1, \ldots, A_n (= A_0)$. (На црт. 1 земаме $n = 8$). Го делиме многуаголникот на n рамнокраки триаголници со основа $a_n = \overline{A_{i-1}A_i} = 2r\sin(\pi/2)$ и висина: $h_n = r\cos(\pi/2)$.



Црт. 1.

Според тоа, периметарот на многуаголникот е даден со:

$$L_n = 2nr\sin\frac{\pi}{n},$$

а плоштината со:

$$P_n = \frac{n2r\sin\frac{\pi}{n}\cdot r\cos\frac{\pi}{n}}{2} = r^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Лесно се покажува дека:

$$L=\lim_{n\to\infty} L_n = 2r\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{1/n}=2r\pi, \tag{1}$$

$$P=\lim_{n\to\infty} P_n = r^2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{1/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n}=r^2\pi \tag{2}$$

Природно е да се договориме бројот L да е **должина** на кружницата, а P **плоштината** на фигурата ограничена со неа (т.е. на соодветниот круг).

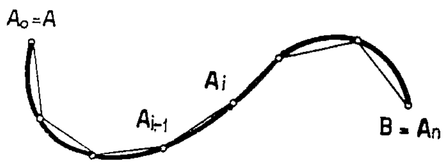
Притоа воочуваме дека $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, а може да се покаже дека до исти резултати се доаѓа и во случај кога впишаните многуаголници се произволни (т.е. незадолжително правилни) при претпоставка дека $\lim_{n\to\infty}\max\overline{A_{i-1}A_i}=0$.

На читателот му препорачуваме да ја спроведе истата постапка за дефинирање и пресметување волумен на цилиндар и конус. (Да потсетиме дека во средно училиште се работи и со топка и нејзини делови.)

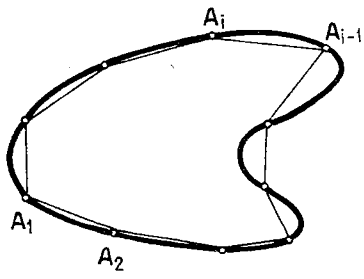
Истата идеја се користи за дефинирање на поимот должина на лак од произволна крива, како и плоштина на произволен рамнински лик.

Имено, нека $\widehat{AB}$ е лак на некоја крива (црт. 2). Да го определиме $\widehat{AB}$ избирајќи точки $A_0=A, A_1,\dots,A_{n-1},A_n=B$, и да ја означиме со s_n должината на така добиената искршена линија $A_0A_1\dots A_n$, т.е.

$$s_n=\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}+\dots+\overline{A_{n-1}A_n}=\sum_{i=1}^{n}\overline{A_{i-1}A_i}.$$



Црт. 2



Црт. 3

Ако постои границата $\lim_{n\to\infty} s_n$ кога $\max d_i \to 0$ $\left(d_i = \overline{A_{i-1}A_i},\ i = 1,2,\dots,n\right)$, независно од изборот на точките A_i, тогаш тој број, да го означиме со s, ќе го викаме **должина на лакот** $\widehat{AB}$. Значи:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d_i \ \text{(при што } \max d_i \to 0\text{)}.$$

Аналогно за плоштина: нека е даден произволен рамнински лик (црт. 3). На неговата периферија, да избереме точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ и да ја означиме со P_n плоштината на така добиениот многуаголнк. Ако постои границата $\lim_{n\to\infty} P_n$, кога $\max d_i \to 0$ $\left(d_i = \overline{A_{i-1}A_i}\right)$, независно од тоа како се избрани точките A_i, тогаш тој број, да го означиме со P, ќе го викаме **плоштина на** дадениот **рамнински лик**. Значи,

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n \ \text{(при што: } \max d_i \to 0\text{)}.$$

ВЕЖБИ

1. Покажи дека ќе се добијат истите резултати (1) и (2), ако се земе низата од правилни n - аголници ($n \geq 3$) опишани околу кружница со радиус r.

2.* Користејќи го поимот волумен на права призма, да се дефинира волумен на прав кружен цилиндар (со висина H и радиус R на основата) - следејќи го примерот на дефинирање плоштина на круг.

3.* Како се воведува поимот:

а) Растојание меѓу две точки; б) должина на отсечка;

в) плоштина на многуаголник; г) волумен на полиедар?

4. Дали секоја крива има должина, односно секој рамнински лик има плоштина (вклучувајќи го случајот на "ограничени" фигури)?

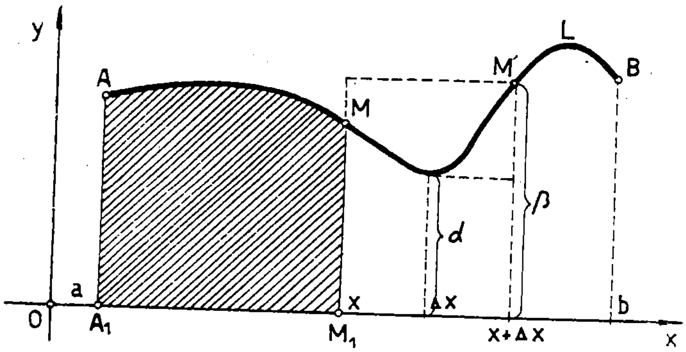
Упатство. Види пр. 1 во **I. 4. 7.**

4. 2. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ЛИКОВИ

Да претпоставиме дека $f(x)$ е функција со следниве својства:

а) $f(x)$ е непрекината на $[a,b]$, каде што $a<b$;

б) $f(x)>0$ за секој $x\in[a,b]$.



Црт. 1.

Нека графикот на $f(x)$, т.е. кривата (L), биде како на црт. 1 и нека $M(x,y)$ е точка од (L). Плоштината[1] на фигурата ограничена со отсечките AA_1, A_1M_1, M_1M и лакот $\widehat{AM}$ (**"криволиниски трапез"**) да ја означиме со $P(x)$. Ако x добие нараснување Δx, плоштината ќе добие нараснување ΔP. Тогаш, имаме:

$$\alpha\Delta x\leq\Delta P\leq\beta\Delta x,$$

каде што α е најмалата, а β најголемата вредност на $f(x)$ во сегментот $[x,x+\Delta x]$. По делењето со Δx, добиваме:

$$\alpha\leq\frac{\Delta P}{\Delta x}\leq\beta.$$

[1] Не навлегувајќи во детална дискусија, ќе ја претпоставуваме егзистенцијата на плоштината, како и други "интуитивно јасни" својства за неа. Истата забелешка ќе се однесува и за другите геометриски поими.

Од непрекинатоста на $f(x)$ следува дека постои $\xi \in [x, x+\Delta x]$, таков што

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = f(\xi).$$

Притоа, имаме $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$ (и овде се користи непрекинатоста на функцијата $f(x)$), па значи:

$$P'(x) = f(x) \tag{1}$$

т.е. $P(x)$ е примитивна за $f(x)$ во $[a,b]$. Од тоа (в. **1. 3.**) следува дека:

$$P(x) = P(a) + \int_a^x f(x)dx,$$

па бидејќи $P(a) = 0$, имаме

$$P(x) = \int_a^x f(x)dx$$

ставајќи $x = b$, добиваме:

$$P = P(b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

Значи, точна е следнава:

Теорема 1 (за плоштина на криволиниски трапез). *Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и ако $f(x) > 0$ за секој $x \in [a,b]$, тогаш плоштината P на ликот ограничен со правите $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графикот на функцијата е определена со формулата (2).*

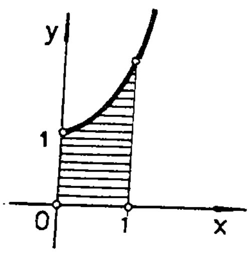
На пример, плоштината на "криволинискиот трапез" ограничен со кривата $y = x^2 + 1$ и правите $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$ (црт. 2) ќе биде:

$$P = \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

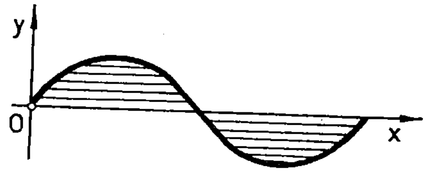
Јасно е дека претпоставката $f(x) > 0$ може да се замени со $f(x) \geq 0$. Меѓутоа, ако се допушти и $f(x) < 0$ за некои вредности на $x \in [a,b]$, тогаш равенството (2) нема да важи. Имено, во овој случај, $\int_a^b f(x)dx$ ќе биде алгебарски збир на делот од плоштината каде што $f(x)$ е позитивна и делот каде што $f(x)$ е негативна, со тоа што во "негативните" делови плоштината се смета за негативна. Но, природно е да ја сметаме плоштината за позитивна, па затоа горното равенство се заменува со:

$$P = \int_a^b |f(x)| dx. \tag{3}$$

Пример 1. *Да ја пресметаме плоштината на фигурата заградена од* $y=0$ *и* $y=\sin x$ кога x се менува од 0 до 2π (црт. 3.)



Црт. 2.



Црт. 3.

Кога би ја примениле формулата (2), би добиле:

$$P = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -1+1=0;$$

ваквиот резултат е последица од фактот што делот од π до 2π е пресметан со негативен знак.

Со помош на (3) би добиле:

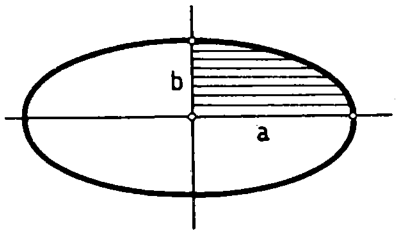
$$P=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}(\sin x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx=$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=1+1+1+1=4.$$

Имајќи ја предвид симетричноста, би можеле да работиме на следниов начин:

$$P=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-2\cos x\Big|_0^{\pi}=-2(-2)=4.$$

Пример 2. *Да ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена од елипсата* $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (црт. 4.).



Црт. 4.

Земајќи една четвртинка од фигурата, добиваме:

$$P=4\int_0^a y\,dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}}dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

За пресметување на интегралот ја вршиме замената $x=a\sin t$, при што $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, и тоа $x=0$ за $t=0$, $x=a$ за $t=\frac{\pi}{2}$. Според тоа,

$$P = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 4ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 4ab\frac{\pi}{4} =$$
$$= ab\pi.$$

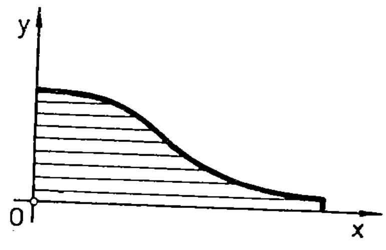
За $a = b = r$ се добива кружница со радиус r, па ја добиваме уште еднаш формулата за плоштина на круг: $P = r^2\pi$.

Забелешка 1. По договор ќе сметаме дека формулата (2) е точна и во случај на неправи интеграли, ако десната страна има конечна вредност.

Пример 3. *За функцијата* $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ *во интервалот* $[0,+\infty)$ имаме:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = arctgx\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

па можеме да сметаме дека фигурата, ограничена со кривата $y = 1/\left(1+x^2\right)$ *и правите* $x = 0$ *и* $y = 0$ *(црт. 5.), има плоштина* $P = \dfrac{\pi}{2}$.



Црт. 5.

Ако треба да се пресмета плоштината P на фигура ограничена со правите $x=a$, $x=b$ и со две непрекинати криви:

$$y=f(x),\ y=g(x) \text{ при } f(x)\le g(x) \text{ во } [a,b], \tag{4}$$

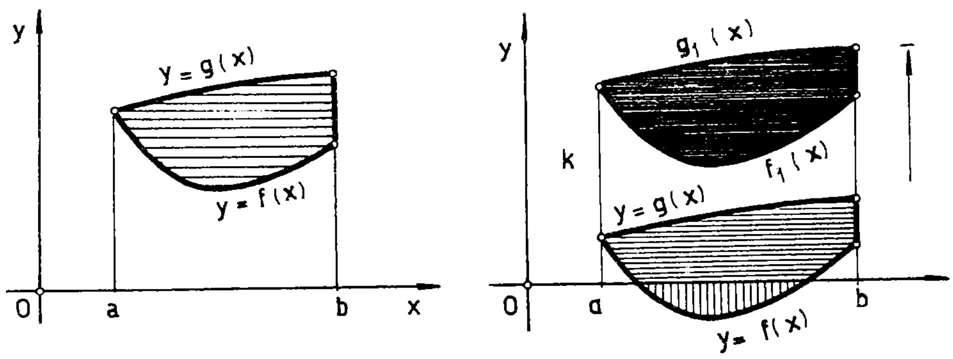
тогаш таа се пресметува со формулата:

$$P=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx. \tag{5}$$

Дека оваа формула е добра можеме да се увериме на едноставен начин.

Имено, ако $f(x)$ и $g(x)$ се ненегативни (како на црт. 6), тогаш P е разлика од плоштините на двата "криволиниски трапези", едниот ограничен со кривата $y=g(x)$, а другиот - со $y=f(x)$, па:

$$P=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx.$$



Црт. 6. Црт. 7.

Ако, пак, функциите $f(x)$ и $g(x)$ што ги задоволуваат условите (4) имаат призволни знаци во $[a,b]$, на пример, како на црт. 7, тогаш поради нивната ограниченост (имено, $f(x)$и $g(x)$ се непрекинати!), постои константа $k>0$, таква што функциите:

$$f_1(x)=f(x)+k, \qquad g_1(x)=g(x)+k$$

веќе се ненегативни. Користејќи го фактот што при транслација не се менува плоштината на дадената фигура, добиваме дека плоштината на фигурата ограничена со кривите $y=f_1(x)$, $y=g_1(x)$ и правите $x=a$, $x=b$ е еднаква со плоштината P на првобитната фигура, па:

$$P=\int_a^b[g_1(x)-f_1(x)]dx=\int_a^b[g(x)+k-f(x)-k]dx=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx,$$

т.е. формулата (5) е валидна и во тој случај.

Да разгледаме два примера.

Пример 4. *Да ја пресметаме плоштината P на фигурата ограничена со линиите* $y=(x-2)^2+1$ и $y=x+1$.

Фигурата, чија плоштина ја бараме е претставена на црт. 8; апсцисите на пресечните точки на дадените линии се $x_1=1$ и $x_2=4$ (добиени од равенката $(x-2)^2+1=x+1$). Според формулата (5), имаме:

$$P=\int_1^4\left[x+1-\left(x^2-4x+5\right)\right]dx=\int_1^4\left[5x-x^2-4\right]dx=$$

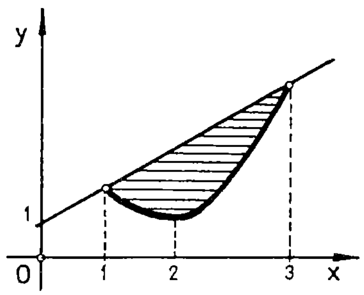
$$=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_1^4=\frac{5\cdot 16}{2}-\frac{64}{3}-16-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}-4\right)=\frac{9}{2}.$$

Пример 5. *Да ја пресметаме плоштината P на фигурата, заградена од линиите* $y=2x-x^2$, $y+x=0$ (црт. 9.).

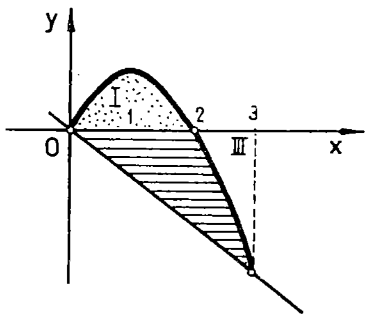
Според (5), имаме:

$$P=\int_0^3\left[2x-x^2-(-x)\right]dx=\int_0^3\left(3x-x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}.$$



Црт. 8.



Црт. 9.

Плоштината P можеме да ја пресметаме и вака. Според црт. 9 имаме: $P=P_1+P_2-P_3$, каде што P_1 и P_3 се плоштините на деловите означени со I и III соодветно, а P_2 е плоштината на ΔOAB. Бидејќи

$$P_1=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\frac{4}{3},\quad P_3=\int_2^3\left(2x-x^2\right)dx=\frac{4}{3},\quad P_2=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2},$$

следува дека $P=\frac{4}{3}+\frac{9}{2}-\frac{4}{3}=\frac{9}{2}$.

ВЕЖБИ

Во задачите **1** - **20** се бара плоштината на рамнинскиот лик ограничен со дадените линии.

1. $y=3+2x-x^2,\quad y=0.$

2. $y=x^2,\quad y=2x.$

3. $y=x^2,\quad y=2-x.$

4. $y=4-x^2,\quad y-x=2.$

5. $y^2=4x,\quad x^2=4y.$

6. $y^2=x,\quad y=x-2.$

7. $y^2=4(x+4),\quad y=2(x-2)$.

8. $x=4y-y^2,\quad y^2=3x$.

9. $x=y^3,\quad y^2=2-x,\quad y+1=0$.

10. $x+3y+y^2=0,\quad 4x+(y+3)^2=0$.

11. $x=y^3,\quad x^2y=1,\quad x=8,\quad y=0$.

12. $y=\sqrt{x},\quad y+\sqrt[3]{x}=0,\quad x=1$.

13.Й $y=x^3+1,\quad y=x^2+4x-3$.

14. $y^2=x^2\left(a^2-x^2\right)$.

15. $x^2-2x+y^2=5$.

16. $x^2+y^2-6x-4y+4=0$.

17. $4x^2+9y^2-24x=0$.

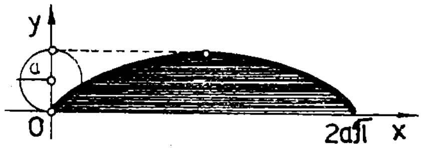
18. $x^2-y^2=2,\quad y^2=x$.

19. $y^2-x^2=1,\quad y=1+x/2$.

20. $y^2=x^2-4x+5,\quad y=\sqrt{5}$.

21.* $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$ (**циклоида**), $y=0,\ 0\le t\le 2\pi$ (црт. 10).

Упат. $P=\int\limits_a^b y\,dx=\int\limits_\alpha^\beta y(t)\cdot\dot{x}(t)dt$.



Црт. 10.

4. 3. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ЛИК ВО ПОЛАРНИ КООРДИНАТИ

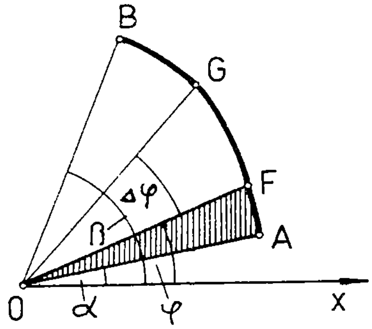
Во многу случаи е згодно да се работи во поларни координати, па затоа ќе изведеме формула за "плоштина во поларни координати".

Нека на рамнината е зададен поларен координатен систем и нека $\rho=f(\varphi)$ е непрекината (и ненегативна) функција на сегментот $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$.

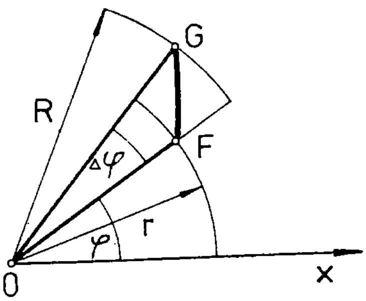
Да го разгледаме исечокот (секторот) AOB на кривата $\rho = f(\varphi)$, на црт. 1, т.е. делот од рамнината, ограничен со таа крива и со радиус - векторите на точките A и B, што одговараат на вредностите од поларниот агол: $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$.

Да ја означиме со $P(\varphi)$ плоштината на делумниот исечок AOF, отсечен со радиус - векторот OF што одговара на аголот φ (црт. 1). Величината $P(\varphi)$ претставува функција од φ, при што: $P(\alpha) = 0$, $P(\beta) = P$ - каде што P е плоштината на целиот сектор AOB. Ќе докажеме дека:

$$P'(\varphi) = \frac{1}{2} f^2(\varphi). \tag{1}$$



Црт. 1.



Црт. 2.

За таа цел, на φ да му дадеме нараснување $\Delta\varphi$ (на пример, позитивно) и да ја означиме со ΔP плоштината на добиениот сектор FOG (црт. 1). Јасно е дека ΔP е нараснување на функцијата $P(\varphi)$ што се добива при премин од φ на $\varphi + \Delta\varphi$.

Да ја означиме со r најмалата, а со R најголемата вредност на $f(\varphi)$ во сегментот $[\varphi, \varphi + \Delta\varphi]$. Ако од полот O опишеме кружници со радиуси r и R, тогаш ќе добиеме два *кружни* исечоци од кои првиот е содржан во секторот FOG, а вториот го содржи FOG (црт. 2). Според формулата за плоштина на кружен исечок, можеме да напишеме:

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi \le \Delta P \le \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi,$$

каде што се добива:

$$\frac{1}{2}r^2 \le \frac{\Delta P}{\Delta\varphi} \le \frac{1}{2}R^2. \qquad (2)$$

Од непрекинатоста на $f(\varphi)$ следува дека постои $\xi \in [\varphi, \varphi+\Delta\varphi]$, таков што:

$$\frac{\Delta P}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}[f(\xi)]^2,$$

а од тоа, при $\Delta\varphi \to 0$, го добиваме (1).

Од равенството (1), со интегрирање (како и во случајот на декартови координати) добиваме:

$$P = P(\beta) - P(\alpha) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Според тоа:

Ако функцијата $f(\varphi)$ *е непрекината (и ненегативна) на сегментот* $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$, *тогаш плоштината* P *на исечокот од кривата* $\rho = f(\varphi)$, *меѓу полуправите* $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$[1] *се пресметува со формулата:*

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi, \quad \text{т.е.} \quad P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2 d\varphi. \qquad (3)$$

Пример 1. *Да ја пресметаме плоштината на делот од исечокот зафатен со кривата:*

$$\rho = a(1+\cos\varphi)$$

(кардиоида) и полуправите $\varphi = \pi/6$ и $\varphi = \pi/3$.

На црт. 3 е претставен шрафирано отсешокот чија плоштина P ја бараме. Имаме:

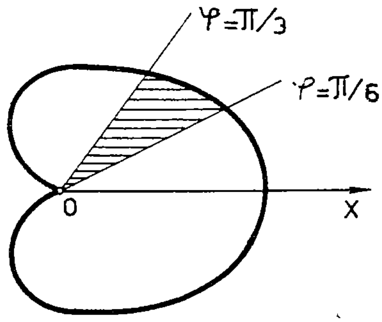
$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

---

[1] Притоа се претпоставува и дека лакот на кривата "не се повторува".

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\right)=\frac{a^2}{16}(2\pi+7\sqrt{3}-7).$$



Црт. 3.

Забелешка 1. Кога една фигура е ограничена од затворена крива (во поларни координати), разликуваме три случаи:

а) полот е во внатрешноста на фигурата (црт. 4а) - тогаш се зема $\alpha=0$ и $\beta=2\pi$, т.е.

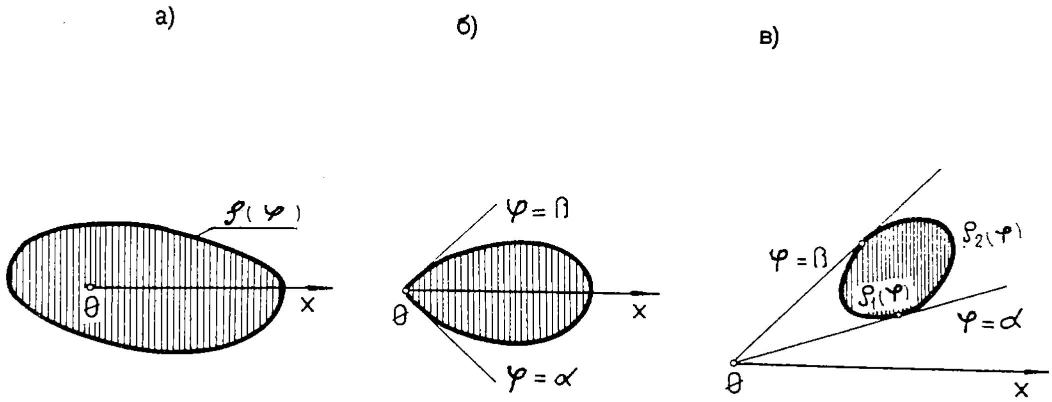
$$P=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\varphi;$$

б) полот е на кривата (црт. 4б) - тогаш:

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi;$$

в) полот е надвор од кривата (црт. 4в) - тогаш:

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[\rho_2^{\,2}(\varphi)-\rho_1^{\,2}(\varphi)\right]d\varphi.$$



Црт. 4.

Пример 2. *а) Кружницата со радиус r и центар во полот има равенка $\rho = r$ во поларни координати, па*

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi=\frac{1}{2}r^2\cdot 2\pi=r^2\pi.$$

б) За плоштината P на целата фигура, ограничена со кривата $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (пр. 1, црт. 3), ќе имаме:

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

Пример 3. *Да ја најдеме плоштината P на делот од кругот $\rho_1 = 2a\cos\varphi$ што е надвор од кругот $\rho_2 = a$* (црт. 5).

Поради симетрија, ќе ја пресметаме плоштината само на, "горниот дел" (исшрафираниот дел на црт. 5). Притоа, поларниот агол на точката B ќе го добиеме од условот $\rho_1 = \rho_2$:

$$2a\cos\varphi = a; \qquad \cos\varphi=\frac{1}{2}; \qquad \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Така, имаме:

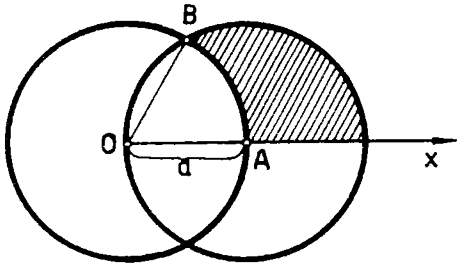
$$\frac{1}{2}P=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_1^2-\rho_2^2\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/3}\left(4a^2\cos^2\varphi-a^2\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\int_{0}^{\pi/3}\left(4\frac{1+\cos2\varphi}{2}-1\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}(\varphi+\sin2\varphi)\Big|_{0}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\right);$$

Значи,

$$P=\frac{a^2\pi}{3}+\frac{a^2}{2}.$$



Црт. 5.

ВЕЖБИ

Во задачите 1 - 4 се бара плоштината на рамнинскиот лик ограничен со дадената крива (или криви). Секако, прво треба да се нацрта кривата. Притоа, во сите задачи, $a>0$ е даден број.

1. $\rho=a\sin3\varphi$ (**трилисна роза**, т.е. роза со три венечни ливчиња).

2. $\rho=a\cos2\varphi$ (**четирилисна роза**), само едно венечно ливче.

3. $\rho=2+\cos 2\varphi$ **(Паскалов полжав)**.

4. Заедничкиот дел од круговите, определени со: $\rho=2\cos\varphi$ и $\rho=1$.

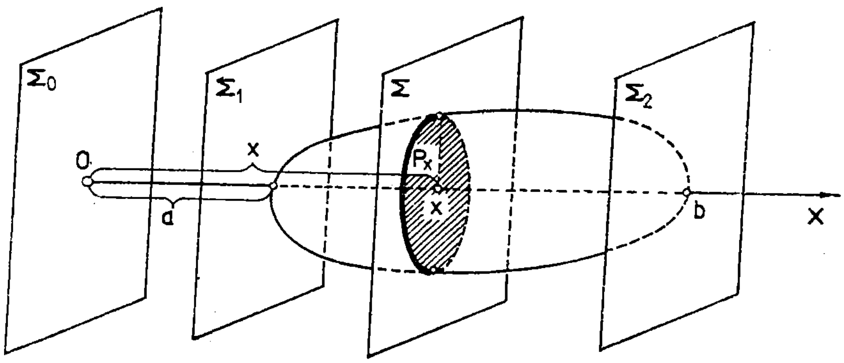
5. Најди го односот меѓу плоштината зафатена од првата витка на архимедовата спирала $\rho=a\varphi$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$ и плоштината на круг со радиус $2a\pi$.

6.* Да се најде плоштината на ликот ограничен со кривата $\left(x^2+y^2\right)^2=2axy$ **(Бернулиева лемниската)**.

4. 4. ВОЛУМЕН НА РОТАЦИОНИ ТЕЛА

Ќе изведеме овде формула за волумен на ротационо тело што се добива кога фигурата, ограничена со правите $x=a$, $y=b$ $(a<b)$, $y=0$ и графикот на една непрекината функција (во $[a,b]$) $y=f(x)$, ротира за $360°$ околу x - оската.

Бараната формула ќе ја добиеме како специјален случај од поопшта формула. Да претпоставиме, имено, дека е дадено едно тело во просторот ограничено со една затворена површина што ја допираат две рамнини Σ_1 и Σ_2, паралелни и на растојание a, односно b $(a<b)$ од една трета рамнина Σ_0, паралелна со нив (црт. 1).



Црт. 1.

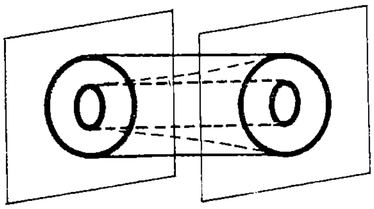
Притоа претпоставуваме дека е позната плоштината $P(x)$ на пресекот на телото со рамнина Σ, паралелна со дадените, а е на растојание x од рамнината Σ_0.

Да го означиме со $V(x)$ волуменот на делот од телото што се наоѓа меѓу рамнините Σ_1 и Σ. При претпоставка дека $P(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$, ќе докажеме дека:

$$V'(x) = P(x), \tag{1}$$

т.е. дека $V(x)$ е примитивна функција за $P(x)$ на $[a,b]$.

Работиме како и во случајот на плоштина (**4. 2.** и **4. 3.**). Имено, нека на x му дадеме нараснување Δx, така што $a < x < x + \Delta x < b$ и да го разгледаме волуменот ΔV на делот од телото "меѓу x и $x + \Delta x$". Нека $x_1, x_2 \in [x, x + \Delta x]$ се такви што $P(x_1)$ е најмала, а $P(x_2)$ е најголема вредност на P во $[x, x + \Delta x]$ (црт. 2).



Црт. 2.

Јасно е дека важат неравенствата:

$$P(x_1)\Delta x \leq \Delta V \leq P(x_2)\Delta x$$

т.е.

$$P(x_1) \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq P(x_2).$$

Од непрекинатоста на функцијата $P(x)$ следува дека постои $\xi \in [x, x + \Delta x]$, таков што:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = P(\xi).$$

Потоа, пак од непрекинатоста, следува дека:

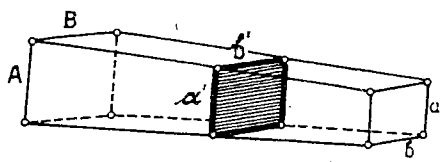
$$V'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = P(x)$$

што и сакавме да покажеме.

Од добиеното равенство следува дека:

$$V = V(b) = \int_a^b P(x)dx \tag{2}$$

Пример 1. *Да го пресметаме волуменот V, на права потсечена пирамида чии основи се правоаголници со страни A, B и a, b, а висината е еднаква со H (црт. 3).*



Црт. 3.

Ако ги означиме со a' и b' страните на правоаголникот што се добива како пресек на пирамидата со рамнина паралелна на основите и на растојание x од големата основа, тогаш плоштината на тој пресек изнесува $P(x) = a' \cdot b'$. Бидејќи:

$$\frac{A-a'}{2} : \frac{a'-a}{2} = x:(H-x),$$

добиваме:

$$a' = \frac{1}{H}(AH - Ax + ax) \quad \text{и, слично,} \quad b' = \frac{1}{H}(BH - Bx + bx).$$

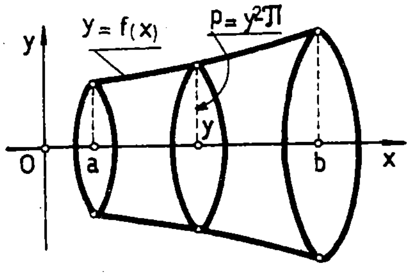
Според тоа, ќе имаме:

$$V = \int_0^H P(x)dx = \int_0^H a'b'dx =$$

$$= \frac{1}{H^2}\int_0^H \left(ABH^2 - 2ABHx + AbHx + aBHx + ABx^2 - Abx^2 - aBx^2 + abx^2\right)dx =$$

$$= \frac{H}{3}\left(AB + ab + \frac{Ab + aB}{2}\right).$$

Да се вратиме сега на проблемот за пресметување волумен на ротационо тело што се добива со ротација за $360°$ околу x - оската на фигурата ограничена од правите $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графикот на непрекинатата функција $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$ (црт. 4).



Црт. 4.

Имајќи предвид дека напречниот пресек е круг со радиус $r = y$ (не се намалува општоста со претпоставката $y \geq 0$), добиваме дека $P(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$, па значи бараниот волумен V ќе биде:

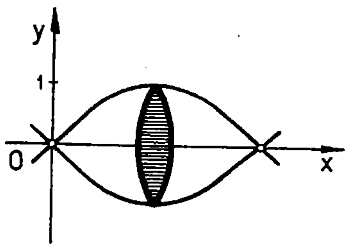
$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\pi\int_a^b y^2 dx. \tag{3}$$

(Притоа, $y^2=\left[f(x)\right]^2$.)

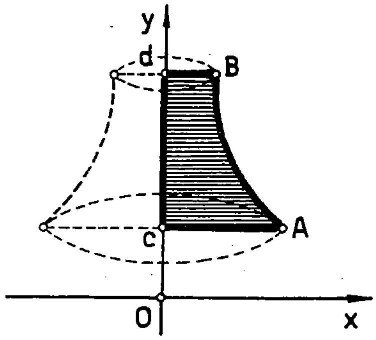
Пример 2. *Да го пресметаме волуменот на телото што се добива кога лакот на синусоидата*

$$y=\sin x,\ 0\le x\le \pi$$

ротира околу x - оскатa (црт. 5).



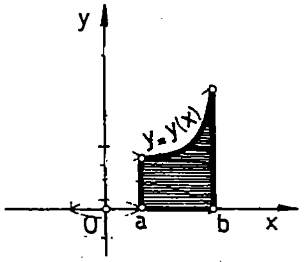
Црт. 5.



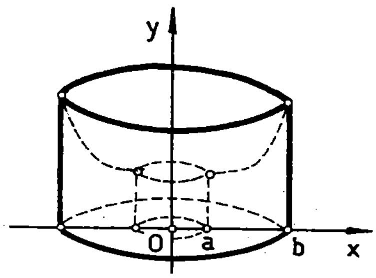
Црт. 6.

Според формулата (3), имаме:

$$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos^2 x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$



Црт. 7.



Црт. 8.

Забелешка 1. Волуменот на тело, добиено со ротација на "криволинискиот трапез" $ABdc$ (црт. 6), каде што AB е лак на кривата $x = g(y)$, се пресметува по формулата:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy, \quad \text{т.е.} \quad V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2 dy. \tag{4}$$

Забелешка 2. Волуменот на телото што се добива со ротација околу y - оската на областа ограничена со непрекинатата крива $y = y(x)$ од $x = a$ до $x = b$ и x - оската (црт. 7 и 8) се пресметува и со формулата

$$V = 2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

ВЕЖБИ

Во задачите 1 - 7, најди го волуменот на телото, добиено со ротација на фигурата што е ограничена со дадените линии, околу оската Ox. (Прво, скицирај ја дадената фигура!).

1. $y^2 = 2x, \quad x = 2.$

2. $y^2 = x^3, \quad x = 1.$

3. $xy = 3, \quad x = 1, \quad x = 3.$

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

5. $x^2 - y^2 = a^2, \quad x = \pm 2a.$

6. $y = ach\dfrac{x}{a}, \quad x = \pm a.$

7. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ - еден "свод" и $y = 0$

Упатство. $$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\dot{x}(t)dt. \tag{*}$$

8. Најди го волуменот на телото што се добива со ротација на кардиоидата $\rho = 1 + \cos\varphi$ околу поларната оска.

Упатство. $V = \pi\int_a^b y^2 dx; \quad x = \rho\cos\varphi = (1 + \cos\varphi)\cdot\cos\varphi,$

$y = \rho\sin\varphi = (1 + \cos\varphi)\sin\varphi, \qquad dx = -(\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi$

и потоа се применува формулата (*) од задачата 7.

Во задачите **9 - 14** најди го волуменот на телото, добиено со ротација на фигурата што е ограничена со дадените линии, околу оската Oy. (Прво, скицирај ја фигурата!)

9. $y^2 = 2x, \quad x = 0, \quad y = 2.$

10. $y^2 = 2x, \quad y = 0, \quad x = 2.$

11. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = \pm 2b;$

12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

13. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$

14. $y^2 = x^3, \quad x = 1$ (сп. зад. 2).

Рамнинскиот лик, ограничен сô дадените линии, ротира околу а) Ox, б) Oy (зад. **15.** и **16.**). Најди го волуменот на така добиеното тело.

15. $y = 2x - x^2, \quad y = 0.$

16. $x = a\sin^3 t, \quad y = a\cos^3 t$. (Сп. со зад. 13.)

17. Најди го волуменот на "телото" што се добива со ротација на фигурата ограничена со:

$$y = e^{-x} \cdot \sqrt{\sin x} \quad (x \geq 0), \quad y = 0,$$

околу оската Ox.

18. Со помош на определен интеграл, да се пресмета волуменот на:

а) прав кружен конус со висина H и радиус на основата R;

б) прав конус со висина H, а основата му е елипса со полуоски a и b.

4. 5. НЕКОЛКУ ПРИМЕНИ НА МЕТОДОТ НА "БЕСКРАЈНО МАЛИ КОЛИЧИНИ" ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

Формулите за пресметување плоштини на рамнински ликови и волумени на ротациони тела, добиени во претходните три параграфи, се коректно докажани, при претпоставка дека од порано се познати соодветни својства на плоштните и волумените.[1)]

Овде ќе споменеме, без доказ, формули за пресметување должини на лаци на рамнински криви и плоштини на ротациони површини. Нив би можеле да ги формулираме без дискусија, бидејќи првата ќе биде докажана во **6. 1**, а втората е специјален случај од поопшта формула за плоштина на површини во просторот, што ќе биде докажана во третата книга. Но, овде сакаме нив да ги искористиме за да потсетиме дека во почетокот на развојот на диференци-

[1)] Во третата книга ќе се изврши подетална дискусија за поимите: крива (во рамнина и простор), површина и геометриско тело, како и за мерните карактеристики сврзани со нив.

јалното и интегралното сметање се оперираше слободно со бескрајно мали (или големи) количини, како со обични броеви. Меѓутоа, во текот на минатиот век, со цел на аксиоматско градење на математиката, се напушти тој метод, така што бескрајно малите (или големите) количини се третираат како функции со граница нула, односно бесконечност.

Сепак, во физиката и во техничките науки, и сега, главно, се работи на стариот начин, бидејќи многу побргу се доаѓа до соодветни резултати. Овие резултати, обично, се точни, и покрај тоа што математички не се доволно образложени. Тоа е една од причините за појавувањето на нова математичка дисциплина, под името "нестандардна анализа", каде што се дозволуваат бесконечно мали и бесконечно големи броеви. За жал, потребна е голема подготовка за совладувањето на таа дисциплина, па затоа таа не нашла место во редовните студии ни за студентите по математика.

За илустрација на **методот на "бескрајно мали количини"** ќе наведеме еден пример, преведен од книгата на М. Девис ([5], стр. 5).

"П р и м е р - пресметување на изводот на функцијата $y=x^2$. Изводот е еднаков со количникот од бескрајно малото нараснување на функцијата *(dy)* и бескрајно малото нараснување на аргументот *(dx)*. Па, да земеме бескрајно мал број dx; во нашиот случај $dy=(x+dx)^2-x^2=2x\,dx+(dx)^2$. Натаму,

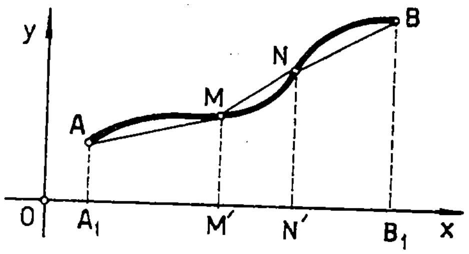
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}=2x+dx;$$

но, бидејќи dx е бескрајно мал број, тој може да се изостави и бараниот извод е еднаков со $2x$."

Подолу ќе се сретнеме со соодветни формули за бесконечно мали величини, па затоа горниот доказ го модификуваме на тој начин што од $dy=2x\,dx+(dx)^2$ и фактот дека (за $x\neq 0$, x конечно) $(dx)^2$ е бескрајно мала величина од повисок ред во однос на $2x\,dx$, би заклучиле дека $dy=2x\,dx$.

Пред да пројдеме на должини на лаци и плоштини на ротациони површини, ќе се вратиме на докажување на формулата (1) од **4. 2**: $P'(x)=f(x)$.

Да претпоставиме дека функцијата $y=f(x)$ ги исполнува условите а), б) споменати во почетокот на **4. 2**; нека $M(x,y)$, $N(x+dx,y+dy)$ се точки од графикот на функцијата (црт. 1), при што dx (па значи и dy) е бесконечно мало нараснување. Тогаш, плоштината dP на фигурата ограничена со лакот $\widehat{MN}$ и



Црт. 1.

отсечките $\overline{MM'}, \overline{M'N'}, \overline{N'N}$ е приближно еднаква, т.е. еквивалентна со плоштината:

$$\frac{y+y+dy}{2}\cdot dx = ydx + \frac{dydx}{2}$$

на трапезот $MM'N'N$. Имајќи предвид дека $\frac{dydx}{2}$ е бескрајно мала од повисок ред во однос на ydx (бидејќи $y>0$ е конечна) добиваме дека $dP = ydx$, т.е.

$P' = \frac{dP}{dx} = y$, а тоа е бараната формула (1) од **4. 2.**

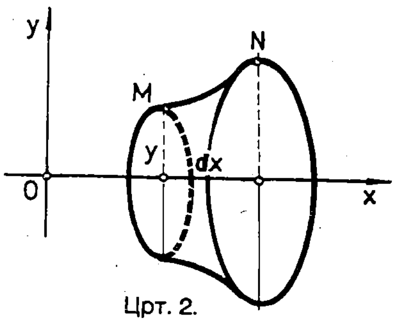
Во горната дискусија, всушност, лакот $\overset{\frown}{MN}$ го замениме со отсечката MN, т.е. сметаме дека должината ds на лакот $\overset{\frown}{MN}$ е еднаква со $\overline{MN} = \sqrt{dx^2+dy^2}$, т.е.

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx, \qquad (1)$$

од што следува:

$$s' = \sqrt{1+y'^2}\,. \qquad (1')$$

Да претпоставиме дека лакот $\overset{\frown}{MN}$ на кривата $y=f(x)$ ротира за $360°$ околу x - оската (црт. 2).



Црт. 2.

Сакаме да ја определиме плоштината dQ на фигурата што се добива со ротација на лакот $ds = \overset{\frown}{MN}$. За таа цел, површината што се добива ќе ја сметаме за бочна површина на потсечен конус, со радиуси на основите (при $y>0$): y, $y+dy$ и генератриса ds, а висина dx. Според тоа, имаме:

$$dQ = \frac{2y\pi + 2(y+dy)\pi}{2}\cdot ds = 2\pi y ds + \pi dy\cdot ds.$$

Имајќи предвид дека $dyds$ е бескрајно мала количина од повисок ред во однос на yds, од последното равенство добиваме:

$$dQ = 2\pi yds = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{2}$$

од што следува:

$$P' = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}. \tag{2'}$$

Имајќи ги предвид резултатите (1') и (2'), ја добиваме следнава:

Теорема 1. (за должина на лак и плоштина на ротациона површина) *Нека функцијата $y = f(x)$ и нејзиниот извод $y' = f'(x)$ се непрекинати во сегментот $[a,b]$ и нека $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. Тогаш:*

(i) *Должината s на лакот $\widehat{AB}$ од графикот на дадената функција се пресметува со формулата*[2]

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{3}$$

(ii) *При претпоставка дека $y \geq 0$, во $[a,b]$ плоштината Q на површината што се добива со ротација за $360°$ на лакот AB околу апцисната оска се пресметува по формулата:*

$$Q = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{4}$$

Доказ. Земајќи $M(x, y(x))$ да е произволна точка на кривата меѓу A и B, според (1'), добиваме дека должината $s(x)$ на лакот $\widehat{AM}$ е примитивна функција на $\sqrt{1+y'^2}$, при што $s(a) = 0$. Од тоа следува точноста на (3). Од слични причини, како последица на (2'), се добива дека $Q(x)$ е примитивна функција на $2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, од што следува (4). □

Да разгледаме два примера.

---

[2] Види и **6. 1.**

Пример 1. За $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(=chx)$ имаме $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $(=shx)$, од што следува:

$$1+y'^2=1+sh^2x=ch^2x,$$

т.е. $\sqrt{1+y'^2}=chx$. Според тоа, должината s на лакот на кривата $y=chx$ во сегментот $[0,1]$ изнесува:

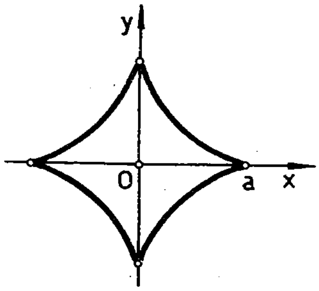
$$s=\int_0^1 chx\,dx=shx\Big|_0^1=sh1=\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{e^2-1}{2e}.$$

За плоштината Q, кога тој лак ротира околу апсцисната оска за $360°$, добиваме:

$$Q=2\pi\int_0^1 ch^2x\,dx=\frac{2\pi}{2}\int_0^1(1+ch2x)dx=\pi\left(x+\frac{1}{2}sh2x\right)\Big|_0^1=$$

$$=\pi\left(1+\frac{1}{2}sh2\right)=\frac{\pi}{4e^2}\left(e^4+4e^2-1\right).$$

Пример 2. *Да ја разгледаме астроидата (црт. 3), т.е. кривата дадена со равенката* $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, *каде што* $a>0$ е даден број. Тогаш, имаме: $(2/3)x^{-1/3}+(2/3)y^{-1/3}\cdot y'=0$, т.е. $y'=-y^{1/3}/x^{1/3}$, од што следува: $\sqrt{1+y'^2}=a^{1/3}x^{-1/3}$. Имајќи ја предвид симетријата, ја пресметуваме должината на астроидата:



Црт. 3.

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=4a^{1/3}\cdot\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^a=6a.$$

Да ја пресметаме и плоштината Q на површината што се добива со ротирање на астроидата околу апсцисната оска. Повторно од причини на симетрија, добиваме:

$$Q = 4\cdot 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 8\pi a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}dx.$$

Ако ставиме $x = a\cos^3 t$, за $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, добиваме:

$\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2} = a\sin^3 t,\ dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt,\ x^{-1/3} = a^{-1/3}(\cos t)^{-1},\ t=\dfrac{\pi}{2}$ за $x=0$, $t=0$ за $x=a$, па:

$$Q = -8\pi a^{1/3}\cdot a^{-1/3}\cdot 3a\cdot\int_{\pi/2}^{0}\sin^{-1}t\cdot\cos^3 t\cdot\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$= 24\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt = 24\pi a^2\left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{24\pi a^2}{5}.$$

Забелешка 1. Во Пр. 2 воочуваме дека $y'(0^+) = -\infty$, па соодветните интеграли се несвојствени, а во Теоремата 1 претпоставувавме дека се работи за "својствени" интеграли. Формулите (3) и (4) се точни и кога се работи за несвојствени интеграли, но овде нема да дадеме образложение за тоа. (Впрочем, такви случаи се јавуваат и при пресметувањето плоштини на рамнински ликови и волумени на тела.)

Ако кривата е дадена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, за $t\in[\alpha,\beta]$, при што: а) $x(t)$ расте во $[\alpha,\beta]$, б) $x(t)$, и $y(t)$ се непрекинато диференцијабилни во $[\alpha,\beta]$ и в) $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, тогаш заменувајќи $y' = \dot y/\dot x$, $dx = \dot x\,dt$, добиваме:

$$s = \int_\alpha^\beta\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt, \tag{3'}$$

$$Q = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt. \tag{4'}$$

Пример 3. *Со равенките:* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ *е дадена астроида, при што целата крива се добива кога t се менува во сегментот* $[0,2\pi]$, *а нејзиниот дел во првиот квадрант се добива за* $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. *Во овој случај имаме:*

$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$, т.е. $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 3a\sin t\cos t$, па:

$$s = 4\cdot 3a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt = 12a\int_0^{\pi/2}\sin t\,d(\sin t) = 6a;$$

$$Q = 8\pi 3a\cdot a\int_0^{\pi/2}\sin^4\cos t\,dt = 24a^2\pi\frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{24a^2\pi}{5}.$$

Во случај кога кривата е дадена во поларни координати со $\rho = \rho(\varphi)$, можеме да сметаме дека $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$ се нејзините параметарски равенки, при што сега φ ја има улогата на параметар. Означувајќи го изводот на ρ по φ со ρ', добиваме:

$$\dot{x} = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \quad \dot{y} = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi,$$

од што следува $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \rho^2+\rho'^2$, па формулите (3') и (4') го добиваат следниов облик:

$$s = \int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi, \tag{3''}$$

$$Q = 2\pi\int_\alpha^\beta\rho\cdot\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \tag{4''}$$

Пример 4. *Да ја пресметме целата должина на кардиоидата* (црт. 3 од **4. 3**):

$$\rho = a(1+\chi o\sigma\varphi).$$

Поради симетрија, можеме да го земеме сегментот $[0,\pi]$, т.е. $\frac{1}{2}s$. Имаме:

$$s=2\int_0^\pi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=2\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^\pi\sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=2\int_0^\pi 2a\cos(\varphi/2)\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi=$$
$$=8a.$$

Кога не би ја земе предвид симетријата, тогаш би требало да работиме во сегментот $[0,2\pi]$, и би "добиле" $s=4a\sin(\varphi/2)\big|_0^{2\pi}=0$, што (секако) е апсурден резултат. Ова се должи на фактот што формулата $\sqrt{\cos^2(\varphi/2)}=$ $=\cos(\varphi/2)$ не точна во целиот сегмент $[0,2\pi]$, туку само во $[0,\pi]$; имено, во $[\pi,2\pi]$ имаме $\sqrt{\cos^2(\varphi/2)}=-\cos(\varphi/2)$. Според тоа, би требало да работиме на следниов начин:

$$s=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2(\varphi/2)}\,d\varphi=2a\int_0^\pi\cos(\varphi/2)\,d\varphi-2a\int_\pi^{2\pi}\cos(\varphi/2)\,d\varphi=$$
$$=4a+4a=8a.$$

Плоштината на површината што се добива со ротација на кардиоидата за $360°$ околу поларната оска ја пресметуваме со помош на (4''):

$$Q=2\pi\int_0^\pi a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cdot 2a\cos(\varphi/2)\,d\varphi=$$

$$=16a^2\pi\int_0^\pi\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=-32a^2\pi\int_0^\pi\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)=-32a^2\pi\cdot\frac{1}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\Big|_0^\pi=$$

$$=32\pi a^2/5.$$

Забелешка 2. Погоре не ги наведовме сите услови што треба да бидат задоволени, за да биде точно равенството (3'), односно десната страна од тоа равенство да биде должината на лакот $\widehat{AB}$, каде што A има координати $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, а B - $x(\beta), y(\beta)$. Пред сè, се претпоставува егзистенција на изводите $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ за секој $t \in [\alpha,\beta]$. Освен тоа, потребно е да се претпостави дека "делови од лакот на кривата не треба да се повторуваат" кога t се "менува" во $[\alpha,\beta]$. Со други зборови, ќе претпоставуваме дека системот равенки $x(t_1)=x(t_2)$, $y(t_1)=y(t_2)$ има конечно многу решенија (t_1,t_2), такви што $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$. Слични претпоставки треба да се направат и за формулата (4').

Што се однесува до поимот "**плоштина на просторна фигура**", ќе истакнеме само дека тој не може да се воведе сосема аналогно како во "рамнинскиот случај", со впишување многуаголник (в. **4.1**). Сепак, разбирливо, за тоа се користи поимот на "рамнинска плоштина", како што ќе видиме во третата книга.

$\ulcorner$** **Забелешка 3.** Плоштината Q_x на површина, добиена со ротација на лакот AB $[A(a,c),B(b,d)]$ на кривата $x=g(y)$ околу x - оската, при што $g(y)$ е растечка и ненегативна функција во сегментот $[c,d]$ (црт. 1. и 2.), се пресметува со формулата:

$$Q_x = 2\pi\int_c^d y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot dy, \tag{5}$$

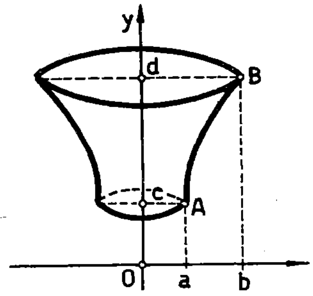
доколку интеграндот $y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ е непрекината функција од y во сегментот $[c,d]$. До (5) се доаѓа аналогно како што дојдовме до формулата (4).

Ако, пак, лакот AB на кривата $x=g(y)$ ротира околу y - оската (црт. 4), тогаш плоштината Q_y на добиената ротациона површина можеме да ја пресметаме со помош на една од следниве две формули:

$$Q_y = 2\pi\int_c^d x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot dy = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot dx, \tag{6}$$

при услови аналогни на тие од погоре.

Во случај кога кривата е зададена со параметарски равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$ и t се менува од α до β за одреден лак од кривата, тогаш плоштината на површината што е добиена со ротација на лакот околу y - оската е:



Црт. 4.

$$Q_y = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} x\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\cdot dt, \qquad (6')$$

(под услов интеграндот да е непрекината функција во $[\alpha,\beta]$.

Ако лакот е зададен со равенка $\rho=\rho(\varphi)$ во поларни координати во сегментот$[\alpha,\beta]$, тогаш плоштината Q на ротационата површина околу x - оската се пресметува со формулата (4'), а околу y - оската се пресметува - со (6'), сметајќи го φ за параметар и $x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$. □

ВЕЖБИ

1. Да се покаже резултатот (1) од **4. 3** и (1) од **4. 4** со помош на "методот на бескрајно мали количини".

2. Да се даде "директен" доказ на формулата $ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$, кога кривата е дадена со равенка $\rho=\rho(\varphi)$ во поларен систем.

Во задачите **3 - 14** се бара должината на назначениот лак од дадената крива. (Ако не е посебно назначен лак, тогаш се бара должината на дадената крива.)

3. $y=ach\dfrac{x}{a}$, $0\le x\le a\ln 3$ $(a>0)$.

4. $y^2=x^3$, отсечен со $x=\dfrac{4}{3}$.

5. $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}$, отсечен со x - оската.

6. $y=2\sqrt{x}$, во $[0,1]$.

7. $9y^2=x(x-3)^2$, целата јамка.

8. $x=\dfrac{1}{4}\left(y^2-2\ln y\right)$, $1\le y\le e$.

9. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

10. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

11. $x=a(t\sin t+\cos t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, (**еволвента** или "**развивка**" на кружница), од точката A $(t=0)$, до произволна точка $M(t)$.

12. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (циклоида), еден "свод".

13.* Да се покаже дека пресметувањето должина на лак од елипса доведува до елиптичен интеграл (в. (6) и (7) од 3. 2').

14. $\rho=a\varphi$ (архимедова спирала), од полот O до произволна точка M од кривата.

15. $\rho = a\sin^3(\varphi/3)$, целата крива.

16. $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)$, $1 \le \rho \le 3$.

Упат. Во (3"), стави $\rho' = 1/\varphi'$ и $d\varphi = \varphi' d\rho$ - ќе се добие:

$$s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}\, d\rho.$$

Во задачите **17 - 20** да се пресмета плоштината, добиена со ротација на назначениот дел од дадената крива, околу x - оската.

17. $9y^2 = x(3-x)^2$, затворениот дел.

18. $bx - ay = 0$ $(a \ne 0 \ne b)$, од $(0,0)$ до (a,b).

19. $y^2 = 2 - x$, $0 \le x \le 2$.

20. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

21. Да се најде плоштината на сфера со радиус R.

Упат. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ во $[-R, R]$, околу x - оската.

22. Да се најде плоштината на сферниот појас, добиен со ротација на кружниот лак $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a \le x \le b$, при што $-R < a < b < R$.

23. Да се најде плоштината на калотата од топка со радиус R, отсечена со рамнина што е на растојание d $(0 < d < R)$ од центарот на топката.

24. Да се најде плоштината на бочната површина на прав кружен конус со висина H и радиус на основата R.

Во задачите **25 - 28** да се пресмета плоштината на површината, добиена со ротација на назначениот лак, околу y - оската.

25. $y = x^2$, $0 \le x \le 2$.

26. $9x = y^3$, од $(0,0)$ до $\left(\dfrac{8}{9}, 2\right)$.

27. $y = 12\ln x$, $5 \le x \le 9$.

28. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, $1 \le x \le 3$.

29. $\rho = 2a\cos\varphi$, околу $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

30. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$, околу $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

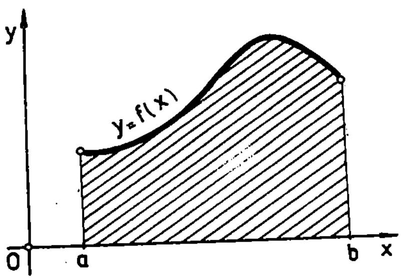
31. Во некои од вежбите 17 - 20 и 25 - 30, да се пресмета должината на лакот.

32. Во некои од вежбите 3 - 14 (за кои е можно), да се пресмета плоштината на површината, добиена со ротација за 360° на дадениот лак.

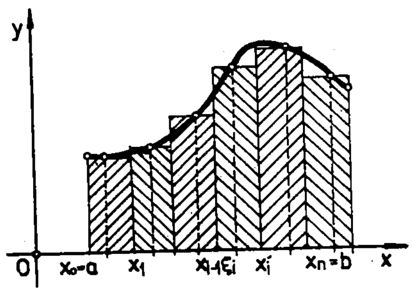
III. 5. РИМАНОВ ИНТЕГРАЛ

5. 1. ДЕФИНИЦИЈА И СВОЈСТВА

Поимот определен интеграл го дефиниравме во **1. 3.** со помош на поимот примитивна функција. Имено, ако $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во (α,β) и ако $a,b\in(\alpha,\beta)$ се такви што $a<b$, тогаш $\int_a^b f(x)dx$ е, по дефиниција, еднаков на разликата $F(b)-F(a)$. Потоа во **4. 2** видовме дека, ако $f(x)$ е непрекината и позитивна функција во (α,β) и $a,b\in(\alpha,\beta)$, $a<b$,тогаш $\int_a^b f(x)dx$ претставува плоштината P на фигурата ограничена со $y=f(x),x=a,x=b$ и $y=0$ (црт. 1).



Црт. 1



Црт. 2

Оваа геометриска интерпретација на определениот интеграл како и дефиницијата (во **4.1**) на поимот плоштина на рамнински ликови, сугерираат директна дефиниција на определениот интеграл. Имено, сегментот $[a,b]$, го делиме на n потсегменти $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$ (на црт. 2, имаме $n=6$), при што

$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$. Потоа, во секој сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, каде што $1 \le i \le n$, избираме точка ξ_i и го формираме следниов збир:

$$S_n = (x_1 - x_2) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Збирот S_n се интерпретира геометриски како плоштина на исшрафираната скалеста фигура, на црт. 2, а интуитивно е доволно јасно дека кога $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$, тогаш $S_n \to P$. Според тоа, при направените претпоставки, имаме:

$$\int_a^b f(x) dx = P = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Горната дискусија наведува на следната **дефиниција на поимот определен интеграл.**

Нека $f(x)$ е функција дефинирана на сегментот $[a,b]$ каде што $a < b$. Да го поделиме тој сегмент на n потсегменти:

$$[x_0, x_1], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

при што $n \ge 1$, $a = x_0$, $b = x_n$ и $x_{i-1} < x_i$, за секој $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Во секој од добиените потсегменти $[x_{i-1}, x_i]$ нека е избран број ξ_i, т.е. $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. Го формираме збирот:

$$S_n = S_n(x_0, x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{1)}$$

со

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \qquad (1)$$

каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. За S_n велиме дека е **интегрална сума** од $f(x)$ на $[a,b]$.

Фактот што при дадени $f(x)$, a,b и n, броевите $x_1,\dots,x_{n-1},\xi_1,\dots,\xi_n$, може да ги избереме на безброј многу начини го повлекува заклучокот дека интегралната сума S_n, во општ случај, не е еднозначно определена со n.

На секоја поделба $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$, на $[a,b]$ ѝ одговара n - ка $\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n$. Да го означиме со μ_n најголемиот од тие броеви, т.е.

$$\mu_n = \max\{\Delta x_i \mid i \in \{1,2,\dots,n\}\}. \tag{2}$$

За функцијата $f(x)$ велиме дека е **интеграбилна по Риман** на $[a,b]$ *акко секоја низа $S_1,S_2,\dots,S_n,S_{n+1},\dots$ од интегрални суми, таква што $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = 0$, е конвергентна, и притоа границата J на секоја таква низа од интегрални суми е иста.* Во тој случај, за J велиме дека е **риманов интеграл од $f(x)$ на $[a,b]$** и пишуваме:

$$J = Rim\int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Според тоа,

$$Rim\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{4}$$

Поимот определен интеграл, $\int_a^b f(x)dx$, што го воведовме во **1.3.** со помош на примитивна функција, за разлика од римановиот интеграл, можеме да го наречеме **примитивен определен интеграл** и, по потреба, да го означуваме со

$$Prim\int_a^b f(x)dx$$

---

[1] Натаму ќе ја користиме ознаката S_n, но треба да се има предвид дека, при дадени $f(x),a,b$ и n постојат безброј многу вредности на S_n што се добиваат при различни избори на $x_1,\dots,x_{n-1},\xi_1,\dots,\xi_n$

Од дискусијата што ја направивме во почетокот, следува дека треба да се очекува во случај кога постојат и двата интеграла:

$$Prim\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad Rim\int_a^b f(x)dx$$

тие да се еднакви. Точноста на таа претпоставка ќе ја покажеме во **5. 3.**, Т. 1 (ОТИС), а подолу ќе разгледаме неколку примери и ќе формулираме неколку својства за римановите интеграли. Притоа, ако не биде речено, наместо "$Rim\int_a^b f(x)dx$" ќе пишуваме "$\int_a^b f(x)dx$", а, во иста смисла, наместо "*интеграбилна по Риман*", ќе велиме "*интеграбилна*".

Теорема 1 (за интеграл од константа).

За секоја константа c, функцијата $f(x)=c$ е интеграбилна на секој сегмент $[a,b]$, $a<b$, и притоа:

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Доказ. За секоја поделба $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ на $[a,b]$ и секој избор на $\xi_1,...,\xi_n$, такви што $x_{i-1}\le \xi_i \le x_i$, имаме $S_n=c(b-a)$. □

Теорема 2 (за линеарност на римановиот интеграл).

Ако $f(x)$ и *$g(x)$ се интеграбилни функции на $[a,b]$, а c е константа, тогаш и $cf(x)$, $f(x)+g(x)$ се интеграбилни на $[a,b]$, и притоа се точни равенствата:*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \tag{5}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

Доказ. Равенствата (5) и (6) се непосредни последици од дефиницијата на $Rim\int_a^b f(x)dx$ (т.е. $\int_a^b f(x)dx$) и соодветните својства на граници на низи. □

Ќе разгледаме два примера на функции дефинирани на соодветен сегмент $[a,b]$, но не интеграбилни на $[a,b]$.

Пример 1. *Ќе покажеме дека функцијата* $f(x)$ *дефинирана со:* $f(0)=0,\ f(x)=\dfrac{1}{x}$ *за* $x\neq 0$, *не е интеграбилна на* $[-1,1]$.

Навистина, да претпоставиме дека сегментот $[-1,1]$ е поделен на $n=2m$ потсегменти $[x_{i-1},x_i]$, каде што $x_0=-1,\ x_i=-1+\dfrac{i}{m}$. Потоа да избереме броеви

$$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]=\left[-1+\frac{i-1}{m},-1+\frac{i}{m}\right]$$

на следниов начин:

$$\xi_i = x_{i-1} \quad \text{за} \quad i\in\{1,2,\dots,m\}\cup\{m+2,\dots,2m\},$$

а $\xi_{m+1}\in[0,1/m]$ сакаме да го избереме така што да биде $S_n>n$.

Воочуваме прво дека $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}=\dfrac{1}{m}$, како и дека: $x_m=0$, $x_i=-x_{2m-i}$, за секое $i\in\{0,1,\dots,m-1\}$. Од сето тоа следува дека:

$$S_n=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_{m-1}}+\frac{1}{\xi_{m+1}}+\frac{1}{x_{m+1}}+\dots+\frac{1}{x_{2m-1}}\right);$$

откако ќе се заменат $x_0=-1$ и $x_i=-1+\dfrac{i}{m}$, по средувањето ќе се добие:

$$S_n=\frac{1}{m}\left(-1+\frac{m}{1-m}+\frac{m}{2-m}+\dots+\frac{m}{-1}+0+\frac{1}{\xi_{m+1}}+\frac{m}{1}+\dots+\frac{m}{m-2}+\frac{m}{m-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\left(-1+\frac{1}{\xi_{m+1}}\right).$$

Да го избереме $\xi_{m+1} = \xi \left(< \frac{1}{m}\right)$, така што да биде: $S_n > n = 2m$, т.е.

$$\frac{1}{m}\left(-1+\frac{1}{\xi}\right) > 2m;$$

оттука:

$$\xi < \frac{1}{2m^2+1}.$$

Значи, ако $\xi_1,\ldots,\xi_m,\xi_{m+2},\ldots,\xi_{2m}$ ги определиме како што споменавме погоре, а ξ_{m+1} го избереме така што да биде $0 < \xi_{m+1} < \frac{1}{2m^2+1}$, ќе добиеме $S_n > n$, т.е. низата S_n ќе се стреми кон $+\infty$, и покрај тоа што $\Delta x_i = \frac{2}{n} \to 0$.

Пример 2. *Да покажеме дека функцијата од претходниот пример не е интеграбилна и на* $[0,1]$.

Тоа ќе го направиме работејќи слично како и погоре. Имено, за секој $n \geq 1$, сегментот [0,1] го делиме на n - делови $[x_0,x_1],\ldots,[x_{n-1},x_n]$, ставајќи $x_i = \frac{1}{n}$, па значи $\Delta x_i = \frac{1}{n}$; $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ ги избираме така што $\xi_i = \frac{i}{n} = x_i$ за $i \geq 2$, а $\xi_1 = \xi \in (x_0,x_1) = \left(0,\frac{1}{n}\right)$ го избираме сакајќи S_n да биде поголемо од n, пак за секој n. Лесно се проверува дека секој $\xi \in \left(0,\frac{1}{n^2}\right)$ го задоволува тој услов, па значи добиваме низа S_n што се стреми кон $+\infty$, и покрај тоа што $\Delta x_i = \frac{1}{n} \to 0$.

Со расудување слично како во претходните два примера се покажува и следново својство (Вежба 4).

Теорема 3 (за ограниченост на интеграбилни функции).

Секоја интеграбилна функција на $[a,b]$, *каде што* $a<b$, *е ограничена на* $[a,b]$. □

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 2**, работејќи слично како во пр. 1 - 2, да се покаже дека функцијата $f(x)$ не е интеграбилна на $[a,b]$.

1. $f(x)=\begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 1/\sqrt{-x}, & x<0 \end{cases}$ $a=-1, b=1.$

2. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 1/\sqrt{x}, & x>0, \end{cases}$ $a=0, b=1.$

3. Да се покаже дека во пр. 1 и 2, како и во претходните две вежби, би се добил ист резултат и во случајот кога $f(0)=c$, каде што c е произволна константа.

4.* Да се докаже теоремата за ограниченост на интеграбилните функции.

Упатство. Да се спроведе дискусија слична како во пр. 1 - 2.

5. Да се покаже дека функцијата на Дирихле не е интеграбилна на ниеден сегмент $[a,b], a<b$.

Упатство. Да се потсетиме дека функцијата на Дирихле е дефинирана со:

$$f(x)=1 \text{ за } x\in \mathbb{Q}, \quad f(x)=0 \text{ за } x\in \mathbb{R}\setminus \mathbb{Q}$$

За секој $n\geq 1$ и секоја поделба $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ на $[a,b]$ формираме интегрални суми S_n' и S_n'', така што ξ_i' е рационален број, а ξ_i'' ирационален, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш, добиваме:

$$S_n'=b-a, \quad S_n''=0,$$

од што ќе следува дека:

$$\lim S_n'=b-a\neq 0=\lim S_n''.$$

6.* Нека $f(x)=[x]$ (=цел број што не е поголем од x). Да се покаже дека $f(x)$ е интеграбилна на секој од сегментите: $[-1,1], [-1,0], [0,1], [-1,2], [0,2]$, и уште повеќе, дека се точни равенствата:

$$\int_0^1 [x]dx=0, \quad \int_0^2 [x]dx=1, \quad \int_{-1}^0 [x]dx=-1, \quad \int_{-1}^2 [x]dx=0.$$

7.* Да се покаже дека $[x]$ е интеграбилна на секој сегмент $[a,b], a<b$.

8. Дали ограниченоста на една функција е доволен услов за нејзината интеграбилност?

Упатство. Види, на пример, вежба 5.

9. Да се покаже дека поимот за интеграбилност не се менува ако се дозволи во низата $x_0, x_1, \ldots, x_n$ подел бени точки да се допушти равенството $x_i = x_{i+1}$, за некои $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ (при што се запазуваат равенствата $x_0 = a, x_n = b$).

5.2. ТЕОРЕМИ ЗА ИНТЕГРАБИЛНОСТА

Ќе докажеме уште четири својства во врска со интеграбилноста.

Теорема 1.

Ако секоја низа интегрални суми[1] S_n *од функцијата* $f(x)$ *на сегментот* $[a,b]$ $(a<b)$ *е конвергентна, тогаш* $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ. Нека S_n' и S_n'' се две низи интегрални суми од $f(x)$ на $[a,b]$ и нека $S_n' \to I'$ и $S_n'' \to I''$ кога $n \to \infty$. Тогаш низата S_n, дефинирана со:

$$S_{2m} = S_{2m}', \quad S_{2m-1} = S_{2m-1}''$$

е интегрална сума од $f(x)$ на $[a,b]$ и, според направената претпоставка, исто така, е конвергентна; нека I е нејзината граница. Од дефиницијата на S_n следува дека $I' = I = I''$. Според тоа, секоја низа интегрални суми S_n од $f(x)$ на $[a,b]$ конвергира кон ист број I, т.е. $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$.

Теорема 2 (за наследност на интеграбилноста).

Ако $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *и ако* $a \le c < d \le b$, *тогаш* $f(x)$ *е интеграбилна и на* $[c,d]$.

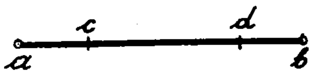
Доказ.* Да претпоставиме дека $a < c < d < b$. Нека S_n е низа интегрални суми од $f(x)$ на $[c,d]$.

---

[1] Под "низа интегрални суми S_n од $f(x)$ на $[a,b]$" овде и натаму ќе подразбираме дека: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$, каде што $\mu_n = \max\{\Delta x_i | i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$ подразбирајќи и дека $f(x)$ е дефинирана на $[a,b]$ (в. и (2) од разделот **5. 1**).

Потоа, нека S'_p, S'''_q се низи интегрални суми од $f(x)$ на $[a,c]$, $[d,b]$ соодветно. Ако ставиме:

$$S'''_{n+p+q} = S'_p + S_n + S''_q,$$



Црт. 1

добиваме низа интегрални суми од $f(x)$ на $[a,b]$. Низата S'''_m е конвергентна, па значи и кошиева. Од ова следува дека за секој $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, такви што за секои $m_1, m_2 \geq n_0$, при $\max \Delta x_i < \delta$, ќе имаме $|S'''_{m_1} - S'''_{m_2}| < \varepsilon$.

Да претпоставиме сега дека ε е даден позитивен број и дека $n_0, \delta > 0$ се со горните својства. Нека $n \geq n_0$, $k \geq 0$ и нека S'_p, S''_q, S_n (дефинирани погоре) се такви што $\max \Delta x_i < \delta$, за секоја од нив. Формираме интегрална сума S_{n+k} од $f(x)$ на $[c,d]$, така што и за неа да важи: $\max \Delta x_i < \delta$.

Тогаш: $S'''_{n+p+q+k} = S'_p + S_{n+p} + S''_q$, од што следува дека:

$$|S_{n+k} - S_n| = |S_{n+p+q+k} - S_{n+p+q}| < \varepsilon.$$

Според тоа, низата S_n е кошиева, па, значи, и конвергентна. Од сето тоа (ако се има предвид и Т.1) добиваме дека $f(x)$ е интеграбилна на $[c,d]$.

Во случајот $a = c < d < b$, би работеле на ист начин како и погоре, со тоа што сега би имале $S'''_{n+q} = S_n + S''_q$; слично и за $a < c < d = b$. □

Ќе ја докажеме и следнава:

Теорема 3 (адитивност на римановиот интеграл).

Нека $f(x)$ е дефинирана на сегментот $[a,b]$ и нека $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$. Тогаш, $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$ ако и само ако е интеграбилна на $[c_{i-1}, c_i]$ за секој $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

Во тој случај е точно равенството:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Доказ.* Јасно е дека е доволно да се докаже теоремата за $k=2$, имајќи ја притоа предвид и теоремата за наследност. Уште повеќе, доволно е да се докаже дека: ако $a<c<b$ и ако постојат интегралите $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$, тогаш постои и $\int_a^b f(x)dx$ и притоа е точно равенството:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

За таа цел, да претпоставиме дека S_n е низа интегрални суми од $f(x)$ на $[a,b]$. Формираме нови низи S'_p, S''_q од $f(x)$ на $[a,c]$, $[c,b]$, соодветно, на следниот начин

Нека S_n е добиена од $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Ако c е поделбена точка, т.е. $c=x_p$ за некој $p\in\{1,...,n-1\}$, тогаш ставаме:

$$S'_p = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\Delta x_i,\quad S''_q = \sum_{i=1}^{q} f(\xi_{p+1})\Delta x_{p+i}$$

каде што $p+q=n$, $S_n = S'_p + S''_q$.

Во случај, пак, c да не е поделбена точка, т.е. $c\neq x_i$ за секој i, тогаш постои $p\in\{1,...,n-1\}$, таков што $x_{p-1}<c<x_p$. Сега ги дефинираме

$$S'_p = \sum_{i=1}^{p-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(c)(c-x_{p-1}),$$

$$S''_q = f(c)(x_p-c)+\sum_{i=0}^{a} f(\xi_{p+i})\Delta x_{p+i+1}.$$

Така добиваме дека S'_p е низа интегрални суми од $f(x)$ на $[a,c]$, а S''_q на $[c,b]$. Според тоа, имаме:

$$\lim_{p\to\infty} S'_p = \int_a^c f(x)dx, \quad \lim_{q\to\infty} S''_q = \int_c^b f(x)dx$$

Од друга страна имаме:

$$S_n = S'_p + S''_q$$

или

$$S_n = S'_p + S''_q - f(c)(x_p - x_{p-1}),$$

од што следува дека:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{p\to\infty} S'_p + \lim_{p\to\infty} S''_p .$$

Според тоа, имајќи ја предвид и **Т. 1**, добиваме дека $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$, како и дека е точно равенството (2). □

На крајот, ќе ја докажеме следнава:

Теорема 4 (за интеграбилност на непрекинати функции).

Ако функцијата $f(x)$ *е непрекината на сегментот* $[a,b]$ $(a<b)$, *тогаш* $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ.* Од непрекинатоста на $f(x)$ следува дека $f(x)$ има најмала вредност m и најголема вредност M во $[a,b]$, а и дека постојат $c,d\in[a,b]$, такви што $m=f(c)$, $M=f(d)$ (теорема на Вајерштрас).

Да го поделиме сегментот на n делови: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Функцијата $f(x)$ е непрекината во секој од сегментите $[x_{i-1},x_i]$, па според тоа, за некои $c_i,d_i\in[x_{i-1},x_i]$, $m_i=f(c_i)$ ќе биде најмала вредност на $f(x)$, а $M_i=f(d_i)$ - најголема во сегментот $[x_{i-1},x_i]$.

Прво ќе го разгледаме случајот кога низите (S_n) се образувани со помош на специјални поделби на сегментот $[a,b]$.

Имено, низата поделби $\sigma_1,\sigma_2,\ldots$ се формира на следниов начин:

$$\sigma_1{:}a,\ b;\ \sigma_2{:}a,\ a+\frac{b-a}{2},\ b;\ \sigma_3{:}a,\ a+\frac{b-a}{4},\ a+\frac{b-a}{2},\ b$$

$$\sigma_4: a,\ a+\frac{b-a}{4},\ a+\frac{b-a}{2},\ a+\frac{3(b-a)}{4},\ b;$$

$$\sigma_5: a,\ a+\frac{b-a}{8},\ a+\frac{b-a}{4},\ a+\frac{b-a}{2},\ a+\frac{3(b-a)}{4},\ b;$$

....

Според тоа, ако сите потсегменти од σ_n, освен $[x_{k-1},x_k]$, останат исти, а фиксираниот потсегмент се подели на два еднакви дела, се добива поделбата σ_{n+1}. Потоа, σ_{n+2} се добива од σ_{n+1} на ист начин, со тоа што сега се дели потсегментот $[x_k,x_{k+1}]$. Значи:

$$\sigma_{n+1}: a=x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x',x_k,\dots,x_n=b,$$
$$\sigma_{n+2}: a=x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x',x_k,x'',x_{k+1},\dots,x_n=b,$$

каде што $2x'=x_{k-1}+x_k$, $2x''=x_k+x_{k+1}$. За $k=n$ се зема $2x''=x_0+x_1$, т.е. тогаш се дели $[x_0,x_1]$ наполу. Да го формираме сега збирот:

$$S_n=M_1(x_1-x_0)+\dots+M_{k-1}(x_{k-1}-x_{k-2})+M_k(x_k-x_{k-1})+\dots+M_n(x_n-x_{n-1});$$

тогаш имаме:

$$S_{n+1}=M_1(x_1-x_0)+\dots+M_{k-1}(x_{k-1}-x_{k-2})+M'(x'-x_{k-1})+$$
$$+M''(x_k-x')+\dots+M_n(x_n-x_{n-1}),$$

каде што M' е најголемата вредност на $f(x)$ во $[x_{k-1},x']$, а M'' - во $[x',x_k]$, па:

$$S_n-S_{n+1}=M_k(x_k-x'+x'-x_{k-1})-M'(x'-x_{k-1})-M''(x_k-x')=$$
$$=(M_k-M')(x'-x_{k-1})+(M_k-M'')(x_k-x').$$

Од $M',M''\le M_k$ и $x'-x_{k-1},x_k-x'>0$, имаме $S_n-S_{n+1}>0$, па значи низата (S_n) монотоно опаѓа (попрецизно: не расте). Јасно е пак дека $S_n\ge m(b-a)$, од што следува дека низата (S_n) е и ограничена, што значи дека таа е конвергентна.

Да претпоставиме дека $\overline{\sigma}_m: a=\overline{x}_0<\overline{x}_1<\dots<\overline{x}_m=b$ е произволна низа на делење, при што $\lim\limits_{m\to\infty}\max(\overline{x}_i-\overline{x}_{i-1})=0$. За секој $i=1,2,\dots$, да избереме по еден број $\xi_i\in[\overline{x}_{i-1},\overline{x}_i]$ и да го формираме збирот:

$$\overline{S}_m=f(\overline{\xi}_1)(\overline{x}_1-\overline{x}_0)+f(\overline{\xi}_2)(\overline{x}_2-\overline{x}_1)+\dots+f(\overline{\xi}_m)(\overline{x}_m-\overline{x}_{m-1}).$$

Ќе докажеме дека, ако $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $\overline{x}_k - \overline{x}_{k-1} = \Delta\overline{x}_k$ се доволно мали, тогаш $|S_n - \overline{S}_m| < \varepsilon$, каде што ε е однапред даден позитивен број.

За таа цел ќе ја разгледаме поделбата σ'_p, која се добива како "унија" од σ_n и $\overline{\sigma}_m$, т.е.

$$\sigma'_p : a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_p = b,$$

при што x'_j е некој x_i или x_k. (Притоа ќе имаме: $m, n \leq p \leq m + n$.)

Ја формираме соодветната сума:

$$S'_p = f(\xi'_1)(x'_1 - x'_0) + f(\xi'_2)(x'_2)(x'_2 - x'_1) + \ldots + f(\xi'_p)(x'_p - x'_{p-1}),$$

каде што $\xi'_j \in [x'_{j-1}, x'_j]$.

Ќе ги разгледаме сегментите $[x_{i-1}, x_i]$ од поделбата σ_n, како и соодветните производи $f(d_i)(x_i - x_{i-1})$. Поради тоа што x_{i-1}, x_i се поделбени точки и за σ'_p, ќе имаме: $x_{i-1} = x'_{j-1}$, $x_i = x'_{j+k-1}$ за некои j и k $(=1, 2, \ldots, p)$. Во тој случај можеме да напишеме:

$$f(d_i)(x_i - x_{i-1}) = f(d'_j)(x'_j - x'_{j-1}) + \ldots + f(d'_{j+k})(x'_{j+k-1} - x'_{j+k-2}),$$

каде што $d_i = d'_j = \ldots = d'_{j+k}$. Имајќи го тоа предвид, можеме да напишеме:

$$S_n - S'_p = \left[f(d'_1) - f(\xi'_1)\right](x'_1 - x'_0) + \ldots + \left[f(d'_j) - f(\xi'_j)\right](x'_j - x'_{j-1}) +$$
$$+ \ldots + \left[f(d'_j) - f(\xi'_p)\right](x'_p - x'_{p-1}).$$

Да земеме сега ε да е произволен позитивен реален број. Поради непрекинатоста на $f(x)$ во $[a,b]$, а според теоремата за униформна непрекинатост (**II. 5. 6**, Т.5), постои $\delta > 0$, таков што:

$$|\alpha - \beta| < \delta, \ \alpha, \beta \in [a,b] \ \Rightarrow \ |f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Да претпоставиме дека поделбите σ_n и $\overline{\sigma}_m$ се такви што $\Delta x_i, \Delta\overline{x}_k < \delta$. Тогаш ќе имаме и $\Delta x'_j = x'_j - x'_{j-1} < \delta$, а од тоа следува дека:

$$|S_n - S'_p| \leq |f(d'_1) - f(\xi'_1)| \cdot |x'_1 - x'_0| + \ldots + |f(d'_p) - f(\xi'_p)| \cdot |x'_p - x'_{p-1}| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_1' - x_0') + \ldots + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_p' - x_{p-1}') =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Од исти причини ќе имаме и $|\overline{S}_m - S_p'| < \frac{\varepsilon}{2}$, па значи и:

$$|\overline{S}_m - S_n| = |(\overline{S}_m - S_p') - (S_n - S_p')| < |\overline{S}_m - S_p'| + |S_n - S_p'| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што и сакавме да покажеме.

Сега, лесно ќе го комплетираме доказот на формулираната теорема. Нека

$$\lim_{n \to \infty} S_n = I.$$

Ако $\varepsilon > 0$, тогаш постои n_0, таков што $|I - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ за $n > n_0$. Од друга страна, можеме да сметаме дека е и $|\overline{S}_m - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ за доволно големи m, n и доволно мали $\Delta x_i, \Delta \overline{x}_k$, па ќе имаме:

$$|I - \overline{S}_m| = |(I - S_n) + (S_n - \overline{S}_m)| \le |I - S_n| + |\overline{S}_m - S_n| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Од тоа следува дека:

$$\lim_{m \to \infty} \overline{S}_m = I,$$

т.е. дека функцијата $f(x)$ е интеграбилна во сегментот $[a,b]$. □

Ќе разгледаме два примера.

Пример 1. *Функцијата* $f(x) = x$ *е непрекината на* $[0,1]$, *па значи* *постои интегралот* $I=\int_0^1 xdx$. *За да го определиме* I *ќе се раководиме од фактот што* $\lim_{n\to\infty} S_n = I$, *каде што* S_n *е која било низа интегрални суми од* $f(x)=x$ (*таква што* $\lim_{n\to\infty}\max_i \Delta x_i = 0$). *Ја формираме низата* S_n *на тој начин што сегментот* $[0,1]$ го делиме на n еднакви делови, т.е. $x_i=\frac{i}{n}$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, *а* ξ_i *го избираме така што* $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$. *Според тоа имаме:*

$$I=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

Значи, $\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$.

Пример 2. *Имајќи предвид дека* $f(x)=\frac{1}{x}$ *е непрекината на* $[1,2]$, *добиваме дека постои* $J=\int_1^2\frac{dx}{x}$, *како и дека*

$$J=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right). \tag{3}$$

(До тој резултат се доаѓа ако сегментот $[1,2]$ се подели на n еднакви делови, т.е. $x_i=1+\frac{i}{n}$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, а ξ_i се избере така што $\xi_i=x_i=1+\frac{i}{n}$.)

Но, границата (3) не ја имаме порано пресметано, па затоа ќе формираме друга низа интегрални суми, чија граница ќе бидеме во состојба да ја пресметаме. Имено, ќе земеме

$$x_i=q^i=\xi_i,\ q=\sqrt[n]{2}=2^{\frac{1}{n}},\ \text{па}\ x_i-x_{i-1}=q^{i-1}(q-1),\ \frac{1}{\xi_i}=\frac{q-1}{q},$$

$$J=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{q-1}{q}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2^{1/n}-1)}{2^{1/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/n}-1}{1/n}=\ln 2$$

при што го користевме резултатот $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Од сето тоа следува и:

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

До резултатите добиени во последните два примера, би можеле да дојдеме многу полесно со помош на примитивни функции, а имено:

$$Prim\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2},\quad Prim\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^2=\ln 2.$$

Во наредниот раздел ќе покажеме дека во случај на непрекинати функции нема разлика меѓу $Rim\int_a^b f(x)dx$ и $\Pr im\int_a^b f(x)dx$, но пред докажувањето на тој резултат не сакавме да го користитиме. При изработувањето на вежбата 3, овој резултат да се користи за "откривањето" на вредноста на $J=\int_a^b f(x)dx$, а потоа да се покаже дека J е граница од соодветна низа интегрални суми.

ВЕЖБИ

1. Нека функциите $F(x)$ и $f(x)$ се дефинирани со: $F(0)=f(0)=0$ и $F(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$, $f(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ за $x\neq 0$. Да се покаже дека $F'(x)=f(x)$ за секој $x\in\mathbb{R}$, како и дека $f(x)$ не е интеграбилна на ниеден сегмент $[a,b]$, таков што $0\in[a,b]$.

Упатство. Равенството $F'(x)=f(x)$ за $x\neq 0$; се покажува со помош на правилата за диференцирање на елементарни функции, а $F'(0)=0$ - користејќи ја дефиницијата на поимот извод. Потоа, лесно се покажува дека:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty,$$

од што следува дека $f(x)$ е неограничена на $[a,b]$, ако $0\in[a,b]$, па значи (според Т. 3 од **5. 1**) таа не е интеграбилна на $[a,b]$.

2. Да се даде пример на функција $f(x)$ интеграбилна на $[a,b]$, но да не постои примитивна функција $F(x)$ за $f(x)$ во (a,b).

Упатство. На пример, да се покаже дека не постои функција $F(x)$ што е примитивна за $[x]$ во $(-1,1)$. (Види и пример 2 од **5. 4**.)

3. Да се пресметаат интегралите: а) $\int_0^1 x^2dx$; б) $\int_0^1 e^x dx$.

4. Нека $f(x)$ е интеграбилна на сегментот $[-a,a]$. Да се докаже дека:

а) ако $f(x)$ е непарна, тогаш $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$;

б) ако $f(x)$ е парна, тогаш $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{-a}^{a} f(x)dx$.

Упатство. Сегментот $[-a,a]$ да се подели на $2m$ еднакви потсегменти, ставајќи $\xi_i=-\xi_{2m-i+1}$ за $i\leq m$.

5. Нека $f(x)$ е периодична функција со период ω и интеграбилна во сегментот $[0,\omega]$. Да се покаже дека:

а) $f(x)$ е интеграбилна на секој сегмент $[a,a+\omega]$.

б) $\int_0^{3\omega} f(x)dx=3\int_0^{\omega} f(x)dx$.

5. 3. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА ИНТЕГРАЛНОТО СМЕТАЊЕ

Од дискусијата што ја направивме пред дефиницијата на интеграбилноста во смисла на Риман, следува дека треба да се очекува, во случај кога постојат и двата интеграли $Prim\int_a^b f(x)dx$, $Rim\int_a^b f(x)dx$, тие да се еднакви.

Дека тоа е точно се гледа од следнава:

Теорема 1. (ОТИС: основна теорема на интегралното сметање).

Нека $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ и нека $f(x)$ е функциаj со следниве својства:

i) постои римановиот интеграл $Rim\int_a^b f(x)dx$;

ii) Постои примитивна функција $F(x)$ од $f(x)$ во (a,b), при што $F(x)$ е и непрекината на $[a,b]$.[1]

Тогаш е точно равенството:

$$Rim\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a), \tag{1}$$

т.е.

$$Rim\int_a^b f(x)dx = Prim\int_a^b f(x)dx. \tag{1'}$$

Доказ. Ако $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, тогаш десната страна од (1) може да се напише во обликот:

$$F(b)-F(a) = F(x_n)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\ldots+$$

---

[1] Да забележиме дека непрекинатоста на $F(x)$ во (a,b) следува од фактот што постои $F'(x)=f(x)$ за секој $x\in(a,b)$; според тоа условот "$F(x)$ е непрекината на $[a,b]$" може да се замени со системот равенства $F(a)=\lim_{x\to a^+}F(x)$, $F(b)=\lim_{x\to b^-}F(x)$.

$$+\ldots+F(x_2)-F(x_1)-F(x_1)-F(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right).$$

Според теоремата на Лагранж (**II. 3. 3**), за секој $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ постои, $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, таков што:

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Според тоа, имаме:

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \tag{2}$$

за некои $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Со други зборови, за секој $n\geq 1$, и секоја поделба $a=x_0<x_1<$ $<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ на $[a,b]$, постои интегрална сума S_n, таква што $S_n=F(b)-F(a)$. Избирајќи ја низата поделби така што да биде $\lim\limits_{n\to\infty}\max\Delta x_i=0$, добиваме:

$$Rim\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}S_n=F(b)-F(a),$$

т.е. го добиваме равенството (1), со што го комплетиравме доказот. □

Равенството (1) е познато и како **Њутн - Лајбницова формула**, со тоа што на левата страна стои $\int_a^b f(x)dx$, наместо $Rim\int_a^b f(x)dx$. Во врска со ова, напомнуваме дека, како и во претходните два раздела ќе пишуваме "$\int_a^b f(x)dx$" наместо "$Rim\int_a^b f(x)dx$", а ќе велиме "интеграбилност" наместо "интеграбилност по Риман".

Според теоремата за интеграбилност на непрекинатите функции (Т. 4 од

5. 2), ако $f(x)$ е непрекината на $[a,b]$, тогаш условот (i) е исполнет, а во овој дел (теорема 3) ќе покажеме дека е исполнет и условот (ii). Но, и пред докажувањето на тоа својство, користејќи ги правилата за "наоѓање на неопределени интеграли", можеме за конкретна непрекината функција да најдеме примитивна функција $F(x)$, па интегралот $\int_a^b f(x)dx$ да го пресметаме со помош на (1), т.е. :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1''}$$

Така би можеле да ги пресметаме интегралите од примерите 1 и 2, како и вежбата 3 од разделот 5. 2. Значи, немаме потреба од пресметување на граници од, обично, сложени интегрални суми. Напротив, сега можеме определените интеграли да ги искористиме за определување на некои такви граници, како што покажува следниов:

Пример 1. *Да ја пресметаме границата на низата*

$$S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{2n^2}.$$

за таа цел, ќе се обидеме да определиме функција $f(x)$ и сегмент $[a,b]$, така што S_n да биде интегрална сума од $f(x)$ на $[a,b]$. Претставувајќи ја сумата S_n во облик:

$$S_n = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2},$$

добиваме дека:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

каде што $a = 0$, $x_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

при што е искористен фактот дека $arctgx$ е примитивна функција за $\frac{1}{1+x^2}$, и тоа во секој интервал (α,β).

Понатаму, во овој дел, ќе испитуваме својства на интеграли (риманови) од непрекинати функции.

Прво, ќе ја докажеме следнава:

Теорема 2. (за средна вредност на определен интеграл).

Ако функцијата $f(x)$ *е непрекината на сегментот* $[a,b]$, $a<b$, *тогаш постои број* $\xi\in[a,b]$, *таков што*

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi). \tag{3}$$

Доказ. Поради непрекинатоста од $f(x)$ на $[a,b]$, постојат $x',x''\in[a,b]$, такви што $m=f(x')$ е најмалата, а $M=f(x'')$ најголемата вредност од $f(x)$ на $[a,b]$. Нека

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

е која било интегрална сума од $f(x)$ на $[a,b]$. Поради $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$, имаме $m\Delta x_i\le f(\xi_i)\Delta x_i\le M\cdot\Delta x_i$, од што следува:

$$m(b-a)=\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i\le S_n\le\sum_{i=1}^{n} M\cdot\Delta x_i=M(b-a). \tag{4}$$

Имајќи го предвид фактот дека $\int_a^b f(x)dx$ е граница на соодветни низи S_n од интегрални суми, од (4) добиваме:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

т.е.

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M. \tag{5}$$

Потоа, пак, поради непрекинатоста на $f(x)$ (според теоремата за меѓувредност кај непрекината функција, Т. 3, I. 5. 6), од (5) следува дека постои $\xi \in [a,b]$, такво што:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \tag{3'}$$

т.е. точно е равенството (3). □

Бројот $f(\xi)$ определен со (3'), т.е. со (3), се вика **средна вредност** од функцијата $f(x)$ на сегментот $[a,b]$.

Пред да испитаме уште некои својства на определен интеграл од непрекинати функции, ќе го прошириме поимот определен (риманов) интеграл. Имено, ако $a<b$ и ако $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$, тогаш интегралот $\int_b^a f(x)dx$ го дефинираме со:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx. \tag{6}$$

Потоа, ако $f(x)$ е дефинирана во точката a, интегралот $\int_a^a f(x)dx$ се определува со:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{7}$$

На читателот му препуштаме да докаже дека теоремата за средна вредност на определен интеграл важи и кога $a \geq b$ (вежба 1). Исто така, може да се покаже дека сите резултати добиени за риманови интеграли на сегмент $[a,b]$, за $a<b$ (на пример: Т. 1 - Т. 3 од **5. 1**, Т. 3 од **5. 2** и формулата (1)) важат и за

интеграли од облик $\int_a^b f(x)dx$, за $a \geq b$.

Да се вратиме сега на интеграли од непрекинати функции. Пред сѐ, да претпоставиме дека $f(x)$ е интеграбилна функција на сегментот $[a,b]$, каде што $a<b$. Ако $x \in (a,b)$, според Т. 2 од **5. 2**, $f(x)$ е интеграбилна на сегментот $[a,x]$, па, според тоа, за секој $x \in (a,b)$, постои еднозначно определен број:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt. \tag{8}$$

Значи функцијата $F(x)$ е дефинирана во интервалот (a,b). Дефинирајќи

$F(a)=0$, $F(b)=\int_a^b f(t)dt$, добиваме дека $F(x)$ е дефинирана на сегментот $[a,b]$. Во врска со така дефинираната функција $F(x)$, ќе ја докажеме следнава:

Теорема 3 (втора ОТИС).

Ако $f(x)$ е непрекината функција на $[a,b]$, тогаш функцијата $F(x)$ дефинирана со (8) е примитивна за $f(x)$ во (a,b) и е непрекината на $[a,b]$.

Доказ. Од (8), ако се има предвид и Т. 3 од **5. 2**, следува дека:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_c^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

за секои x, Δx, такви што $x, \Delta x \in [a,b]$.

Применувајќи ја теоремата за средна вредност (т.е. (3)), од последното равенство добиваме:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=f(\xi)\Delta x,$$

т.е.

$$f(\xi)=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \tag{9}$$

за некој $\xi \in [x, x+\Delta x]$, ако $\Delta x > 0$, односно $\xi \in [x+\Delta x, x]$, ако $\Delta x < 0$. Имајќи ја предвид непрекинатоста на $f(x)$, и фактот што $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \xi = x$, добиваме дека:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=F'(x),$$

т.е. дека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ во (a,b).

За да го комплетираме доказот треба да докажеме уште дека:

$$\lim_{x\to a^+} F(x)=0, \quad \lim_{x\to b^-} F(x)=\int_a^b f(x)dx. \tag{10}$$

Првата граница е директна последица од теоремата за средна вредност, бидејќи, според неа,

$$F(x)=(x-a)f(\xi),$$

за некој $\xi \in [a,x]$ од што следува и дека $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)=0$.

Што се однесува до втората граница, за секој $x \in [a,b]$, имаме:

$$\int_a^b f(t)dt - F(x) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_x^b f(t)dt = (b-x)f(\xi),$$

за некој $\xi \in [x,b]$, од што и следува заклучокот дека:

$$\lim_{x\to b}\left(\int_a^b f(t)dt - F(x)\right) = 0,$$

т.е. точноста на второто равенство од (10). □

Како последица од втората ОТИС ја добиваме точноста и на следнава:

Теорема 4 (за егзистенција на примитивни функции од непрекинати функции).

Ако $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$, тогаш постои функција $F(x)$ што е примитивна за $f(x)$ на $[a,b]$. □

┌** Како примена од последниот резултат ќе укажеме на една можност за дефинирање на функцијата $\ln x$, претпоставувајќи дека "тоа не е претходно направено". Имено, функцијата $1/x$ е непрекината во секој сегмент $[a,b]$, каде што $0<a<b$, па значи постои функција $F(x)$, таква што $F'(x)=1/x$, за секој $x>0$, т.е. $F(x)$ е примитивна за $1/x$ во $(0,+\infty)$. Такви функции има безброј многу, но само една од нив е таква што $F(1)=0$, па нека таа функција ја означиме со $\ln x$. Според тоа: $\ln x$ е дефинирана за секој $x>0$, $\ln 1=0$ и $(\ln x)'=1/x$. Како последица, ќе докажеме уште едно (инаку добро познато) својство на $\ln x$.

Имено, ќе покажеме дека $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ за секој $a,b>0$. Навистина, да ја разгледаме функцијата $G(x)=\ln(ax)$. Според правилото за извод на сложена функција, имаме:

$$G'(x)=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x},$$

па значи, $G(x)=\ln x+C$, за некоја константа C. Ставајќи $x=1$ во последното равенство добиваме: $\ln a=\ln 1+C$, т.е. $C=\ln a$. И, на крајот, за $x=b$, добиваме $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. **┘

Досега добиените резултати во врска со интеграбилноста на функции, ги сугерираат следните три забелешки.

Забелешка 1. Ако $f(x)$ е непрекината на еден сегмент $[a,b]$, тогаш таа е интеграбилна и во римановa смисла и во смисла на нараснување на примитивни функции. Уште повеќе, двата вида интеграли

$$Rim\int_a^b f(x)dx \text{ и } Prim\int_a^b f(x)dx$$

се еднакви. Значи, за непрекинати функции, всушност, имаме са-мо еден вид неопределени интеграли. Според тоа, сите својства за примитив-ните определени интеграли, докажани во **1. 3**, важат и за риманови интеграли од непрекинати функции.

Треба, сепак, да се спомене дека постојат функции што имаат примитивни функции на даден сегмент $[a,b]$, но не се интеграбилни по Риман на $[a,b]$, (Вежба 1 од **5. 2**). И обратно, една функција интеграбилна по Риман на $[a,b]$, не мора да има примитивна функција на $[a,b]$, (Вежба 6). Поради ова, се наложува задачата да се докажат соодветни теореми, какви што се, на пример, формулата за делумна интеграција или методот за интегрирање со замена, специјално за риманови интеграли, но ние нема тоа да го направиме овде, туку го упатуваме читателот, на пример, на Б. Л. Рождественский, гл. VII, §8, стр. 206 - 210, [10].

Забелешка 2. Од крајот на деветнаесеттиот век теоријата на интегрирањето се има развиено во повеќе насоки, но намената на книгава не ни дозволува да направиме поширок осврт на оваа теорија.

Забелешка 3. Поимот за несвојствен (примитивен) определен интеграл, што го дефиниравме во **1. 3**, на ист начин се пренесува и за случај на риманови (а и кој било друг вид) интеграли. Всушност, овој метод на "додефинирање" на еден поим е специјален случај од "додефинирање на функција" во дадена точка или за $x=\infty$. Така, на пример, функцијата $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ не е дефинирана за $x=1$, но, поради $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{2}{3}$, ставајќи $f(1)=\dfrac{2}{3}$ добиваме функција што е непрекината во $x=1$. Во иста смисла, пишувајќи $f(+\infty)=1=f(-\infty)$, сакаме да истакнеме дека $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Да претпоставиме, сега, дека a е реален број, а b реален број таков што $a<b$ или $b=+\infty$. Нека функцијата $f(x)$ е интеграбилна на секој сегмент $[a,t]$, каде што $a<t<b$, но (ако b е реален број) не е интеграбилна на $[a,b]$. Тогаш, функцијата:

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

е дефинирана за секој t таков што $a<t<b$. Ако постои (конечна) граница $B=\lim\limits_{t\to b^-} F(t)$ (притоа, $(+\infty)^- = +\infty$), тогаш велиме дека B е **вредноста на несвојствениот интеграл** $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx, \tag{11}$$

Велиме, исто така, и дека интегралот од левата страна на (11) е **конвергентен**; во иста смисла, ако границата на десната страна од (11) не постои (или е бесконечна), за интегралот од левата страна велиме дека е **дивергентен**. На сличен начин се дефинира левата страна од (11) и кога $f(x)$ не е интеграбилна на $[a,b]$, но е интеграбилна на секој сегмент $[t,b]$, за $a<t<b$; притоа се допушта да биде и $a=-\infty$.

Да претпоставиме дека $f(x)$ е интеграбилна на секој сегмент $[c,d]$, каде $a<c<d<b$, при што се допушта да биде $a=-\infty$, а и $b=+\infty$, но, $f(x)$ не е интеграбилна на (a,b) (ни во "својствена" ни во "несвојствона" смисла). Тогаш, по дефиниција се зема да е точно равенството:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{12}$$

каде што c е реален број, таков што $a<c<b$; притоа, се претпоставува дека и двата интеграли од десната страна на (12) постојат(како "својствени", или "несвојствени"). На читателот му препуштаме да покаже дека резултатот не зависи од изборот на c.

И, на крајот, ако $a=c_0<c_1<\ldots<c_k=b$ и $f(x)$ е интеграбилна (во својствена или несвојствена смисла) во секој сегмент $[c_{i-1},c_i]$, тогаш се зема, по дефиниција, да е точно равенството:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k}\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx, \tag{13}$$

т.е. левата страна од тоа равенство се дефинира со помош на десната.

Со оглед на тоа што тука, под "интеграбилност" подразбираме "интеграбилност по Риман", соодветните несвојствени интеграли се **"риманови несвојствени интеграли"**. Читателот лесно може да провери дека сите дефиниции, дадени овде, се во согласност со порано дадените дефиниции за "примитивни несвојствени интеграли". Како што ќе видиме во вежбите **5** и **6**, еден интеграл може да биде "својствен" во риманова смисла, а "несвојствен" во примитивна смисла, и обратно.

ВЕЖБИ

1. Формулирај ја и докажи ја теоремата за средна вредност, т.е. Т. 2, и за $b \leq a$. (Спроведи слична дискусија и кај Т. 1 и Т. 2 од **5. 1** и Т. 3 од **5. 2**.)

2. Докажи ја Теоремата за средна вредност со помош на втората ОТИС.

Да се пресметаат границите од следниве суми, претставувајќи ги како интегрални суми на соодветни функции.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \sin\frac{1}{n}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}}$.

5. Да се покаже дека сите резултати (примери **5** - **9**, вежби 10 - 17) од **1. 3** важат и за несвојствени риманови интеграли.

6. Да се пресмета несвојствениот риманов интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx,$$

каде што $f(0)=0$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$, за $x\neq 0$. Дали тој интеграл е несвојствен и како примитивен? Да се споредат резултатите.

Упатство. Погледни го резултатот на вежбата 1 од **5. 1**.

7. Да се покаже дека интегралот $\int_0^2 [x]dx$ е несвојствен како примитивен интеграл, но дека $[x]$ е интеграбилна по Риман на $[0,2]$. Да се споредат резултатите.

8. Да се покаже дека, ако постои $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и ако $a<c<+\infty$, тогаш постои и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$, и дека притоа:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Упатство. Ако $c<t$, тогаш:

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^t f(x)dx, \text{ па}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_c^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\int_a^t f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right] = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx.$$

9. Да се формулира и докаже сличен резултат како во претходната вежба, за несвојствен интеграл од облик $\int_a^b f(x)dx$, каде што b е реален број, а $f(x)$ е интеграбилна на секој сегмент $[c,b]$ за $a<c<b$, но не и на $[a,b]$.

10. Да се покаже дека:

1) Левата страна од (12) не зависи од изборот на c.

2) Ако левата страна од (11) е конвергентен несвојствен интеграл, тогаш е точно и равенството (12), за секој $c \in (a,b)$.

11.* Да се докажат следниве својства на функцијата $\ln x$.

1) $\ln x$ расте (строго) во интервалот $(0,+\infty)$.

2) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, за секои $a,b>0$.

3) $\ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$; $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$.

4) $\ln x^n = n\ln x$, за секој цел n и позитивен реален x.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Упатство. Ако се стави $x=2^n$, се добива $\ln x = n\ln 2 \to +\infty$ за $n\to+\infty$; ако x не е степен од 2, тогаш, поради $x\to+\infty$, за кој било природен број n, постои x таков што $x>2^n$, па $\ln x > n\ln 2$.

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Упатство. Да се стави $x=\frac{1}{t}$ и да се искористи 4).

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

Упатство. Без лопиталово правило, ако се разгледа функцијата $g(x)=\ln x-2\sqrt{x}$; $g'(x)=(1/x)-1/\sqrt{x}=(1-\sqrt{x})/x<0$ за $x>1$; значи, $g(x)$ опаѓа за $x>1$; $g(1)=0-2\sqrt{1}=-2<0$; значи, $g(x)<0$ за $x>1$. Од тоа следува дека $\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x}<0$, т.е. $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ за $x>1$. Според тоа, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

8) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$.

5. 4. УШТЕ НЕКОЛКУ СВОЈСТВА НА РИМАНОВИОТ ИНТЕГРАЛ

Ќе изнесеме овде уште неколку својства во врска со поимот интеграбилност (по Риман).

Теорема 1. *Ако функцијата $f(x)$ е дефинирана и ограничена на сегментот $[a,b]$ и ако е непрекината на отворениот интервал (a,b), тогаш $f(x)$ е интеграбилна на сегментот $[a,b]$. Покрај тоа, точни се равенствата:*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx=\lim_{\delta\to0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx=\lim_{\delta\to0}\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)dx \qquad (1)$$

Доказ. Нека ε е даден позитивен реален број. Поради ограниченоста на $f(x)$, постои позитивен реален број M, таков што $|f(x)|<M$. Да разгледаме една интегрална сума на $f(x)$:

$$S_n=(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\ldots+(b-x_{n-1})f(\xi_n)$$

при што претпоставуваме дека должините на потсегментите $[x_{k-1},x_k]$ се доволно мали. Нека δ е позитивен реален број, таков што:

$$\delta<\frac{b-a}{4} \quad \text{и} \quad \delta<\frac{\varepsilon}{8M} \qquad (2)$$

Ако ставиме $a_1 = a+\delta$, $b_1 = b-\delta$ и ако $a_1 \in [x_{r-1}, x_r]$, $b_1 \in [x_{s-1}, x_s]$, тогаш S_n може да го претставиме во облик:

$$S_n = (x_1 - a)f(\xi_1) + ... + (x_{r-1} - x_{r-2})f(\xi_{r-1}) + (a_1 - x_{r-1})f(\xi_r) +$$
$$+(x_r - a_1)f(\xi_r) + (x_{r+1} - x_r)f(\xi_{r+1}) + ... + (b_1 - x_{s-1})f(\xi_s) +$$
$$+(x_s - b_1)f(\xi_s) + ... + (b - x_{n-1})f(\xi_n).$$

Формирајќи ја сумата

$$S_n' = (x_r - a_1)f(\xi_r) + (x_{r+1} - x_r)f(\xi_{r+1}) + ... + (b_1 - x_{s-1})f(\xi_s),$$

имаме:

$$\left|S_n - S_n'\right| < M(x_1 - a) + M(x_2 - x_1) + ... + M(a_1 - x_{r-1}) +$$
$$+M(x_s - b_1) + ... + (b - x_{n-1})M = 2\delta M,$$

па според (2) добиваме:

$$\left|S_n - S_n'\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a_1, b_1]$, па значи и интеграбилна во тој сегмент, од што следува дека можеме да го претпоставиме неравенството:

$$\left|S_n' - \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Користејќи ги последните две неравенства, добиваме:

$$\left|S_n - \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx\right| \le \left|S_n - S_n'\right| + \left|S_n' - \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ако k е природен број, тогаш ќе важи неравенството

$$\left|S_{n+k} - \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

така што добиваме:

$$|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon.$$

Од последното неравенство, според критериумот на Коши, заклучуваме дека низата S_n е конвергентна, па значи добиваме дека $f(x)$ е интеграбилна на сегментот $[a,b]$. Од горните неравенства, ако се има предвид дека може да се претпостави и неравенството:

$$\left|\int_a^b f(x)dx-S_n\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

добиваме:

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)dx\right|<\varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Ако во горните расудувања ставевме $a_1=a$, $b_1=b-\delta$, или $a_1=a+\delta$, $b_1=b$, на потполн ист начин ќе добиевме дека се точни и другите две равенства од (1), со што би го комплетирале доказот на теоремата. □

Теорема 2. *Ако $f(x)$ е дефинирана и ограничена во сегментот $[a,b]$, и ако има конечно многу прекини во $[a,b]$, тогаш $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$.*

Доказ. Ако $f(x)$ нема прекини во (a,b), точноста следува од Т. 1. Затоа, да претпоставиме дека $f(x)$ има k различни прекини $c_1,c_2,\ldots,c_k$ $(c_{\nu-1}<c_\nu)$ во интервалот (a,b). Според Т. 1, $f(x)$ е интеграбилна во секој од потсегментите $[a,c_1],[c_1,c_2],\ldots,[c_k,b]$, а од тоа (според Т. 3 од **5. 2**) добиваме дека $f(x)$ е интеграбилна и на $[a,b]$, при што:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\ldots+\int_{c_k}^{b} f(x)dx. \qquad (3)$$

Со тоа теоремата е докажана. □

Забелешка 1. Од теоремата 1 следува, на пример, дека:

$$\int_1^2 [x]dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^{2-\delta}[x]dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^{2-\delta}dx=\lim_{x\to 0}(1-2\delta)=1.$$

Од друга страна, може да се уочи и дека десната страна од (1) може да се смета за дефиниција на левата страна, што во случајот е несвојствен примитивен интеграл, па добиваме дека тој несвојствен примитивен интеграл се совпаѓа со вредноста наримановиот интеграл. Теоремата **2** кажува дека истото важи и за случај кога $f(x)$ има конечно многу прекини во $[a,b]$. (Да се види и вежба 6 од **5. 3.**)

Теорема 3. *Ако* $f(x)$ *е инт̄еграбилна на* $[a,b]$, *т̄оѓаш функцијат̄а* $g(x)$, *одредена со:*

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt, \tag{4}$$

е неӣрекинат̄а на $[a,b]$.

Доказ. Дека $g(x)$ е дефинирана на $[a,b]$ следува од претходната теорема; за $x=a$, според (3) имаме $g(x)=0$. Според Т. 3 од **5. 1**, $f(x)$ е ограничена на $[a,b]$; нека $|f(x)|<M$ за $x\in[a,b]$. Од тоа следува:

$$|g(x+\Delta x)-g(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|<M|\Delta x|, \tag{5}$$

бидејќи за секоја интегрална сума S_n од $f(x)$ во $[a_1,b_1]\subseteq[a,b]$ имаме:

$$|S_n|\leq\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|\leq M\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=M(b_1-a_1).$$

Од (5) следува дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$, т.е. дека $g(x)$ е непрекината на $[a,b]$. □

Ако се искористат последните теореми, лесно се покажува дека:

Теорема 4. *Ако* $f(x)$ *е инт̄еграбилна функција на сеѓмент̄от* $[a,b]$, *т̄оѓаш се т̄очни равенст̄ват̄а (1).* □

На крајот да споменеме едно својство без доказ[1].

[1] Доказ на оваа теорема може да се најде, на пример, во Немицкии, стр. 388, [7]

Теорема 5. *Ако* $f(x)$ *е монотона функција на сегментот* $[a,b]$, *тогаш таа е интеграбилна на тој сегмент.* □

Ќе изнесеме сега еден пример од кој ќе следува дека функцијата $g(x)$, определена со (4), не мора да биде диференцијабилна во секоја точка.

Пример 1. *Да ја разгледаме функцијата* $g(x)=\int_0^x [t]dt$ *каде што* $[x]$ *е најголемиот цел број што не е поголем од* x (*графикот е претставен во* **I. 2. 2**).

Имаме:

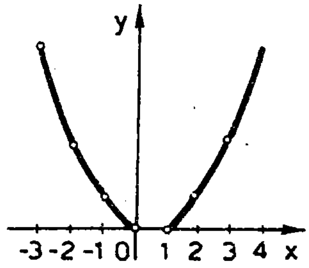
$g(x)=0$ за $x\in[0,1]$,

$$g(x)=\int_1^x dx = x-1 \text{ за } x\in[1,2]$$

и, поопшто,

$$g(x)=\frac{k(k-1)}{2}+k(x-k)$$

за $x\in[k,k+1]$,



Црт. 1.

каде што k е произволен цел број. Според тоа, графикот на функцијата $g(x)$ ќе биде како на црт. 1. Од графикот гледаме дека оваа функција нема извод кога аргументот x е цел број. (Види и вежба **2** од **5. 2**.)

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 4** да се покаже дека дадената функција е интеграбилна во секој сегмент $[a,b]$. (Притоа, $[x]$ е најголемиот цел број што не е поголем од x.)

1. $[x]$. **2.** $x[x]$. **3.** $\left[\sqrt[3]{x^2}\right]$. **4.** $\left[2^x-4\right]$.

Упатство. Да се примени Т. 1.

Во задачите **5 - 8** да се пресмета дадениот интеграл.

5. $\int_1^5 [x]dx$. **6.** $\int_1^5 x[x]dx$.

7. $\int_1^5 \left[\sqrt[3]{x^2}\right] dx$ **8.*** $I = \int_1^5 \left[2^x - 4\right] dx$

Упат. Да се примени Т. 2 и равенството (3).

9. Дали равенството (11) од 5. 3 е точно и во случај кога $b < +\infty$, а $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$?

Упат. Види ја Т. 3.

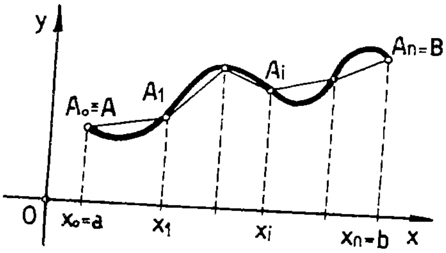
III. 6. УШТЕ НЕКОИ ПРАШАЊА ВО ВРСКА СО ОПРЕДЕЛЕНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

6. 1. ПРИМЕНА НА РИМАНОВИОТ ИНТЕГРАЛ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ ДОЛЖИНА НА ЛАК

Како мотив за воведување на поимот риманов интеграл ни послужи формулата за пресметување плоштина (во **4. 2**) и дефиницијата за плоштина на рамнински лик (во **4. 1**). Во **4. 1.** е дадена дефиниција и за должина на лак на рамнинска крива, но таа дефиниција не ја искористивме во **4. 5.**, бидејќи методот употребен таму, користи други средства.

Овде ќе дадеме доказ на формулата за должина на лак на рамнинска крива. При претпоставките што ќе ги направиме за функцијата чиј график е дадената крива, нема разлика меѓу римановиот и примитивниот интеграл, па тој ќе биде прецизен доказ и на формулата (3) од **4. 5.** (Формулата (4) од **4. 5**, пак, е специјален случај од соодветна формула за плоштини на тела, што ќе биде докажана во третата книга.)

Да претпоставиме дека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна на $[a,b]$, а и, уште повеќе, $f'(x)$ е непрекината функција на $[a,b]$. Сакаме да го пресметаме лакот s на кривата $y = f(x)$ што се наоѓа меѓу точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. За таа цел го делиме сегментот $[a,b]$ на n делови $a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n < b$ (на црт. 1 имаме $n = 4$). Така ја добиваме искршената линија $A_0A_1 \ldots A_n$ од отсечките $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$. Го формираме збирот:



Црт. 1.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{i-1}A_i},$$

од должините на сите тие отсечки. Велиме дека лакот на кривата $y = f(x)$ меѓу точките A и B е **измерлив**[1]) акко за секоја низа поделби $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$, при претпоставката:

$$\lim_{n\to\infty} \max_i \overline{A_{i-1}A_i} = 0, \tag{1}$$

постои границата $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$. На потполно ист начин како и Т. 1 од **5. 2.** се покажува дека тогаш границата s не зависи од начинот на делењето на лакот AB, при претпоставка дека е исполнет условот (1). Тогаш по дефиниција, велиме дека s е должина на лакот AB.

Ќе покажеме дека:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{2}$$

За таа цел, ја пресметуваме прво, должината на отсечката $\overline{A_{i-1}A_i}$, а имено:

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Според теоремата на Лагранж, за секој $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, постои $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ такво што

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

па значи

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i,$$

---

1) Види и **4. 1.**

т.е.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i ,$$

од што следува дека

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2} dx ,$$

т.е. точноста на (2).

6. 2. ДВЕ ПРИМЕНИ ВО ФИЗИКАТА

Определените интеграли имаат многу примени и надвор од геометријата, во повеќе научни области. Овде ќе спомeнеме две примени во физиката.

I. **Пат и брзина.** Ако едно тело се движи праволиниски со брзина $v = v(t)$, којашто е дадена како функција од времето, тогаш изминатиот пат s од моментот t_1 до t_2 $(t_1 < t_2)$ се определува со формулата:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt .$$

Во случај, пак, да е дадено забрзувањето $w(t)$, тогаш ќе имаме:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t w(t) dt ,$$

каде што v_0 е почетната брзина.

II. **Работа на сила.** Ако една променлива сила $F = F(x)$ дејствува во насока на оската Ox, тогаш извршената работа A на сегментот $[a,b]$ се дефинира со:

$$A = \int_a^b F(x) dx . \qquad (1)$$

Прво се разгледува случајот кога силата е константна и тогаш се става $A = F\cdot(b-a)$. Ако F не е константа, тогаш сегментот $[a,b]$ се дели на "мали" потсегменти $[a=x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n=b]$, така што силата во секој од тие сегменти се смета за константна и се добива:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x_i. \qquad (2)$$

При граничен премин $(n\to\infty, \Delta x_i \to 0)$ се доаѓа до (1).

Напоменуваме дека равенството (1) е дефиниција за работа, а извршената дискусија треба да се смета како образложение за оправданоста на таа дефиниција.

Пример 1. *Каква работа треба да се изврши за да се подигне тело со маса m на висина H, а каква за да се однесе во бескрајност?*

Решение. Силата F е еднаква со $F=\dfrac{kmM}{r^2}$, каде што r е растојанието од центарот на Земјата, а M масата на Земјата. За $r=R$ (R е радиусот на Земјата) имаме $F=mg=kmM/R^2$, т.е. $kM=gR^2$. Според тоа, $F=gR^2m/r^2$, и

$$A = mgR^2\int_R^{R+H}\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right] = mgR\frac{H}{R+H}$$

За $H\to\infty$ добиваме $A_\infty = mgR$.

ВЕЖБИ

Во задачите 1 - 4, да се пресмета патот s при дадена брзина v.

1. $v=0{,}6t^2$, за време од 10 секунди. **2.** $v=v_0-gt$; g и v_0 се конст.

3. $v=t\,e^{-0{,}01t}$.

4. $v=c\cdot tg(9-\frac{g}{c}t+arctg\frac{v_0}{c})$, c, g и v_0 се константи.

5. Каква работа треба да се изврши за да се подигне тело со маса 10 kg од висина 100 cm на висина 200 cm ?

6. Каква работа треба да се изврши за да се растегне крајот на еластичен федер, од рамнотежната положба за 4 cm, ако се знае дека сила од 1 kg го растегнува за 1 cm?

Упатство. Согласно со Хуковиот закон, силата од F kg што го растегнува федерот за x m е еднаква: $F=kx$, каде што k е коефициентот на федерот. За $x=0{,}01$ m и $F=1$ kg се добива $k=100$.

6.3. ТЕЖИШТЕ НА РАМНИНСКИ ЛИК

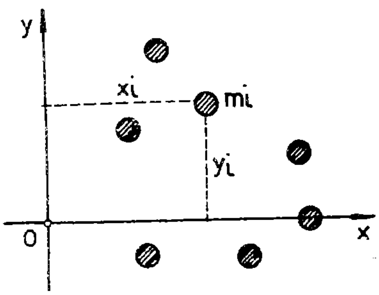
Нека е даден систем материјални точки со маси $m_1, m_2, \dots, m_n$, поставени во координатна рамнина, соодветно во точките (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) (црт. 1). Координатите $\bar{x}$, $\bar{y}$ на неговото **тежиште** T се определуваат со формулите:

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i},$$

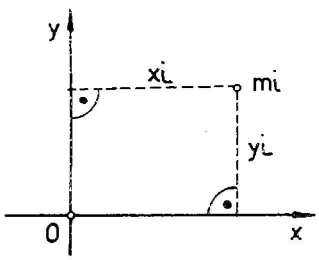
(1)

$$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}=\frac{\sum m_iy_i}{\sum m_i},$$

каде што сумирањето се врши по i од 1 до n.



Црт. 1



Црт. 2

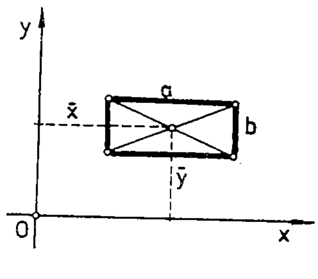
Формулите (1) можеме да ги запишеме во обликот:

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\cdot M_y,\quad \bar{y}=\frac{1}{m}\cdot M_x, \tag{2}$$

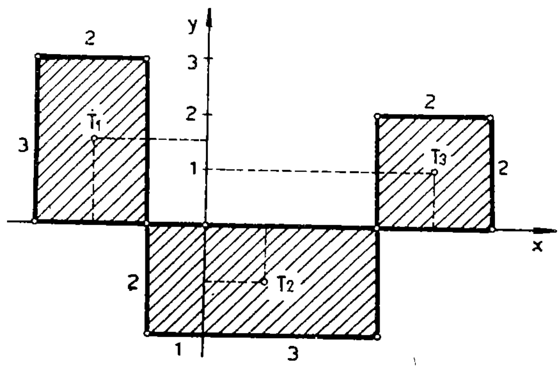
каде што $m=m_1+...+m_n$ е вкупната маса, а $M_y=m_1x_1+...+m_nx_n$, односно $M_x=m_1y_1+...+m_ny_n$, е **статичкиот момент на системот точки** во однос на y - оската, односно на x - оската. (Специјално, производот m_iy_i е **статички момент на масата** m_i во однос на x - оската, а m_ix_i во однос на y - оската; в. црт. 2.)

Со истите формули (1) или (2) се наоѓаат координатите на **тежиштето на систем од правоаголни плочи**, замислени идеализирано тенки, како рамнински фигури.

Именo, правоаголна плоча со должина a и ширина b, направена од материјал со константна густина γ, има вкупна маса еднаква со $\gamma\cdot ab$. Масата на правоаголникот е сконцентрирана во неговото тежиште $(\bar{x},\bar{y})$, т.е. во пресекот на неговите дијагонали (црт. 3). Статичкиот момент на правоаголникот во однос на x - оската е $M_x=\gamma\cdot ab\bar{y}$, а во однос на y - оската е $M_y=\gamma\cdot ab\bar{x}$.



Црт. 3



Црт. 4

Во согласност со тоа, ако имаме систем од n такви правоаголници со маси $m_1,...m_n$ и тежишта $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ соодветно, тогаш координатите $\bar{x}$, $\bar{y}$ на неговото тежиште се наоѓаат по формулите (1). Да разгледаме еден пример.

Пример 2. *Една рамнинска област е составена од правоаголниците со хомогена густина на масата* γ, *како на црт. 4. Да го најдеме тежиштето T на таа област.*

Решение. Тежиштата на масите од трите правоаголници се во точките $T_1(-2,3/2)$, $T_2(1,-1)$, $T_3(4,1)$. Вкупната маса на секој правоаголник е 6γ, 8γ и 4γ соодветно. Областа од трите правоаголници можеме да ја сметаме како систем од три "точкести" маси, поставени во тежиштата. Според тоа, со помош на формулите (1), добиваме:

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{6\gamma(-2)+8\gamma\cdot 1+4\gamma\cdot 4}{6\gamma+8\gamma+4\gamma}=\frac{12\gamma}{18\gamma}=\frac{2}{3},$$

$$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{6\gamma(3/2)+8\gamma(-1)+4\gamma}{18\gamma}=\frac{5}{18},$$

т.е. $T(2/3,5/18)$.

Забелешка 1. Вистинската вредност на густината не игра никаква улога за местоположбата на тежиштето, кога областа има хомогена густина. Горниот пример покажува дека множителот γ се скратува на крајот од пресметувањето на $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Затоа, натаму, секогаш ќе претпоставуваме дека густината на масата е константна и е еднаква со 1. Според тоа, вкупнната маса m на една рамнинска област е еднаква со нејзината плоштина P, $m=P$.

Да видиме, сега, како ќе го одредуваме тежиштето на маса од рамнинска област, поопшта од фамилија правоаголници, при горните претпоставки (густината на масата да е константна и е еднаква со 1). Притоа, за основа на нашите расудувања ќе ги земеме следниве **два принципа од механиката**:

П.1. *Тежиштето на правоаголник се наоѓа во пресекот на неговите дијагонали.*

П.2. *Ако областа D е поделена на делови со маси* $m_1,m_2,\ldots,m_n$ *и со тежишта во точките* $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, *тогаш координатите* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *на тежиштето D може да се најдат по формулите (1).*

Нека фигурата D е ограничена со непрекинатите криви:

$$y_1=f(x),\qquad y_2=g(x)\qquad [f(x)\le g(x)]$$

и со правите $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (црт. 5).

Да го поделиме сегментот $[a,b]$ на потсегменти со точките:

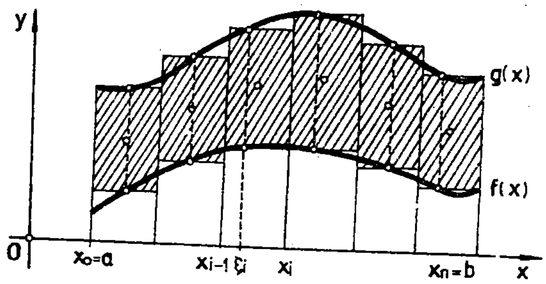
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Во секој потсегмент $[x_{i-1}, x_i]$, избираме точка $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и формираме правоаголник со:

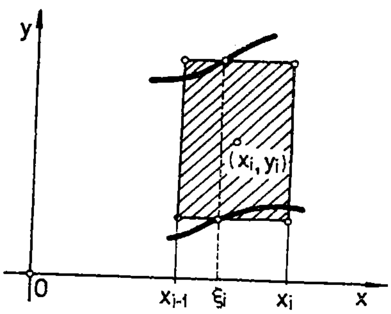
- висина: $g(\xi_i) - f(\xi_i)$ и
- основа: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(како на црт. 6); според тоа, неговата маса m_i ќе биде:

$$m_i = \gamma [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot \Delta x_i.$$



Црт. 5



Црт. 6

Координатите $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ на тежиштето на таков правоаголник ќе бидат:

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i,$$

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{2}[g(\xi_i) + f(\xi_i)].$$

Тежиштата на сите n такви правоаголници (црт. 5) сочинуваат систем од n материјални точки. Тежиштето $(\tilde{x}, \tilde{y})$ на тој систем точки може да се најде со формулите (1). Според принципот П.2, таа точка ќе биде тежиште и на скалестата фигура од црт. 5. Значи:

$$\tilde{x}=\frac{\sum m_i\tilde{x}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum(x_i-\frac{1}{2}\Delta x_i)[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i}, \tag{3}$$

$$\tilde{y}=\frac{\sum m_i\tilde{y}_i}{\sum m_i}=\frac{\frac{1}{2}\sum\{[g(\xi_i)]^2-[f(\xi_i)]^2\}\Delta x_i}{\sum[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i},$$

каде што, како и во (1), сумирањето се врши по i, од 1 до n, а γ (=конст.) е извлечен пред сумите и е скратен.

Сега останува само да се увериме дека, ако $max\ \Delta x\to 0$ (кога $n\to\infty$), тогаш $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ ќе се стремат кон некои определени вредности $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Точката $T(\overline{x},\overline{y})$ ќе биде тежиштето на фигурата D.

За таа цел, прво да воочиме дека именителот во секоја од дропките (3) е интегрална сума за функцијата $g(x)-f(x)$, па поради непрекинатоста на f и g, тој се стреми кон

$$\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=P,$$

каде што P е плоштина на областа D.

Потоа, да го запишеме броителот на првата од дропките (3) во обликот

$$\sum x_i[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i-\frac{1}{2}\sum[g(\xi_i)-f(\xi_i)\Delta x_i^2.$$

Првата од овие суми е интегрална сума на функцијата $x[g(x)-f(x)]$ и се стреми кон интегралот

$$\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx,$$

а втората сума се стреми кон нула. (Навистина,

$$\left|\frac{1}{2}\sum[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i^2\right|\le\frac{1}{2}\sum(|g(\xi_i)|+|f(\xi_i)|)\Delta x_i^2\le$$
$$\le M\cdot\max\Delta x_i\cdot\sum\Delta x_i=M\cdot\max\Delta x_i\cdot(b-a),$$

каде што M=конст. и сумирањето е по i од 1 до n.)

На крајот, броителот на втората дропка од (3) е, исто така, интегрална сума, чија граница е интегралот:

$$\frac{1}{2}\int_a^b \{[g(x)]^2 - [f(x)]^2\}dx.$$

Од овие разгледувања заклучуваме дека границите на $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ од (3) постојат, тие се **координатите на тежиштето на рамната фигура** D и изнесуваат:

$$\bar{x} = \frac{1}{P}\cdot\int_a^b x(y_2 - y_1)dx,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2P}\int_a^b \left(y_2{}^2 - y_1{}^2\right)dx, \tag{4}$$

каде што со y_2 и y_1 се означени ординатите на точките од "горната" и "долната" крива соодветно.

Специјално, ако областа D е криволиниски трапез ограничен со кривата $y = f(x)$ одозгора, тогаш ставајќи во (4) $y_1 = 0$ и $y_2 = y$, ќе ги добиеме формулите:

$$\bar{x} = \frac{1}{P}\cdot\int_a^b xydx, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2P}\int_a^b y^2dx. \tag{4'}$$

Формулите (4) можеме да ги запишеме во обликот:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} \tag{5}$$

каде што $m = P$ е плоштината на D, а

$$M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)dx, \qquad M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y_2{}^2 - y_1{}^2\right)dx$$

е статичкиот момент на фигурата D во однос на оската Ox, Oy - соодветно.

Да разгледаме еден пример.

Пример 3. *Да го најдеме тежиштето на областа D, ограничена со:*

$$y=x^2 \text{ и } y=x+2.$$

Решение. Имаме:

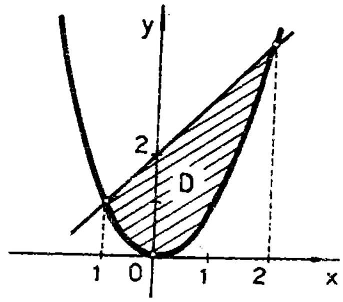
$$P=\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{31}{6};$$

$$M_y=\int_{-1}^{2}x\left(x+2-x^2\right)dx=\frac{7}{4};$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left[(x+2)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx=\frac{37}{5}$$

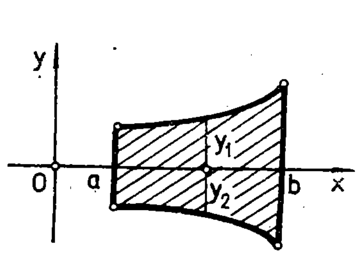
$$\bar{x}=\frac{1}{P}M_y=\frac{6}{31}\cdot\frac{7}{4}=\frac{21}{62}\approx 0{,}34$$

$$\bar{y}=\frac{1}{P}M_x=\frac{6}{31}\cdot\frac{37}{5}=\frac{222}{155}\approx 1{,}43.$$

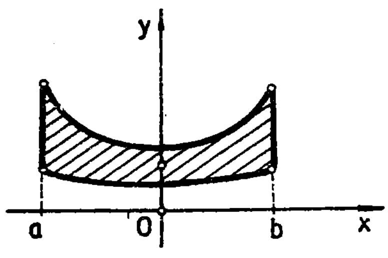


Црт. 7.

Забелешка 2. Од формулите (4) следува дека: ако Ox или Oy е оска на симетрија на фигурата D, тогаш тежиштето лежи на таа оска.



Црт. 8.



Црт. 9.

Навистина, ако Ox е оска на симетрија на D (црт. 8), тогаш $y_1 = -y_2$, па затоа $y = 0$. Ако, пак, Oy е оска на симетрија на D (црт. 9), тогаш $a = -b$, двете функции y_1 и y_2 се парни, па функцијата $x(y_2 - y_1)$ е непарна. Поради тоа:

$$\int_{-b}^{b} x(y_2 - y_1)dx = 0, \text{ па } \bar{x} = 0.$$

Како последица од формулите (4) се добива следнава:

Теорема 1. (прва теорема на Гулден)[1)]

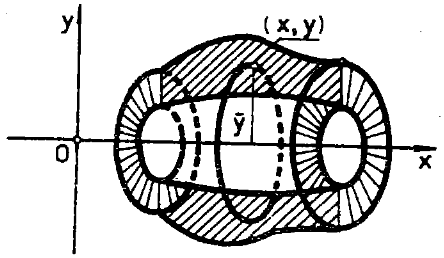
Волуменот V на едно тело, добиено со ротација на рамнинска област околу оска што не ја сече, еднаков е со производот на плоштината P од таа област и должината L на кружницата што ја опишува тежиштето на таа област, т.е. $V = L \cdot P$.

Доказ. Нека Ox е оската на ротација (црт. 10). Од втората формула на (4) имаме:

$$2\bar{y}P = \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx,$$

од каде што:

$$2\pi\bar{y} \cdot P = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx.$$

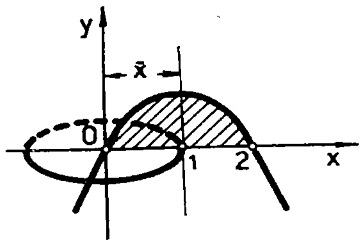


Црт. 10.

Десната страна од ова равенство го претставува волуменот V на ротационото тело, а $2\pi\bar{y} = L$ - должината на кружницата што ја опишува тежиштето; значи, $V = P \cdot L$. □

Пример 4. *Да го најдеме волуменот V на телото, добиено со ротација околу y - оската на областа ограничена со $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.*

1) Пол ГУЛДЕН (1577 - 1643) - швајцарски математичар. Оваа теорема се вика и "**прва теорема на Пап**" (Pappus - од Александрија, околу 300 год. од н. е.).



Црт. 11.

Решение. Кривата $y = 2x - x^2$ е парабола со оска на симетрија - правата $x = 1$ (црт. 11); тоа значи дека тежиштето лежи на неа, па $\bar{x} = 1$. Плоштината на областа е

$$P = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \frac{4}{3},$$

па според Т. 1, за волуменот V добиваме:

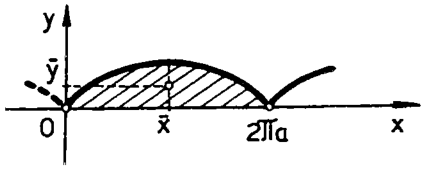
$$V = PL = \frac{4}{3} \cdot 2\pi\bar{x} = \frac{8\pi}{3}.$$

Пример 5. *Да го најдеме тежиштето T на фигурата ограничена со еден "лак" на циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и x - оската* (црт. 12).

Решение. Поради симетрија на фигурата, $\bar{x} = \pi a$, а познато е дека $V = 5\pi^2 a^3$ (в. вежба 7 од **4. 4**, $P = 3\pi a^2$ (в. вежба 21 од **4. 2**). Според Гулденовата теорема, имаме:

$$V = L \cdot P = 2\pi\bar{y} \cdot P.$$

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi P} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$



Црт. 12.

Значи, $T(\pi a, 5a/6)$.

ВЕЖБИ

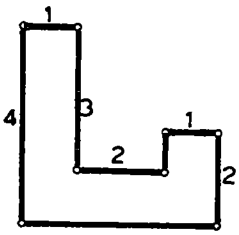
1. Дадени се маси $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$, поставени во точките $A_1(2,0)$, $A_2(1,1)$, $A_3(-2,-3)$ соодветно.

   а) Да се најде нивното тежиште T.

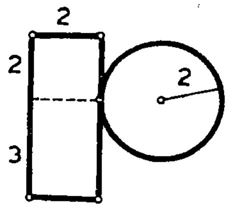
б) Да се покаже дека: местото на тежиштето T нема да се промени ако се изврши транслација на координатниот систем (на пример новиот координатен почеток да биде точката (a,b)).

2. Да се најде тежиштето на рамнинската област, со константна густина, претставена со а) црт. 17, б) црт. 18.

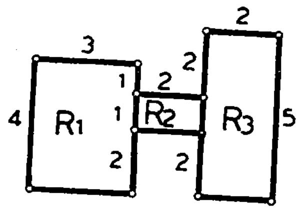
Упатство. Според вежбата 1 б), може да се избере што е можно попогоден координатен систем.



Црт. 17.



Црт. 18.



Црт. 19.

3. Најди го тежиштето на рамнинската област од црт. 19, составена од правоаголниците R_1, R_2 и R_3, при што R_2 има двапати, а R_3 има трипати поголема густина од R_1, распоредена хомогено.

Во задачите **4 - 7** најди го тежиштето на назначената рамнинска област.

4. $y=\sqrt{a^2-x^2},\ \ y=0,$

5. $y^2=2px,\ \ x=5\ (p>0).$

6. $y=\sin x,\ \ y=0,\ \ 0\le x\le \pi.$

7. $y=x^2,\ \ y^2=x.$

8.* Нека D е рамнинска област, ограничена со непрекинатата крива $y=f(x)$ на сегментот $[a,b]$ и со правите $x=a,\ x=b$ и $y=0$. Да се покаже дека координатите на тежиштето $T(\bar x,\bar y,\bar z)$ на телото добиено со ротација на областа околу x - оската се:

$$\bar x=\frac{1}{V}\cdot\pi\int_a^b xy^2dx,\quad \bar y=\bar z=0,\quad \text{каде што } V=\pi\int_a^b y^2dx, \tag{6}$$

а околу y - оската:

$$\bar y=\frac{1}{V}\cdot\pi\int_c^d y\cdot x^2dy,\quad \bar x=\bar z=0;\ V \text{ е како во (6).} \tag{7}$$

Упатство. Да се постапи слично како за добивање на формулите (4), т.е. (4'), користејќи принципи аналогни на П. 1 и П. 2. Така, тежиштето од ротационо тело лежи на оската на ротација на дадената област околу назначената оска.

Во задачите 9 - 13 да се најдат координатите на тежиштето на телото, добиено со ротација на дадената област околу назначената оска.

9. $y=\frac{ax}{h}$, $y=0$, $x=h$ $(a,h>0)$, околу Ox.

10. $y=x^2$, $y^2=x$, околу Ox.

11. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, околу Oy.

12. $y=4x-x^2$, $y=x$, околу Oy.

13. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$; околу Ox.

Во задачите 14 - 17, со помош на првата Гулденова теорема, да се најде волуменот на телото што се добива со ротација на дадената област околу назначената оска.

14. $y=\sqrt{x}$, $x=2$, $y=0$; Ox.

15. $y=x^3$, $y=x$; Ox.

16. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le \pi$; Oy.

17. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $0\le x\le a$; Oy.

6. 4. ТЕЖИШТЕ НА ЛАК ОД РАМНИНСКА КРИВА

Проблемот за наоѓање на тежиштето од разни видови објекти можеме да го прошириме за тенка жица (како и за лушпа, добиена со ротација на жица околу некоја оска). И во овој случај како во 6. 3 ќе претпоставуваме дека материјалот е хомоген, а густината е константна и еднаква со 1. Проблемот го идеализираме натаму, претпоставувајќи дека жицата е еднодимензионална. Тогаш вкупната маса ќе биде еднаква со должината на жицата.

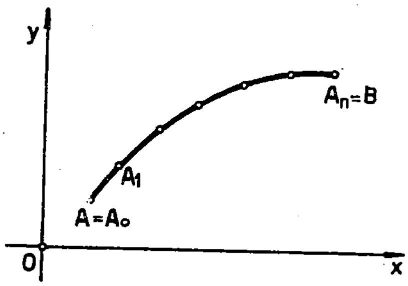
Да претпоставиме дека "жицата" е опишана со равенката:

$$y=f(x) \text{ меѓу } A(a,f(a)) \text{ и } B(b,f(b)),$$

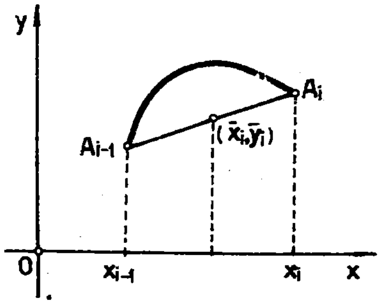
при што $f(x)$, на $[a,b]$ има непрекинат извод. Лакот AB да го поделиме со точки $A=A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n=b$ (црт. 1) и секој лак да го апроксимираме со отсечка. Тежиштето на таа отсечка ќе биде нејзината средна точка (црт. 2).

Користејќи принцип аналоген на принципот П. 2 од 6. 3, тежиштето $(\bar{x},\bar{y})$ на жицата можеме да го апроксимираме со точката $(\tilde{x},\tilde{y})$,

$$\tilde{x}=\frac{\sum x_i(\Delta s_i)}{\sum(\Delta s_i)}, \qquad \tilde{y}=\frac{\sum y_i(\Delta s_i)}{\sum(\Delta s_i)},$$



Црт. 1.



Црт. 2.

каде што Δs_i е должината на отсечката $A_{i-1}A_i$ (црт. 2), а x_i, y_i се координатите на делбените точки A_i.

Преминувајќи на гранична вредност, добиваме:

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int_a^b x ds, \qquad \bar{y}=\frac{1}{s}\int_a^b y ds, \qquad (1)$$

каде што $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$, а $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

Пример 5. *Да го најдеме тежиштето на лакот од кружницата* $x^2+y^2=a^2$ *во првиот квадрант.*

Решение. Правата $y=x$ е оска на симетрија на дадениот лак (црт. 3), па затоа $\bar{x}=\bar{y}$. Имаме:

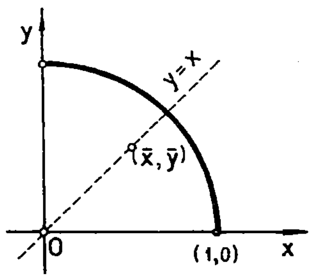
$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

$$x=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi a}\cdot\int_0^a x\left(a/\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\frac{2a}{\pi}=y.$$

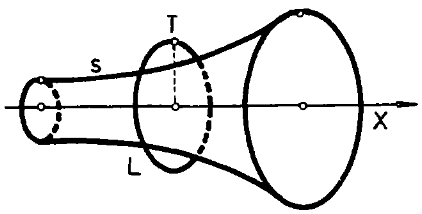
Како непосредна последица од формулите (1) ја добиваме следнава:

Теорема (втора Гулденова или Папова теорема).

Плоштината Q на површина, добиена со ротација на лак од рамнинска крива околу некоја оска што лежи во рамнината на кривата и не го сече лакот (црт. 4), еднаква е со производот од должината s на лакот и должината L на кружницата што ја опишува тежиштето T на лакот, т.е. $Q = L \cdot s$. □



Црт. 3.



Црт. 4.

Пример 6. *Да ја најдеме плоштината Q на телото, добиено со ротација на лакот на параболата $y = 2x - x^2$ од $x = 0$ до $x = 2$ околу y - оската* (в. пример 3, црт. 11 од **6. 3**).

Решение. Должината s на дадениот лак е:

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + (2-2x)^2}\, dx = [2 - 2x = t,\ dx = -dt/2] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}.$$

Тежиштето на лакот лежи на неговата симетрала $x=1$, па $\bar{x}=1$. Значи, $L=2\pi\cdot\bar{x}=2\pi$, па според Т. 2,

$$Q=2\pi\bar{x}\cdot s=2\pi\left(\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right).$$

ВЕЖБИ

Во задачите 1 - 3 да се најде тежиштето на зададениот лак.

1. $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

2. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

3. $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$, $1\leq x\leq 2$.

4. Да се најде $\bar{x}$ за лакот: $9y^2=4x^3$, $0\leq x\leq 3$, $y\geq 0$.

5. Да се докаже втората Гулденова теорема.

6. Да се најде а) волуменот V, б) плоштината Q на торусот што се добива со ротација на кружницата $(x-a)^2+y^2=r^2$, $0<r<a$, околу y - оската (со помош на Гулденовите теореми).

6. 5. ПРИБЛИЖНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Во овој раздел ќе изнесеме три методи за приближно пресметување определени интеграли, наречени: правило на правоаголници, правило на трапези и правило на параболи. Притоа, за подинтегралната функција на мора да се знае аналитичниот израз, а доволно е тоа да биде зададена со таблица вредности (секако, при претпоставка дека таа е интеграбилна функција).

На крајот ќе разгледаме по еден метод за графичко диференцирање и интегрирање.

I. Правило на многуаголници. Нека $f(x)$е непрекината функција во сегментот $[a,b]$ и тој сегмент да го поделиме на n еднакви потсегменти со точките

$a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$ (на црт. 1 е земено $n=5$). Ако ставиме $\frac{b-a}{n}=h$ и

ако во секој од потсегментите $[x_{i-1},x_i]$ ја избереме точката $\xi_i=x_{i-1}$, тогаш ја добиваме интегралната сума:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}h\cdot y_{i-1},$$

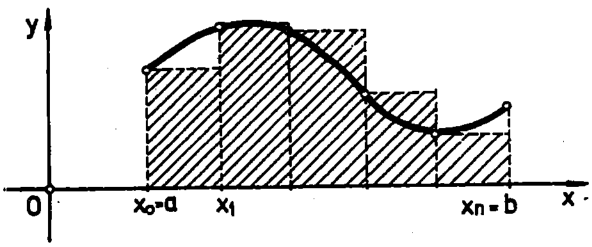
каде што $y_i=f(\xi_i)$. Бидејќи $f(x)$ по претпоставка е непрекината, според теоремата 4 од 5. 2, имаме:

$$\lim_{n\to\infty,h\to 0}S_n=\int_a^b f(x)dx,$$

поради што можеме да ставиме:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}hy_{i-1}=h(y_0+y_1+...+y_{n-1}). \tag{1}$$

Ако $f(x)>0$ во сегментот $[a,b]$, тогаш $h(y_0+y_1+...+y_{n-1})$геометриски го претставува збирот на плоштините на правоаголниците со основи h и висина $y_0,y_1,...,y_{n-1}$ соодветно. Поради тоа, приближното равенство (1) се вика **правило на правоаголници** за пресметување на определени интеграли.



Црт. 1

Се покажува[1] дека апсолутна грешка Δ што се прави при пресметувањата со приближната формула (1) е:

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot M_1 = h(b-a) \cdot M_1, \tag{2}$$

каде што M_1 го има својството: $|f'(x)| \leq M_1$ за секој $x \in [a,b]$, т.е. точно е неравенството:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} h y_{i-1} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot M_1. \tag{2'}$$

Пример 1. *Да го пресметаме интегралот* $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Ако го поделиме сегментот $[1,2]$ со точките: $1; 1{,}25; 1{,}5; 1{,}75; 2$, тогаш за $y = \frac{1}{x}$ имаме $y_0 = 1, y_1 = \frac{4}{5}, y_2 = \frac{2}{3}, y_3 = \frac{4}{7}$, па од формулата (1) добиваме дека:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{105+84+70+60}{105} = \frac{319}{4 \cdot 105} = \frac{319}{420}.$$

Бидејќи $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, имаме $|f'(x)| \leq 1$ за $x \in [1,2]$, па според (2) добиваме дека :

$$\left| \int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{319}{420} \right| \leq \frac{1}{4}$$

Да забележиме дека, ако се избере $\xi_i = x_i$, тогаш наместо (1) се добива приближната формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h y_i = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \tag{3}$$

[1] Да се види, на пример, Гребенча и Новоселов, том 1, стр. 521.

и дека, и во овој случај, апсолутната грешка се оценува со (2), т.е. не е поголема од $\frac{(b-a)^2}{n} M_1$.

Пример 2. *Да го пресметаме приближно интегралот*

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

ако се знае дека подинтегралната функција $y=f(x)$ е интеграбилна на сегментот $[0,1]$ и е зададена со таблицата:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y_i=f(x_i)$	1,00	0,96	0,85	0,70	0,53	0,37

Решение. Според формулата (1), имаме:

$$\int_0^1 ydx \approx h\cdot(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4)=$$

$$=0,2\cdot(1,00+0,96+0,85+0,70+0,53)\approx 0,808.$$

** **Забелешка.** Формулата (2) за апсолутна грешка на добиениот резултат во примерот 2 не можеме да ја употребиме, зашто немаме можност да го најдеме изводот $f'(x)$. Сепак, постои начин[2)] да се најде приближна апсолутна грешка R, користејќи ја само дадената таблица вредности за функцијата $f(x)$:

$$\Delta \approx (b-a)\cdot\overline{\Delta y},$$

каде што $\overline{\Delta y}$ е аритметичка средина на конечните разлики од прв ред $\Delta y_0,\ldots,\Delta y_4\,(\Delta y_{i-1}=y_i-y_{i-1}, i=1,\ldots,5)$. Така, $\Delta y_0=0,96-1,00=-0,04; \Delta y_1=$ $=-0,11$; $\Delta y_2=-0,15; \Delta y_3=-0,17; \Delta y_4=-0,16$, а $\overline{\Delta y}=-0,126$; значи, $\Delta\approx -0,126$. **

2) Да се види, на пример, Трпеновски и Целакоски: "Елементи од нумеричката математика", стр. 179

II. Правило на трапези. Ако се формира аритметичка средина на десните страни од формулите (1) и (3), ќе се добие и следнава приближна формула:

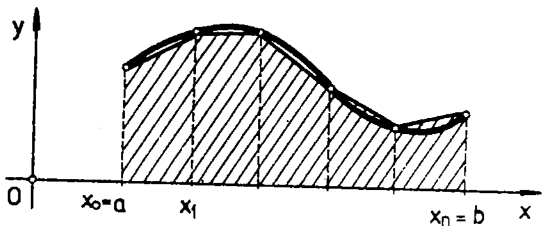
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + y_n]. \tag{4}$$

Геометриски, при $f(x) > 0, x \in [a,b]$, збирот на десната страна од (4) претставува збир на плоштините на трапезите чии висини се h, а основи y_0, y_1; $y_1, y_2; \ldots; y_{n-1}, y_n$ соодветно (на црт. 2 е земено $n = 5$). Поради тоа за (4) велиме дека е **правило на трапези**.

Се покажува[3)] дека за апсолутна грешка Δ, при пресметувањето на $\int_a^b f(x)dx$ по формулата (4) важи неравенството:

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \tag{5}$$

каде што M_2 се определува со $|f''(x)| \leq M_2,\ x \in [a,b]$.



Црт. 2

Пример 3. *Да го пресметаме приближно интегралот* $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

3) Да се види, на пример, Гребенча и Новоселов, том I, стр. 524.

Сегментот $[0,1]$ го делиме на 4 потсегменти со точките: 0; 0,25; 0,5; 0,75;1

и пресметуваме $y_0=1$; $y_1=\dfrac{1}{1+1/16}=\dfrac{16}{17}$; $y_2=\dfrac{1}{1+1/4}=\dfrac{4}{5}$; $y_3=\dfrac{1}{1+9/16}=\dfrac{16}{25}$;

$y_4=\dfrac{1}{2}$. Бидејќи $h=\dfrac{1}{4}$, по формулата (4) добиваме:

$$J\approx\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{32}{17}+\frac{8}{5}+\frac{32}{25}\right)=\frac{5323}{6800}.$$

Бидејќи $f''(x)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, имаме $|f''(x)|\le 2$, за секој $x\in[0,1]$. Така, за апсолутната грешка Δ добиваме:

$$\Delta=\frac{1}{12\cdot 16}\cdot 2=\frac{1}{96<0,011}.$$

Имајќи предвид дека $J=arctgx\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$, можеме приближно да го пресметаме бројот π; по нужните пресметувања би добиле $\pi\approx 3,13$. (За подобар резултат би требало да се земат повеќе делбени точки.)

Пример 4. *Да го пресметаме* $\int_1^2\dfrac{dx}{x}$ *со правилото на трапези, делејќи го сегментот* $[1,2]$ *како во примерот 1:* $x_0=1$; $x_1=1,25$; $x_2=1,50$; $x_3=1,75$; $x_4=2$.

Решение. Имаме: $h=1/4$ и, за $y=\dfrac{1}{x}$:

$$y_0=1;\ y_1=4/5;\ y_2=2/3;\ y_3=4/7;\ y_4=1/2.$$

Според формулата (4), добиваме:

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\left[1+2\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{210+336+280+240+105}{210}=\frac{1171}{1680}. \tag{6}$$

За апсолутната грешка на добиената приближна вредност, поради $f''(x)=2/x^3$ и $\left|2/x^3\right|\le 2$, за секој $x\in[1,2]$, а според формулата (5), добиваме:

$$\left|\int_1^2\frac{dx}{x}-\frac{1171}{1680}\right|\le\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}\cdot M_2=\frac{1}{12\cdot 16}\cdot 2=\frac{1}{96}.$$

Значи, резултатот (6) е подобар (поточен) отколку резултатот добиен во примерот 1.

III. Правило на параболи (Симпсоново правило). Третиот метод што ќе го изнесеме овде е таканареченото Симпсоново правило. Ова правило се состои во тоа што лакот на една крива се заменува со лакот на соодветна парабола. Затоа, прво ќе изведеме формула за плоштина на "параболичен трапез".

Нека $f(x)=ax^2+bx+c$, $y_1=f(s)$, $y_2=f(s+h)$, $y_3=f(s+2h)$; да го пресметаме следниов интеграл:

$$\int_s^{s+2h}(ax^2+bx+c)dx=\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_s^{s+2h}=$$

$$=\frac{a}{3}[(s+2h)^3-s^3]+\frac{b}{2}[(s+2h)^2-s^2]+2ch=$$

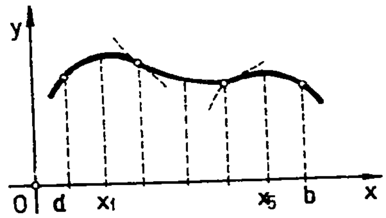
$$=\frac{2ah}{3}[(s+2h)^2+s(s+2h)+s^2]+bh(2s+2h)+2ch=$$

$$=\frac{h}{3}[as^2+bs+c+4a(s+h)^2+4b(s+h)+$$

$$+4c+a(s+2h)^2+b(s+2h)+c],\text{ т.е.}$$

$$\int_s^{s+2h}(ax^2+bx+c)dx=\frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3). \tag{7}$$

Нека сега $f(x)$ е непрекината функција во сегментот $[a,b]$; овој сегмент ќе го поделиме со точките: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{2n-1}<x_{2n}=b$, каде што $x_i-x_{i-1}=h$, $i=1,2,\ \ldots,2n$ (на црт. 3 е земено $n=3$). Да ставиме $y_i=f(x_i)$. Делот од графикот од функцијата $f(x)$ во сегментот $[x_{2i-2},x_{2i}]$ ќе го замениме со лакот од параболата $f_i(x)=a_ix^2+b_ix+c_i$ што минува низ точките (x_{2i-2},y_{2i-2}), (x_{2i-1},y_{2i-1}), (x_{2i},y_{2i}). Тогаш ќе добиеме дека:



Црт.3.

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f_i(x)dx$$

т.е. според равенството (1),

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}).$$

Ако истото тоа го направиме со секој од сегментите $[x_{2i-2},x_{2i}]$, $i=1,2,\dots,n$ ќе го добиеме приближното равенство:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^{x_2} f_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f_2(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f_n(x)dx =$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2+4y_3+y_4+\dots+y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}), \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1})]+$$
$$+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})], \qquad (8)$$

каде што $h=\dfrac{b-a}{2n}$. Приближното равенство (8) е познато под името **Симпсоново правило**[4] **или правило на параболи.**

Ако постои $f^{iv}(x)$ во сегментот $[a,b]$ и ако за секој $x\in[a,b]$, имаме $\left|f^{iv}(x)\right|\le M_4$, тогаш за апсолутната гешка Δ во приближното равенство (8) имаме[5]

$$\Delta \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M_4. \qquad (9)$$

---

[4] Томас Симпсон (Thomas Simson, 1710 - 1761)

[5] Да се види, на пример, Гребенча и Новоселов, том I, стр. 527.

Како и во претходните случаи, последново тврдење не го докажуваме, а ќе разгледаме само еден пример.

Пример 5. *Да го пресметаме интегралот* $\int_1^9 \sqrt{x}dx$.

Ако земеме $n=4$, т.е. ако сегментот $[1,9]$ го поделиме со точките 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ќе добиеме: $y_0=1$; $y_1\approx 1{,}41$; $y_2\approx 1{,}73$; $y_3\approx 2$; $y_4\approx 2{,}24$; $y_5\approx 2{,}45$; $y_6\approx 2{,}64$; $y_7\approx 2{,}83$; $y_8=3$, па по формулата (8) имаме:

$$\int_1^9 \sqrt{x}dx \approx \frac{1}{3}[1+3+4(1{,}41+2+2{,}45+2{,}83)+2(1{,}73+2{,}24+2{,}64)]$$
$$\approx 17{,}32.$$

Во конкретниов случај можеме да ја пресметаме точната вредност на интегралот. Имено,

$$\int_1^9 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^9 = 18-\frac{2}{3}=17\frac{1}{3},$$

од каде може да се оцени приближноста на понапред добиенит резултат.

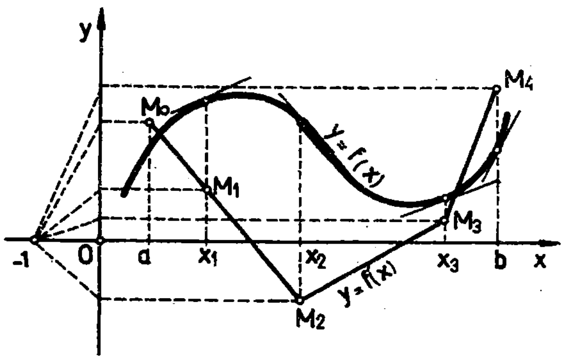
Да ја оцениме сега грешката според погоре изнесената формула. Поради $f^{iv}(x)=-\frac{15}{16}x^{-7/2}$, имаме $\left|f^{iv}(x)\right|\le\frac{15}{16}$ за $x\in[1,9]$, од каде што се добива дека апсолутната грешка е помала од

$$\frac{8^5}{180\cdot 8^4}\cdot\frac{15}{16}=\frac{35}{360}\le 0{,}04.$$

Од друга страна, при пресметувањето на корените и извршувањето на соодветните операции над така добиените приближни броеви е направена апсолутна грешка помала од $0{,}026$, па (и кога не би ја знаеле точната вредност на дадениот интеграл), сигурни сме дека во приближното равенство $\int_1^9 x\sqrt{x}dx\approx 17{,}32$ не е направена апсолутна грешка поголема од $0{,}066$.

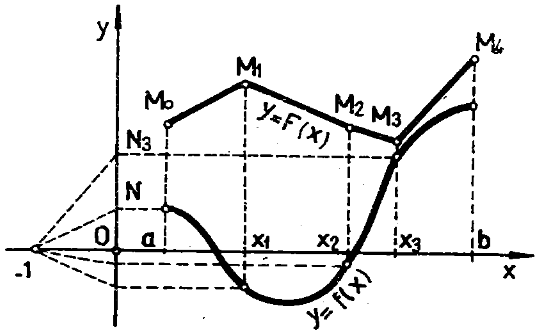
IV. Графичко диференцирање и интегрирање. Користејќи ја геометриската интерпретација на изводот ќе изнесеме еден метод за приближно одредување на графикот на $f'(x)$ ако е познат графикот на $f(x)$, а потоа за приближно одредување на графикот на една примитивна функција од $f(x)$ кога е познат графикот на $f(x)$.

Нека $y=f(x)$ е диференцијабилна функција во сегментот $[a,b]$ и нека е поделен овој сегмент на n потсегменти $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$ (на црт. 4: $n=4$). Да повлечеме тангента во точката $(x_i,f(x_i))$, а од точката $(-1,0)$ да повлечеме права паралелна со таа тангента - таа ќе има равенка: $y=f'(x_i)\cdot x+f'(x_i)$. Ако од пресечната точка на оваа права со оската Oy повлечеме друга права паралелна со оската Ox, таа има равенка $y=f'(x_i)$, тогаш како пресек на последнава права и правата $x=x_i$ ја добиваме точката M_i чии координати се $(x_i,f'(x_i))$, т.е. M_i лежи на графикот од функцијата $f'(x)$. На овој начин добиваме $n+1$ точка од графикот на $f'(x)$, па секоја крива што минува низ овие точки може да се смета за приближен график на функцијата $f'(x)$ во сегментот $[a,b]$; најчесто за приближен график на $f'(x)$ се зема искршената линија $M_0M_1...M_{n-1}M_n$ или, пак некоја крива што се добива со благо заокружување на оваа линија. (Оваа постапка се вика **графичко диференцирање**.)



Црт. 4.

Да ја разгледаме сега обратната задача, т.е. за непрекинатата функција $f(x)$ во сегментот $[a,b]$ да конструираме приближен график на една нејзина примитивна функција. За попросто, сегментот $[a,b]$ ќе го поделиме на 4 потсегменти со точките a,x_1,x_2,x_3,b и ќе го конструираме приближниот график на онаа примитивна функција $F(x)$ на $f(x)$ за која $F(a)=c$, при што c е произволно избран број (црт. 5).



Црт. 5

Ако од точката $(a,f(a))$ повлечеме права паралелна со оската Ox, таа ќе ја сече оската Oy во точката $N_1(0,f(a))$. Од точката $M_0(a,c)$ повлекуваме права, паралелна со правата што ги сврзува точките $(-1,0)$ и N_1 (нејзината равенка е: $y=xf(a)+f(a)$) и пресечната точка M_1 на таа права (нејзината равенка е: $y=f(a)(x-a)+c$) со правата $x=x_1$ ќе ја земеме да ја заменува точката $(x_1,F(x_1))$; M_1 во општ случај не се совпаѓа со $(x_1,F(x_1))$, но бидејќи ординатата на M_1 може да се земе за приближна вредност на $F(x_1)$, отсечката M_0M_1 може да се земе за приближен график на $F(x)$ на сегментот $[a,x_1]$, со што во тој сегмент графикот на $F(x)$ е заменет со делот на тангентата повлечена на $F(x)$ во точката M_0. Од точката M_1 повлекуваме права, паралелна со правата што минува низ $(-1,0)$ и $N_2(0,f(x_2))$ и во пресекот на таа права со правата $x=x_2$ ја добиваме точката M_2. Продолжувајќи ја оваа конструкција, ја добиваме искршената линија $M_0M_1M_2M_3M_4$, која ја земаме за приближен график на $F(x)$ во сегментот $[a,b]$; за приближен график на $F(x)$ може да се земе и кривата што се добива со благо заокружување на споменатата искршена линија. Да забележиме уште еднаш дека, меѓу точките M_i, само M_0 е, во општ случај, точка од графикот на $F(x)$.

Опишаната постапка за добивање (приближен) график на $F(x)$ се вика **графичко интегрирање**.

ВЕЖБИ

Во задачите **1 - 5**, да се пресмета приближно дадениот интеграл со помош на правилото на трапези, при укажаната поделба и со заокружување на назначената децимала. Да се оцени грешката на добиениот резултат.

1. $\int_0^1 x^2dx,\ n=6;$ 2. - а дец.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x},\ n=8;$ 5. - а дец.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},\ n=5;$ 4. - а дец.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},\ n=8;$ 3. - а дец.

5. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx,\ n=6;$ 4. - а дец.

6. Со помош на правилото на правоаголници да се пресмета приближно интегралот

$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$, земајќи $n=12$. Да се спореди добиената вредност со точната вредност на тој интеграл. Со помош на правилото на параболи (т.е. Симпсон) да се решат следниве интеграли (**7 - 12**).

7. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},\ h=\frac{1}{2}.$

8. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx,\ h=0,25.$

9. $\int_2^3 \ln x\,dx,\ h=\frac{1}{4}.$

10. $\int_{0,1}^{0,3} \frac{e^{x/2}}{x}dx,\ n=4.$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1},\ n=4.$

12. $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx,\ n=6.$

13. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се две непрекинати функции во интервалот $[a,b]$ и нека $f(x)\approx g(x)$ (Δ) за секој $x\in[a,b]$. Да се покаже дека

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \quad (\Delta(b-a)).$$

Упатство. Да се искористи неравенството

$$\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right| \le \int_a^b |f(x)-g(x)|dx,$$

кое непосредно следува од дефиницијата на определениот интеграл.

Користејќи ја тејлоровата формула да се пресметаат приближно следниве интеграли (**14** - **15**):

14. $\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$.

15. $\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}dx$.

16. Графички да се диференцира следнава функција:

а) $y=\frac{x^2}{2}$;

б) $(x-4)^2+(y-1)^2=4,\ y=y(x)$.

17. Графички да се интегрира функцијата:

а) $f(x)=2x-x^2,\ [0,3]$;

б) $f(x)=\frac{1}{x},\ [1,3]$.

III. 7. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

Во задачите **1** - **6**, да се пресметаат дадените неопределени интеграли.

1. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

2. $\int \frac{3+\sqrt{3x^2-x^5}}{\sqrt{3-x^2}}dx$.

3. $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx$.

4. $\int x\ln^2 x dx$.

5. $\int \arcsin^2 x\, dx$.

6. $\int e^{2x}\cos x dx$.

7. Да се изведе рекурентна формула за интегралот:

$$I_n=\int x^n \ln^n x\, dx \quad (k\text{- природен број}).$$

8. Да се пресмета $\int x^4 \ln^3 x\, dx$.

Во задачите **9 - 12** да се пресмета дадениот определен интеграл.

9. $\int_0^1 e^{x+e^x} dx$.

10. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

11. $\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1} dx$.

12. $\int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$.

13. Да се објасни зошто формалната замена на променливата доведува до погрешни резултати:

а) $\int_{-1}^{1} dx,\ t = x^{2/3}$;

б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x},\ tg\frac{x}{2} = t$.

14. Дали може во дадениот определен интеграл да се направи назначената смена?

а) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x},\quad tg\, x = t$;

б) $\int_0^{3} \sqrt[3]{1-x^2}\, dx,\quad x = \cos t$.

Да се пресметаат интегралите **15 - 22**.

15. $\int \frac{dx}{e^x+5}$.

16. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

17. $\int \frac{\sin 4x}{\cos^4 2x + 4} dx$.

18. $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$.

19. $\int \frac{dx}{x^4\left(x^2+1\right)}$.

20. $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

21. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$.

22. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Во задачите **23 - 36** најди ја плоштината на областа ограничена со зададените криви. (Пред да ја примениш формулата за плоштина, скицирај ја зададената област. Притоа, во некои случаи може да е позгодно да се изберат различни единици за должина на координатните оски.)

23. $y = 2 - x^2,\ y^3 = x^2$.

24. $y = e^{2x},\ y = e^2 x^2$.

25. $y\left(x^2+4\right) = 8,\ 3x^3 - 4y = 8$.

26. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

27. $y = x^3 - 12x,\ y = x^2$.

28. $y^2 = x,\ y = \left(x^2-1\right)\sqrt{x}$.

29. $y = x^3 e^{-6x^2}$, $y = 0$ и максималната ордината.

30. $y = x^3 - 3y^2 - x - 9y + 27 = 0$, y - оската и меѓу максималната и минималната апсциса.

31. $y = \sqrt{x}$, нејзината нормала во точката $(1,1)$ и $y = x/4$.

32. $y = x^3 - x$ и нејзината тангента во точката $x = -1$.

33.* $y^2 = x^2 \cdot \dfrac{a+x}{a-x}$ $(a > 0)$.

34.* $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (цисоида), $x = 2a$, $a > 0$

35. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

36. $x = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at}{1+t^3}$ (Декартов лист).

37. $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ (астроида).

38. Да се докаже дека плоштината што е ограничена со еден лак на циклоидата

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

и соодветната тетива е еднаква со утроената плоштина на кругот што ја произведува (**теорема на Галилеј**). **Упатство.** В. пр. 3 од **4. 5.**

Да се најде плоштинта на ликот ограничен со кривата (**39 - 46**).

39. $\rho = 3 + 2\cos\varphi$.

40. $\rho = a\cos 3\varphi$ $(a > 0)$.

41. $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$, $\rho = 2\sin\varphi$.

42. $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$

43. $\rho^2 + \varphi^2 = 1$.

44.* $\rho = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\varphi = \dfrac{\pi t}{1+t}$.

45.* $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$. **Упат.** да се премине во поларни координати.

46. $x^4 + y^4 = ax^2y$. **Упатство.** Да се стави $y = tx$.

47. Основата на едно тело е триаголникот $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ на рамнината Oxy. Секој пресек, нормален на x - оската е квадрат. Пресметај го волуменот на телото.

48. Основата на едно тело е триаголникот $\{(x,y) \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x\}$ во рамнината Oxy. Секој пресек, нормален на x - оската е полукруг. Пресметај го волуменот на телото.

Во задачите **49 - 56** да се најде волуменот на телото, добиено со ротација на областа ограничена со дадените криви, околу укажаната оска. Прво, скицирај ја зададената област.

49. $y = x^{2/3}$, нејзината тангента во точката $x = 1$ и правата $x = 0$, околу x - оската.

50. $y = 4 - x^2$ и $y = 3$, околу правата $y = -1$.

51. $x^2 + (y - a)^2 \le r^2$ $(0 < r < a)$ околу x - оската (телото се вика **торус**).

52. $y=\frac{1}{1+x^2}$, околу нејзината асимптота.

53. $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$ (затворениот дел), околу: а) Oy, б) Ox.

За задачите 54 - 56 може да се користи и следниов факт: волуменот V на тело добиено со ротација на исечок што е ограничен со лак на крива $\rho=\rho(\varphi)$ и со два поларни радиуса $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, околу поларната оска може да се пресмета и со следнава формула (ПВМ, кн.II, стр.109, [19]):

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3\sin\varphi d\varphi.$$

54. $\rho=a(1+\cos\varphi)$, околу поларната оска. (Види и вежба 8 од **4. 4.**)

55. $\rho=a\cos^2\varphi$, околу поларната оска.

56.* $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, околу: а) Ox; б) Oy. **Упатство.** Да се премине во поларни координати.

57. Со помош на определен интеграл да се пресмета волуменот на потсечен прав кружен конус со висина h и радиуси на основите r и R.

58. Со помош на определен интеграл да се пресмета волуменот на топкин отсечок (сегмент) со висина h и радиус на топката R.

Во задачите 59 - 67 се бара должината на укажаниот лак од дадената крива или, пак, должината на целата крива, ако не е назначен некој нејзин дел. Пред да ја примениш формулата, скицирај го лакот.

59. $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ во $[0,3]$.

60. $y=\frac{x^2}{2}-4$, лакот под x - оската.

61. $y=\ln\cos x$, $0\le x\le a<\frac{\pi}{4}$.

62. $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

63. $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$.

64. $x=t^2$, $y=t-\frac{t^3}{3}$ (јамката).

65. $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^{-2}}{8}$, меѓу $x=1$ и $x=2$.

66. $f(x)=\int_1^x\sqrt{t^2-1}\cdot dt$, меѓу $x=1$ и $x=3$.

67. $f(x)=\int_1^x\left(t+\frac{1}{t}+1\right)^{1/2}$ меѓу $x=1$ и $x=4$.

Најди го периметарот на фигурата ограничена со дадените линии (68 - 72).

68. $y^2=(x+1)^3$, $x=4$.

69. $y^3=x^2$, $y=\sqrt{2-x^2}$.

70. $\rho = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$ $(a>0)$.

71. $\rho = a\cos^4\dfrac{\varphi}{4}$ $(a>0)$.

72. $\rho = 1+\cos t,\ \varphi = 1 - tg\dfrac{t}{2},\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Во задачите **73 - 80** се бара плоштината на површината, добиена со ротација на лакот од зададената крива, околу назначената оска. Пред да ја примениш формулата, скицирај го лакот.

73. $y^2 = 4(x-1)$, од $(1,0)$ до $\left(4, 2\sqrt{3}\right)$, околу Ox.

74. $y = ach\dfrac{x}{a}$ во $[0,a]$, околу: а) Ox, б) Oy.

75. $8x^2y = x^6 + 2$ во $[1,2]$, околу: а) Oy, б) $x=1$.

76. $y = \sin x$ во $[0,\pi]$, околу Ox.

77. $x^2 + (y-b)^2 = r^2$ $(r<b)$, околу: а) Ox б) Oy.

78. $x = t^3,\ y = \dfrac{3}{2}t^2,\ 1 \le t \le 3$, околу Ox.

79. $\rho = 2a\cos\varphi$, околу Ox (поларната оска).

80. $\rho^2 = 2a^2\sin 2\vartheta$, околу Ox (поларната оска).

Да се оцени интегралот (**81 83**):

81. $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

82. $\displaystyle\int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

83. $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ $(n \ge 1)$

Да се пресмета средната вредност на функцијата $f(x)$ во назначениот сегмент (**84 - 87**).

84. $f(x) = x(2-x)$, $[0,2]$.

85. $f(x) = x\sin x$, $[0,\pi/2]$.

86. $f(x) = e^{2x}\cos x$, $[0,\pi/2]$.

87. $f(x) = \dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}$, $[0,\ln 5]$.

88. Јачината на струјата се менува по следниов закон:

$$J(t) = J_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right).$$

Да се најде средната вредност на $[J(t)]^2$.

89. Да се докже дека $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.

90. Да се докаже дека:

а) $\frac{1}{k+1} < \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} < \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} < 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}$.

Не пресметувајќи ги дадените интеграли во **91 - 92**, да се утврди кој од нив е поголем.

91. $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}dx$ или $\int_{0}^{1} xdx$.

92. $\int_{3}^{4} \ln x$ или $\int_{3}^{4} (\ln x)^2 dx$.

Во задачите **93 - 96** да се испитаат дадените низи со помош на определен интеграл.

93. $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$.

94. $a_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+...+\frac{n}{2n^2}$.

95. $a_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

96. $a_n = \left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[3]{n}\right)/\sqrt[3]{n^4}$.

Во задачите **97 - 99**, да се докаже даденото равенство, при претпоставка дека функцијата $f(x)$ е непрекината во сегментот $[0,1]$.

97. $\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\pi} f(\cos x)dx$. **Упатство.** $x = \frac{\pi}{2} - t$.

98. $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$. **Упатство.** $x = \pi - t$.

99. $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx$. **Упатство.** $x = \pi - t$.

100. Да се примени реезултатот од зад. 99 за да се пресмета:

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Во задачите **101 - 106** да се установи природата на дадениот несвојствен интеграл (т.е. дали е конвергентен или е дивергентен).

101. $\int_{0}^{\infty} \cos x dx$.

102. $\int_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

103. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

104. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

105. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$.

106. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$.

Да се покаже дека е конвергентен секој од несвојствените интеграли **107 - 110**.

107. $\int\limits_{-1}^{0} e^{1/x} dx.$

108. $\int\limits_{a}^{b} e^{-1/x^2} dx \ (a<b).$

109. $\int\limits_{a}^{b} \sin\frac{1}{x} dx \ (a<b).$

110. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$

111. Да се даде пример на функција $f(x)$ којашто е:

1) дефинирана на сегментот $[0,1]$, 2) непрекината во секој сегмент $[\delta,1]$, $0<\delta<1$;

3) постои $\lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{\delta}^{1} f(x)dx$, а сепак не е интеграбина на сегментот $[0,1]$.

Со помош на правилото на трапези, приближно да се пресмета дадениот интеграл при укажаната поделба и да се оцени грешката (**112 - 113**).

112. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}, \ n=8.$

113. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} \cdot dx, \ n=10.$

114. Да се пресмета $\int\limits_{0}^{10} \lg x \, dx$

а) по формулата на трапези, со $n=10$; б) по формулата на параболи, со $n=10$.

Резултатите да се споредат.

Со помош на формулата на параболи, приближно да се пресметаат интегралите **115 - 117**, земајќи $n=4$.

115. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^3}.$

116. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

117. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (-\lg \sin x) dx.$

118. Според Симпсоновата формула, да се најде плоштината на областа заградена од кривата на веројатноста:

$$y=\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \ y=0, \ x=0 \text{ и } x=0,6$$

земајќи $h=0,1$ (т.е. $n=6$).

119. Брзината на движење на едно тело е $v=te^{-0.01} \ m/s$. Да се најде патот што ќе го измине телото од почетокот на движењето до застанувањето.

120.* Да се пресмета работата што треба да се изврши за да се испумпа водата од вертикално цилиндрично буре што има радиус на основата R и висина H.

121. Два електрични полнежа $e_0 = 100$ и $e_1 = 200$ се наоѓаат на оската Ox во точките $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Каква работа треба да се изврши, за вториот полнеж да се пренесе во точката $x_2 = 10$? (Притоа единиците се земени во ист систем.)

122. Да се одреди количеството топлина Q што се добива од струја со јачина $J = J_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right)$ во коло со отпор R, за време T.

Во задачите **123 - 125** да се најде тежиштето на рамнинскиот лик, ограничен со дадените линии.

123. $y^2 = 4x,\ \ y = -4,\ \ 2x - y = 4.$

124. $y(x^2+4),\ \ x = 2,\ \ y = 0$, во I квадрант.

125. $y\frac{2}{\pi}x,\ \ y = \sin x$ и x - оската $(x > 0)$.

Да се најде тежиштето на телото добиено со ротација околу оската на рамнинскиот лик, ограничен со дадените линии (**126 - 127**).

126. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \ y = 0,\ \ y = b\ \ (a, b > 0)$, околу Oy.

127. $y = 4x - x^2,\ \ y = x$, околу Oy.

Во задачите **128 - 129** да се најде тежиштето на дадениот лак.

128. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ во првиот квадрант.

129. $y = a ch\frac{x}{a},\ \ -a \le x \le a.$

130. Да се најде тежиштето на површината добиена со ротација на лакот на кривата: $y = 2\sqrt{x-1}$ од $x = 1$ до $x = 4$, околу x - оската.

131. Со помош на Гулденовите теореми, да се најде волуменот и плоштината на торусот, добиен со ротација на кругот:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2,\ \ a \ge r,\ \ b \ge r,$$

а) околу x - оската; б) околу y - оската.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

II. ИЗВОДИ

II. 1. ИЗВОД И НЕГОВИ ТОЛКУВАЊА

II. 1. 1.

1. $3x^2$. **2.** $-2/x^3$.

3. $-1/\cos^2 x$. **Упат.** $tg(x+\Delta x)-tg\,x=(\sin\Delta x)/\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x$.

4. $3-2x$. **5.** $\cos(x-1)$. **6.** $1/3\sqrt[3]{x^2}$. **7.** $1/4$.

8. $1/6$. **9.** $5\ln 5$. **10.** $1/\ln 10$. **11.** $x_1=0,\ \ x_2=2$.

12. $x=1/3$. **13.** За секој $x\in\mathbb{R}$. **14.** а) $f'(a)$ б) $f'(a)$ **Упат.** $1/t=\Delta x$.

15. Упат. Нека $x_0>0$; ако $|\Delta x|<x_0$, тогаш $\Delta y=|x_0+\Delta x|-|x_0|=\Delta x$, па $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$, т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 0$ (кога $\Delta x\to 0$). За $x_0<0$, избирајќи го Δx така што $|\Delta x|<-x_0$, ќе добиеме $\Delta y=|x_0+\Delta x|-|x_0|=-x_0-\Delta x+x_0=-\Delta x$, т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$. За $x_0=0$ имаме

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}1 & \text{за}\ \ \Delta x>0\\ -1 & \text{за}\ \ \Delta x<0\end{cases}$, па $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не постои.

16. Решение. Нараснувањето $\Delta y=\chi(x_0+\Delta x)-\chi(x_0)$ е: 0,1 или -1, во зависност од природата на x_0 и $x_0+\Delta x$, т.е. од тоа дали се тие рационални или ирационални. Притоа, за секој x_0 и Δx постојат h_1,h_2,h_3 такви што $|h_3|<|h_2|<|h_1|<|\Delta x|$ и $\chi(x_0+h_1)-\chi(x_0)=0$, $\chi(x_0+h_2)-\chi(x_0)=1$, $\chi(x_0+h_3)-\chi(x_0)=-1$, од што и следува заклучокот дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не постои ни во една точка x_0

17. а) $3\,m/\sec$. б) $5\,m/\sec$. в) $24\,m/\sec$.

18. $v=v_0+gt_0$, каде што t_0 е позитивното решение на равенката $\dfrac{g}{2}t^2+v_0t=H$. **Упат.** $s(t)=\dfrac{gt^2}{2}+v_0t$ и $v(t)=gt+v_0$ за секој $t\in[0,t_0]$.

19. $H_{max} = v_0^2/2g,\ \ v_1 = v_0$. **Упат.** $s(t) = v_0 t - gt^2/2,\ \ v = v_0 - gt$ за $t \le v_0/g$. За $t = v_0/g$ се добива максималната висина $H = (v_0^2/g) - (g v_0^2)/2g^2 = v_0^2/2g$. За $t \in [v_0/g, 2v_0/g]$: $s(t) = (v_0^2/2g) - g(t - v_0/g)^2/2$ и $v(t) = gt - v_0$; во моментот на паѓањето, брзината v_1 ќе биде: $v_1 = g\cdot(2v_0/g) - v_0 = v_0$, т.е. се совпаѓа со почетната.

II. 1. 2.

1. $y = 4x - 3$. **2.** $y = x + 1$. **3.** $y = 1$. **4.** $y = -x + \pi/2$.

5. а) $(1/2, 9/4)$.

б) $(0, 2)$.

6. а) $y = 2x + 2$ и $y = 2 - 2x$ (две тангенти).

б) $y = -4x + 2$ и $y = 4x - 6$ (две тангенти).

7. Во $(0,0)$: $\alpha = 0$; во $(1,1)$: $\alpha = arctg(1/7)$. **Упат.** $tg\,\alpha = (k_2 - k_1)/(1 + k_1 k_2)$; $k_1 = 2x_0,\ \ k_2 = 3x_0^2$.

8. Во $(1,1)$: $arctg(3/4)$; за $x = 0,\ y = \sqrt{x}$ нема извод, но "очигледно е" (а тоа ќе го видиме во **1. 5**) дека y - оската е тангента, па бараниот агол е 90°.

9. 0. **10.** $tg\,\alpha = \sqrt{2}$ во $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$.

11. а) $T = 3\sqrt{5}/2,\ \ N = 3\sqrt{5},\ \ S_T = 3/2,\ \ S_N = 6$.

б) $T = \sqrt{1+e^2},\ \ N = \frac{1}{e}\sqrt{1+e^2}, S_T = e,\ \ S_N = \frac{1}{e}$.

12. а) $1/\ln 2$. б) $2^{2x}\ln 2$.

13. **Упат.** Прво да се покаже дека $y' = x/y = x/\sqrt{x^2 - a^2}$.

II. 1. 3.

1. $5\,cm/s,\ \ 3\,cm/s,\ \ 1\,cm/s$.

2. $15\,cm/s$. **Упат.** Средбата е во моментот $t = 10$ (секунди); брзината на првата точка е $v_1 = 6\,cm/s$, а на втората е $v_2 = 21\,cm/s$.

3. $A'(x) = F$. **4.** а) $v = 3,\ \ a = 0$. б) $v = 3,\ \ a = 2$. в) $v = 0,\ \ a = -12$.

5. $t_0 = 2$; изминатиот пат $s = 8$. **Упат.** $v(t) = 4 - 2t,\ \ t_0 = 2;\ \ x(0) = 5,\ \ x(2) = 9$, па од почетокот на движењето до t_0 се поминува пат $s_1 = 9 - 5 = 4$; потоа, $x(4) = 5$, па $s_2 = 9 - 5 = 4;\ \ s = s_1 + s_2 = 8$.

6. $t_0 = 2;\ \ a(2) = 0$. **7.** $t = 2;\ \ x_1(2) = 3,\ \ x_2(2) = 29,\ \ v_1 = -12,\ \ v_2 = 29$.

II. 1. 4.

1. б) $\alpha=3x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2$. **2.** а) и б) Функциите се непрекинати, но не и диференцијабилни.

3. $a=2x_0$, $b=-x_0^2$. **5.** $(3-2x)dx$. **6.** $(3x^2-2x)dx$. **7.** $3^x\ln 3dx$.

8. $2x\,dx$. **9.** $df=0{,}03$; $\Delta f=0{,}0301$. **10.** $df=-0{,}05$; $\Delta f=-0{,}04654$.

11. а) 9,3. б) 4,32. в) 7,76. **12.** а) 5,01. б) 8,0625. в) 6,9993.

13. а) $\approx 1+2\cdot\Delta x$. б) $\approx 1+3\cdot\Delta x$. в) $\approx 10+\Delta x/10$.

II. 1. 5.

1. -3; 3. **2.** 2; -2. **3.** -2; 2. **4.** $f'(1^-)=f'(1^+)=f'(1)=1$.

5. -1; 1. **6.** 2; -2. **7.** б) **Упат.** $f(x)=x^2$ за $x\geq 0$, $f(x)=-x^2$ за $x<0$.

8. Ако функцијата е непрекината во x_0, тогаш $y'(x_0)=\infty$ значи дека тангентата на кривата $y=y(x)$ во x_0 е паралелна со y - оската.

9. $f'(0^+)=+\infty$; има само десен бескраен извод, па $f'(0)=f'(0^+)=+\infty$.

10. $f'(2^-)=-\infty$. **11.** $f'(0)=\infty$. **13.** $y=4-2x$ лева, $y=2x-4$ десна.

14. Лева: $y=2x+1$; десна: $y=1-2x$

II. 2. ПРАВИЛА ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ ИЗВОДИ

2. 1.

1. $4x^3-6x$. **2.** $\frac{7}{8}x^{-1/8}$. **Упат.** $y=x^{7/8}$. **3.** $5x^4-14x^2\sqrt{x}$.

4. $\ln x$. **5.** $tg\,x/\cos x$. **6.** 0. **Упат.** $y=\pi/2$ (= *const.*)

7. $-4x/(1+x^2)^2$. **8.** $\ln x(ch\,x+x\,sh\,x)+ch\,x$. **9.** $(2x+5^x+x5^x\ln 5)dx$.

10. $(4x/(x^2+1)^2)dx$. **11.** $x\sin x dx$. **12.** $\left((2-\ln x)/2x\sqrt{x}\right)dx$.

13. 1,02. **Упат.** Види (7) од **1. 4.** **14.** 0,492.

15. 12,0648. **Упат.** $y=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}$, $x_0=81$, $\Delta x=1$.

2. 2.

1. $ctg\,x$. 2. $-1/\cos x$. 3. $-1/x\sqrt{1-x^2}$.

4. Функцијата не е дефинирана ни за еден реален број x (празна функција), па значи нема извод. (Кога би се работело според докажаните правила, би се добило $-1/\sqrt{1-x^2}$, што не би било точно.)

5. $(\sin x)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln\sin x+\ln x\,ctg\,x\right)$. 6. $(1-2x^2)e^{-x^2}$.

7. $(1+2x-x^4)e^x/(1-x^2)\sqrt{1-x^4}$. 8. $yx^2(1+3\ln x)$.

9. $\sqrt[x]{x}(1-\ln x)/x^2$. 10. $y'=y\left(\frac{2x^2}{x^3+1}+\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{2(1-x)}\right)$.

11. Да. 12. $2dx/(1-x^2)$. 13. $dx/\sqrt{x^2-1}$.

2. 3.

1. $2/(1+x^2)$ за $|x|<1$, $-2/(1+x^2)$ за $|x|>1$, т.е. $2sgn(1-x^2)/(1+x^2)$ за $x\neq\pm1$; за $x=\pm1$ постојат само еднострани изводи: $y'(-1^-)=-1=y'(1^+)$, $y'(-1^+)=1=y'(1^-)$.

2. $2/(1+x^2)$ за $x>0$, $-2/(1+x^2)$ за $|x|<1$, т.е. $2(sgn\,x)/(1+x^2)$ за $x\neq0$; за $x=0$ има само еднострани изводи: $y'(0^+)=2$, $y'(0^-)=-2$.

3. $1/2(1+x)\sqrt{x}$. 4. $1/x$. 5. $1/3\sqrt[3]{x^2}$. 6. $1/(1-x^2)$.

7. $1/(x^2-1)$. 8. $\pm1/\sqrt{x^2-1}$, $|x|>1$. 9. $y'=ctg\frac{t}{2}$.

10. $y'=(1-t^{1/3})^{-1/2}(1-t^{1/2})^{2/3}\cdot t^{-1/6}$. 11. $y'=-tg^2t$.

12. $y'=sgn\,t$. **Упат.** $\dot{x}=1/(1+t^2)$, $\dot{y}=(sgn\,t)/(1+t^2)$ за $t\neq0$. Овој резултат се должи на фактот дека $\arcsin\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)=(sgn\,t)\cdot\arccos\left(1/\sqrt{1+t^2}\right)$ од што следува дека $y=|x|$ за $x\in[-\pi/2,\pi/2]$.

13. $S_N=\overline{OB}=\sqrt{3}/2$; $S_T=\overline{OA}=7\sqrt{3}/6$; $T=\overline{MA}=3$; $N=\overline{MB}=\sqrt{3}$.

14. $S_N=3\sqrt{6}/2$; $S_T=\sqrt{6}/2$; $T=3\sqrt{6}$; $N=3\sqrt{2}$.

15. $(\rho^2 sgn\,\dot{x})/\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$, $\dot{x}\neq0$. 16. ρ'/ρ, $\dot{x}\neq0$, $\rho\neq0$.

II. 2. 4.

1. $55(3+5x)^{10}$. **2.** $-3(x^4-5x+6x^{-1})^{-2}\cdot(4x^3-5-6x^{-2})$. **3.** $(x^4+3x^2)/(x^2+1)^2$.

4. $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{1/2}\cdot\dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$. **5.** $-2xe^{-x^2}$. **6.** $-2e^{(1-x)/(1+x)}/(1+x)^2$.

7. $ctg\,x$. **8.** $-\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)$. **9.** $\dfrac{2arctgx}{1+x^2}$. **10.** $2x/(1+x^4)$.

11. $3/(3arctgx)^2\cdot(1+x^2)$. **12.** $(sh\sqrt{x})/2\sqrt{x}$.

II. 2. 5.

1. $z'_x=4x^3-8xy^2,\ \ z'_y=4y^3-8x^2y$. **2.** $z'_x=3y/(2x+y)^2,\ \ z'_y=-3x/(2x+y)^2$.

3. $z'_x=x\cos(x+y)+\sin(x+y),\ \ z'_y=x\cos(x+y)$.

4. $z'_x=|y|/(x^2+y^2),\ \ z'_y=(-x\,sgn\,y)/(x^2+y^2);\ \ y\neq 0$.

5. $xz'_x+yz'_y=-xy/(x^2+y^2)+yx/(x^2+y^2)=0$.

II. 2. 6.

1. $y'=(y-x^2)/(y^2-x)$. **2.** $y'=-x^{-1/3}y^{1/3}$.

3. $y'=\dfrac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$. **Упат.** Според формулата (2):

$y'=-F'_x/F'_y,\ \ F'_x=yx^{y-1}-y^x\ln y,\ \ F'_y=x^y\ln x-xy^{x-1}$. Но, може и со логаритамско диференцирање на $x^y=y^x$: $y\ln x=x\ln y,\ \ y'\ln x+y/x=\ln y+(x/y)y'$ итн.

4. $y'=(y\sin x+\cos x-\cos y)/(\cos x-x\sin y)$. **5.** $2x+y=5$. **6.** $3y=x+7$.

7. $2y=x-5$. **8.** $x=3$.

9. 1) **Упат.** $F(x,y)=x^3+y^3-3xy,\ \ F'_x=3x^2-3y$ и $F'_y=3y^2-3x$ се непрекинати во целата рамнина; може да се земе (на пример) $x_0=3/2=y_0,\ \ F(3/2,3/2)=0,$ $F'_y(3/2,3/2)=9/4\neq 0$. (Внимавај: точката (0,0) не одговара, зашто $F'_y(0,0)=0$.)

10. **Упат.** Да се искористи првобитно добиениот облик (4) и фактот што точката $M_0(x_0,y_0)$ лежи на кривата, т.е. дека $b^2(x_0-p)^2 \pm a^2(y_0-q)^2 = a^2b^2$.

11. а) Две линеарни функции, $a(y-q)=\pm b(x-p)$ при $a\neq 0$. Инаку, дадената равенка е равенка на пар прави, а тоа се асимптотите на хиперболата $b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = a^2b^2$.

б) Дадената равенка претставува една точка $C(p,q)$, па значи таа не определува ниедна диференцијабилна функција.

12. $y' = -y/x$ за $xy>0$ (т.е. за $x>0, y>0$ или $x<0, y<0$). **Упат.** $F(x,y)=-2$ за точките од вториот и четвртиот квадрант, вклучувајќи ги и точките од координатнитните оски. Според тоа, треба да се ограничиме на точките од првиот и третиот квадрант, а за нив важи $F(x,y)=2xy-2$.

II. 3. ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ ЗА ИЗВОДИТЕ

II. 3. 1.

1. -1 и 1. **2.** Нема. **3.** $1/e$. **4.** -1.

5. $(1,3)$ **6.** $(e,1/e)$ **7.** $(0,0)$ и $(2,4/e^2)$. **8.** Нема такви точки.

9. $f(2)=2$ е НМВ, $f(10)=66$ е НГВ. **10.** $f(-1)=1/2$ е НМВ, $f(5)=32$ е НГВ.

11. $f(0)=0$ е НМВ, $f(1)=1$ е НГВ. **12.** $f(0)=0$ е НМВ, а $f(-1)=17$ е НГВ.

13. $f(2)=-6$ е НМВ, а $f(-2)=26$ е НГВ.

14. $f(1)=-1$ е НМВ, а $f(100)=10-2\sqrt{10}$ е НГВ.

15. Не; f не е диференцијабилна во точката $x=1\in[0,3]$.

II. 3. 2.

1. Условите се задоволени; $f'(c)=0$ за $c=2$.

2. Нули на полиномот $f(x)$ се $x_1=-1$ и $x_2=3$; $f'(x)=2-2x$ има нула $x_3=1$; при што $x_1<x_3<x_2$.

3. Поради $f(1)=f(2)=f(3)=0$, функцијата $f'(x)=3x^2-12x+11$ треба да има две нули x_1 и x_2, такви што: $1<x_1<2$, $2<x_2<3$. Навистина, $3x^2-12x+11=0$ за $x_{1,2}=(6\pm\sqrt{3})/3$ и спомнатите неравенства се исполнети.

4. Не, зашто f не ги задоволува условите од теоремата на Рол - нема извод за $x=0\in[-1,1]$.

5. f не е диференцијабилна во точката $0\in(-1,1)$.

II. 3. 3.

1. а) $3/2$. б) $5/4$. в) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $(-1,3)$. б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$.

3. а) f не е непрекината во $[1,3]$. б) $f'(1)$ не постои.

4. f нема извод во точката $x=2$.

5. **Упат.** Разгледај ја функцијата $y=arctgx$ во сегментот $[a,b]$. За $a<b$, според теоремата на Лагранж, ќе се добие $0<arctgb-arctga=(b-a)/(1+c^2)<b-a$.

7. а) $[-1,0]$. б) $(-\infty,0)$. **Упат.** $0<arctg\frac{1}{x}<\pi$, а $-\pi/2<arctgx<\pi/2$, па равенството може да биде точно само кога $x<0$; $(arctg\frac{1}{x}-arctgx)'=0$; итн.

8. а) $[-1,1]$. б) $(-\infty,+\infty)$.

9. $\ln x$ е дефинирана за $x>0$, а $\ln(-x)$ за $x<0$, па нема вредност на x за која би било $(\ln x)'=[\ln(-x)]'$.

II. 3. 4.

1. $4/3$.

2. $\pi/4$.

3. Не постои; нарушен е условот (iii) од Кошиевата теорема; имено, $g'(x)=0$ за $x=0\in(-1,1)$.

4. Не постои (истите причини како во 3).

5. 6.

6. $1/2$.

7. $1/n2^{n-1}$.

8. $a^a(\ln a-1)$.

9. 1.

10. 1; не може (зашто $\lim_{x\to\infty}\cos x$ не постои).

11. ∞.

12. 0.

13. $+\infty$.

14. 0.

15. 1.

16. 1.

II. 4. МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМИ

II. 4. 1.

3. а) Опаѓа. б) Расте. в) Не е монотона. г) Расте.

5. Во $(-\infty,1)$ расте, во $(1,+\infty)$ опаѓа. **6.** Во $(-\infty,0)$ опаѓа, во $(0,+\infty)$ расте.

7. Расте во $(-\infty,-1)$ и $(2,+\infty)$, опаѓа во $(-1,2)$.

8. Во $(-\infty,-1)$ опаѓа, во $(-1,+\infty)$ расте.

9. Расте во $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$ (сепак, $g(x)$ не е монотона во $(-\infty,+\infty)$).

10. Опаѓа во $(-\infty,0)$ и $(6/7,+\infty)$, а расте во $(0,6/7)$; опаѓа и во точките $t=1$, и покрај тоа што $f'(1)$ не е конечен.

11. Расте во $(-\infty,-64)$ и $(0,+\infty)$, а опаѓа во $(-64,0)$.

12. Опаѓа во $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$, а расте во $(0,1)$.

13. Опаѓа во $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$, а расте во $(-1,1)$.

14. Опаѓа во $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$, а расте во $(-1,0)$ и $(1,+\infty)$.

II. 4. 2.

1. $f(-3)=27$ макс., $f(1)=-5$ мин. **2.** $g(2)=33$ макс., $g(3)=32$ мин.

3. $f(1)=1$ и $f(-1)=-1$ мин.; $f(1/2)=5/4$ макс. (За $x=1/2$ извод не постои.)

4. $g(1)=0$ мин. (За $x=1$ извод не постои.)

5. Макс. за $x=(1+\sqrt{5})/2$, мин. за $x=(1-\sqrt{5})/2$.

6. $g(1)=\sqrt[3]{2}$ макс., $g(-1)=-\sqrt[3]{2}$ мин.

7. а) $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. б) $x=-1$, $y=x-3$. в) $y'=x(x^2+3x-2)/(x+1)^3=0$ за: $x_1=0$, $x_{2,3}=(-3\pm\sqrt{17})/2$; расте во интервалите $(-\infty,x_2)$, $(-1,0)$ и $(x_3,+\infty)$, а опаѓа во $(x_2,-1)$ и $(0,x_3)$. г) $y(0)=0$ и $y(x_2)\approx-8{,}82$ макс., а $y(x_3)\approx-0{,}6$.

8. а) $D=(-\infty,+\infty)$. б) $y=1\,(x>0)$ и $y=-1\,(x<0)$. в) $y'=(2x+1)\cdot(x^2+1)^{-3/2}=0$ за $x=-1/2$; опаѓа во $(-\infty,-1/2)$, а расте во $(-1/2,+\infty)$. г) $y(-1/2)=-\sqrt{5}$ мин.

9. а) $\mathbb{R}$. б) Нема. в) $y'=\dfrac{2[(x+1)^{1/3}+(x-1)^{1/3}]}{3(x^2-1)^{1/3}}$; $y'=0$ за $x=0$, а нема извод за $x=\pm 1$; опаѓа во $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$, а расте во $(-1,0)$ и $(1,+\infty)$. г) $y(0)=2$ е макс., а $y(\pm 1)=\sqrt[3]{4}$ е мин.

10. а) $\mathbb{R}$. б) Нема. в) $y'=-2\sin 2x\cdot\cos 2x=0$. г) Екстреми за $x=k\pi/2$ и за $x=(2k+1)\pi/4$. Да забележиме дека $y=(3+\cos 4x)/4$; $\pi/2$ е период.

11. а) $(0,+\infty)$. б) Нема. в) $y'=\ln x+1=0$ за $x=1/e$; опаѓа во $(0,1/e)$, а расте во $(1/e,+\infty)$. в) $-1/e$ е мин. за $x=1/e$.

12. а) $(0,+\infty)$. б) $y=0$ и $x=0$. в) $y'=(2-\ln x)/2x\sqrt{x}=0$ за $x=e^2$; расте во $(0,e^2)$, опаѓа во $(e^2,+\infty)$. в) $2/e$ е макс. за $x=e^2$

13. а) $\mathbb{R}$. б) Нема. в) $y'=1/(x^2+1)>0$ за секој x; расте во $(-\infty,+\infty)$. г) Нема.

Да потсетиме дека оваа е функцијата $Arsh\,x$.

14. а) $\mathbb{R}$. б) $y=0$. в) $y'=2/(1+x^2)$ за $|x|<1$ и $y'=-2/(1+x^2)$ за $|x|>1$; за $|x|=\pm 1$, извод не постои; расте во $(-1,1)$, а опаѓа за $|x|>1$. г) $y(1)=\pi/2$ макс., $y(-1)=-\pi/2$ мин.

15. а) $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. б) $y=1$ и $x=-1$. в) Опаѓа во D. г) Нема екстреми.

16. а) $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$. б) $x=1$ и $y=(x-5)/4$. в) $y'=(x^2-2x-3)/4(x-1)^2=0$ за $x=3$ и $x=-1$; расте во интервалите $(-\infty,-1)$ и $(3,+\infty)$, а опаѓа во $(-1,1)$ и $(1,3)$. г) $y(3)=0$ мин., $y(-1)=-2$ макс.

17. $x=0$ за $t=0$ и $t=2$ за $y=0$ за $t=0$ и $t=\pm\sqrt{3}$; $\dot{x}=2(1-t)=0$ за $t=1$; $\dot{y}=3(1-t^2)=0$ за $t=\pm 1$. Со помош на овие резултати, ја добиваме Таб. 1 (од каде што се гледаат бараните податоци). Графикот на функцијата е претставен на црт. 1.

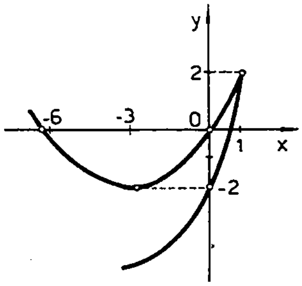
t	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx -6,4$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$
$\dot{x}$			$+$			$+$			0			$-$		$-$	
$\dot{y}$			$-$		0		$+$		0		$-$			$-$	

18. Кога $t\to\pm\infty$: $x\to\pm\infty$, $y\to 0$, па $y=0$ е асимптота;

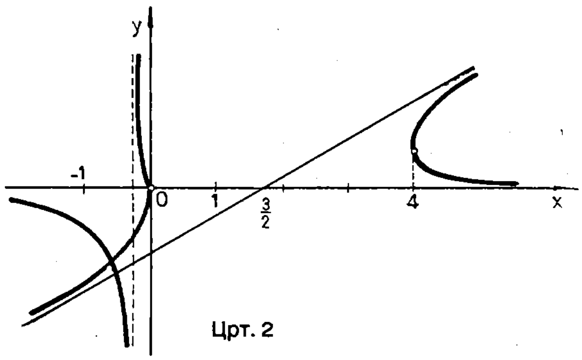
кога $t\to -1$: $x\to -1/2$, $y\to +\infty$, па $x=-1/2$ е асимптота;

кога $t\to 1$: $x\to\infty$, $y\to\infty$, а $y/x\to 1/2$ и $y-x/2\to -3/4$ па $y=(x/2)-(3/4)$ е асимптота; $\dot{x}=t(t-2)/(t-1)^2$, $\dot{y}=-(t^2+1)/(t^2-1)^2$. Бараните податоци се гледаат од таб. 2; графикот е претставен на црт. 2.

t	$-\infty$		-1	-1		0		1	1		2		$+\infty$
x	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
y	0^-	↘	$-\infty$	$+\infty$	↗	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2/3	↘	0^+
$\dot{x}$		+			+	0	-			-	0	+	
$\dot{y}$		-			-		-			-		-	



Црт. 1



Црт. 2

II. 4. 3.

1. -15 (НМВ), 17 (НГВ). **2.** Нема ни НМВ ни НГВ (функцијата има прекин во $x=-1$ и $x=2$; за $x\to 2^+$ имаме $y\to-\infty$, а за $x\to 2^-$: $y\to+\infty$).

3. $y(1)=2$ е НМВ, $y(5)=14/3$ е НГВ. **4.** $y(1)=2$ е НМВ, а нема НГВ.

5. НГВ е $y(1/\sqrt{e})=1/2e$, а НМВ нема. **6.** НМВ е $y(1/\sqrt[3]{e})=-1/3e$, а НГВ нема.

7. НГВ е $y(1)=1/e$, а НМВ нема.

8. Нема ни НМВ ни НГВ; ограничена: $-1<y<1$.

9. НМВ е $-1=f(-1)$, а НГВ е $1=f(1)$. **10.** НМВ $f=1/2$ за $x=0$; НГВ нема.

11. НМВ е 0 (за $x=\pm1$), а НГВ е $\sqrt[4]{9/8}$ (за $x=\pm1/2$).

12. Дефинирана за $x=0$ и $x\geq1$; НМВ е 0 (за $x=0$ и $x=1$), а НГВ нема. **14.** 6 и 6.

15. а) $f(x)=2x^3+(1-x^2)^{3/2}$; НМВ е $2/\sqrt{5}$ за $x-1/\sqrt{5}$. б) $k/\sqrt{1+k^2}$ за $x=1/\sqrt{1+k^2}$.

16. $8\,cm$ и $2\sqrt{3}\,cm$. **17.** а) (3,0); $d=2$. б) (2,4); $d=1/\sqrt{17}$.

18. $a=b=d/\sqrt{2}$ (квадрат). **19.** Радиусот: $R=\sqrt[3]{V/2\pi}$, висината: $H=2\sqrt[3]{V/2\pi}=2R$.

20. Димензии: $2/\sqrt{3}$ и $8/3$; плоштина:$16/3\sqrt{3}$.

21. -4 (за $x=2$). **Упат.** $M(x,x^2)$, $P=(3-x)x^2$.

22. $4m\times 4m\times 2m$. **23.** $30\,cm\times 15\,cm\times 10\,cm$. **24.** $(4/3, 8\sqrt{3}/9)$.

II. 5. ВТОР ИЗВОД И НЕГОВИ ПРИМЕНИ

II. 5. 1.

1. $6x+6$. **2.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **3.** $-2\cos 2x$. **4.** $2\,arctgx+2x/(1+x^2)$.

6. 11. **7.** -16. **8.** $-49/32$. **10.** Не. **11.** Да.

12. $-1/5\sin^3 2t$. **13.** $2(1+t^2)$. **14.** $-1/y^3$ **15.** $(chy)/(1-shy)^3$.

16. $\ddot{y}+a^2y$. **17.** $\ddot{y}+2\dot{y}+y$. **18.** $300\,g\,cm/s^2$.

19. 48; 80; 120 $(g\,cm/s^2)$. **Упат.** $F(t)=ma=8t+40$.

20. 38880; 4320; 480 $(g\,cm/s^2)$. **21.** $(400g+200)kg\,m/s^2$. **Упат.** $F=ma$, $a-g=1/2$.

II. 5. 2.

1. Превој $(1,-1)$; конвексна во $(-\infty,1)$, конкавна во $(1,+\infty)$.

2. Превој $(0,11)$; конвексна во $(-\infty,0)$, конкавна во $(0,+\infty)$.

3. Превои: $(1,2)$, $(-1,2)$; $y''=12(x^2-1)$; $y''>0$ за $|x|>1$, а $y''<0$ за $|x|<1$.

4. Превои: $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}/2\right)$, $(0,0)$ и $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}/2\right)$; конвексна во $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(0,\sqrt{3})$; конкавна во $(-\sqrt{3},0)$ и $(\sqrt{3},+\infty)$.

5. Превој: $(1/5,-1/45)$; $y''>0$ за $x>1/5$, $y''<0$ за $x<1/5$.

6. Превојни точки: $x_1=(-3-\sqrt{41})/8\approx -1{,}2$; $y_1\approx -2{,}1$; $x_2=(-3+\sqrt{41})/8\approx 0{,}4$; $y_2\approx -1{,}5$; конкавна во интервалот (x_1,x_2), а конвексна во $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$.

7. Превој: $(-1/2, 1/e^2)$; конвексна во $(-\infty,-1/2)$; конкавна во $(-1/2,0)\cup(0,+\infty)$.

8. Нема превои; конвексна во целиот домен.

9. Превој: $x_1 = e^{8/3} \approx 14,33$; $y_1 = 8/3 \approx 0,7$; конвексна во $(0, x_1)$, а конкавна во $(x_1, +\infty)$.

10. Превојни точки нема; конвексна во $\mathbb{R}$.

11. Да; конвексна во $(-\infty, 0)$, конкавна во $(0, +\infty)$.

12. Не; конвексна во $(-1, +\infty)$.

13. Не; конвексна за секој $x \neq 0$. **Упат.** $y''(0)$ не постои, а $y'' > 0$ за секој $x \neq 0$.

14. Не; конвексна во интервалот $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, а конкавна во $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$.

II. 5. 3.

---

1. $(x-2)^2 + (y-23/6)^2 = 1/36$. **2.** $x^2 + (y-1/2)^2 = 1/4$.

3. $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, каде што: $p = 3x_0 + 2a$, $q = -(x_0 y_0)/a$, $r = 2(x_0 + a)^{3/2}/\sqrt{a}$.

4. $(x - 21a/16)^2 + (y - 21a/16)^2 = 9a^2/128$.

6. $K = \dfrac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$, $p = x - \dfrac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}$, $q = y + \dfrac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}$. а) at. б) $\dfrac{1}{3}|axy|^{-1/3}$

7. $K_{max} = -1/4a$ за $t = \pi$. **Упат.** $K = -1/4a\sin^4(t/2)$.

8. $K = \dfrac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$. а) $3/2\sqrt{2a\rho}$. б) $3\rho/a^2$.

9. Нема. **Упат.** Тангентата (во избрана точка M_0) на правата се совпаѓа со таа права, па не постои можност да се избере "точка M од правата што не лежи на тангентата" (в. црт. 1 во **5. 3**). (Да забележиме и дека за правата $y = ax + b$ имаме $y'' = 0$ за секој x, па (1) и (2) немаат смисла.)

10 $T\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **Упат.** $K = -x(x^2+1)^{-3/2}$, $K'_x = -(2x^2 - 1)(x^2+1)^{-5/2}$; $K_{max} = -2\sqrt{3}/9$ за $x = 1/\sqrt{2}$.

11. $T_1(1,1)$ и $T_2(-1,-1)$; $K = 2x^3(1+x^4)^{-3/2}$. **12.** $T(2,1)$.

13. $T_0(\pi/2, 1)$ и T_k за $x = (\pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

14. $8X^3 = 27Y^2$. **Упат.** Равенката на еволутата во параметарски облик е дадена, всушност, со формулите (1); p и q коишто зависат од параметарот x_0, овде се означени со X и Y соодветно.

15. $(3p)^{2/3}+(2q)^{2/3}=5^{2/3}$ (астроида). **Упат.** $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ се параметарски равенки на елипсата. Користејќи ги добиените формули во зад. 6 за p и q, добиваме

$$p=\frac{5}{3}\cos^3 t,\quad q=-\frac{5}{2}\sin^3 t.$$

16. $p=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $q=-\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$ (астроида).

17. Точката (2,0). **18.** $X^{2/3}-Y^{2/3}=4^{2/3}$.

19. $p=-3t^2(2t^2+1)$, $q=2t(4t^2+3)$. **20.** $\rho=2e^{2\varphi-\pi}$. **21.** Кардоида.

II. 5. 4.

1. $D=\mathbb{R}$; $y(-1)=4$ макс., $y(1)=0$ мин; $(0,2)$ е превој; графикот на црт. 1 (подолу).

2. $D=\mathbb{R}$; $y(0)=1$ макс., $y(2)=-3$ мин.; $(1,-1)$ превој; графикот - на црт. 2.

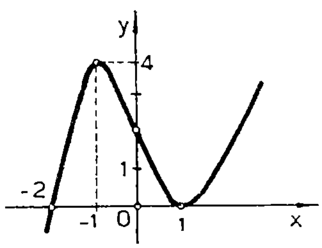
3. $D=\mathbb{R}$; $y(0)=y(2)=0$ мин., $y(1)=1$ макс.; превои во $x_{1,2}=(3\pm\sqrt{3})/3$, т.е. $x_1\approx 0,42$, $x_2\approx 1,58$; графикот - на црт. 3.

4. $D=\mathbb{R}$; $y(-1)=0$ макс., $y(-1/5)\approx -1,1$; превои за $x_1=1$; $x_{2,3}=(-2\pm\sqrt{24})/10$, т.е. $x_2\approx 0,3$ и $x_3\approx -0,7$; црт. 4.

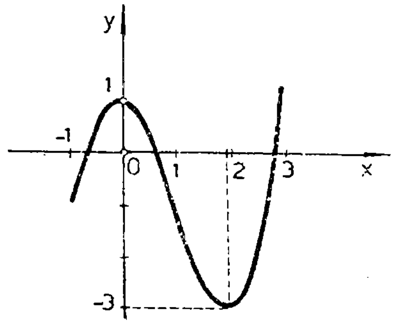
5. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; асимптота: $y=x-1$; макс. за $x=-1-\sqrt{2}$, мин. за $x=-1+\sqrt{2}$; нема превои; конвексна во $(-\infty,1)$, конкавна во $(-1,+\infty)$; црт. 5.

6. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; асимптота: $y=-x-1$; макс. за $x=1+\sqrt{2}$, мин. за $x=1-\sqrt{2}$; црт. 6.

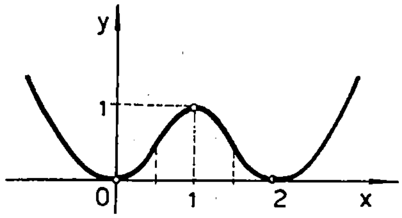
7 - 16: Црт. 7 - 16 соодветно. Види ги и одг. на вежбите **11** - **20** соодветно, во **4. 2.**



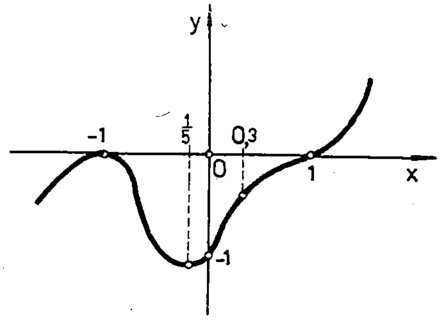
Црт. **1** (1)



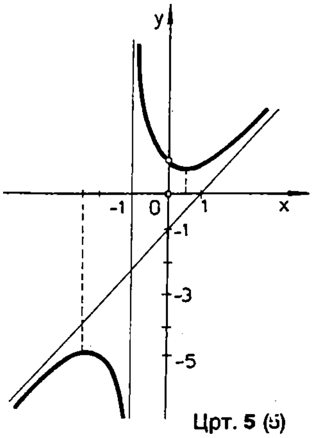
Црт. **2** (2)



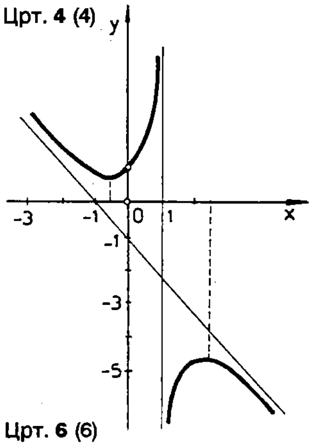
Црт. 3 (3)



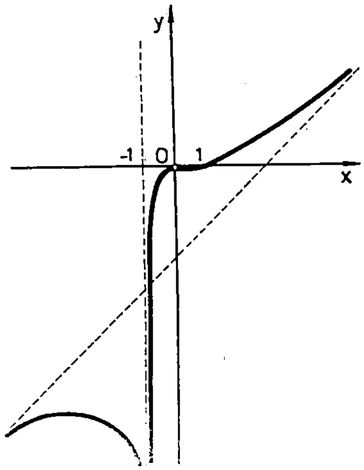
Црт. 4 (4)



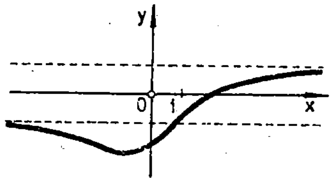
Црт. 5 (5)



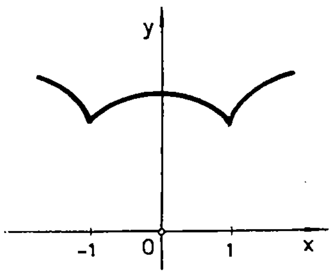
Црт. 6 (6)



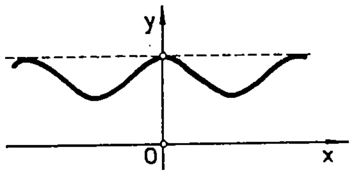
Црт. 7 (7)



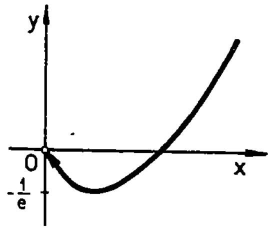
Црт. 8 (8)



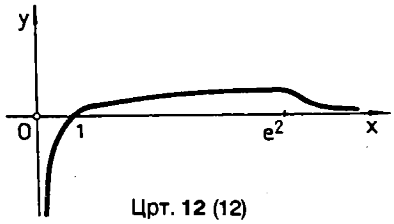
Црт. 9 (9)



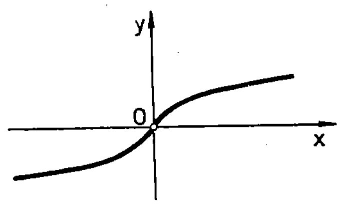
Црт. **10** (10)



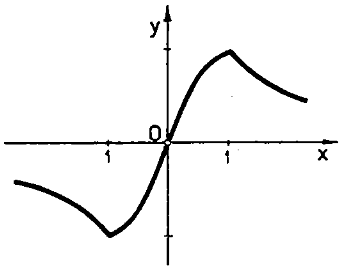
Црт. **11** (11)



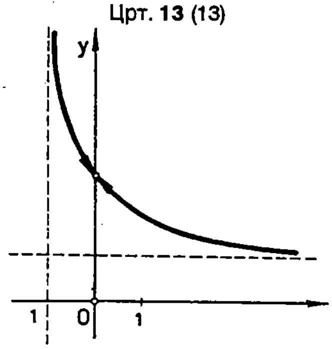
Црт. **12** (12)



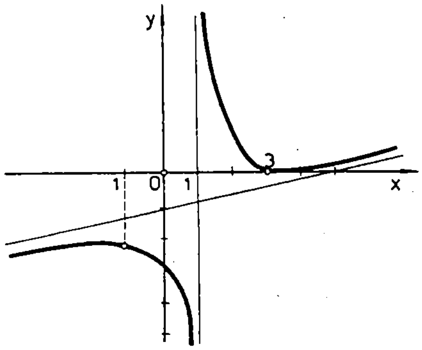
Црт. **13** (13)



Црт. **14** (14)



Црт. **15** (15)



Црт. **16** (16)

II. 6. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

II. 6. 1.

1. $240x(3x^2+1)(x^2+1)^2$. **2.** $-6/(x-1)^4$; -6. **3.** $a^n \sin(ax+n\pi/2)$.

4. $(-1)^n 3^{n-1}(n+3)!/2(3x+2)^{n+4}$. **5.** $n!2/(1-x)^{n+1}$.

6. $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{x^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$. **Упат.** $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

7. $\dfrac{(n-1)!}{2}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^n}+\dfrac{1}{(1-x)^n}\right]$. **Упат.** $arthx=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

8. $(-1)^n(1+x)^{-n-1}\cdot\left[n!\ln(1+x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}k!(n-k-1)!\right]$. **Упат.** Со Лајбницовата формула.

9. $2^{49}e^{2x}(2x^2+100x+1225)$. **Упат.** Со Лајбницовата формула.

10. 0 за $n=2k+1$, $2\ln^n 2$ за $n=2k$; $y'=(2^x+(-1)^n 2^{-x})\ln^n 2$.

11. 0 за $n<k$; $n!a^{n-k}/(n-k)!$ за $n\geq k$. **12.** $[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)]^2$ за $n=2k+1$; 0 за $n=2k$.

16. Решение. а) $y'=1/\sqrt{1-x^2}$, т.е. $y'^2(1-x^2)=1$. Диференцирајќи го ова равенство, добиваме

$$2y'y''(1-x^2)+y'^2(-2x)=0,\text{ т.е. } y''(1-x^2)-xy'=0.$$

(по делењето со $2y'$).

б) Диференцирајќи го n - пати резултатот од а) со користење на Лајбницовата формула за секој од двата производа добиваме

$$\left[y^{(n+2)}(1-x^2)+ny^{(n+1)}(-2x)+\frac{n(n-1)}{2!}y^{(n)}(-2)\right]-\left[y^{(n+1)}x+ny^{(n)}\right]=0.$$

По средувањето, се добива даденото равенство.

17. $-9\sin 3x\cdot dx^2$. **18.** $-x(x^2+1)^{-3/2}dx^2$. **19.** $\dfrac{2}{x}dx^3$. **20.** $(x-4)e^{-x}dx^4$.

21. $5\cdot 3^n\sin(3x+1+n\pi/2)dx^n$. **22.** $-(n-1)!(1-x)^{-n}dx^n$.

23. Упат. Левата и десната страна на Лајбницовата формула (2) за изводи да се помножат со dx^n.

24. $2ud^5u+10(du)(d^4u)+20(d^2u)(d^3u)=2\left[uu^{(5)}+5u'u^{(4)}+10u''u'''\right]dx^5$.

25. Не, бидејќи ако $y=y(x)$, $u=u(x)$, тогаш $dy=y'_u\cdot du$, $d^2y=d(y'_u du)=y''_u du^2+y'_u d^2u$ е, во општ случај различен од $y''_u du^2$. Така, за $y=\sin x^3$ и $u=x^3$ имаме $y=\sin u$, $y''_u du^2=$ $=-9x^4\sin x^3 dx^2$, но $d^2y=-9x^4\sin x^3dx^2+6x\cos x^3dx^2=3x(2\cos x^3-3x^3\sin x^3)dx^2$.

26. Овој резултат е последица од фактот што $d^ku=0$ за $k\geq 2$ (што значи не е во спротивност со резултатот од 25).

29. $y'''=(\dddot{y}\cdot\dot{x}^2-3\ddot{y}\cdot\ddot{x}\cdot\dot{x}-\dot{y}\cdot\dddot{x}\cdot\dot{x}-3\dot{y}\cdot\ddot{x}^2)/\dot{x}^5$.

II. 6. 2.

1. $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$.

2. $15(x-2)^2+11(x-2)^3+2(x-2)^4$.

3. $-4{,}919108$.

4. $\approx 4{,}9$.

5. $p(x)=8-5(x+1)+(x+1)^3$; а) 8,010. б) 7,985.

6. 143; -60; 26 соодветно.

7. **Упат.** Ако се претстави $p(x)$ по степените на $x-a$, се добива $p(x)=(x-a)^kq(x)$, каде што $q(x)$ е полином со степен $n-k$, и притоа $q(a)=A\neq 0$. Избирајќи го h доволно мал по апсолутна вредност, добиваме $p(a+h)-p(a)=p(a+h)=h^kq(a+h)$, при што $q(a+h)\cdot A>0$.

II. 6. 3.

1. $(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4+\frac{(-1)^n6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n}+R_n$ каде што

$R_n=(-1)^{n+1}6(x-1)^{n+1}/(n-2)(n-1)n(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-2}$, $0<\theta<1$.

2. $-\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2(x-2)}-\frac{13}{3^3}(x-2)^2+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^{n+1}}(x-2)^n+R_n$.

Упат. $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$; $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}[(1-x)^{-n-1}+(-1)^n(1+x)^{-n-1}]$,

$f^{(n)}(2)=(-1)^{n+1}\frac{n!}{2}(1-3^{-n-1})$.

3. $3+\frac{7}{2}(x-1)+\frac{7}{2!2^2}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3}{3!2^3}(x-1)^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{n!2^n}(x-1)^n+R_n \quad (n\geq 3).$

4. $1+2(x-1)-\frac{2\cdot 1}{2!}(x-1)^2+\frac{2\cdot 1\cdot 4}{3!}(x-1)^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 1\cdot 4\ldots(3n-5)}{n!}(x-1)^n+R_n \quad (n\geq 2).$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{1}{2\cdot 2}(x-2)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2^2}(x-2)^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^3}\right].$

6. $(x-1)^2-(x-1)^3+\frac{5}{12}(x-1)^4.$ 7. $1+x^2.$

II. 6. 4.

1. $1+x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}/(1-\theta x)^{n+2}, \quad 0<\theta<1.$

2. $1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}x^{n+1}/(1+\theta x)^{n+2}.$

3. $1+3x+3^2x^2+\ldots+3^n x^n+3^{n+1}x^{n+1}/(1-3\theta x)^{n+2}.$

4. $1-2x+2x^2-\ldots+(-1)^n\cdot 2x^n+(-1)^{n+1}\cdot 2(n+1)!/(1+\theta x)^{n+2}.$

5. $1-x+\frac{1\cdot 3}{2!}x^2+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n!}x^n+R_n.$

6. $1+\frac{2}{3}x-\left(\frac{2}{3}\right)^2x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{2\cdot 5}{3!}x^3-\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{2\cdot 5\cdot\ldots(3n-4)}{n!}x^n+R_n.$

7. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\theta x.$

8. $1+3x+\frac{3^2}{2!}x^2+\ldots+\frac{3^n}{n!}x^n+\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{3\theta x}$

9. $3x-\frac{3^3}{3!}x^3+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{3^{2k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+(-1)^k\frac{3^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$

10. $x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n}}{2n}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\theta x)^{2n}}-\frac{1}{(1+\theta x)^{2n}}\right].$

11. $x+\frac{x^3}{3}+x^4(\theta^2x^2-1)/(1+\theta^2x^2)^4.$ 12. $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\cdot(9\theta x+6\theta^3x^3)\cdot(1-\theta^2x^2)^{-7/2}.$

13. $1+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{3!27}(12+4\theta x+24\theta^3x^3)(1+\theta^2x^2)^{-8/3}$.

14. $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2!2^2}-\frac{x^6}{3!2^3}e^{-\theta^2x^2/2}$

II. 6. 5.

1. Критична точка е $x=0$; $f(0)=2$ е мин. **Упат.** $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, $f^{iv}(0)=2>0$, па $f(0)$ е минимум. Маклореновата формула за $g(x)=f'(x)$, за $n=3$, е:

$f'(x)=\frac{x^3}{6}(e^{\theta x}+e^{-\theta x})$, $0<\theta<1$. За $x>0$ имаме $f'(x)>0$, а за $x<0$: $f'(x)<0$. Од сето тоа следува дека $f(x)$ нема други критични точки освен $x=0$.

2. $y'=0$ за $x=0$; превој. **Упат.** $y'(0)=y''(0)=0$, $y'''(0)=-4$, па $y(0)=0$ не е екстрем. Поради $y'=2\cos x-(e^x+e^{-x})$ и фактот што за $x>0$: $e^x-e^{-x}>0$, заклучуваме дека $y'>0$ за $x>0$ и $y'<0$ за $x<0$. Од тоа следува дека друга критична точка не постои.

3. Превој, за $x=0$. **Упат.** $y'=x^2/(1+x^2)\geq 0$, па $y(0)=0$ не е екстрем.

4. $y(\pi/4)=\sqrt{2}$ макс., $y(5\pi/4)=-\sqrt{2}$ мин.; $(3\pi/4,0)$ и $(7\pi/4,0)$ - превои.

5. $R<2\cdot 10^{-5}$. **Упат.** Маклореновата формула за $y=tg\,x$, при $n=3$, гласи:

$tg\,x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4!}8tg\,\theta x(1+tg^2\theta x)(2+3tg^2\theta x)$, $0<\theta<1$; $y'=1/\cos^2 x=1+tg^2x$; итн.

6. $R<1/16$. **Упат.** $y=(1+x)^{1/2}$, $y'=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $y''=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$, $y'''=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$; $y'''(\theta x)=3/8(1+\theta x)^{5/2}<3/8$, за $x\in[0,1]$. Според тоа, $R<1/16$.

7. За $|x|<0{,}222$. **Упат.** $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\cos\theta x$, па $R\leq x^4/24$; $R<10^{-4}$ ако $x^4/24<10^{-4}$, т.е. $x<\sqrt[4]{24}/10\approx 0{,}2213$.

8. $2{,}2361$. **Решение.** Според вежбата 6, при $x=1/4$, имаме

$\sqrt{5}=2\sqrt{1+1/4}\approx 2\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{8\cdot 4^2}\right)$ со грешка

$\left|\frac{x^3}{3!}\cdot y'''(\theta x)\right|<\frac{1}{3!4^3}\cdot\frac{3}{8(1+\theta/4)^{5/2}}<\frac{1}{2\cdot 4^3\cdot 8}=\frac{1}{1024}$, па не сме сигурни дали е постигната доволна точност (10^{-4}). Поради $y^{iv}=-\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}$, имаме

$\left|\frac{x^4}{4!}y^{iv}\left(\frac{\theta}{4}\right)\right|<\frac{1}{4!4^4}\cdot\frac{15}{16}<\frac{1}{6144}$, што не е доволно, па затоа ќе земеме уште еден член:

$y^{v}=\frac{15\cdot 7}{32}(1+x)^{-9/2}$, $\left|\frac{x^5}{5!}y^{v}(\theta x)\right|<\frac{1}{4^5\cdot 120}\cdot\frac{105}{32}<10^{-4}$.

Според тоа, $\sqrt{5}=2\sqrt{1+1/4}\approx 2\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{8\cdot 4^2}+\frac{1}{16\cdot 4^3}-\frac{1}{24\cdot 4^4}\cdot\frac{15}{16}\right)$ со грешка помала од 10^{-4}.

9. 10,016. **Упат.** $\sqrt[3]{1050}=10\sqrt[3]{1+1/20}$. За функцијата $y=10\sqrt[3]{1+x}=10(1+x)^{1/3}$ имаме:

$y'=\frac{10}{3}(1+x)^{-2/3}$, $y''=-\frac{10\cdot 2}{9}$, $y'''=\frac{10\cdot 2\cdot 5}{27}(1+x)^{-8/3}$;

$y(x)=10\cdot\left(1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{9}\right)+\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{100}{27}(1+\theta x)^{-8/3}$;

за $x=1/20$ имаме: $10\sqrt[3]{1+1/20}\approx 10\left(1+\frac{1}{3\cdot 20}-\frac{2}{9\cdot 20^2}\right)\approx 10{,}016$, со грешка помала од

$\frac{1}{3!20^3}\cdot\frac{100}{27}<10^{-3}$.

10. 0,98769. **Упат.** Да се искористи резултатот од веж. 7 во 6. 4; $9^\circ=\pi/20$ радијани ($1^\circ\approx 0{,}01745$ рад.); бараната точност се постигнува за $n=4$.

11. **Решение.** Според Пр. 1 од 6. 4, имаме $e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta n}$, па $e^n>\frac{n^n}{n!}$, од што следува точноста на даденото неравенство.

12. **Упат.** Од Маклореновата формула за функцијата e^x (Пр. 1 во 6. 4), а поради $e^{\theta x}<e^x$ (за $x>0$ и $0<\theta<1$), имаме $e^x<1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$, од што лесно се добива даденото неравенство.

13. $-1/2$. **Упат.** $\sin x-e^x+1=x-\frac{x^3}{3!}\cos\theta x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}e^{\theta' x}+1=-\frac{x}{3!}(\cos\theta x+e^{\theta' x})$.

14. 1.

15. 0. **Упат.** $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x-x}{x\sin x}$.

II. 7. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. $-2x/(1+x^2)^2$.

4. $2\sin x\cos x$ $(=\sin 2x)$. **Упат.**

$$\Delta y = \sin^2(x+\Delta x)-\sin^2 x = [\sin(x+\Delta x)+\sin x][\sin(x+\Delta x)-\sin x] =$$

$$=\left[2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}\right]\cdot\left[2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

6. $y'=\dfrac{2x}{x^2+4}$. **Решение.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\ln\dfrac{(x+\Delta x)^2+4}{x^2+4}=\ln(1+u)^{\frac{1}{u}\frac{u}{\Delta x}}$, каде што $u=\dfrac{(2x+\Delta x)\Delta x}{x^2+4}$;

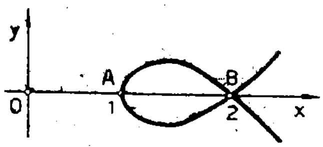
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ln e^{2x/(x^2+4)}=\frac{2x}{x^2+4}.$$

7. $yy_0=2a(x+x_0)$; за $x_0=0$ имаме $y_0=0$, па тангентата е ординатната оска, $x=0$; во а) и б) се претпоставува дека $x_0\neq 0$. а) $S_N=y_0y_0'=2a$. б) $S_T=y_0^2/2a=2x_0$.

8. а) $x=1/2$; тангента: $y=2{,}25$. б) $x=0$; $y=x+2$. в) Не постои.

9. Во обата случаја, за $0<x<a$, имаме $S_T=|y/y'|=(a^2-x^2)/x$.

10. Црт. 1. а) $\varphi_1=90^\circ$ во $A(1,0)$, $\varphi_2=45^\circ$ во $B(2,0)$.



Црт. 1 (10)

Упат. Решавајќи по y, добиваме: $y=\pm(x-2)\sqrt{x-1}$, а од тоа се гледа дека кривата има облик како на црт. 1. Двете гранки на кривата почнуваат во $A(1,0)$ и повторно се "сретнуваат" во $B(2,0)$. Од $y'=\pm\left[\sqrt{x-1}+(x-2)/2\sqrt{x-1}\right]$ следува дека во A обете гранки имаат заедничка тангента $x=1$ (значи, нормална на x - оската), а во B тангенти се $y=x-2$ и $y=-x+2$.

б) $(4/3,\pm 2/3\sqrt{3})$.

11. а) $A(0,1)$; б) 1 и 0. в) 45°.

12. а) $A(0,0)$, $B(4a,4a)$. б) $A{:}+\infty,0$; $B{:}\dfrac{1}{2},2$. в) 90° и $\varphi=arctg(3/4)$.

13. а) $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. б) A: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; B: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

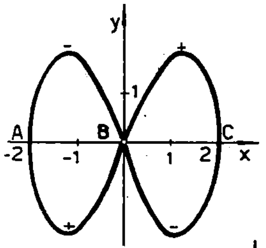
в) $\varphi = arctg 2\sqrt{2}$ (во обете точки).

(Погоре се дадени одговори само за сегментот $[0,2\pi]$.)

14. а) $A(-2,-5/4)$, $B(1/2,5/4)$, $C(2,5/4)$. б) A:13/8, 3/8; B:3/8, −3/2; C:−3/8, 3/8.

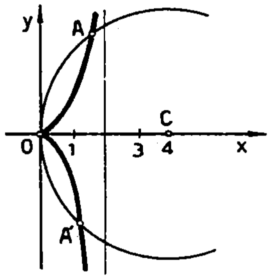
в) A:$tg\varphi=-80/103$, $-30/7$, $48/55$.

15. а) $A(-2,0)$, $B(0,0)$, $C(2,0)$. б) A:$-\infty,+\infty$; B:2,−2; C:$-\infty,+\infty$. в) $\varphi=0$, $arctg(4/3)$, 0.



Црт. 2 (15)

Упат. Решавајќи по y, добиваме $y_{1,2}=\pm x\sqrt{4-x^2}$, од што следува дека кривата има две гранки што се наоѓаат меѓу прави-те $x_1=-2$ и $x_2=2$ (црт. 2 - некој вид **лемниската**).



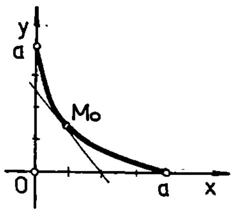
Црт. 3 (16)

16. а) $O(0,0)$, $A(8/5,16/5)$, $A'(8/5,-16/5)$.

б) O:$+\infty,0$; A:3/4,7; A':−3/4,−7. в) $tg\varphi=$ $=90^\circ$, 45°, 45°. **Упат.** Првата крива е кружница со центар $C(4,0)$ и радиус $r=4$. Решавајќи по y во втората равенка, добиваме:

$$y_{1,2}=\pm x\sqrt{x/(2-x)},$$

па значи дека кривата има две гранки и се наоѓа меѓу правите $x=0$ и $x=2$ (црт. 3 - **Диоклесова цисоида**).



Црт. 4 (17)

17. Решение. Равенката на тангентата во точката $M_0(x_0,y_0)$ (црт. 4) може да се претстави во обликот: $x\sqrt{y_0}+y\sqrt{x_0}=$ $=\sqrt{x_0y_0}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}\right)$, т.е. $\left(x/\sqrt{x_0}\right)+\left(y/\sqrt{y_0}\right)=$ $=\sqrt{a}$, па $\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}\right)=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$.

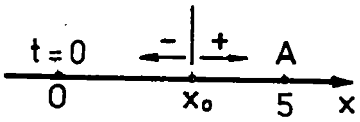
18. а) $a=e$; допир: $M(1,e)$. б) $a=e^{1/e}$; допир: $M(e,e)$. **Решение.** а) Од $y=ax$, $y=a^x$ и $(ax)'=(e^x)'$ го добиваме системот равенки (по x и a): $ax=e^x$, $e^x=a$; така: $ax=a$, $x=1$ (при $a\neq 0$), па $a\cdot 1=e^1$, т.е. $a=e$. Значи, $y=ex$ е тангента на $y=e^x$.

б) Од $y=x$, $y=a^x$ и $(x)'=(a^x)'$ го добиваме системот равенки (по x и a):

$x=a^x$, $a^x\ln a=1$; заменувајќи го a^x со x во втората равенка, добиваме $x=1/\ln a$ $(a>0, a\neq 1)$; потоа, $a^x=1/\ln a$, $x\ln a=-\ln\ln a$ (при $\ln a\neq 1$, т.е. $a\neq e$), па $1=-\ln\ln a$, од каде што добиваме $a=e^{1/e}$.

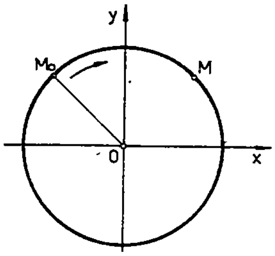
19. $v_{cp}=210+5\Delta t$. а) 215. б) 210,5. в) 210,05. г) 210.

Упат. $\Delta x=10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2-200-2000=210\Delta t+5\Delta t^2$.



Црт. 5 (20)

20. а) $10\cos 2t_0$. б) -5. (Фактот што брзината е негативна значи дека во тој момент тело-то, наоѓајќи се во $x_0=5\sqrt{3}/2$ (црт. 5), се движи во негативната насока, т.е. кон O. И за $t=\pi/6$ телото е во x_0, но сега се движи со брзина 5, т.е. кон граничната точка A.)



Црт. 6 (21)

21. $\omega=\dot{\varphi}=2t-2$. **Упат.** Да претпоставиме дека телото се движи по кружница со радиус 1 и за $t=0$ се наоѓа во положба $M_0(\varphi_0,2)$; црт. 6. Во тој момент аголната брзина $\omega=\dot{\varphi}$ изнесува $\omega_0=-1$, што значи дека телото се движи во негативна насока (т. е. во насоката на движењето на стрелките кај часовникот). Аголната брзина е $\omega=2t-2$, во даден момент t.

За $t_1=1$, т.е. за $\varphi_1=1$ имаме $\omega_1=0$, а за $t>1$, $\omega>0$. Според тоа, за $t\in[0,1]$, имаме движење во негативна насока од M_0 до M_1, а за $t>1$, насоката на движењето е позитивна. (Така, телото ќе се наоѓа во положбата M_0 и за $t_3=2$, кога $\omega_3=2$.)

22. $x=8$, за $t=6$.

23. $t=3s$; $w=0$.

24. -6 (за $t=1$) и 6 (за $t=2$).

25. $w=10$ за $t=3$; $v=7$.

26. $v=3t^2-6t-9>0$ за $t\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$, а $v<0$ за $t\in(-1,3)$.

27. а) За $t=0$; 1; 3. б) За $t=3$: $v_1=8$, $w_1=10$, а $v_2=-10$, $w_2=-20$. За $t>3$: $v_1>0$, $v_2<0$, т.е. телата ќе се движат во различни насоки.

28. а) $v_0=64m/s$. б) $t=2$. в) $y_{max}-80=64$. г) $v=-96m/s$. **Упат.** Телото ќе падне на земја кога ќе биде $y=0$, т.е. за $t=5$ ($t=-1$ отпаѓа, бидејќи треба да биде $t>0$). Брзината во моментот на удирањето на земја ($v=-96m/s$) има негативен знак зашто насоката на движењето е негативна.

29. За $t=2$, $y=126$. Максималната висина $y=144$ се постигнува за $t=3$, кога брзината $v=96-32t=0$; според тоа, за $t=2$, $v=32$, телото се крева нагоре сè до $t=3$.

30. Телата ќе се сретнат на висина $y=49+\dfrac{3v_0^2}{8g}$. **Упат.** Првото тело се движи по законот $y=49+v_0t-gt^2/2$ и ја достигнува максималната висина за $\dot{y}=0$, т.е. за $t_0=v_0/g$; од тој момент телото паѓа. Второто тело доцни за t_0, па значи се движи по законот $y=49+v_0(t-t_0)-g(t-t_0)^2/2$, при што $t\geq t_0=v_0/g$. Обете тела ќе се сретнат во моментот $t_1>t_0$, кога: $49+v_0t-gt^2/2=49+v_0(t-t_0)-g(t-t_0)^2/2$, т.е. за $t_1=3v_0/2g$.

31. $v_0=7\sqrt{g/10}\approx 6{,}93 m/s$. **Упат.** Времето t_0 по кое двете тела паднале на земја се наоѓа од равенството $gt^2/2=45$, т.е. $t_0=\sqrt{90/g}$. Телото од точката A се движи по законот $y=24+v_0t-gt^2/2$. Поради $y(t_0)=0$, имаме: $24+v_0t_0-gt_0^2/2=0$, од што следува $v_0=(gt_0^2-48)/2t_0=7\sqrt{g/10}$ $(t=\sqrt{90/g})$.

32. $x_0=0$; $f'(0^+)=-2$, $f'(0^-)=2$. **33.** $x_0=1$; $f'(1^-)=-1$, $f'(1^+)=1$.

34. $x_1=2$, $x_2=3$; $f'(2^-)=-\infty$, $f'(2^+)=+\infty$; $f'(3^-)=-\infty$, $f'(3^+)=+\infty$.

35. $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$; $f'(-1^+)=+\infty$, $f'(0^-)=+\infty$, $f'(0^+)=-\infty$, $f'(1^-)=-\infty$.

Упат. $D_f=[-1,1]$; $f'(x)=-x/|x|\sqrt{1-x^2}$ за $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

36. $y'(0^+)=+\infty$, $y'(0^-)=-\infty$. **37.** $y'(2^-)=+\infty=y'(2^+)$. **38.** $y'(1^-)=-\infty$.

39. $y'(2^+)=+\infty$, $y'(2^-)=-\infty$. **40.** $2x-y=1$ (лева), $2x+y=3$ (десна).

41. $2x+y=0$ (лева), $2x-y=0$ (десна).

43. Со помош на (4) и (5) од **1. 2** и (2) од **2. 3**, добиваме дека за $\dot{x}\neq 0$, $\dot{y}\neq 0$ се точни следниве формули:

$$S_N=\left|\frac{y\dot{y}}{\dot{x}}\right|,\quad S_T=\left|\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}\right|,\quad N=\left|\frac{y}{\dot{x}}\right|\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2},\quad T=\left|\frac{y}{\dot{y}}\right|\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

За конкретниот случај: $S_N=a|\sin t|$, $S_T=2a\sin^2\frac{t}{2}\left|tg\frac{t}{2}\right|$, $N=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, $T=2a\left|tg\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\right|$.

44. **Решение.** Равенките што го определуваат законот на движењето се параметарски равенки на траекторијата. Собирајќи ги квадратите x^2, y^2, добиваме дека кружницата $x^2+y^2=25$ е равенка на траекторијата. Имајќи предвид дека $v^2=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$, каде што $v_x=\dot{x}$, $v_y=\dot{y}$, добиваме $v^2=25\omega^2$ т.е. $v=25\omega$. Според тоа, имаме кружно движење со константна брзина.

45. а) $2xf'$. б) $\sin 2x\cdot\left(f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right)$. **46.** $1000!$.

47. а) За секој $n\in\mathbb{N}$. б) За секој $n\geq 2$. в) Ако $x\neq 0$, тогаш $f'(x)=x^{n-2}\left(nx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$, за секој $n\in\mathbb{N}$, $f'(0)=0$ за $n\geq 2$. Според тоа $f'(x)$ е непрекината функција и во $x=0$, за $n\geq 3$.

48. $f(a)=0$, $f(a+\Delta x)-f(a)=\Delta x\cdot\varphi(a+\Delta x)$; $f'(a)=\varphi(a)$.

49. $f(0^+)=\varphi(a)$, $f(0^-)=-\varphi(a)$. Ако $\varphi(a)=0$, тогаш $f'(0)=0$.

50. а) 1,2. б) 0,001. в) $\frac{\pi}{4}+0{,}01$. г) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}$.

51. $-6/(9-4x^2)$, за $|x|<\frac{3}{2}$. **52.** $-1/2\sqrt{x(1-x)}$, за $0<x<1$.

53. $y'=2/(1+x^2)$ за $|x|<1$, $y'=-2/(1+x^2)$ за $|x|>1$.

54. $y'=(1-x^2)/(x^4+5x^2+1)$.

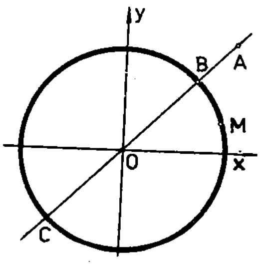
55. $\ln y=3x\ln(x^2+1)\Rightarrow y'=(x^4+1)^{3x}\left[3\ln(x^2+1)+\frac{6x^2}{x^2+1}\right]$.

56. $y+xy'+y'\cos y=0\Rightarrow y'=-y/(x+\cos y)$. **57.** $y'=-(2xy+y^2)/(2xy+x^2)$.

58. $A(4,0)$, $B(0,2)$; t_A: $y=2(x-4)$, t_B: $y-2=2x$. **59.** $y=1$. **60.** $x-y=3$.

61. а) 0 е НМВ, за $x=1$ и $x=2$; 132 е НГВ за $x=-10$. Во $x=1,2$ функцијата нема извод; За $x=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$ е локален максимум. б) 3 е НГВ за $x=-1$, а 1 е НМВ за $x=1$; функцијата опаѓа.

62. Најблиската точка е $B(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, а најоддалечената е $C(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.



Црт. 7 (62)

Решение. Бараните точки се пресеци на кружницата и $y=x$ - правата што минува низ точката A и центарот на кружницата. (црт. 7).

Задачата може да се реши и на друг начин. Ако $M(x,y)$ е која било точка од кружницата, тогаш

$$z=\overline{AM}^2=(x-1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2x-2y+2=3-2x-2y.$$

Ставајќи $x=\cos t$, $y=\sin t$, добиваме $z=3-2(\sin t+\cos t)$. Треба да ги најдеме НГВ и НМВ на з, во $[,2\pi]$. Имаме: $z(0)=z(2\pi)=1$, а стационарни точки (т.е. решенија на равенката $z' = -2\cos t - \sin t) = 0$; $tg\, t = 1$) се: $t_1 = \pi/4$ и $t_2 = 5\pi/4$. Поради $z(t_1) = 3 - 2\sqrt{2} < 1$ и $z(t_2) = 3 + 2\sqrt{2} > 1$, добиваме дека $B(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$ е најблиската, а $C(\cos\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{4})$ - најоддалечената точка (на кружницата) од A.

63. $h = a/\sqrt{2}$. **Решение.** Поради $\cos\varphi = a/d$, добиваме $I = \frac{k}{a^2}\sin\varphi\cos^2\varphi$. Да ставиме $\sin\varphi = x$. Треба да ја најдеме НГВ на функцијата $y = x(1-x^2)$ на сегментот $[0,1]$ (притоа: $y = Ia^2/k$). Поради $y(0) = y(1) = 0$, НГВ y се добива од $y' = 1 - 3x^2 = 0$, за $x = 1/\sqrt{3}$. Значи, $\sin\varphi = 1/\sqrt{3}$. Бидејќи $h = a tg\varphi = a\sin\varphi/\cos\varphi$ (в. црт. 1 во текстот на задачата), добиваме $h = a/\sqrt{2}$.

64. Не, бидејќи $f'(0)$ не постои.

65. Поради $(x^3 + 6x - 5)' = 3x^2 + 6 > 0$ равенката има најмногу еден корен, а секоја равенка од трет степен има барем еден корен.

66. Ако ставиме $f(x) = x^4 - 4x - 3$, добиваме дека $f'(x) = 4x^3 - 4 = 0$ има единствен корен $x = 1$. Кога дадената равенка би имала три различни корени $x_1 < x_2 < x_3$, според теоремата на Рол, $f'(x)$ би имал барем два корена. Поради $f(-2) = 21$, $f(0) = -3$, $f(2) = 5$, равенката $f(x) = 0$ има две решенија.

67. Применувајќи ја теоремата на Лагранж на функцијата $\ln x$ во $[a,b]$, добиваме дека $\ln(b/a) = \ln b - \ln a = (b-a)/c$, за некој $c \in (a,b)$. Потоа, поради $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, добиваме: $\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}$ т.е. дадените неравенства.

68. И левата и десната страна имаат извод $1/(1+x^2)$ (за $x \neq 1$), па значи се разликуваат за константа. Но, за $x = 0$ тие се еднакви, па значи равенството е точно за секој $x \in (-\infty, 1)$. За $x = \pi/3$, десната страна е $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, а лесно се проверува дека е толку и левата.

69. а), б) За секој $x \in \mathbb{R}$.

70. Не, не е исполнет условот (iii): $g'(0) = 0$.

71. 2.

72. 1.

73. а) 0. б) 1; не може со Лопиталово правило (зашто $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$ не постои).

74. $1/3$.

75. $(\ln 2)^2$.

76. $\dfrac{n-m}{2}$. **Упат.** За $m=n$, резултатот е јасен; за $m<n$, изразот да се сведе на заедничка дропка, да се примени Лопиталовото правило и, по соодветно кратење, да се примени уште еднаш. Резултатот е точен и за $m>n$, а и уште повеќе, за произволни $m, n \in \mathbb{R}$.

77. За $f(x)=1-2x$ и $g(x)=2+4x$, не важи условот (iii) од Лопиталовото правило (Т. 2 во 3. 4): $f(x)$ и $g(x)$ не се стремат кон нула кога $x \to 0$.

78. $f \cdot g = f/(1/g)$ или $f \cdot g = g/(1/f)$. а) 0. **Упат.** $\sqrt[3]{x}\ln x = \ln x / x^{-1/3}$. б) 1. **Упат.** $(x-\pi/2)\cdot tgx = (x-\pi/2)/ctg\,x$. в) 0.

79. $f-g = f\cdot g\cdot\left[\dfrac{1}{g}-\dfrac{1}{f}\right]=\left[\dfrac{1}{g}-\dfrac{1}{f}\right]/\dfrac{1}{f\cdot g}$. а) $\dfrac{1}{2}$. **Упат.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$. б) $\dfrac{1}{2}$.

в) $-\dfrac{2}{3}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2x-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^2\sin^2x}$;

$\dfrac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\dfrac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}$; границата од првиот израз се наоѓа непосредно: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\dfrac{\sin x}{x}\right)=2$, а за вториот ќе го примениме правилото на Лопитал: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\cdot\sin x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\dfrac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\dfrac{1}{3}$.

Така, бараната граница е $2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$.

81. а) 1. б) e. в) 1. г) 1.

82. Расте во $x=-0{,}5$; опаѓа во $x=2$ и $x=-3$; во $x=1$ ни расте ни опаѓа (има екстрем).

83. $f'(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; $f(x)$ опаѓа во $(-\infty,1)$ и во $(2,3)$, а расте во $(1,2)$ и $(3,+\infty)$; $f(1)=0$ и $f(3)=0$ се минимуми, а $f(2)=1/4$ е максимум; нема НМВ ни НГВ.

84. Опаѓа во: $(-\infty,-1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2},+\infty)$; расте во: $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$; $f(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2e}$ е локален минимум и НМВ, а $f(1/\sqrt{2})=1/\sqrt{2e}$ е локален максимум и НГВ.

85. Расте во $(-\infty,-1)$ и во $(2,+\infty)$, а опаѓа во $(-1,2)$; $f(-1)=7{,}5$ е максимум, а $f(2)=-6$ е минимум.

86. Опаѓа во $(-\infty,-3)$ и во $(3,+\infty)$, а расте во $(-3,3)$; $f(-3)=-1/4$ е апсолутен минимум, а $f(3)=1/4$ е апсолутен максимум.

87. Расте во $(-\infty,1)$ и во $(2,+\infty)$, а опаѓа во $(1,2)$; $f(1)=3$ е максимум, а $f(2)=0$ е минимум, но $f'(2^-)=-\infty$, $f'(2^+)=+\infty$; нема ни НМВ ни НГВ.

88. Квадрат со страна $d/\sqrt{2}$.

89. Основа $10\sqrt{2}$, **висина** 5.

90. Точката $(6,0)$. **Упат.** $z=tg\,\varphi=tg(\beta-\alpha)=(tg\beta-tg\,\alpha)/(1+tg\beta tg\,\alpha)$; $tg\,\alpha=4/x$, $tg\beta=9/x$; $z=5x/(x^2+36)$, $z_{max}=5/12$ за $x=6$.

91. $H=2R/\sqrt{3}$, $r=R\sqrt{2/3}$.

92. $H=4R/3$, $r=2R\sqrt{2}/3$.

93. а) $r=H=2m$. б) $H=s/\sqrt{3}$. **94.** а) $5\sqrt{3}\,cm$. б) $s/\sqrt{3}$. **95.** $H=4R$. **96.** $H=2h$

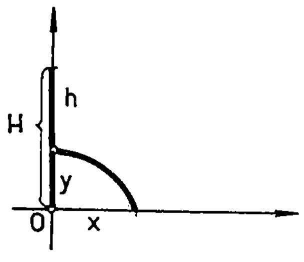
97. а) $r=3$. б) $r=6$. в) $r=RH/2(H-R)$ кога $H>2R$ (тогаш $P=\pi RH^2/2(H-R)$), а $r=R$ кога $H\le 2R$ (тогаш цилиндарот е "дегенериран" и $P=R^2\pi$).

98. $s=3r$; $M=3B$. **Упат.** $P=\pi(r^2+rs)=\pi r^2\left(1+\frac{s}{r}\right)$, $V=\frac{\pi}{3}r^2H$; $H=r\sqrt{(s/r)^2-1}$, $s/r=t$,

$r^2=P/\pi(1+t)$; $V=c\cdot(1+t)^{-3/2}(t^2-1)^{1/2}$, каде што $c=P^{3/2}/3\sqrt{\pi}$.

$V'=c\cdot(-t^2+2t+3)/2(1+t)^{5/2}\cdot(t^2-1)^{1/2}=0$ за $t_1=3$ (и $t_2=-1$, коешто отпаѓа), па $s/r=3$.

99. а) $(4,3)$. б) $(a/\sqrt{2},b/\sqrt{2})$.



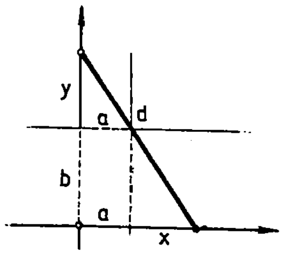
Црт. 8 (100)

100. $y=H/2$. **Упат.** $x=2\sqrt{y(H-y)}$. **Имено,** проекциите на поместувањето се: $x=vt$, $y=gt^2/2$; брзината v на истечувањето на течноста низ отворот (според **теоремата на Торичели**) е: $v=\sqrt{2gh}$, каде што h е висинската разлика меѓу нивото на течноста и (средината на) отворот (црт. 8), т.е. $v=\sqrt{2g(H-y)}$. Заменувајќи $t=x/v$, т.е. $t^2=x^2/2g(H-y)$ во $y=gt^2/2$, добиваме $x=2\sqrt{y(H-y)}$.

101. $300/\pi$ и 0. (Строго земено, задачата нема решение. Имено, ако x и y се димензиите на правоаголникот, тогаш периметарот на стадионот ќе биде $2x+\pi y=300$, од каде што $x=150-\pi y/2$, па плоштината ќе биде $P=xy+y^2\pi/4=150y-y^2\pi/4$, а $P'=150-y\pi/2=0$ за $y=300/\pi$. Значи, $x=0$, па стадионот би имал кружна форма со радиус $r=y/2=150/\pi$, наместо да биде "правоаголно поле со приклучени полукругови кон две негови страни".)

102. Помалата основа е половина од големата.

103. $9\,km$ по патот, а $10\,km$ по беспаќето.



Црт. 9 (104)

104. а) $d=125m$. б) $d=(a^{2/3}+b^{2/3})^{2/3}$. **Упат.** Според црт. 9: $y:a=b:x$, $y=ab/x$;

$d^2=(x+a)^2+(y+b)^2=(x+a)^2+(b+ab/x)^2$

$(d^2)'=2(x+a)(x^3-ab^2)/x^3=0$, за $x=\sqrt[3]{ab^2}$.

105. а) $d_1=s\pi/(\pi+4)$, $d_2=4s/(\pi+4)$. б) $d_1=s$, $d_2=0$, т.е. да се направи само кружница. **Упат.** $P=r^2\pi+a^2$, $2r\pi+4a=s$, $r=(s-4a)/2\pi$,

$$P(a)=\pi\left(\frac{s-4a}{2\pi}\right)^2+a^2,\quad a\in\left(0,\frac{s}{4}\right);\quad P'=\frac{2}{\pi}[(\pi+4)a-s]=0 \text{ за } a_1=s/(\pi+4);$$

$P(a_1)=s^2/4(\pi+4)$; $P(0)=s^2/4$, $P\left(\dfrac{s}{4}\right)=\dfrac{s^2}{16}$. $P(a_1)$ е НМВ, а $P(0)$ е НГВ во сегментот $[0,s/4]$.

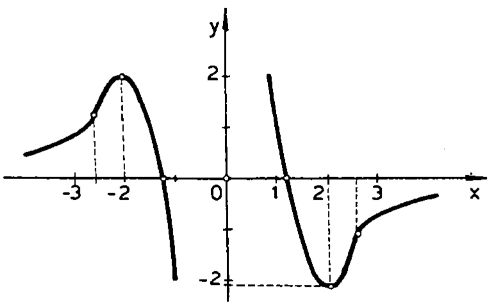
106. $x=3/2$, $y=\pm\sqrt{3/2}$.

107. $A(2,1)$ е единствената превојна точка, но $y''(2^-)=-\infty$, $y''(2^+)=+\infty$. Во $(-\infty,2)$ кривата е конвексна, а во $(2,+\infty)$ е конкавна.

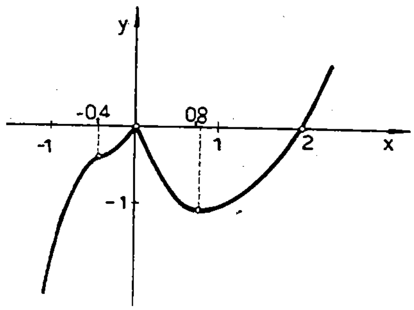
108. $O(0,0)$ е единствената превојна точка; $y''(0)=0$. Во $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(0,\sqrt{3})$ е конвексна, а во $(-\sqrt{3},0)$ и $(\sqrt{3},+\infty)$ е конкавна.

109. $|a|<2$. **110.** $a=-3/2$, $b=9/2$. **111.** $(x-2)^2+(y-23/6)^2=1/36$, низ $A(2,4)$.

113. $2a/(x+a)^2$. **114.** a. **115.** $1/4\sin(t/2)$. **116.** b^2/a. **117.** $A(0,1)$.



Црт. 10 (119)



Црт. 11 (120)

119. $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$; непарна, па ја испитуваме само во $\mathbb{R}^+$. Нула за $x=2/\sqrt{3}$; $y>0$ за $x\in(0,2/\sqrt{3})$, $y<0$ за $x\in(2/\sqrt{3},+\infty)$. Асимптоти: $x=0$ и $y=0$. $y'=6(x^2-4)/x^4$, $y''=-12(x^2-6)/x^5$; $y'=0$ за $x=2$; опаѓа во $(0,2)$, расте во $(2,+\infty)$. $y''=0$ за $x=\sqrt{6}$; конкавна во $(0,\sqrt{6})$, конвексна во $(\sqrt{6},+\infty)$. График: црт. 10.

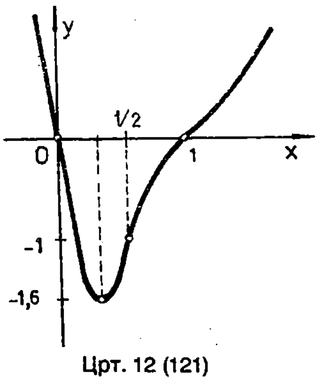
120. $D=\mathbb{R}$; $y'=(5x-4)/3x^{1/3}$, $y''=(10x+4)/9x^{4/3}$. Други податоци - во шемата; график на црт. 11.

Шема (120)

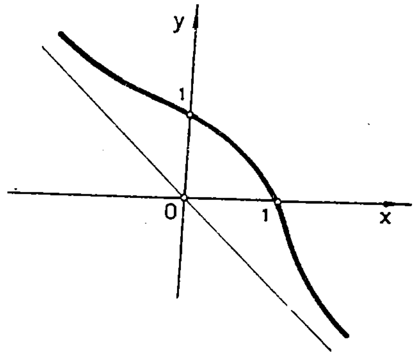
x	$-\infty$		-1		-0,4		0		0,8		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	-0,6	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\approx -1,\ldots$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'				+				-	0		+				
y''			$\cap$	-	0	+			$\cup$		+		$\cup$		

121. $D=\mathbb{R}$; $y'=16(x-1)^2(4x-1)$, $y''=96(x-1)(2x-1)$; $y_{\min}=-27/16$ за $x=1/4$; $(1/2,-1)$ и $(1,0)$ превои; график - црт. 12 (121).

122. $y'=-x^2\cdot(1-x^3)^{-2/3}$; $y''=-2x\cdot(1-x^3)^{-5/3}$; опаѓа во $D=\mathbb{R}$; превојни точки: $(0,1)$ и $(1,0)$; $y=-x$ е асимптота; график - црт. 13 (122).



Црт. 12 (121)



Црт. 13 (122)

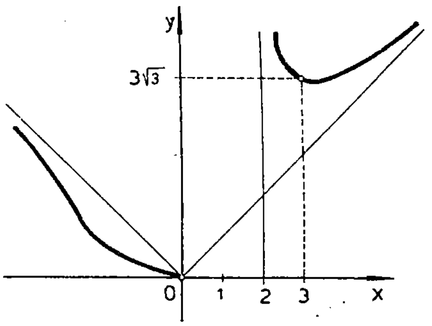
123. $D=(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$; $y(0)=0$, $y>0$ за $x\in D\backslash\{0\}$; $y=|x|\sqrt{x/(x-2)}$; $y=|x|$ е асимптота; $y'=x^2(x-3)/(x-2)^2y$; за $x=3$: $y=3\sqrt{3}$ е минимум; график - црт. 14.

124. $D=\mathbb{R}$; најмал период 2π; испитуваме во $[0,2\pi]$. $y(0)=y(\pi)=y(2\pi)=0$; $y(x)>0$ за $x\neq 0,\pi,2\pi$. $y'=\sin x\cos x(4+\sin x)/(2+\sin x)^2$; екстреми има во: $x=0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. График: Црт. 15.

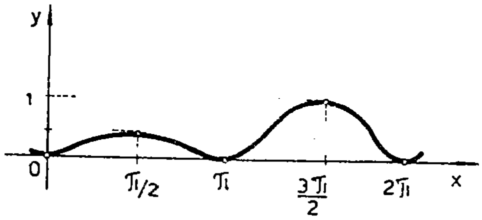
125. $-(2+3\sqrt{x})/16\sqrt{(x+x\sqrt{x})^3}$.

126. $-(1+2\ln x)/x^3$.

127. $f'''(5)=5493/256$. **Решение.** Да ставиме $h(t)=(t-1)^{1/2}$; според формулата на Лајбниц: $f'''(t)=h'''g+3h''g'+3h'g''+hg'''$. Поради $h'=\frac{1}{2}(t-1)^{1/2}$, $h''=-\frac{1}{4}(t-1)^{-3/2}$, $h'''=\frac{3}{8}(t-1)^{-5/2}$, имаме: $h(5)=2$, $h'(5)=\frac{1}{4}$, $h''(5)=-\frac{1}{32}$, $h'''(5)=\frac{3}{256}$. Според тоа, $f'''(5)=5493/256$.



Црт. 14 (123)



Црт. 15 (124)

128. - 15.

129. а) $3\cdot 2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\pi/2]$, за $n\in\mathbb{N}$. б) $(-1)^n 6\cdot(n-4)!/x^{n-3}$.

130. Да.

131. $2^x\approx 1+x\ln 2+\frac{x^2}{2}(\ln 2)^2+\frac{x^3}{6}(\ln 2)^3$.

132. а) $\sqrt[3]{e}\approx 113/81$. **Упат.** $\sqrt[3]{e}=e^{1/3}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!3^2}+\ldots+\frac{1}{n!3^n}+\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{3^{n+1}}e^c$, $0<c<1/3$; за $n=3$. б) 2,0017. **Упат.** $\sqrt[7]{129}=\sqrt[7]{128+1}=2\sqrt[7]{1+1/2^7}$; $f(x)=2\sqrt[7]{1+x}$ итн.

III. ИНТЕГРАЛИ

III. 1. НЕОПРЕДЕЛЕН И ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

III. 1. 1.

1. а) x^2+2. б) $arctgx+2$. в) $3-\cos x$.

3. $F(x)=\ln x-2$ за $x>0$, $F(x)=\ln(-3)+3-\ln 2$ за $x<0$.

4. $F(x)=-1-1/x$ за $x>0$, $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{5}{2}$ за $x<0$.

5. $F(x)=x^{2/3}-3$ за $x>0$, $F(x)=x^{2/3}+3-\sqrt[3]{4}$ за $x<0$.

6. Не, само едниот услов не е доволен. (Така, во 3, со $F(1)=2$ е определена $F(x)$ за $x>0$, но не и за $x<0$.)

10. Равенството може да се смета за точно и за $x=0$ во смисла на обопштувањата, изнесени во забелешката 5. (Имено: $f(x)=x\ln x\to 0$ кога $x\to 0^+$, т.е. $f(0^+)=0$ (постои), потоа $F(0^+)=C$ (постои) и $F'(0^+)=0=f(0^+)$.).

15. а) $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$, $k\in\mathbb{Z}$. б) $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. в) $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$. г) $[-1,1]$. д) $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$.

16 - 17. **Решение.** Нека $F(x)$ е примитивна за $f(x)$ во некој интервал. Тогаш:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),\quad d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

19. Изразите x^2+C и x^2+1+C не смееме да ги изедначиме (тоа следува од дефиницијата на неопределен интеграл.

20. Не. На пример, x^2-1 е примитивна функција за $2x$ што не се содржи во $\{x^2+C^2 | C\in\mathbb{R}\}$.

23. $\int sh x\,dx=ch x+C$; $\int ch x\,dx=sh x+C$; $\int\frac{dx}{ch^2x}=th x+C$; $\int\frac{dx}{sh^2x}=-cth x+C$.

III. 1. 2.

---

1. $\ln|x+3|+C$.

2. $\frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x-5}+C$.

3. $e^{x^2}+C$.

4. $\frac{1}{4}\ln^4|x|+C$.

5. $\frac{1}{9}(x^2+1)^9+C$.

6. $\ln(1+x^2)+C$.

7. $\ln(e^x+1)+C$.

8. $e^{\sin x}+C$.

9. $tg\sqrt{x}+C$.

10. $\ln|2-3x^2|+C$.

11. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x+2}{3x-2}\right|+C$.

12. $sh x^2+C$.

13. $-cth\sqrt{x}+C$.

14. $-ctg\,2x+C$. **Упат.** $2sh x\,ch x=sh 2x$.

III. 1. 3.

1. **Упат.** На пример, за (3). Ако $G(x)$ е која било примитивна функција за $f(x)$ во $(a,+\infty)$, тогаш постои константа C, таква што $G(x)=F(x)+C$, за секој $x\in(a,+\infty)$. Според тоа, $\lim\limits_{b\to+\infty}[G(b)-G(a)]=\lim\limits_{b\to+\infty}[F(b)+C-(F(a)+C)]=\lim\limits_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]$.

2. а) Функцијата $\ln|x|$ не е примитивна за $1/x$ во интервал што ги содржи -1 и e. (Таа е примитивна во секој од интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$.) б) Да.

3. $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$. 4. $-\frac{1}{4}\ln 3$. 5. $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$. 6. $2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

7. $1-\cos 1$. 8. $arctge-\frac{\pi}{4}$. 9. $\frac{1}{5}$. 10. Дивергентен.

11. -1. 12. $\frac{\pi^2}{8}$. 13. 1. 14. Дивергентен.

15. $\frac{1}{1-p}$ за $p<1$; за $p\geq 1$ - дивергентен. 16. $1/\ln 2$. 17. Дивергентен.

III. 2. МЕТОДИ НА ИНТЕГРИРАЊЕ

III. 2. 1.

1. $\frac{1}{3}tg^3x+C$. 2. $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$. 3. $tg\,x+\frac{1}{3}tg^3x+C$.

4. $tg\,x+\frac{2}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+C$. 5. $\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C$.

6. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$. 7. $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

8. Не. **Упат.** (ii). На пример, ако $f(x)$ е функцијата на Дирихле (в. **I. 2. 2**), а $g(x)=1$ за $x\in\mathbb{J}$ и $g(x)=0$ за $x\in\mathbb{Q}$, тогаш $f(x)+g(x)=1$ за секој $x\in\mathbb{R}$, има примитивна функција (во кој било интервал), а $f(x)$ и $g(x)$ немаат (во ниеден интервал).

9. $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}+C$. 10. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$.

11. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctg x+C$. **12.** $\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4)+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

13. 44. **14.** $7/4$. **15.** $-2/3$. **16.** $\pi/4$. **17.** $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

18. $2/3$. **19.** $35\frac{1}{15}-32\ln 3$. **20.** $\pi/16$.

III. 2. 2.

1. $x\sin x+\cos x+C$. **2.** $\frac{1}{2}(x^2+1)arctg x-\frac{x}{2}+C$. **3.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

4. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$. **5.** $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$.

6. $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **7.** $x^3\sin x+3x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x+C$.

8. $(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)e^x+C$. **9.** $\frac{\pi}{2}-1$. **10.** 1. **11.** $(e^2+3)/8$.

12. 1. **13.** $a/(a^2+b^2)$. **14.** $b/(a^2+b^2)$.

III. 2. 3.

1. $-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+C$.

2. $\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{15}{48}\cos x\sin x+\frac{15}{48}x+C$.

3. $\frac{1}{12}\cos^2 4x\sin 4x+\frac{1}{6}\sin 4x+C$. **4.** $-\frac{1}{12}\sin^3 3x\cos 3x-\frac{1}{8}\sin 3x\cos x+\frac{3}{8}x+C$.

5. $\frac{x}{20(x^2+5)^2}+\frac{3x}{200(x^2+5)}+\frac{3}{200\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

6. $-\frac{x}{54(x^2-9)^3}+\frac{5x}{1944(x^2-9)^2}-\frac{5x}{11664(x^2-9)}-\frac{5}{69984}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$.

7. $-\dfrac{x}{20(81x^2-5)^2}+\dfrac{3x}{200(81x^2-5)}+\dfrac{1}{1200\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{9x-\sqrt{5}}{9x+\sqrt{5}}\right|+C$.

Упат. $\displaystyle\int\frac{dx}{(81x^2-5)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{d(9x)}{((9x)^2-5)^2}$.

8. $\dfrac{x+1}{4(x^2+2x+2)^2}+\dfrac{3(x+1)}{8(x^2+2x+2)}+\dfrac{3}{8}arctg(x+1)+C$. **Упат.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}=\int\frac{d(x+1)}{((x+1)^2+1)^3}$.

9. Упат. 1°.

$$I_k=\int\frac{dx}{\sin^k x};\quad I_{k-2}=\int\frac{dx}{\sin^{k-2}x}=-\int\sin^{-k+1}x\,d(\cos x)=$$

$$=-\cos x\cdot\sin^{-k+1}x+(-k+1)\int\sin^{-k}x\cdot\cos^2 x\,dx=-\cos x\cdot\sin^{-k+1}x-(k-1)I_k+(k-1)I_{k-2}.$$

Упат. 2°. За да се добие рекурентна формула како (1) и за $n<0$, (1) да се запише во обликот $I_{n-2}=\dfrac{n}{n-1}I_n+\dfrac{\cos x\sin^{n-1}x}{n-1}$ и да се стави $n-2=-k$; тогаш $I_{-k}=-\dfrac{\cos x\sin^{-k+1}x}{k-1}+\dfrac{k-2}{k-1}I_{-k+2}$, т.е. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^k x}=-\frac{\cos x}{(k-1)\sin^{k-1}x}+\frac{k-2}{k-1}\int\frac{dx}{\sin^{k-2}x}$, $k=2,3,\ldots$

11. $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|+C$. **Упат.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg\frac{x}{2}}=$

$=\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|+C$. (Види и вежба 15 во 1. 2.)

12. $\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|ctg\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\right|+C$.

Упат. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\ln\left|tg\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|+C=\ln\left|ctg\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|+C.$

13. $-\dfrac{\cos 5x}{15\sin^3 5x}-\dfrac{2}{15}\cdot ctg5x+C$. **Упат.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 5x}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x)}{\sin^4 5x}$.

14. $\dfrac{\sin 8x}{24\cos^3 8x}+\dfrac{1}{12}\cdot tg8x+C.$

15. - 17. $n=2k$: $\dfrac{(2k-1)(2k-3)\ldots3\cdot1}{2k(2k-2)\ldots4\cdot2}\cdot c$; за $n=2k+1$: $\dfrac{2k(2k-2)\ldots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\ldots3\cdot1}\cdot d$, каде што c и d (во 15, 16, 17) се, како што следува:

15: $c=\dfrac{\pi}{2}$, $d=-\dfrac{\pi}{2}$; **16**: $c=\pi$, $d=2$; **17.** $c=\pi$, $d=0$.

20. $n=2k$: $\pi^{2k}-2k(2k-1)\pi^{2k-2}+2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)\pi^{2k-4}-\ldots+(-1)^k(2k)!2$;

за $n=2k+1$: $\pi^{2k+1}-(2k+1)2k\pi^{2k-1}+(2k+1)2k(2k-1)\pi^{2k-3}+\ldots+(-1)^k(2k+1)!\pi$.

21. $n=2k$: $-2k\cdot\pi^{2k-1}+2k(2k-1)(2k-2)\pi^{2k-3}-\ldots+(-1)^k(2k)!\pi$;

$n=2k+1$: $-(2k+1)\pi^{2k}+(2k+1)2k(2k-1)\pi^{2k-2}+\ldots+(-1)^{k+1}(2k+1)!\cdot2$.

26. $\Gamma(n+1)=n!$

III. 2. 4.

---

1. $\dfrac{3}{2}\cdot(x+1)^{2/3}-3(x+1)^{1/3}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C.$ **2.** $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+\ln(\sqrt[4]{x}-1)^4+C.$

3. $\dfrac{1}{2}\arcsin x-\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$ **4.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C.$

5. $\dfrac{1}{2}(x^2+1)-\dfrac{1}{2(x^2+1)}-\ln(x^2+1)+C.$ **6.** $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

7. $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C.$

8. $\dfrac{1}{11}\cos^{11}x-\dfrac{5}{9}\cos^9 x+\dfrac{10}{7}\cos^7 x-2\cos^5 x+\dfrac{5}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

9. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C.$ **Упат.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}$, $\cos x=t$. Види и вежба 11 од **2. 3.**

10. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$ **Упат.** $\sin x=t$. Види и 15 од **1. 2.**

11. $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C.$ **Упат.** Види и 11 од **2. 3.**

12. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$. **13.** $2-\pi/2$. **14.** $\sqrt{3}-\pi/3$. **15.** $\frac{1}{5}\ln 112$. **16.** $4-\pi$.

17. Упат. $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$; во првиот од интегралите на десната страна да се изврши замената $x=-t$ и да се земе предвид дека $f(-t)=f(t)$. Слично за случајот на непарност.

III. 3. ИНТЕГРИРАЊЕ НА НЕКОИ КЛАСИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

III. 3. 1.

---

1. $\frac{1}{22}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C$. **2.** $\frac{1}{5}\ln(x-1)^2(x+4)^8+C$. **3.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{5}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$.

4. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln(x^2+2)+\frac{4\sqrt{2}}{3}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

Упат. $x^4+2x^3+3x^2+4x+2=(x+1)(x^3+x^2+2x+2)$ итн.

5. $\ln|(x-1)(x+2)|-\ln|x|+C$. **6.** $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$.

7. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$.

8. $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C$. **Упат.** Прво, броителот да се подели со именителот.

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$. **Упат.** $x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$.

10. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}arctgx+C$.

11. а) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3}+\frac{5}{16}arctgx+C$. б) $\frac{x}{6(x^2+1)^3}+\frac{5x}{24(x^2+1)^2}+\frac{5x}{16(x^2+1)}+\frac{5}{16}arctgx+C$.

12. а) $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}arctgx+C$.

б) $-\frac{1}{32}\left(\frac{x}{(x^2-1)^2}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)+\frac{9}{64}\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\right)+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}arctgx+C$.

Упат. Според резултатот од Пр. 7, имаме

$$\frac{1}{(x^4-1)^3}=\frac{1}{8(x^2-1)^3}-\frac{3}{16(x^2-1)^2}+\frac{3}{16(x^2-1)}-\frac{1}{8(x^2+1)^3}-\frac{3}{16(x^2+1)^2}-\frac{3}{16(x^2+1)},$$

при што, овде, x^2 ја има улогата на x. Потоа се користи формулата (3) од **2. 3** и се добива горниот резултат, а лесно се покажува дека тој е согласен со резултатот од а).

13. $\ln\frac{9}{8}$. **14.** $\frac{526}{15}-32\ln3$. **15.** $arctg3-arctg2$. **16.** $\frac{\pi}{16}$.

17. Дивергентен несвојствен интеграл. **18.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

III. 3. 2.

---

1. $6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C$.

2. $\frac{3}{14}(x+2)(2x-3)\sqrt[3]{x+2}+C$.

3. $2arctg\sqrt{x+1}+C$.

4. $\ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{|x+2+\sqrt{x+1}|}-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C$.

5. $-\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C$.

6. $-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right|+C$.

7. $\ln|x|-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$.

8. $-\ln\left|3+x-\sqrt{x^2+6x+5}\right|+C$.

9. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-2}{3}+C$.

10. $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{3}{2}\arcsin2x+C$.

11. $\ln\left|1+\sqrt{x^2+1}/x\right|-\left(\sqrt{1+x^2}/x\right)+C$. **Упат.** Смена: $\sqrt{1+x^2}=tx+1$. (Види и зад. 12.)

12. а) $(x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C$.

13. $\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}+C$.

14. $\frac{1}{3}(x+x^2)^{3/2}-\frac{1}{8}(1+2x)(x+x^2)^{1/2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$, за $x>0$.

15. (i) **Решение.** Од $ax^q+b=t^s$ добиваме $aqx^{q-1}dx=st^{s-1}dt$, $dx=\frac{s}{aq}x^{1-q}t^{s-1}dt$. Поради $x^q=\frac{t^s-b}{a}$, имаме $x^{p+1}=\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{(p+1)/q}$, па $\int x^p(ax^q+b)^r dx=\frac{s}{aq}\int x^{p+1}x^{-p}t^{k+s-1}dt=$
$=\frac{s}{aq}\int\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{-1+(p+1)/q}t^{k+s-1}dt$. Бидејќи $\frac{p+1}{q}$ е цел број, следува дека подинтегралната функција во последниот интеграл е рационална по t.

16. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C$.

17. $\frac{1}{2}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C$.

18. $\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|+C$.

19. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$.

20. $\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{(x+2)\sqrt{6}}+C$.

21. $\frac{1}{5}\ln 112$.

22. $8-9\pi/2\sqrt{3}$.

23. $\pi a^2/8$.

24. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

III. 3. 3.

1. $\frac{2}{3}arctg\left(\frac{5}{3}tg\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\right)+C;\quad tg\frac{x}{2}=t$.

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg(x/2)+\sqrt{2}-1}{tg(x/2)-\sqrt{2}-1}\right|+C$.

3. $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg(x/2)+1}{\sqrt{5}}+C$

4. $-\frac{1}{\sin x}+C;\quad \sin x=t$.

5. $\cos x-2arctg(\cos x)+C;\quad \cos x=t$.

6. $\frac{1}{2}(tg^2x-ctg^2x)+2\ln|tg\,x|+C;\quad tgx=t$.

7. $\frac{1}{4}\cos x(\cos x-\sin x)-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x|+C;\quad tg\,x=t$.

8. $\frac{1}{3}arctg(3tg\,x)+C;\quad tg\,x=t$.

9. $arctg(tg\,x-2)+C$. **Упат.** $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $tg\,x=t$.

10. $\sin x-\frac{2}{\sin x}-6arctg(\sin x)+C;\quad \sin x=t$.

11. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

12. $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\sin 8x+C.$

13. $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C.$

14. $\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x-\frac{1}{4}x+C$. **Упат.** Прво, производот $\sin x\sin 2x$ се претставува како збир, а потоа уште еднаш се користат формулите за разложување од 2°.

15. $-\frac{2}{3}\cos^3\frac{x}{2}+C.$

16. $-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin(x/2)-1}{\sqrt{2}\sin(x/2)+1}\right|+C.$

17. $\frac{1}{11}\sin^{11}x-\frac{1}{13}\sin^{13}x+C.$ **Упат.** $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x.$

18. $\frac{x}{16}-\frac{1}{192}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C.$

19. $\frac{\pi}{2}-1.$

20. $\ln 2.$

21. $\frac{4}{3}.$

22. $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{32}.$

III. 3. 4.

1. $\frac{1}{32}sh4x-\frac{1}{4}sh2x+\frac{3}{8}x+C.$

2. $-\frac{x}{8}+\frac{sh4x}{32}+C.$

3. $\frac{1}{4}ch^4 x+C.$

4. $\ln\left|th\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{chx}+C.$

5. $-2cth2x+C.$

6. $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\left(2th\frac{x}{2}+1\right)/\sqrt{3}\right)+C.$

7. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

8. $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)+C.$

9. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C.$

10. $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)$

11. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C.$

III. 3. 5.

1. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$

2. $\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x+\frac{1}{9}(x^2+11)\sqrt{1-x^2}+C.$

3. $\frac{x^3}{3}arctg3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(1+9x^2)+C.$

4. $e^x+\frac{2}{3}\ln\frac{(e^x-1)^2}{e^x+2}+C.$

5. $x(\ln^3 x-\ln^2 x+3\ln x-3)+C.$

6. $(x^3+x)(\ln x)^2-2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\ln x\left(\frac{2x^3}{9}\right)+2x+C.$

III. 4. ПРИМЕНИ НА ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

III. 4. 1.

1. **Упат.** $a_n=2r\,tg\frac{\pi}{n};\ L_n=2rn\,tg\frac{\pi}{n}\to 2rn\,tg\frac{\pi}{n}\to 2r\pi\ (n\to\infty),\ P_n=r^2n\,tg\frac{\pi}{n}\to r^2\pi\ (n\to\infty)\ldots$

2. **Упат.** Разгледај ја низата волумени на правилните n - аголни призми ($n\geq 3$), впишани во цилиндарот.

3. а), в) и г) Со помош на аксиомите за растојание, плоштина, волумен ссоодветно. б) Со помош на поимот за растојание меѓу две точки. (Должина на отсечка се вика растојанието меѓу нејзините крајни точки.) **Упат.** Консултирај ги соодветните учебници за основно и средно образование.

III. 4. 2.

1. $32/3.$ **2.** $4/3.$ **3.** $9/2.$ **4.** $9/2.$ **5.** $16/3.$

6. $9/2.$ **Упат.** $P=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy.$ **7.** $125/3.$ **8.** 6 .

9. $10/3.$ **Упат.** $y^2=2-y^3$, па $y=1,\ x=1.$ **10.** 8 . **11.** $13/8.$

12. $7/12.$ **13.** $\frac{1}{6}(143-28\sqrt{7}).$ **14.** $4a^3/3.$ **15.** $4\pi.$

16. 9π. **17.** 6π. **18.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}-2\ln(\sqrt{2}+1)$. **19.** $\frac{10}{9}-\ln\sqrt{3}$.

20. $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$. **21.** $3a^2\pi$.

III. 4. 3.

1. $\pi a^2/4$. **2.** $\pi a^2/8$. **3.** $9\pi/2$. **4.** $(4\pi-2)/6$. **5.** $1/3$.

6. a^2. **Упат.** Премини во поларни координати.

III. 4. 4.

1. 4π. **2.** $\pi/4$. **3.** 9π. **4.** $4\pi ab^2/3$. **5.** $8\pi a^3/3$.

6. $a^3\pi(e^2-e^{-2}+4)/4$. **7.** $5a^3\pi^2$. **8.** $8\pi/3$. **9.** $8\pi/5$.

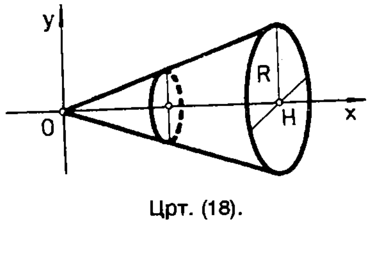
10. $32\pi/5$. **11.** $28\pi a^2 b/3$. **12.** $4\pi a^2 b/3$. **13.** $32\pi a^3/105$. **14.** $8\pi/7$.

15. $V_x=16\pi/5$; $V_y=8\pi/3$. **16.** $V_x=32\pi ab^2/105=V_y$.

17. $V=\pi/5(1-e^{-2\pi})$. **Упат.** $V=\lim\limits_{k\to\infty}V_k$, каде што $V_k=\pi\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\,dx=\frac{\pi}{5}(1-e^{-2\pi})e^{-4k\pi}$.

18. а) $R^2\pi H/3$. **Упат.** Можеме да сметаме дека конусот е добиен со ротација на делот од правата $y=Rx/H$ околу x - оската, од $x=0$ до $x=H$ (црт. (18))..

б) $V=abH\pi/3$. **Упат.** Ако го пресечеме конусот со рамнина паралелна со основата, а на растојание x од неа, ќе добиеме елипса со полуоски $a'=a(H-x)/H$ и $b'=b(H-x)/H$.



Црт. (18).

Од тоа, според (3): $V=\int\limits_0^H a'b'\pi dx=\frac{ab\pi}{h^2}\int\limits_0^H(H-x)^2dx=ab\pi H/3$.

III. 4. 5.

3. $4a/3$. **4.** $128/127$. **5.** $2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$.

6. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **Упат.** $\int\sqrt{(1+x)/x}\,dx$ со $x=sh^2t$. **7.** $4\sqrt{3}$. **8.** $(e^2+1)/4$.

9. $(e^{\pi/2}-1)/\sqrt{2}$. **10.** $2a\pi$. **11.** $at^2/2$. **12.** $8a$.

13. $s=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt$, $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$. **Упат.** За должината на лакот на елипсата $x=a\sin t$, $y=b\cos t$ $(a>b)$, пресметуван од горниот врв на малата оска до произволна точка на елипсата во првиот квадрант имаме:

$$s=\int_0^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt;\quad \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

каде што $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$ е нумеричкиот ексцентрицитет на елипсата. Според тоа, s се изразува со елиптичен интеграл од втор вид (види 2" во потпараграфот **3. 2.**').

14. $\frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]$. **15.** $3a\pi/2$. **16.** $2+\ln 3$.

17. 3π. **18.** $\pi b\sqrt{a^2+b^2}$. **19.** $13\pi/3$. **20.** $64\pi a^2/3$.

21. $4\pi R^2$. **22.** $2R\pi(b-a)$. **23.** $2\pi R(R-d)$. **24.** $R\pi\sqrt{R^2+H^2}$.

25. $(17\sqrt{17}-1)\pi/6$. **26.** $98\pi/81$.

27. $2\pi(3\pi+72\ln(4/3))$. **28.** $32\pi/3$.

29. $4\pi^2a^2$. **Упат.** $Q_y=2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ (формулата (6'))$=2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

30. $2\pi a^2\sqrt{2}$.

III. 6. УШТЕ НЕКОИ ПРАШАЊА ВО ВРСКА СО ОПРЕДЕЛЕНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

III. 6. 2.

1. $200\,m$.

2. $s = v_0 t - gt^2/2$. (Тоа е, всушност, изминатиот пат на тело фрлено нагоре со почетна брзина v_0 ако се занемари отпорот на воздухот; притоа, $g \approx 9{,}8$ е земјиното забрзување; највисока точка ќе биде $s = v_0^2/2g$, кога $t = v_0/g$.)

3. $s = 10\,000 - 100(t+100)e^{-0{,}01t}$; $s_{max} = 10\,000$.

4. $s = \dfrac{c^2}{g}\ln\cos\left(-\dfrac{g}{c}t + arctg\dfrac{v_0}{c}\right) - \dfrac{c^2}{g}\ln\cos arctg\dfrac{v_0}{c}$.

$s_{max} = \dfrac{c^2}{g}\ln\left(1+\dfrac{v_0^2}{c^2}\right)$, за $-\dfrac{g}{c}t + arctg\dfrac{v_0}{c} = 0$. (Со ова се карактеризира движењето на тело фрлено нагоре со почетна брзина v_0, при што се зема предвид отпорот на воздухот.)

5. $10g\ J$ $(g \approx 9{,}81)$. **Упат.** $A = 10gR^2 \displaystyle\int_{R+h}^{R+H}\frac{dr}{r^2}$, $h = 1\,m$, $H = 2\,m$ (в. Пр.1).

6. $A = 0{,}08J$. **Упат.** $A = 100\displaystyle\int_0^{0{,}04} x\,dx$.

III. 6. 3.

1. а) $T(0,-10/9)$.

2. а) На пример, ако се постави x - оската на најдолната (хоризонтална) отсечка, а y - оската - на најлевата (вертикална),ќе имаме: $T(11/6, 7/6)$.

   б) При координатен систем како во а): $T(5/2, 11/4)$.

3. При координетен систем земен како во одговорот на зад. 2: $T(13/3, 9/4)$.

4. $(0{,}4a/3\pi)$. **5.** $(0{,}3)$. **6.** $(\pi/2, \pi/8)$. **7.** $(1/2, 1/2)$.

9. $\bar{x} = 3h/4$, $\bar{y} = 0$. **10.** $\bar{x} = 5/9$, $\bar{y} = 0$. **11.** $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = 4/3$. **12.** $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 27/10$.

13. $\bar{x} = 3a/8$, $\bar{y} = 0$. **14.** 2π. **15.** $8\pi/105$. **16.** $2\pi^2$.

17. $16\pi a^3/105$.

III. 6. 4.

1. $(0,0)$.

2. $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$.

3. $\bar{x} = \frac{45}{34} + \frac{6}{17}\ln 2$, $\bar{y} = \frac{141}{136}$.

4. $\bar{x} = 58/35$.

6. а) $2a\pi^2 r^2$. б) $4ar\pi^2$.

III. 6. 5.

1. $\approx 21{,}1$; $\Delta = 1/8$; точно $= 21$.

2. $\approx 0{,}69315$; $\Delta \le 0{,}0032$; точно $= \ln 2$.

3. $\approx 0{,}784$; $\Delta \le 0{,}0067$; точно $= \pi/4 \approx 0{,}7854$.

4. $\approx 0{,}880$; $\Delta \le 0{,}1768$; точно $= \ln(1+\sqrt{2})$.

5. $\approx 1{,}4675$.

6. $\approx -6{,}2832$; точно $= -2\pi$.

7. $0{,}7858$.

8. $1{,}0948$.

9. $0{,}910$.

10. $1{,}205$.

11. $0{,}6045$.

12. $5{,}4024$.

14. $\frac{443}{960}(0{,}0015)$. **Упат.** $e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}(|R_2|)$, $R_2 = -\frac{x^6}{6} \cdot e^{-\theta x^2}$; за $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$: $|R_2| < 0{,}003$. Да се искористи резултатот од вежбата 13.

15. $\frac{71}{144}(0{,}0015)$. **Упат.** $\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}(0{,}003)$.

III. 7. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. $-\frac{1}{x} - arctg\, x + C$.

2. $3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{5}\sqrt{x} + C$.

3. $-(1/5^x \ln 5) - (1/2^x \ln 2) + C$.

4. $\frac{1}{2}x^2\ln^2|x| - \frac{1}{2}x^2\ln|x| + \frac{1}{4}x^2 + C$.

5. $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$.

6. $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C$.

7. $I_n = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln^n x - \frac{n}{k+1}I_{n-1}$. **Упат.** Стави $u = \ln^n x$.

8. $\frac{x^5}{5}\cdot\left(\ln^3 x - \frac{3}{5}\ln^2 x + \frac{6}{25}\ln x - \frac{6}{25}\right) + C$.

9. $e^e - e$.

10. $\pi\sqrt{3}/9$.

11. 0. **Упат.** Подинтегралната функција е непарна.

12. $\frac{4\pi}{3}-2\ln tg\frac{5\pi}{12}$.

13. а) $\int_{-1}^{1} dx=2$ (точно); $\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}t^{-1/3}dt=0$ (погрешно); причина: функцијата $t=x^{2/3}$ не е диференцијабилна во точката $x=0$ (од интервалот $[-1,1]$ на интегрирањето).

б) $\pi/2$ (точен резултат), 0 (погрешен); причина: изводот $t'=1/\cos^2(x/2)$, за $x=\pi\in[0,2\pi]$, не постои.

14. а) Не; $t=tg\,x$ не е диференцијабилна за $x=\pi/2$ од интервалот $[0,\pi]$.

б) Не; $x=\cos t$ нема смисла за $x\in(1,2]$.

15. $\frac{x}{5}-\frac{1}{5}\ln(e^x+5)+C.$

16. $-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos^2 x\right)+C.$

17. $-\frac{1}{4}\cdot arctg\left(\frac{1}{2}\cos^2 2x\right)+C.$

18. $x^2+\ln\frac{x^2-1}{x}+C.$

19. $arctgx-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+C.$ **Упат.** Да се претстави броителот 1 во обликот $(x^2+1)-x^2$ и, откако ќе се разложи на два интеграла, да се повтори постапката.

20. $\frac{3}{8}(x^4+1)^{2/3}-\frac{3}{4}(x^4+1)^{1/3}+\frac{3}{4}\ln(1+(x^4+1)^{1/3})+C.$

21. $\sqrt{x/(x+2)}+C.$ Смена: $x+2=1/t$.

22. $\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C.$ Смена: $x-1=\frac{1}{t}$.

23. $32/15.$ **24.** $(e^2-3)/6.$ **25.** $2\pi+4.$

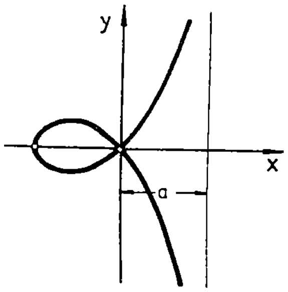
26. $3\pi a^2/8.$ **Упат.** $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t.$ **27.** $78\frac{1}{12}.$ **28.** $\frac{16}{21}\sqrt[4]{8}$.

29. $\frac{1}{144}(2-5e^{-3/2})$. **Упат.** Макс. ордината: за $x=\frac{1}{2}$.

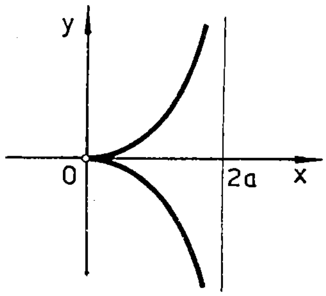
30. 64. **Упат.** $x_{max}=32$ за $y=-1$, $x_{min}=0$ за $y=3$. **31.** $2/3$. **32.** $15/2$.

33. $\frac{7a^2}{4}$. **Упат.** $y_{1,2}=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ (црт. 1); $P=2\int_0^1 y_2dx=\left[\frac{a+x}{a-x}=t^2\right]=-8a^2\int_0^1\frac{t^4-t}{(t^2+1)^2}dt.$

34. $3\pi a^2$. **Упат.** $y_{1,2}=\pm x\sqrt{x/(2a-x)}$ (црт. 2); $P=2\int_0^{2a} y_1dx=\left[\frac{x}{2a-x}=t^2\right]=16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4dt}{(1+t^2)^3}.$



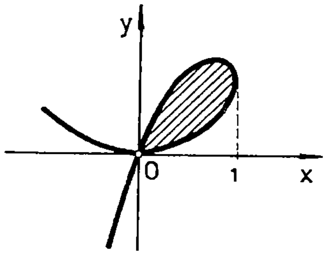
Црт. 1 (33)



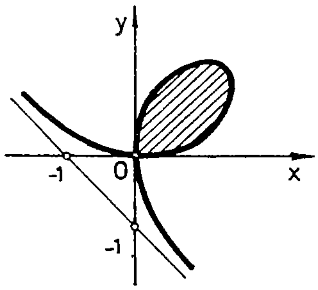
Црт. 2 (34)

35. $8/15$. **Упат.** Црт. 3; $P=\int_2^0 y(t)\dot{x}(t)dt$.

36. $3a^2/2$. **Упат.** Црт. 4; $P=\int_\alpha^\beta y\,\dot{x}\,dt=9a^2\int_0^{+\infty}\frac{2t^2-t^5}{(1+t^3)^3}dt=9a^2\int_0^{+\infty}\frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^3}-3a^2\int_0^{+\infty}\frac{d(1+t^2)}{(1+t^3)^2}$.



Црт. 3 (35)



Црт. 4 (36)

37. $3\pi ab/8$. **38.** $3a^2\pi$. **39.** 11π. **40.** $\pi a^2/4$.

41. $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$. **42.** $a^2(\pi-1)/4$. **43.** $2/3$. **Упат.** $P=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\varphi^2)d\varphi$.

44. $\pi(1-\pi/4)$. **Упат.** $P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\rho(t)]^2d[\varphi(t)]=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{\pi dt}{(1+t)^2}$.

45. $\pi a^2\sqrt{2}$. **Решение.** $\rho^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)=a^2$; $P=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2 d\varphi=2a^2\int_0^{\pi/2}\frac{du}{1-\frac{1}{2}\sin^2 u}$; $tg\,u=t$.

46. $\pi a^2/8\sqrt{2}$. **47.** $1/3$. **48.** $\pi a^3/6$. **49.** $10\pi/184$.

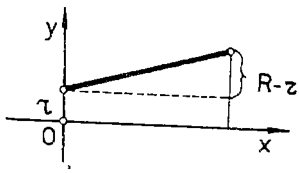
50. $136\pi/15$. **51.** $2a\pi^2r^2$. **52.** π^2.

53. а) $64\pi/105$. б) $64\pi/35$. **Упат.** а) $V_y=\pi\int\limits_0^2 x^2\dot{y}\,dt$, б) $V_x=\pi\int\limits_2^0 y^2\dot{x}\,dt$. За скицирањето на кривата да се постапи како во зад **17.** од **II. 4. 2.**

54. $8\pi a^3/3$. **55.** $4\pi a^3/21$.

56. а) $\dfrac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-(2/3)\right]$. б) $\pi^2 a^3/4\sqrt{2}$.

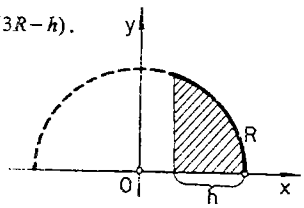
57. $\dfrac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$.



Црт. 5 (57).

Упат. Конусот може да се добие со ротација на правата $y=\dfrac{R-r}{h}x+r$ (црт. 5), па $V=\pi\int\limits_0^h y^2dx$.

58. $\dfrac{\pi h^2}{3}(3R-h)$.



Црт. 6 (58)

Упат. Топкиниот отсечок може да се добие со ротација на засенчениот дел од фигурата на црт. 6, одграничен со: $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x=R-h$ и $y=0$..

59. $28/3$. **60.** $6\sqrt{2}+2\ln(3+2\sqrt{2})$.

61. $\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2}\right)$, т.е. $\ln\dfrac{1+tg(a/2)}{1-tg(a/2)}$. **62.** 2. **63.** $1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

64. $4\sqrt{3}$. **Упат.** $0\le t\le\sqrt{3}$ или пак: $y=\pm\sqrt{x}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$. **65.** $123/32$.

66. 4. **67.** $135/16$. **68.** $10\sqrt{5}+670/27$.

69. $s=s_1+s_2$, $s_1=(26\sqrt{13}-16)/27$, $s_2=\pi\sqrt{2}/2$. **Упат.** $y_1=x^{2/3}$, $y_2=\sqrt{2-x^2}$ се парни и се сечат при $x=\pm1$; $s_1=2\int\limits_0^1\sqrt{1+y_1'^2}\,dx=\dfrac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{-1/3}(9x^{2/3}+4)^{1/2}dx$ - биномен интеграл, смена: $9x^{2/3}+4=t^2$; $s_1=2\int\limits_0^1\sqrt{1+y_2'^2}\,dx=2\sqrt{2}\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

70. $3a\pi/2$. **71.** $8a/3$. **72.** $\pi/2$. **73.** $56\pi/3$.

74. а) $a^2\pi(2+sh2)/2$. б) $2\pi a^2(1+sh1-ch1)$. **Упат.** Да се искористи формулата (5) од **III. 4. 6.**

75. а) $1179\pi/256$. б) $67\pi/10$. **Упат.** Во дадената функција, да се замени x со $\overline{x}+1$ (а y со $\overline{y}$); така, $Q_{\overline{y}}=2\pi\int_0^1(\overline{x}+1)\sqrt{1+\overline{y}'^2}dx=\pi\int_0^1(\overline{x}+1)\frac{(\overline{x}+1)^6+1}{(\overline{x}+3)^3}dx$.

76. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **77.** а) $4\pi^2 rb$. б) $4r^2\pi$.

78. $3\pi(50\sqrt{10}-2\sqrt{2}/5)$. **79.** $4\pi a^2$. **80.** $8\pi a^2$.

81. $1/e<I<1$. **82.** $|I|<0{,}1$. **83.** $0{,}5<I<\pi/6$.

84. $f(\xi)=2/3$, $\xi=1\pm\sqrt{3}/3$. **85.** $2/\pi$. **86.** $(e^{\pi}-2)/\pi$.

87. $(4-\pi)/\ln 5$. **Упат.** $t=\sqrt{e^x-1}$. **88.** $\frac{1}{2}J_0^2$. **Упат.** $\frac{1}{T}\int_0^T[J(t)]^2dt$.

91. Првиот. **92.** Вториот. **93.** Конвергентна; граница: $\ln 2$.

94. Конвергентна, со граница $\pi/4$. **Решение.** $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(i/n)^2}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$, каде што $f(x)=1/(1+x^2)$, $x_i=\xi_i=i/n$, $\Delta x_i=1/n$ Според тоа, $\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

95. $2/\pi$. **Упат.** $f(x)=\sin x$, $x_i=\xi_i=i/n$, $\Delta x_i=\pi/n$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin x\,dx$.

96. $3/4$. **100.** $\pi^2/4$. **101.** Дивергентен. **102.** Конвергентен.

103. Конвергентен. **104.** Конвергентен. **105.** Дивергентен. **106.** Дивергентен.

107. **Решение.** Ако ставиме $f(x)=e^{1/x}$, $x\in[-1,0)$, $f(0)=0$, добиваме функција што е непрекината на сегментот $[-1,0]$, па значи и интеграбилна на тој сегмент. Според Т. 1 од **III. 5. 4**, имаме: $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{-1}^{-\delta}e^{1/x}dx=\int_{-1}^{0}e^{1/x}dx$.

108. **Решение.** Ако $a>0$, тогаш имаме интеграбилност во обична смисла. За $a<0$, на сосема ист начин како во зад. **107**, добиваме дека се конвергентни обата интеграла $\int_a^0 e^{-1/x^2}dx$, $\int_0^b e^{-1/x^2}dx$, од што следува заклучокот.

109. Решение. За $a>0$, и во овој случај имаме интеграбилност во обична смисла.

Нека $a<0$; да определиме функција $f(x)$ со: $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ за $x\neq 0$, $f(0)=0$. Добиената функција е дефинирана и ограничена на $[a,0]$. Според Т. 2 од **III. 5. 4**, $f(x)$ е интеграбилна на $[a,0]$ и притоа: $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\int_a^{-\delta}\sin\frac{1}{x}dx=\int_a^0\sin\frac{1}{x}dx$. Од исти причини постои и интегралот $\int_0^b\sin\frac{1}{x}dx$, па значи $\int_a^b\sin\frac{1}{x}dx$ е конвергентен.

111. Решение. Да ставиме, на пример, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ за $x>0$, $f(x)=0$. Јасно е дека се исполнети 1) и 2), а исто така имаме: $g(\delta)=\int_\delta^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(1-\sqrt{\delta})$, од што следува дека е $\lim_{\delta\to 0}g(\delta)=2$, т.е. исполнет е условот 3). Меѓутоа, функцијата не е интеграбилна на $[0,1]$ бидејќи не е ограничена.

112. $0{,}6941$; $|\Delta|\leq 1/384<0{,}002$.

113. $1{,}148$.

114. а) $-6{,}0656$. б) $-6{,}0896$.

115. $0{,}8358$.

116. $0{,}4298$.

117. $0{,}084$.

118. $0{,}60386$. **Решение.**

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,6}e^{-x^2}dx\approx\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{0,1}{3}\cdot[e^0+e^{-0,36}+4(e^{-0,01}+e^{-0,09}+e^{-0,25})+2(e^{-0,04}+e^{-0,16})]\approx$$

$$\approx\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{0,1}{3}\cdot(1+0{,}69768+3{,}96020+3{,}65572+3{,}11520+1{,}92158+1{,}70429)\approx 0{,}60386.$$

119. $s=10^4\,m$.

120. $A=\frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$. **Упат.** "Елементарната сила" (т.е. силата на Земјината тежа) е еднаква со тежината на водата од слој со дебелина dx, т.е. $dF=\gamma\pi R^2dx$, каде што γ е тежината на единица волумен вода. Следствено, "елементарната работа" на силата е $dA=\gamma\pi R^2(H-x)dx$, каде што x е нивото на водата.

121. $A=2\cdot 10^4/9$. **Упат.** Силата е $F=e_0e_1/x^2$, од каде што се добива $A=e_0e_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}$.

122. $Q=0{,}12TRJ_0^2$. **Упат.** Да се искористи законот на Џул.

123. $(8/5, -37/11)$. **124.** $\left(\frac{4}{5}\ln 2, 2+\frac{1}{\pi}\right)$. **125.** $\left(\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}, \frac{\pi}{24-6\pi}\right)$.

126. $\bar{x}=0,\ \ \bar{y}=9b/16$. **127.** $\bar{x}=0,\ \ \bar{y}=27/10$. **128.** $\bar{x}=2a/5=\bar{y}$.

129. $\bar{x}=0,\ \ \bar{y}=a(2+sh2)/4sh1\approx 1{,}18a$. **130.** $\bar{x}=93/35,\ \ \bar{y}=0$.

131. а) $V_x=4\pi^2br^2$; $Q_x=4\pi^2br$. б) $V_y=2\pi^2ar^2$; $Q_y=4\pi^2ar$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банах С. : *Дифференциальное и интегральное исчисление;* Москва 1972
2. Берман Г. Н. : *Сборник задач по курсу математического анализа;* Москва 1962
3. Берс Л. : *Математический анализ,* том I; Москва 1975
4. Гребенча М. К., Новоселов С. И. : *Курс математического анализа,* том I; Москва 1960
5. Девис М. : *Прикладной нестандартый анализ*; Москва 1980
6. Демидович Б. П. (со група автори): *Задачи и упражнения по математическому анализу, длявтузов*; Москва 1974
7. Немицкий В., Слудская М., Черкасов А. : *Курс математического анализа,* том I; Москва 1957
8. Пискунов Н. С. : *Диференциальное и интегральное исчисления для втузов,* том I; Москва 1964
9. Протер М., Мореи Ч. (Protter and Morrey): *Calculus with Analitic Geometry*; a first course; Addison - Wesley, 1963
10. Рождественский Б. Л. : *Лекции по математическому анализу*; Москва 1972
11. Смирнов В. И. : *Курс высшей математики,* том I; Москва 1974
12. Смит Е., Салковер М., Цастис Х. (Smith, Salcover, Justice): *Calcucus*; John Wiley & Sons, 1958
13. Толстов Г. П. : *Элементы математического анализа,* том I; Москва 1974
14. Трпеновски Б., Целакоски Н., : *Елементи од нумеричката математика*; Скопје 1992
15. Феферман С. : *Числовые системы*; Москва 1971
16. Фихтенгольц Г. М. : *Курс диференциального и интегрального исчисления,* том I; Москва 1966
17. Фихтенгольц Г. М. : *Основы математического анализа,* том I; Москва 1968
18. Чупона Ѓ. : *Предавања по алгебра,* кн. I и кн. II; Скопје 1971
19. Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н. : *Предавања по виша математика,* кн. I и кн. II; Скопје 1971
20. Шилов Г. Е. : *Математический анализ; функций одного перменного,* части 1 - 2; Москва 1969

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ, ИМИЊА И ТЕОРЕМИ