Ристо Малчески
Вера Малческа

МАТЕМАТИКА 3
КАЛКУЛУС (ПРВ ДЕЛ)
(петто непроменето издание)

Скопје, 2020

Рецензенти:
Д-р Марија Оровчанец, ред. проф. на Природно-математички факултет, Скопје
Д-р Алекса Малчески, ред. проф. на Машински факултет, Скопје

Компјутерска обработка: Ристо Малчески и Самоил Малчески

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.51/.52

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математика 3 : калкулус. Д. 1 / Ристо Малчески, Вера Малческа. - Скопје : Армаганка, 2020. - 316 стр. ; 25 см

Регистар. - Библиографија: стр. 315-316

ISBN 978-608-4904-64-9
1. Малческа, Вера [автор]
а) Функции од реална променлива - Диференцијално сметање - Интегрално сметање б) Низи и редови - Математичка анализа
COBISS.MK-ID 112058890

СОДРЖИНА

XIII глава
ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

XIV глава
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

XV глава
ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

ПРЕДГОВОР КОН ЧЕТВРТОТО ИЗДАНИЕ

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Четвртото издание на оваа книга е наменето за дел од предметот Калкулус 1, кој студентите на факултетите за информатика во Република Македонија го слушаат во прва година, наслов под кој и беа издадени првите две изданија на книгава. Во него се разработени стандардните содржини од математичката анализа во делот на реалните броеви, функциите од една реална променлива, бројните и функционалните низи и редови. Книгава е поделена на седум глави и тоа:

- Реални и комплексни броеви ,
- Низи,
- Функции од една реална променлива,
- Диференцијално сметање на функција од една реална променлива,
- Интегрално сметање на функција од една реална променлива,
- Бројни редови и
- Функционални низи и редови.

Првата глава, која е насловена Реални и комплексни броеви е посветена на конструкцијата на множествата реални и комплексни броеви и истата се надоврзува на знаењата кои студентите ги стекнуваат во предметот алгебарски структури. Самата конструкција на множеството реални броеви е реализирана со помош на Кошиевите низи рационални броеви, т.е. со комплетирање на множеството рационални броеви. Притоа, претставувањето на множеството реални броеви со помош на десетични дропки е поместено на крајот од втората глава, после усвојувањето на низите реални броеви. Имајќи ја предвид тежината на материјалот кој е предмет на разработка во оваа глава на читателите им препорачуваме дел од презентираните тврдења да ги усвојат без истите да ги докажуваат, т.е. да се обидат да го усвојат само логичкиот редослед на конструкцијата на реалните броеви. Последното всушност е особена важност, ако се има предвид дека при разработката на содржините од првата книга за реалните броеви сметавме дека се познати и истите ги користевме за задавање погодни примери при проучувањето на кардиналните броеви, групите, прстените, интегралните домени, полињата и елементите од комбинаториката.

Содржините кои се разработени во останатите шест глави во целост кореспондираат со насловите. Притоа, имајќи ја предвид тежината на материјалот, но и фактот дека истиот го слушаат студенти кои студираат информатика, мал број од разгледуваните теореми, леми и последици се дадени без доказ и примената на истите е илустрирана преку примери. Иизложувањето на материјалот е пропратено со бројни коментар и забелешки, дел од кои се однесуваат на разгледаните тврдења, а во одделни забелешки и коментари се докажани дополнителни тврдења.

Усвојувањето на која било математичка дисциплина не е можно без решавање на поголем број примери. Затоа во сите делови на книгата теориските разгледувања се пропратени со 185 решени примери и 258 задачи за самостојна работа, голем дел од кои содржат и повеќе подзадачи, па така бројот на решените примери и задачи за самостојна работа е значително поголем. За одделни параграфи не се дадени задачи за самостојна работа, бидејќи дел од нив опсежно се разработувани во средното образование, а за останатите не се бара усвојување на највисоко ниво на знаења. Заради поголема нагледност севкупните разгледувања се илустрирани со 118 цртежи, најголем дел од кои се поместени при изучувањето на функциите од една реална променлива и интегралното сметање на функција од една реална променлива.

На крајот од книгата е дадена користената литература, со што се надеваме ќе се олесни нејзиното користење, но и на читателот ќе му овозможи да консултира дополнителна сродна литература, која пред сè е пишувана со ист или сличен методски пристап. Исто така е даден и индекс на поими, чија намена е да го олесни користењето на самата книга.

Се надеваме дека книгава ќе им биде од корист како на студентите, за кои пред сè истата е наменета, така и на поширок круг читатели, кои секојдневно се среќаваат со материјата која е предмет на разработка на оваа книга.

Пријатна должност и особено задоволство ни е да им искажеме благодарност на рецензентите проф. д-р Марија Оровчанец и проф. д-р Алекса Малчески кои со своите забелешки и сугестии допринесоа за подобрување на содржината на оваа книга.

И покрај вложениот напор, свесни сме за можните подобрувања во изложувањето на разработуваниот материјал и за пропустите кои ги содржи оваа книга. Затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна сугестија и критика, која ќе овозможи подобрување на книгава.

Декември, 2015 Авторите

XI ГЛАВА
РЕАЛНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1. ПРИРОДНИ БРОЕВИ. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1.1. Како што знаеме множеството

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,...,n,n+1,...\} \tag{1}$$

го нарекуваме множество на *природни* броеви. Ќе издвоиме неколку својства на $\mathbf{N}$, познати како Пеанови аксиоми кои ги разгледавме во III 2.6, а потоа ќе покажеме како со нивна помош се гради теоријата на природните броеви.

1.2. Пеанови аксиоми. Множеството $\mathbf{N}$ не е празно и важи:

i) $0 \in \mathbf{N}$.

ii) за секој природен број k постои единствен природен број k^+, кој го нарекуваме *следбеник* на k.

iii) Ако $k^+ = n^+$, тогаш $k = n$.

iv) $0 \neq k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

v) Ако $S \subseteq \mathbf{N}, 0 \in S$ и од $k \in S$ следува дека $k^+ \in S$, тогаш $S = \mathbf{N}$.

1.3. Забелешка. Во аксиомата *ii*) рековме дека за секој природен број k постои единствен природен број k^+ кој го нарековме следбеник на k. Притоа, бројот k ќе го наречеме *претходник* на k^+. Во натамошните разгледувања, ако n е претходник на k, тогаш ќе пишуваме $n = k^-$. Според тоа, $n = k^-$ ако и само ако $k = n^+$.

Иако се уште не сме ја воведе операцијата собирање на природни броеви во нашите разгледувања, често пати наместо k^+ ќе пишуваме $k+1$. Притоа имаме $1 = 0+1 = 0^+$, $2 = 1+1 = 1^+$ итн.

Како што знаеме аксиомата *v*) е позната како *аксиома на индукција (принцип на математичка индукција)* и истата се користи за докажување на бројни својства поврзани со природните броеви.

Од претходно изнесеното следува дека множеството $\mathbf{N}$ ги задоволува Пеановите аксиоми. Ќе докажеме дека тоа е единствено множество со овие својства.

1.4. Теорема. Ако $\mathbf{N}'$ е множество кое ги задоволува аксиомите на Пеано, тогаш $\mathbf{N}' = \mathbf{N}$.

Доказ. Од аксиомата *i*) следува дека $0 \in \mathbf{N}'$.

Нека претпоставиме дека $k \in \mathbf{N}'$. Тогаш, од аксиомата *ii*) следува дека $k+1 = k^+ \in \mathbf{N}'$. Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ♦

1.5. Теорема. Секој природен број е различен од својот следбеник.

Доказ. Со S да го означиме множеството природни броеви кои се различни од своите следбеници. Од аксиомата *iv*) следува дека $0 \in S$.

Нека претпоставиме дека $k \in S$, т.е. $k \neq k^+$. Ако $k^+ = (k^+)^+$, тогаш од аксиомата *iii*) следува дека $k = k^+$ што противречи на претпоставката. Значи

$$k^+ \neq (k^+)^+, \text{ т.е. } k+1 = k^+ \in S.$$

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ♦

1.6. Теорема. Секој природен број, различен од нулата, има еднозначно определен претходник кој е природен број.

Доказ. Да претпоставиме дека природниот број $k \neq 0$ има два претходника k_1 и k_2. Тогаш, $k_1^+ = k = k_2^+$ и аксиомата *iii*) следува дека $k_1 = k_2$.

Со A да го означиме множеството природни броеви кои имаат претходници. Нека $S = A \cup \{0\}$. Сега $0 \in S$ и ако $x \in S$, тогаш од аксиомата *ii*) следува дека тој е претходник на x^+, па затоа $x^+ \in A \subseteq S$. Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ♦

1.7. Множеството природни броеви кои имаат следбеници го означуваме со $\mathbf{N}^+$. Така $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. Точни се следните тврдења.

Теорема. *i*) Пресликувањето $+ : k \to k^+$ е инјекција од $\mathbf{N}$ во $\mathbf{N}$, но не е сурјекција.

ii) Пресликувањето $- : k \to k^-$ е биекција од $\mathbf{N}^+$ во $\mathbf{N}$. ♦

1.8. Користејќи ги Пеановите аксиоми можеме да дефинираме множества $\mathbf{N}_0 = \varnothing$ и $\mathbf{N}_{k^+} = \mathbf{N}_k \cup \{k\}$, за $k \in \mathbf{N}$. За вака конструираните множества точна е следната теорема, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Теорема. *i)* Ако $k \neq 0$, тогаш $k^- \in \mathbf{N}_k$.

ii) $0 \in \mathbf{N}_{k^+}$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

iii) Ако $k^+ \in \mathbf{N}_n$, тогаш $k \in \mathbf{N}_n$.

iv) $k \notin \mathbf{N}_k$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

v) Ако $k \in \mathbf{N}_n$, тогаш $k^+ \in \mathbf{N}_{n^+}$.

vi) Ако $k \in \mathbf{N}_n$, тогаш $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{N}_n$.

vii) За секои $k, n \in \mathbf{N}$ исполнет е еден и само еден од условите $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{N}_n$, $k = n$, $\mathbf{N}_n \subset \mathbf{N}_k$.

viii) $k \in \mathbf{N}_n$ ако и само ако $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{N}_n$.

ix) $\mathbf{N}_k \sim \mathbf{N}_k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$. ♦

1.9. Дефиниција. Нека $k, n \in \mathbf{N}$. Ако $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{N}_n$, тогаш ќе велиме дека природниот број k е *помал* од природниот број n и ќе пишуваме $k < n$. Ако $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{N}_n$ или $k = n$, тогаш ќе велиме дека k е *помал или еднаков* на n и ќе пишуваме $k \leq n$.

1.10. Теорема. *i)* Релацијата $<$ не е рефлексивна и е транзитивна.

ii) Ако $k, n \in \mathbf{N}$, тогаш еден и само еден од следните услови е исполнет $k < n,\ k = n,\ n < k$.

iii) Релацијата $\leq$ е релација на подредување во $\mathbf{N}$.

iv) $k < k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

v) $k < n$ ако и само ако $k \in \mathbf{N}_n$.

vi) Ако $k < n$, тогаш $k^+ \leq n$.

vii) $0 \leq k$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

viii) $\mathbf{N}_k = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n < k\}$.

Доказ. Точноста на тврдењата непосредно следува од теоремата 1.8 и дефинициите на релациите $<$ и $\leq$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

1.11. Дефиниција. Нека M е подредено множество и A е непразно подмножество од M. За елементот $a \in A$ ќе велиме дека е *најмал елемент* на A ако $a \leq x$, за секој $x \in A$.

За множеството M ќе велиме дека е *добро подредено* ако секое непразно множество има најмал елемент.

Да забележиме дека нулата е најмал елемент во $\mathbf{N}$ и дека k е најмал елемент во $\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_k$.

1.12. Теорема. $\mathbf{N}$ е добро подредено множество.

Доказ. Нека A е непразно подмножество од $\mathbf{N}$. Ако $0 \in A$, тогаш $0 \leq k$, за секој $k \in A$, т.е. 0 е најмал елемент во A.

Затоа, нека претпоставиме дека $0 \notin A$. Да го разгледаме множеството

$$S = \{k \mid k \in \mathbf{N} \text{ и } k < n, \text{ за секој } n \in A\}.$$

Од $0 \notin A$ следува $0 < n$, за секој $n \in A$, па затоа множеството S не е празно. Јасно, не е точно дека за секој k од $k \in S$ следува дека $k^+ \in S$, бидејќи во тој случај $S = \mathbf{N}$, од што би следувало дека множеството A е празно. Според тоа, постои $m \in S$ таков да $m^+ \notin S$. Ќе докажеме дека $a = m^+$ е најмал елемент во A. Навистина, од $m \in S$ следува дека $m < k$, за секој $k \in A$, па затоа $m^+ \leq k$, за секој $k \in A$. Ако $m^+ \notin A$, тогаш $m^+ < k$, за секој $k \in A$, од што ќе следува дека $m^+ \in S$, што е противречност. Конечно, $a = m^+ \in A$ и $a \leq k$, за секој $k \in A$, што значи дека $a = m^+$ е најмал елемент во A. ♦

1.13. Дефиниција. Нека M е подредено множество и A е непразно подмножество од M. За елементот $a \in A$ ќе велиме дека е *најголем елемент* на A ако $x \leq a$, за секој $x \in A$.

Ако се земе предвид дека $k < k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$, тогаш е јасно дека во $\mathbf{N}$ нема најголем елемент.

1.14. Во IV 6.5 ги воведовме поимите конечно и бесконечно множество. Од дефиницијата на конечно множество и од претходните разгледувања следува точноста на тврдењата искажани во следната теорема. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Теорема. *i)* $|\mathbf{N}_k| = |\mathbf{N}_k^+| = k$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

ii) Ако $|M| = k$ и $S \subset M$, тогаш постои природен број s таков да $s < k$ и $|S| = s$.

iii) Секое подмножество од конечно множество е конечно.

iv) Бројот на елементите на едно конечно множество е еднозначно определен. ♦

1.16. Во следната теорема ќе ја докажеме егзистенцијата на бесконечните множества.

Теорема. Множеството $\mathbf{N}$ е бесконечно.

Доказ. Нека претпоставиме дека множеството $\mathbf{N}$ е конечно. Тогаш, $m = |\mathbf{N}_m| = |\mathbf{N}|$, за некој природен број m. Но, $\mathbf{N}_{m^+} \subset \mathbf{N}$, па од 1.14 *v)* следува дека $m^+ = |\mathbf{N}_{m^+}| < |\mathbf{N}| = m$, што противречи на теоремата 1.10 *iv)*. ♦

2. СОБИРАЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

2.1. Дефиниција. За природниот број n ќе велиме дека е *збир* на природните броеви m и k ако постојат множества M и K такви да $M \cap K = \varnothing$, $|M| = m$, $|K| = k$ и $|M \cup K| = n$. Притоа пишуваме $n = m + k$.

Непосредно од дефиницијата на собирање и фактот дека $|\varnothing| = 0$ следува дека $m + k = 0$ ако и само $m = k = 0$.

2.2. Теорема. $(\mathbf{N}, +)$ е комутативна полугрупа со нула 0.

Доказ. Нека m и k се произволни природни броеви. Тогаш,

$$|\mathbf{N}_m| = m,\ |\mathbf{N}_k \times \{0\}| = k \text{ и } \mathbf{N}_m \cap (\mathbf{N}_k \times \{0\}) = \varnothing .$$

Од принципот на збир следува дека $\mathbf{N}_m \cup (\mathbf{N}_k \times \{0\})$ е конечно, па ако $n = |\mathbf{N}_m \cup (\mathbf{N}_k \times \{0\})|$, тогаш добиваме $n = m + k$. Нека претпоставиме дека M и K се произволни конечни множества, такви да $M \cap K = \varnothing$, $|M| = m$, $|K| = k$ и

$|M \cup K| = n'$. Тогаш $\mathbf{N}_m \cup (\mathbf{N}_k \times \{0\}) \sim M \cup K$ (зошто?), па од теорема 1.14 *iv)* следува дека $n = n'$. Со тоа докажавме дека $(\mathbf{N}, +)$ е групоид.

Нека K, L и M се попарно дисјунктни множества такви што $|L| = l$, $|M| = m$, $|K| = k$. Ако се имаат предвид равенствата

$$K \cup L = L \cup K, K \cup \varnothing = K, \ (K \cup L) \cup M = K \cup (L \cup M)$$

и фактот дека $|\varnothing| = 0$, добиваме:

i) $k + l = l + k$,
ii) $k + 0 = k$ и
iii) $(k + l) + m = k + (l + m)$,

што значи дека групоидот $(\mathbf{N}, +)$ е комутативна полугрупа со нула 0. ♦

2.3. Последица. *i)* За секои $k, m \in \mathbf{N}$ точни се равенствата

$$m^+ = m + 1, \quad m + k^+ = (m + k)^+ .$$

ii) $(\mathbf{N}, +)$ е полугрупа со кратење.

Доказ. *i)* Првото равенство следува од дефиницијата на собирање на природни броеви и равенствата

$$\mathbf{N}_{m^+} = \mathbf{N}_m \cup \{m\}, \ |\mathbf{N}_m| = m, \ |\{m\}| = 1, \ \mathbf{N}_m \cap \{m\} = \varnothing .$$

Потоа добиваме

$$(m + k)^+ = (m + k) + 1 = m + (k + 1) = m + k^+ .$$

ii) Треба да докажеме дека од $m + n = k + n$ следува $m = k$.

За $n = 0$ имаме $m + n = m, \ k + n = k$, па затоа од $m + n = k + n$ добиваме $m = m + n = k + n = k$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $n = l \in \mathbf{N}$ и нека $m + l^+ = k + l^+$. Сега од *i)* добиваме $(m + l)^+ = (k + l)^+$, т.е. $m + l = k + l$, па од претпоставката следува $m = k$.

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ♦

2.4. Теорема. $k < m$ ако и само ако постои $n \in \mathbf{N}^+$ таков да $m = k + n$.

Доказ. Нека $k < m$. Тогаш, $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{N}_m$, од што следува дека

$$\mathbf{N}_m \setminus \mathbf{N}_k \neq \varnothing, \ \mathbf{N}_m = \mathbf{N}_k \cup (\mathbf{N}_m \setminus \mathbf{N}_k) \text{ и } \mathbf{N}_k \cap (\mathbf{N}_m \setminus \mathbf{N}_k) = \varnothing .$$

Ставаме $n = |\mathbf{N}_m \setminus \mathbf{N}_k| \in \mathbf{N}^+$ и добиваме $m = k + n$.

Обратно, да претпоставиме дека $m = k + n$ каде што $n \in \mathbf{N}^+$. Не е можно $m = k$, бидејќи во тој случај би имале $m + 0 = m = k + n = m + n$, т.е. $n = 0$, што противречи на $n \in \mathbf{N}^+$. Ако $m < k$, тогаш од првиот дел на доказот ќе следува дека постои $l \in \mathbf{N}^+$ таков да $m + l = k$. Според тоа,

$$k+0=k=m+l=(k+n)+l=k+(n+l)$$

од што добиваме $n+l=0$, па значи $n=l=0$, што повторно противречи на $n\in\mathbf{N}^{+}$. Конечно, мора да биде $k<m$. ♦

2.5. Последица. *i)* $k\le m$ ако и само ако постои $n\in\mathbf{N}$ таков да $m=k+n$.

ii) Ако $k,m\in\mathbf{N}$, тогаш исполнет е еден и само еден од следните три услови: постои $n\in\mathbf{N}^{+}$ таков да $m=k+n$; $k=m$; постои $p\in\mathbf{N}^{+}$ таков да $k=m+p$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.4. ♦

2.6. Последица. Ако $k,l,m,n\in\mathbf{N}$, тогаш

i) $k<m$ ако и само ако $k+n<m+n$, и

ii) ако $k<m$ и $l<n$, тогаш $k+l<m+n$.

Доказ. Непосредно следува од теоремата 2.4 и последица 2.3 *ii)*. ♦

2.7. Теорема. За секој $n\in\mathbf{N}^{+}$ важи $n=\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{ пати}}$.

Доказ. Од обопштениот принцип на збир следува

$n=|\mathbf{N}_n^{+}|=|\{1\}\cup\{2\}\cup...\cup\{n\}|=|\{1\}|+|\{2\}|+...+|\{n\}|=\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{ пати}}$. ♦

2.8. Дефиниција. Нека $m,n\in\mathbf{N}$, $m\ge n$. За природниот број k ќе велиме дека е *разлика* на броевите m и n ако $m=k+n$. Притоа означуваме $k=m-n$.

2.9. Забелешка. Во дефиницијата 2.8 всушност дефиниравме операција одземање на природни броеви. Оваа операција е делумна во множеството $\mathbf{N}$ и истата е добро дефинирана, што непосредно следува од последицата 2.3. *ii*).

3. МНОЖЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

3.1. Во VI 2.3 дефиниравме степени со природни експоненти и во случај на адитивно означен полугрупа за степенот a^n ја искористивме ознаката na. Имајќи предвид дека $(\mathbf{N},+)$ е комутативна полугрупа со нула 0, заклучуваме дека со

$$0x=0,\ nx=\underbrace{x+x+...+x}_{n\text{ пати}},\ \text{за } n\ge 1. \tag{1}$$

е дефинирано пресликување од $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ во $\mathbf{N}$, т.е. операција во $\mathbf{N}$. Оваа операција ја нарекуваме *множење на природни броеви*.

3.2. Забелешка. Ако наместо произволна адитивна комутативна полугрупа со нула 0, во VI 2.3 ја разгледаме полугрупата $(\mathbf{N},+)$, добиваме дека за секои $k,m,n\in\mathbf{N}$ се исполнети равенствата

$$0\cdot n=0=n\cdot 0,\ 1\cdot n=n=n\cdot 1,\ (m+n)k=mk+nk,\ k(m+n)=km+kn\ .$$

Да забележиме дека равенството $n=n\cdot 1$ следува од теоремата 2.7.

3.3. Теорема. За секои $m,n\in\mathbf{N}$ важи

$$mn=nm\ . \tag{2}$$

Доказ. Нека M и N се конечни множества такви што $|M|=m$ и $|N|=n$. Тогаш, $M=\{a_1,...,a_m\}$ и $N=\{b_1,...,b_n\}$. Множеството $M\times N$ е конечно (зошто?). Ако се искористи дека

$$M\times N=\bigcup_{i=1}^{n}M\times\{b_i\}\ \text{ и }\ M\times\{b_i\}\cap M\times\{b_j\}=\varnothing,\ \text{ за }\ i\neq j\ ,$$

добиваме

$$|M\times N|=|M\times\{b_1\}|+|M\times\{b_2\}|+...+|M\times\{b_n\}|=\underbrace{m+m+...+m}_{n\text{ пати}}=mn\ .$$

Аналогно се докажува дека $|N\times M|=nm$.

Пресликувањето $f:M\times N\to N\times M$ определено со $f((a_i,b_j))=(b_j,a_i)$ е биекција, па затоа $M\times N\sim N\times M$, од што следува равенството (2). ♦

3.4. Лема. За секои $k,m,n\in\mathbf{N}$ точно е равенството

$$k(mn)=(km)n\ . \tag{6}$$

Доказ. Непосредно следува од разгледувањата во VI 2.3 и фактот дека $(\mathbf{N},+)$ е полугрупа. ♦

3.5. Теорема. $(\mathbf{N},\cdot)$ е комутативна полугрупа со единица.

Доказ. Асоцијативноста и комутативноста на множењето следуваат од лема 3.4 и теорема 3.3. Во забелешката 3.2 видовме дека 1 е единица на полугрупата $(\mathbf{N},\cdot)$. ♦

3.6. Теорема. *i)* $mn=0$ ако и само ако $m=0$ или $n=0$.

ii) Ако $m\neq 0$, тогаш $mk=mn$ ако и само ако $k=n$.

Доказ. *i)* Ако $m\neq 0$, тогаш $m=k+1$, каде што k е претходникот на m. Имаме $mn=0$ ако и само ако $kn+n=0$ ако и само ако $kn=n=0$.

ii) Нека $m\neq 0$ и $mk=mn$. Тогаш постои $p\in\mathbf{N}$ таков што $n=k+p$ или $k=n+p$. Нека $n=k+p$. Имаме $mk=mk+mp$, па затоа $mp=0$ и како $m\neq 0$ од *i)* следува дека $p=0$, што значи $k=n$. Обратното тврдење следува од дефиницијата на множење на природни броеви. ♦

3.7. Забелешка. Од досега изнесеното следува дека на множеството $\mathbf{N}$ изградивме две полугрупи, и тоа адитивната $(\mathbf{N},+)$ и мултипликативната $(\mathbf{N},\cdot)$. Ако се земе предвид дека $(\mathbf{N},\cdot)$ е комутативна полугрупа со единица, добиваме дека има смисла поимот степен m^n, $m,n \in \mathbf{N}$. Притоа, за секои $k,m,n \in \mathbf{N}$ точни се равенствата

$$k^0 = 1, \text{ за } k \neq 0, \; k^{m+n} = k^m k^n, \; (mn)^k = m^k n^k, \; (k^m)^n = k^{mn}.$$

Тврдењата наведени во следната теорема нема да ги докажуваме. На читателот му препорачуваме истите самостојно да ги докаже.

3.8. Теорема. Ако $k,m,n,p \in \mathbf{N}$, тогаш

i) $mn = 1$ ако и само ако $m = 1$ и $n = 1$,

ii) ако $n \neq 0$, тогаш $k < m$ ако и само ако $kn < mn$,

iii) ако $k \leq m,\, p \leq n$, тогаш $kp \leq mn$,

iv) ако $m \neq 0$, тогаш $m^n = 1$ ако и само ако $m = 1$ или $n = 0$,

v) ако $n \neq 0$, тогаш $m^n = 0$ ако и само ако $m = 0$,

vi) ако $n \neq 0,1$, тогаш $n^k = n^m$ ако и само ако $k = m$, и

vii) ако $n \neq 0$, тогаш $k^n = m^n$ ако и само ако $k = m$. ♦

3.9. Лема. Полугрупите $(\mathbf{N},+)$ и $(\mathbf{N},\cdot)$ не се групи.

Доказ. Навистина, во полугрупата $(\mathbf{N},+)$ единствен инверзибилен елемент е 0, а во полугрупата $(\mathbf{N},\cdot)$ тоа е 1. ♦

4. ЦЕЛИ БРОЕВИ

4.1. Според лема 3.9 полугрупата $(\mathbf{N},+)$ не е група, бидејќи ниеден ненулти елемент на $\mathbf{N}$ нема спротивен елемент. Си поставуваме задача да најдеме комутативна група $(\mathbf{Z},+)$ која ќе ја содржи полугрупата $(\mathbf{N},+)$, но притоа множеството $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ да има најмалку можно елементи. Поставената задача ни наложува на секој ненулти природен број n да му придружиме елемент $-n$ кој сакаме да биде спротивен на n. Множеството од сите такви елементи да го означиме со $-\mathbf{N}^+$. Имаме

$$-\mathbf{N}^+ = \{-n \mid n \in \mathbf{N}^+\},$$

при што $(-\mathbf{N}^+) \cap \mathbf{N} = \varnothing$ и $-n = -m$ ако и само ако $n = m$. Бараното множество $\mathbf{Z}$ го определуваме со $\mathbf{Z} = (-\mathbf{N}^+) \cup \mathbf{N}$. Елементите на множеството $\mathbf{Z}$ ги нарекуваме *цели броеви,* при што елементите на $\mathbf{N}^+$ ги нарекуваме *позитивни,* а на $-\mathbf{N}^+$ - *негативни цели броеви.* Во множеството на целите броеви $\mathbf{Z}$ воведуваме операција собирање $+'$ со:

- ако $m, n \in \mathbf{N}$, тогаш $m +' n = m + n$,

- ако $m, n \in \mathbf{N}^+$, тогаш

$$(-m) +' (-n) = -(m+n), (-m) +' 0 = -m = 0 +' (-m) \text{ и}$$

$$m +' (-n) = (-n) +' m = \begin{cases} m-n, & \text{ако } m \geq n \\ -(n-m), & \text{ако } n > m \end{cases}$$

Операцијата собирање во $\mathbf{Z}$ ја означивме со знакот $+'$, бидејќи + е знак за собирање во $\mathbf{N}$. Оваа ознака ја искористивме само за да го определиме собирањето во $\mathbf{Z}$. Во натамошните разгледувања ќе ја користиме ознаката +. Следнава теорема, која ќе ја дадеме без доказ потврдува дека поставената задача успешно сме ја решиле.

4.2. Теорема. $(\mathbf{Z}, +)$ е комутативна група за која $(\mathbf{N}, +)$ е потполугрупа. ♦

4.3. Во натамошните разгледувања множеството позитивни цели броеви ќе го означуваме со $\mathbf{Z}^+$, а со $\mathbf{Z}^-$, множеството негативни цели броеви. Според тоа, имаме:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^+, \mathbf{Z}^- \cap \mathbf{Z}^+ = \varnothing, \mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}^+ \text{ и } \mathbf{Z}^- = -\mathbf{N}^+.$$

4.4. Во множеството на целите броеви $\mathbf{Z}$ воведуваме операција множење $*$ со: ако $m, n \in \mathbf{N}$, тогаш $m * n = mn$, ако $m, n \in \mathbf{N}^+$, тогаш

$$(-m)*(-n) = mn, (-m)*0 = 0 = 0*(-m) \text{ и } m*(-n) = (-m)*n = -(mn).$$

4.5. Со вака дефинираното множење добиваме полугрупа $(\mathbf{Z}, *)$, поточно важи следнава теорема, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Теорема. Нека во $\mathbf{Z}$ со условите од 10.4 е определена операција $*$. Точни се следните тврдења:

i) $(\mathbf{N}, \cdot)$ е потполугрупа од комутативната полугрупа $(\mathbf{Z}, *)$,

ii) за секои $m, n \in \mathbf{Z}$ точни се равенствата

$(-m)*(-n) = mn,\ (-m)*0 = 0 = 0*(-m)$ и $m*(-n) = (-m)*n = -(mn)$,

iii) за секои $m, n, p \in \mathbf{Z}$ точно е равенството

$$(m+n)*p = (m*p)+(n*p). \ ♦$$

4.6. Во натамошните разгледувања за операцијата $*$ ќе ја користиме мултипликативната ознака, т.е. наместо $x*y$ ќе пишуваме xy. Исто така ќе сметаме дека операцијата множење има приоритет пред операцијата собирање и одземање на цели броеви, кој приоритет ќе го почитуваме и при новите проширувања на воведените множества броеви, па затоа некои загради нема да ги пишуваме. На пример, наместо $(m*p)+(n*p)$ ќе пишуваме $mp+np$, а наместо $-(mn)$, односно $(-m)n$ ќе пишуваме $-mn$.

Полугрупата $(\mathbf{Z}, \cdot)$ ќе ја нарекуваме *мултипликативна полугрупа* на целите броеви.

Доказот на следната теорема го оставаме на читателот за вежба.

4.7. Теорема. *i)* Полугрупата $(\mathbf{Z},\cdot)$ има единица 1 и единствен елемент различен од единицата кој е инверзибилен е -1.

ii) $mn=0$ ако и само ако $m=0$ или $n=0$.

iii) Ако $m\neq 0$ и $mn=mp$, тогаш $n=p$.

iv) За секои $m,n,p\in\mathbf{Z}$ точни се равенствата

$$m(n-p)=mn-mp, \qquad (m-n)p=mp-np\,. \ \blacklozenge$$

4.8. Од тврдењата *i)* и *iii)* во теоремата 4.7 непосредно следува точноста на следната последица.

Последица. Нека $\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Тогаш, $(\mathbf{Z}^*,\cdot)$ е потполугрупа од $(\mathbf{Z},\cdot)$, и притоа $(\mathbf{Z}^*,\cdot)$ е полугрупа со кратење и единица 1, но не е група. ♦

4.9. Во теорема 1.12 докажавме дека множеството природни броеви $\mathbf{N}$ е добро подредено множество. Со помош на релацијата на подредување во $\mathbf{N}$ ќе дефинираме подредување во множеството на целите броеви $\mathbf{Z}$. Имено, во $\mathbf{Z}$ дефинираме релација $\leq'$ со: ако $m,n\in\mathbf{Z}$, тогаш

$$m\leq' n \text{ ако и само ако } n-m\in\mathbf{N}\,. \qquad (1)$$

4.10. Теорема. Нека $m,n\in\mathbf{N}$. Тогаш,

$$m\leq n \text{ ако и само ако } m\leq' n\,. \ \blacklozenge \qquad (2)$$

4.11. Поради (2) за релациите $\leq$ и $\leq'$ ќе користиме иста ознака и тоа само првата ознака. Точна е следнава теорема.

Теорема. Релацијата $\leq$ е подредување во $\mathbf{Z}$.

Доказ. Непосредно следува од тоа што $(\mathbf{N},+)$ е полугрупа, $0\in\mathbf{N}$ и фактот дека $n=0$ ако и само ако $-n=0,\quad n\in\mathbf{N}$. ♦

4.12. Како и кај секое подредување, *стриктното подредување* се дефинира со $m<n$ ако и само ако $m\leq n$ и $m\neq n$.

Теорема. *i)* Во $\mathbf{Z}$ нема ниту најмал, ниту најголем елемент.

ii) Ако $m,n\in\mathbf{Z}$, тогаш $m<n$ ако и само ако $n-m\in\mathbf{Z}^+$.

iii) Ако $m,n\in\mathbf{Z}$, тогаш $m<n$ или $m=n$ или $n<m$, т.е. $\mathbf{Z}$ е потполно подредено множество.

iv) $m<n$ ако и само ако $m+p<n+p$, за секој $p\in\mathbf{Z}$.

v) Ако $p\in\mathbf{Z}^+$, тогаш $m<n$ ако и само ако $mp<np$.

vi) Ако $p\in\mathbf{Z}^-$, тогаш $m<n$ ако и само ако $np<mp$.

Доказ. Доказот го препуштаме на читателот за вежба. ♦

5. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

5.1. Според последицата 4.8 комутативната полугрупа со единица 1, $(\mathbf{Z}^*,\cdot)$ не е група, бидејќи секој елемент различен од 1 и -1 нема инверзен елемент. Си поставуваме задача да најдеме комутативна група $(\mathbf{Q}^*,\cdot)$ која ќе ја содржи полугрупата $(\mathbf{Z}^*,\cdot)$, но притоа множеството $\mathbf{Q}^*\setminus\mathbf{Z}^*$ да има најмалку можно елементи. Прво ќе ја разгледаме следнава теорема.

5.2. Теорема. Нека $\mathbf{Z}$ е множеството цели броеви и $\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$. За два елемента $(a,b),(c,d)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ дефинираме

$$(a,b)\sim(c,d) \tag{1}$$

ако и само ако

$$ad=bc\,. \tag{2}$$

Тогаш, со $\sim$ е дефинирана релација на еквиваленција на $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ и притоа, ако $(a,b)\sim(a',b')$ и $(c,d)\sim(c',d')$, тогаш

$$(ad+cb,bd)\sim(a'd'+c'b',b'd') \tag{3}$$

$$(ac,bd)\sim(a'c',b'd')\,. \tag{4}$$

Доказ. Рефлексивноста и симетричноста на $\sim$ е очигледна. Да ја докажеме транзитивноста. Нека $(a,b)\sim(c,d)$ и $(c,d)\sim(h,k)$, т.е. $ad=bc$ и $ck=dh$. Од својствата на множењето во множеството $\mathbf{Z}$ следува

$$d(ak)=(ad)k=(bc)k=(ck)b=d(hb)$$

т.е.

$$d(ak)=d(hb)\,. \tag{5}$$

Сега од $(c,d)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ следува $d\neq 0$ и како $(\mathbf{Z}^*,\cdot)$ е полугрупа со кратење од равенството (5) следува $ak=hb$, што значи $(a,b)\sim(h,k)$. Со тоа докажавме дека $\sim$ е релација на еквиваленција на $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$.

Од $(a,b)\sim(a',b')$ и $(c,d)\sim(c',d')$ следува $ab'=a'b$ и $cd'=c'd$. Бидејќи $bd\neq 0\neq b'd'$, треба да докажеме само дека

$$(ad+cb)(b'd')=(a'd'+c'b')(bd) \text{ и } (ac)(b'd')=(a'c')(bd)\,.$$

Првото од овие равенства следува од

$$(ad+cb)(b'd')=(ab')(dd')+(cd')(bb')=(a'b)(dd')+(c'd)(bb')=(a'd'+c'b')(bd)\,,$$

а второто од $(ac)(b'd')=(ab')(cd')=(a'b)(c'd)=(a'c')(bd)$. ♦

5.3. Дефиниција. Нека $\sim$ е релацијата на еквиваленција на $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ воведена во теоремата 5.2. Множеството $\mathbf{Q}=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*{}_{|\sim}$ го нарекуваме *множество рационални броеви*, а неговите елементи ги нарекуваме *рационални броеви.*

Во натамошните разгледувања елементот $(m,n)^{\sim} \in \mathbf{Q}$ ќе го означуваме со (m,n).

За рационалните броеви $(1,1)$ и $(0,1)$ привремено ќе ги користиме ознаките e и n, соодветно.

Во множеството на рационалните броеви $\mathbf{Q}$ воведуваме операција собирање $+'$ со:

$$(m,n)+'(p,q)=(mq+pn,nq)\text{, за секои } (m,n),(p,q)\in\mathbf{Q}.$$

и операција множење $*$ со:

$$(m,n)*(p,q)=(mp,nq)\text{, за секои } (m,n),(p,q)\in\mathbf{Q}.$$

5.4. Теорема. *i)* $(\mathbf{Q},+')$ е комутативна група со нула n.

ii) $(\mathbf{Q}^*,*)$, $\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\setminus\{n\}$ е комутативна група со единица e.

iii) За секои $x,y,z\in\mathbf{Q}$ важи $(x+'y)*z=x*z+'y*z$.

Доказ. Од теорема 5.2 следува дека собирањето $+'$ и множењето $*$ се добро дефинирани операции во множеството рационални броеви. Од дефинициите на операциите $+'$ и $*$ и својствата на целите броеви следува дека овие операции се комутативни и асоцијативни. Нека $(m,n)\in\mathbf{Q}$. Тогаш,

$$(m,n)+'(0,1)=(m+0,n)=(m,n)$$

од што следува дека $n=(0,1)$ е нула во $(\mathbf{Q},+')$. Понатаму, од $(0,1)\sim(0,n^2)$ следува

$$(m,n)+'(-m,n)=(mn-mn,n^2)\sim(0,1),$$

т.е. секој елемент на $\mathbf{Q}$ има спротивен, што заедно со претходно изнесеното значи дека $(\mathbf{Q},+')$ е адитивно означена комутативна група со нула n.

Нека $(m,n)\in\mathbf{Q}^*$. Тогаш, $(m,n)*(1,1)=(m,n)$ од што следува дека $e=(1,1)$ единица во полугрупата $(\mathbf{Q}^*,*)$. Но, $m\neq 0$ бидејќи $(m,n)\sim(0,1)$ ако и само ако $m=0$. Бидејќи $n\neq 0$ добиваме дека $(n,m)\in\mathbf{Q}^*$ и притоа важи

$$(m,n)*(n,m)=(mn,mn)\sim(1,1)=e$$

т.е. секој елемент на $\mathbf{Q}^*$ е инверзибилен, што заедно со претходно изнесеното значи дека $(\mathbf{Q}^*,*)$ е мултипликативно означена комутативна група со единица e.

Останува да го докажеме последното тврдење од теоремата. Нека $x,y,z\in\mathbf{Q}$. Тогаш, $x=(m,n),\ y=(p,q),\ z=(k,l)$ и од дефинициите на операциите $+'$ и $*$ и од својствата на целите броеви следува

$$(x+'y)*z=(mq+np,nq)*(k,l)=(mqk+npk,nql)$$

и

$$\begin{aligned}x*z+'y*z&=(mk,nl)+'(pk,ql)=([mqk+npk]l,nql\cdot l)\\&=(mqk+npk,nql)*(l,l)=(mqk+npk,nql)\end{aligned}$$

што значи $(x+'y)*z = x*y+'y*z$. ♦

5.5. Забелешка. Да забележиме дека во комутативната група $(\mathbf{Q}^*,*)$ е определен поимот степен со целоброен експоненет, за кој се точни соодветните тврдења.

Аналогно како и во случајот на целите броеви за секои $x, y \in \mathbf{Q}$ со $x-y = x+'(-y)$, каде што $-y$ е спротивниот елемент на y ја воведуваме операцијата одземање на рационални броеви.

5.6. Теорема. Множеството $\mathbf{Q}$ е унија на следниве три меѓусебно дисјунктни множества

$$\mathbf{Q}^+ = \{(m,n) \in \mathbf{Q} \mid mn > 0\},\ \mathbf{Q}^- = \{(m,n) \in \mathbf{Q} \mid mn < 0\} \text{ и } \{(0,1)\}.$$

Доказ. Прво ќе докажеме дека дефиницијата на множествата $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$ и $\{(0,1)\}$ има смисла, т.е. дека е согласна со релацијата за еквиваленција на $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$. Ако $(m,n) = (p,q)$, тогаш $mq = np$ и оттука следува дека

$$mn \cdot pq = (np)^2 > 0,$$

па затоа ако $mn > 0$, тогаш и $pq > 0$. Според тоа, множеството $\mathbf{Q}^+$ е добро дефинирано. Аналогно се докажува дека и множеството $\mathbf{Q}^-$ е добро дефинирано. Дисјунктноста на множествата $\mathbf{Q}^+$ и $\mathbf{Q}^-$ следува од претходната дискусија.

Сега за $(m,n) \in \mathbf{Q}$ можни се следните случаи:

- $m = n$, па затоа $mn > 0$, т.е. $(m,n) \in \mathbf{Q}^+$,
- $(m < 0 \text{ и } n < 0)$ или $(m > 0 \text{ и } n > 0)$, па затоа $mn > 0$, т.е. $(m,n) \in \mathbf{Q}^+$,
- $(m < 0 \text{ и } n > 0)$ или $(m > 0 \text{ и } n < 0)$, па затоа $mn < 0$, т.е. $(m,n) \in \mathbf{Q}^-$,
- $(m = 0 \text{ и } n < 0)$ или $(m = 0 \text{ и } n > 0)$, па затоа $mn = 0$, т.е. $(m,n) \sim (0,1)$.

Според тоа $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \{(0,1)\}$. ♦

5.7. Дефиниција. Елементите на множеството $\mathbf{Q}^-$ ги нарекуваме *негативни* рационални броеви, а елементите на множеството $\mathbf{Q}^+$ ги нарекуваме *позитивни* рационални броеви.

5.8. Дефинираме релација $\leq'$ со: ако $x, y \in \mathbf{Q}$, тогаш

$$x \leq' y \text{ ако и само ако } y - x \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}. \tag{6}$$

Во врска со вака дефинираната релација ја имаме следнава теорема.

Теорема. Релацијата (6) е релација на подредување во множеството на рационалните броеви $\mathbf{Q}$.

Доказ. За секои $x, y \in \mathbf{Q}$ важи $y - x \in \mathbf{Q}$. Ако $x = y$, тогаш $x \leq' y$. Ако $y - x \in \mathbf{Q}^+$, тогаш $x \leq' y$. Ако $y - x \in \mathbf{Q}^-$, тогаш $x - y \in \mathbf{Q}^+$ па затоа $y \leq' x$. Од теорема 5.6 следува дека за секои $x, y \in \mathbf{Q}$ една од наведените можности мора да се реализира.

Очигледно дека релацијата (6) е рефлексивна. Нека $x \leq' y$ и $y \leq' x$. Тогаш, $y - x \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}$ и $x - y \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}$, што значи дека $x = y$, т.е релацијата (6) е антисиметрична.

Ќе докажеме дека $(\mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}, +')$ е адитивна полугрупа.

Нека $(m,n), (p,q) \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}$. Тогаш, $mn \geq 0,\ pq \geq 0$ па затоа од

$$(m,n) +' (p,q) = (mq + np, nq)$$

следува

$$(mq + np)nq = mnq^2 + pqn^2 \geq 0,$$

што значи $(m,n), +'(p,q) \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}$, т.е. $(\mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}, +')$ е групоид, па затоа е адитивна полугрупа.

Нека, $x, y, z \in \mathbf{Q}$ се такви што $x \leq' y$ и $y \leq' z$. Тогаш, $y - x \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}$ и $z - y \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}$, и бидејќи $(\mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}, +')$ е адитивна полугрупа, добиваме

$$z - x = (z - y) +' (y - x) \in \mathbf{Q}^+ \cup \{(0,1)\}$$

т.е. $x \leq' z$, па затоа релацијата (6) е транзитивна. ♦

5.9. Аналогно се дефинира релацијата за стриктно подредување $<'$. Имено, ако $x, y \in \mathbf{Q}$, тогаш

$$x <' y \text{ ако и само ако } y - x \in \mathbf{Q}^+. \tag{7}$$

Лесно се докажува дека оваа релација не е рефлексивна и е транзитивна. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. Исто така, со непосредна проверка можеме да се увериме во точноста на тврдењата искажани во следнава теорема.

Теорема. *i)* Ако $x \leq' y$, тогаш $x +' z \leq' y +' z$, за секој $z \in \mathbf{Q}$.

ii) Ако $x \leq' y$ и $n <' z$, тогаш $xz \leq' yx$. ♦

5.10. Во претходните разгледувања ги воведовме рационалните броеви и операциите со истите, со што практично одговоривме на прашањето поставено во почетокот на овој дел, што може да се види од следнава теорема чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Теорема. За секои $m, n \in \mathbf{Z}$ точни се тврдењата

i) $(m,1) +' (n,1) = (m + n, 1)$,

ii) $(m,1) * (n,1) = (mn, 1)$, и

iii) $m \le n$ ако и само ако $(m,1) \le '(n,1)$. ♦

5.11. Коментар. Од тврдењата во теорема 5.10 непосредно следува дека рационалните броеви од видот $(m,1)$ ги имаат истите аритметички својства како и целите броеви. Според тоа, на секој рационален број од обликот $(m,1)$ му соодветствува цел број m и ова соодветство е биекција. Затоа множеството цели броеви $\mathbf{Z}$ можеме да го сметаме за подмножество од множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$. Притоа за операциите собирање, множење и одземање и за подредувањето во множеството $\mathbf{Q}$ ќе ги користиме истите ознаки како и за операциите и подредувањето на целите броеви $\mathbf{Z}$, а за рационалните броеви e и n природно е да ги користиме ознаките 1 и 0. Конечно, задачата поставена на почетокот од овој дел е решена, т.е. најдовме кумутативна група $(\mathbf{Q}^*,\cdot)$ на која полугрупата $(\mathbf{Z}^*,\cdot)$ е подполугрупа.

Од досегашните разгледувања и својствата на групите следува дека во множеството рационални броеви равенката од видот $ax=b,\ a\neq 0$ има единствено решение $x=a^{-1}b$.

5.12. Дефиниција. Ако $(G,\cdot)$ е мултипликативно означена комутативна група, тогаш за секои $x,y\in G$ со

$$x:y=xy^{-1} \tag{3}$$

се дефинира операција *делење.*

5.13. Дропки и операциии со дропки. Од претходните разгледувања и од дефиниција 5.12 следува дека во групата $(\mathbf{Q}^*,\cdot)$ е определена операцијата делење. Притоа наместо xy^{-1} пишуваме $\frac{x}{y}$. Изразот $\frac{x}{y}$ се нарекува *рационална дропка* и се чита x поделено со y, или x врз y. Бројот x го нарекуваме *броител,* а бројот y -*именител* на дропката $\frac{x}{y}$.

Ако $a\neq 0$, тогаш од равенката $ax=1$ добиваме $x=a^{-1}\cdot 1=\frac{1}{a}$. Елементот $\frac{1}{a}=a^{-1}$ се нарекува *реципрочна вредност* на a. Понатаму, од

$$(ac)(bc)^{-1}=acc^{-1}b^{-1}=ab^{-1}$$

следува дека

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b},\ \text{за секој}\ c\in\mathbf{Q}^*.$$

Бидејќи за $n\neq 0$ важи $(m,n)\cdot(n,1)=(m,1)$ добиваме дека во множеството на рационалните броеви бројот (m,n) е решение на равенката $nx=m,\ n\in\mathbf{Z}^*$, $m\in\mathbf{Z}$. Во 5.11 видовме дека решението на оваа равенка е дадено со $x=mn^{-1}=\frac{m}{n}$. Но, $(\mathbf{Q}^*,\cdot)$ е група, па затоа оваа равенка има единствено решение па така дојдовме до приказот на рационален број како количник на цели броеви, т.е. $(m,n)=\frac{m}{n}$, при што именителот $n\neq 0$.

Од досега изнесеното и од својствата на рационалните броеви следува точноста на следната теорема.

Теорема. Ако $b,d\neq 0$, тогаш

i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ако и само ако $ad=bc$,

ii) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$,

iii) $\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$,

iv) $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$, и

v) $(\frac{a}{b})^{-1}=\frac{b}{a}$, за $a\neq 0$. ♦

5.14. Бидејќи $\mathbf{Z}$ нема ниту најмал, ниту најголем елемент, тоа истото важи и за $\mathbf{Q}$. Меѓутоа, додека во $\mathbf{Z}$ секој елемент има свој претходник и свој следбеник, во $\mathbf{Q}$ постои битна разлика по ова прашање.

Нека $x<y,\ x,y\in\mathbf{Q}$. Тогаш, од

$$\frac{x+y}{2}-x=\frac{x+y-2x}{2}=\frac{y-x}{2}\in\mathbf{Q}^{+} \text{ и } y-\frac{x+y}{2}=\frac{2y-(x+y)}{2}=\frac{y-x}{2}\in\mathbf{Q}^{+}$$

добиваме $x<\frac{x+y}{2}<y$, што значи дека за секои два различни рационални броја постои рационален број кој е поголем од помалиот, а помал од поголемиот, т.е. се наоѓа меѓу овие два броја. Ова својство на рационалните броеви ја иницира следнава дефиниција.

5.15. Дефиниција. За подреденото множество $(G,<)$ ќе велиме дека е *густо*, ако меѓу секои два различни елементи од G постои елемент во G.

Од дискусијата во 5.14 следува дека множеството $\mathbf{Q}$ е густо.

5.16. Дефиниција. За подреденото поле $(G,+,\cdot)$ ќе велиме дека е *Архимедово* ако за секои $x,y>0$ постои $n\in\mathbf{N}^{+}$ таков што $nx>y$.

5.17. Забелешка. Како што знаеме, ако алгебарските структури $(G,+,\cdot)$ и $(H,+',\bullet)$ се изомофни, тогаш $(G,+,\cdot)$ е поле ако и само ако $(H,+',\bullet)$ е поле.

Од теорема 5.4 следува дека $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ е поле, а од теорема 5.8 следува дека $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ е подредено поле. Ќе докажеме дека $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ е Архимедово поле.

Навистина, ако $a,b\in\mathbf{Q}^{+}$, тогаш $a=\frac{m}{k}, b=\frac{p}{k}$, каде што $m,k,p\in\mathbf{Z}^{+}$, (зошто?). Нека $n=pk+1$. Тогаш,

$$na = (pk+1)\cdot \tfrac{m}{k} > pk\cdot \tfrac{m}{k} = pm \geq \tfrac{p}{k} = b\ ,$$

т.е. $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ е Архимедово поле.

5.18. Забелешка. Во претходните разгледувања докажавме дека множеството рационални броеви е густо множество, т.е. дека меѓу секои два рационални броја има барем еден рационален број. Овде ќе докажеме дека множеството рационални боеви има определени празнини, што е непосредна причина за неговото проширување до ново множество броеви, а тоа е множеството реални броеви кое во натамошните разгледувања ќе го означуваме со $\mathbf{R}$.

Најпрво ќе докажеме дека не постои $p\in\mathbf{Q}$ таков што

$$p^2 = 2\,. \tag{4}$$

Навистина, нека постои рационален број $p=\frac{m}{n}$, каде што $m,n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$ и $m\neq 2k$ или $n\neq 2p$. Тогаш, добиваме

$$m^2 = 2n^2\,. \tag{5}$$

Ако $m=2k+1$, тогаш $m^2 = 2[2k(k+1)]+1$, што противречи на (3). Значи, $m=2k$. Со замена во (4) добиваме $2k^2 = n^2$. Оттука следува дека $n=2p$, што противречи на изборот на $m,n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$. Според тоа, не постои $p\in\mathbf{Q}$ за кој е исполнето равенството (4).

Сега малку подетално ќе ја разгледаме настанатата ситуација. Нека

$$A=\{p \mid p\in\mathbf{Q}^+ \text{ и } p^2<2\} \text{ и } B=\{p \mid p\in\mathbf{Q}^+ \text{ и } p^2>2\}\,.$$

Ќе докажеме дека A не содржи најголем елемент, а B не содржи најмал елемент.

Нека претпоставиме дека $p\in A$. Тогаш $p^2<2$. Да избереме рационален број h таков што $0<h<1$ и $h<\frac{2-p^2}{2p+1}$ и да ставиме $q=p+h$. Тогаш $q>p$ и важи

$$q^2 = p^2+(2p+h)h < p^2+(2p+1)h < p^2+(2-p^2) = 2\,,$$

што значи дека $q\in A$, па затоа A не содржи најголем елемент.

Сега да претпоставиме дека $p\in B$. Тогаш $p^2>2$. Ставаме $q=p-\frac{p^2-2}{2p}$. Тогаш $0<q<p$ и важи

$$q^2 = p^2-(p^2-2)+(\tfrac{p^2-2}{2p})^2 > p^2-(p^2-2) = 2\,,$$

што значи дека $q\in B$, па затоа B не содржи најмал елемент. ♦

5.19. Пред да преминеме на конструкцијата на множеството реални броеви $\mathbf{R}$, ќе воведеме неколку нови поими кои ни се потребни за оваа конструкција.

Дефиниција. За непразното множество $A \subseteq \mathbf{Q}$ ќе велиме дека е *ограничено од горе* ако постои рационален број M, таков што $p \le M$, за секој $p \in A$. Бројот M го нарекуваме *мајоранта* за множеството A.

За мајорантата M на множеството A ќе велиме дека е *супремум* на A ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $x \in A$ таков што $x > M - \varepsilon$. Ја прифаќаме ознаката $M = \sup A$.

За непразното множество $B \subseteq \mathbf{Q}$ ќе велиме дека е *ограничено од долу* ако постои рационален број m, таков што $m \le p$, за секој $p \in B$. Бројот m го нарекуваме *миноранта* за множеството B.

За минорантата m на множеството B ќе велиме дека е *инфимум* на B ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $x \in B$ таков што $x < m + \varepsilon$. Ја прифаќаме ознаката $m = \inf B$.

За непразното множество $A \subseteq \mathbf{Q}$ ќе велиме дека е *ограничено*, ако тоа е ограничено и од долу и од горе.

5.20. Пример. Јасно, множеството $A = \{p \mid p \in \mathbf{Q}^+ \text{ и } p^2 < 2\}$ е ограничено од горе, но од разгледувањата во забелешка 5.18 следува дека во множеството $\mathbf{Q}$ не постои $\sup A$.

Аналогно, множеството $B = \{p \mid p \in \mathbf{Q}^+ \text{ и } p^2 > 2\}$ е ограничено од долу, но во множеството $\mathbf{Q}$ не постои $\inf B$. ♦

5.21. Непостоењето на супремум на ограничено од горе множество е причината за проширување на множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$ во ново множество за кое ќе важи *аксиомата на супремум,* која гласи:

Секое непразно ограничено од горе множество има супремум.

Исто така, во нашите разгледувања ќе докажеме дека ваквото проширување на подреденото поле $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ е единствено со точност до изоморфизам, т.е. дека било кои две проширувања на $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ кои ја задоволуваат аксиомата на супремум се изоморфни.

6. АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

6.1. Дефиниција. *Апсолутна вредност* на рационалниот број a го нарекуваме рационалниот број $|a|$ дефиниран со

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \ge 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

6.2. Непосредно од дефиницијата на апсолутна вредност следува дека $|a| \ge 0$. Точна е следната теорема.

Теорема. За секој рационален број a важи

i) $|a| = |-a|$,

ii) $a \le |a|$ и

iii) $-a \le |a|$.

Доказ. *i)* Јасно, ако $a = 0$, тогаш $|a| = 0 = |-a|$. Ако $a > 0$, тогаш $|a| = a$ и како $-a < 0$ имаме $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Ако $a < 0$, тогаш $|a| = -a$ и како $-a > 0$ имаме $|-a| = -a = |a|$.

ii) Ако $a = 0$, тогаш $|a| = 0 \ge 0 = a$. Ако $a > 0$, тогаш $|a| = a$ па затоа $a \le |a|$. Ако $a < 0$, тогаш $|a| = -a > 0 > a$.

iii) Ако $a = 0$, тогаш $|a| = 0 \ge 0 = -a$. Ако $a > 0$, тогаш $|a| = a > 0 > -a$. Ако $a < 0$, тогаш $|a| = -a \ge -a$. ♦

6.3. Теорема. *i)* $|a+b| \le |a| + |b|$, за секои $a,b \in \mathbf{Q}$.

ii) $||a| - |b|| \le |a-b|$, за секои $a,b \in \mathbf{Q}$.

iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$, за секои $a,b \in \mathbf{Q}$.

iv) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, за секои $a,b \in \mathbf{Q}$, $b \ne 0$.

Доказ. *i)* Од теорема 6.2 следува $a \le |a|$ и $b \le |b|$, за секои $a,b \in \mathbf{Q}$. Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме $a+b \le |a| + |b|$, за секои $a,b \in \mathbf{Q}$. Аналогно од теорема 6.2 следува $-a \le |a|$ и $-b \le |b|$, за секои $a,b \in \mathbf{Q}$, од што добиваме $-(a+b) \le |a| + |b|$.

Конечно, ако $a+b \ge 0$, тогаш

$$|a+b| = a+b \le |a| + |b|,$$

а ако $a+b < 0$, тогаш

$$|a+b| = -(a+b) \le |a| + |b|,$$

што и требаше да се докаже.

ii) Имаме: $|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$ и $|b| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a|$, од што следува $|a| - |b| \le |a-b|$ и $-(|a| - |b|) \le |a-b|$, од што, како и во доказот под *i)*, следува дека $||a| - |b|| \le |a-b|$.

iii) Можни се следните четири случаи:

- $a < 0, b < 0$ и тогаш $ab > 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = (-a)(-b) = ab = |ab|$.
- $a < 0, b \ge 0$ и тогаш $ab \le 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = (-a)b = -ab = |ab|$.
- $a \ge 0, b < 0$ и тогаш $ab \le 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = a(-b) = -ab = |ab|$.
- $a \ge 0, b \ge 0$ и тогаш $ab \ge 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = ab = |ab|$.

iv) Ако $b > 0$, тогаш $\frac{1}{b} > 0$ и $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{b} = \frac{1}{|b|}$, а ако $b < 0$, тогаш $\frac{1}{b} < 0$ и $|\frac{1}{b}| = -\frac{1}{b} = \frac{1}{-b} = \frac{1}{|b|}$. Сега од *iii)* следува $|\frac{a}{b}| = |a \cdot \frac{1}{b}| = |a| \cdot |\frac{1}{b}| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$. ♦

6.4. Последица. За секои рационални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| .$$

Доказ. Непосредно следува од теоремата 6.3 *i)* и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

6.5. Забелешка. Ако $\varepsilon > 0$, тогаш неравенството $|a| < \varepsilon$ е еквивалентно со неравенствата $-\varepsilon < a < \varepsilon$. Точноста на тврдењето непосредно следува од дефиницијата на апсолутна вредност и теорема 6.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

7. КОШИЕВИ НИЗИ ВО МНОЖЕСТВОТО РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

7.1. Дефиниција. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа рационални броеви. За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *Кошиева (фундаментална)* ако за секој $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$ постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секои $m, n \geq n_0,\ m, n \in \mathbf{N}^+$ важи $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *ограничена* ако нејзиното множество вредности $\{a_n \mid n = 1, 2, ...\}$ е ограничено, т.е. ако постои $M \in \mathbf{Q}^+$ таков што $-M \leq a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$, т.е $|a_n| \leq M$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$.

7.2. Теорема. Секоја Кошиева низа рационални броеви е ограничена.

Доказ. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна Кошиева низа. Тогаш, за $\varepsilon = 1$ постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секои $m, n \geq n_0,\ m, n \in \mathbf{N}^+$ важи $|a_n - a_m| < 1$, од што следува дека $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| < 1$ за секој $p \in \mathbf{N}^+$. Нека ставиме

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\} .$$

Јасно, за $n = 1, 2, ..., n_0$ важи $|a_n| \leq M$. Ако $n > n_0$, тогаш $n = n_0 + p$, за некој $p \in \mathbf{N}^+$, па затоа

$$|a_n| = |a_{n_0+p}| = |a_{n_0+p} - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_{n_0+p} - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| \leq M .$$

Конечно, за секој $n \in \mathbf{N}^+$ важи $|a_n| \leq M$, што значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. ♦

7.3. Дефиниција. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се произволни низи рационални броеви.

i) За низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *збир* на низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ако $c_n = a_n + b_n$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$. Притоа пишуваме

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

ii) За низата $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *производ* на низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ако $d_n = a_n b_n$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$. Пишуваме

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

iii) За низата $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *спротивна* на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ако $e_n = -a_n$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$. Притоа пишуваме $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

iv) Ако постои рационален број $r > 0$ и постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што $|a_n| > r$ за секој $n \geq n_0, n \in \mathbf{N}^+$, тогаш со $f_n = 0$ за $a_n = 0$ и $f_n = \frac{1}{a_n}$ за $a_n \neq 0$ дефинираме *инверзна низа* на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Притоа пишуваме $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

7.4. Забелешка. Од својствата на рационалните броеви следува дека операциите собирање и множење на низи рационални броеви воведени со претходната дефиниција, се добро дефинирани операции, што значи дека множеството низи рационални броеви во однос на овие операции е групоид. Во нашите натамошни разгледувања ќе се ограничиме само на Кошиевите низи рационални броеви.

7.5. Теорема. *i)* Ако низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви, тогаш и низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $-\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви.

ii) Ако низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева и низата $\frac{1}{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$ постои во смисла на дефиниција 7.3 *iv)*, тогаш таа е Кошиева.

Доказ. *i)* Нека $\varepsilon > 0$ е произволен даден рационален број. Тогаш постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, за секои $m, n > n_1$ и постои $n_2 \in \mathbf{N}^+$ таков што $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, за секои $m, n > n_2$. Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш при $m, n > n_0$ важи

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

што значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

Нека $\varepsilon > 0$ е повторно произволен рационален број. Постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што $|a_n - a_m| < \varepsilon$, за секои $m, n > n_1$. Според тоа, постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што

$$|(-a_n) - (-a_m)| = |a_n - a_m| < \varepsilon \text{, за секои } m, n > n_1,$$

што значи дека низата $-\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви, па од теорема 7.2 следува дека тие се ограничени, т.е. постојат $M_1, M_2 \in \mathbf{Q}^+$ такви што $|a_n| \le M_1$ и $|b_n| \le M_2$ за секој $n \in \mathbf{N}^+$. Сега, бидејќи низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви, постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што

$$|a_n - a_m| < \tfrac{\varepsilon}{M_1+M_2} \text{ и } |b_n - b_m| < \tfrac{\varepsilon}{M_1+M_2}, \text{ за секои } m,n > n_0.$$

Ако ги искористиме претходните две неравенства, тогаш добиваме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_m b_m| &= |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \le |a_n| \cdot |b_n - b_m| + |b_m| \cdot |a_n - a_m| \\ &\le M_1 |b_n - b_m| + M_2 |a_n - a_m| < M_1 \tfrac{\varepsilon}{M_1+M_2} + M_2 \tfrac{\varepsilon}{M_1+M_2} = \varepsilon \end{aligned}$$

за секои $m,n > n_0$, што значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

ii) Нека претпоставиме дека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Кошиева низа за која постои $r \in \mathbf{Q}^+$ и постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_1$ важи $|a_n| > r$ и нека $\varepsilon > 0$ е даден рационален број. Бидејќи низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева постои $n_2 \in \mathbf{N}^+$ таков што $|a_n - a_m| < \varepsilon r^2$, за секои $m,n > n_2$. Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш при $m,n > n_0$ важи

$$\left|\tfrac{1}{a_n} - \tfrac{1}{a_m}\right| = \tfrac{|a_m - a_n|}{|a_m a_n|} < \tfrac{|a_m - a_n|}{r^2} < \tfrac{\varepsilon r^2}{r^2} = \varepsilon$$

што значи дека низата $\frac{1}{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$ е Кошиева. ♦

8. РЕАЛНИ БРОЕВИ

8.1. Во овој дел, користејќи ги Кошиевите низи од рационални броеви, ќе го конструираме множеството реални броеви $\mathbf{R}$. Со S да го означиме множеството од сите Кошиеви низи рационални броеви. Во множеството S ќе ја разгледаме следната бинарна релација

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ако и само ако за секој* $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$ *постои* $n_0 \in \mathbf{N}^+$ *таков што за секој* $n > n_0$ *важи* $|a_n - b_n| < \varepsilon$. (1)

8.2. Теорема. Релацијата $\sim$ е релација на еквиваленција во множеството S.

Доказ. Навистина, очигледно се точни условите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за секоја низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$, и од $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ следува $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ т.е. релацијата е рефлексивна и симетрична.

Нека претпоставиме дека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ и нека $\varepsilon > 0$ е даден рационален број. Тогаш, од (1) следува дека постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_1$ важи $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и постои $n_2 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_2$ важи $|b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш при $n > n_0$ добиваме

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \le |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

од што следува дека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. релацијата ~ е транзитивна. ♦

8.3. Во натамошните разгледувања класите на еквиваленција на релацијата ~ ќе ги нарекуваме *реални броеви.* За секоја низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ соодветниот реален број ќе го означуваме со $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$. Сега ќе преминеме на дефинирање на основните операции и релацијата на подредување во множеството реални броеви $\mathbf{R} = S_{|\sim}$. Имаме: $C_{\{0\}_{n=1}^{\infty}} = 0$ и $C_{\{1\}_{n=1}^{\infty}} = 1$, каде што $\{0\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ се ознаките за Кошиевите низи чии сите членови се еднакви на 0 и 1, соодветно.

Пред да ги воведеме операциите собирање и множење на реални броеви, да забележиме дека од дефиницијата на релацијата ~ следува точноста на следната лема, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

8.4. Лема. Точно е дека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\sim \{0\}_{n=1}^{\infty}$ ако и само ако постои $r \in \mathbf{Q}^+$ и постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_n| > r$. ♦

8.5. Дефиниција. Ако $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$ и $C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}$ се два реални броја, тогаш со

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}} \tag{2}$$

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}}. \tag{3}$$

дефинираме *собирање и множење* на реални броеви, соодветно.

Забележуваме дека за операциите собирање и множење ги користиме истите ознаки како и кај рационалните броеви. Причина за ова е егзистенцијата на изоморфизмот од множеството рационални броеви во подмножество од множеството реални броеви за кој подоцна ќе стане збор.

8.6. Лема. Операциите собирање и множење на реални броеви дефинирани со (2) и (3), соодветно, се добро дефинирани.

Доказ. Според теорема 7.5 следува дека низите $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви, па затоа збир и производ на два реални броја е реален број. За да докажеме дека собирањето и множењето се навистина добро дефинирани, треба да докажеме дека резултатите од собирањето и множењето не зависат од изборот на претставниците на класите.

Навистина, нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\varepsilon > 0$ е произволен рационален број. Тогаш, постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_1$ важи $|a_n - A_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и постои $n_2 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_2$ важи $|b_n - B_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш при $n > n_0$ добиваме

$$|a_n + b_n - (A_n + B_n)| = |(a_n - A_n) + (b_n - B_n)| \leq |a_n - A_n| + |b_n - B_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

од што следува дека $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n + B_n\}_{n=1}^{\infty}$, што значи дека собирањето не зависи од изборот на претставниците на класите.

Аналогно се докажува дека и множењето не зависи од изборот на претставниците на класите. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Низите $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви, па од теорема 7.2 следува дека тие се ограничени, т.е. постојат $M_1, M_2 \in \mathbf{Q}^+$ такви што $|b_n| \leq M_1$ и $|A_n| \leq M_2$ за секој $n \in \mathbf{N}^+$. Сега од $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што

$$|a_n - A_n| < \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2} \text{ и } |b_n - B_n| < \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2},$$

за секој $n > n_0$. Ако ги искористиме претходните четири неравенства, тогаш добиваме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што

$$\begin{aligned} |a_n b_n - A_n B_n| &= |a_n b_n - A_n b_n + A_n b_n - A_n B_n| \leq |b_n| \cdot |a_n - A_n| + |A_n| \cdot |b_n - B_n| \\ &\leq M_1 |b_n - A_n| + M_2 |b_n - B_n| < M_1 \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2} + M_2 \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2} = \varepsilon \end{aligned}$$

за секој $n > n_0$, што значи дека $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n B_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. множењето не зависи од изборот на претставниците на класите. ♦

8.7. Нека е даден реалниот број $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$. Дефинираме реални броеви

$$-C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}}. \tag{4}$$

ако $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} \neq 0$, тогаш $\frac{1}{C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}} = C_{\{a_n^{'}\}_{n=1}^{\infty}}$, каде што $a_n^{'} = \begin{cases} \frac{1}{a_n}, & \text{ако } a_n \neq 0 \\ 0, & \text{ако } a_n = 0 \end{cases}$ (5)

Аналогно на доказот на лема 8.6 ќе докажеме дека реалните броеви дефинирани со (4) и (5) се добро дефинирани. Од теорема 7.5 следува дека низата $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, па затоа на десната страна на (4) се наоѓа реален број. Од $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} \neq 0$ следува дека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\sim \{0\}_{n=1}^{\infty}$, па сега од лема 7.4 следува дека постои $r \in \mathbf{Q}^+$ и постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_n| > r$, што повторно, според теорема 7.5, значи дека низата $\{a_n^{'}\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, што значи дека $\frac{1}{C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}}$ е реален број. За да докажеме дека овие броеви се навистина добро дефинирани треба да докажеме дека тие не зависат од изборот на претставниците на класите на еквиваленција.

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогаш, од $|a_n - A_n| = |(-a_n) - (-A_n)|$ следува дека $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{-A_n\}_{n=1}^{\infty}$, што значи дека $-C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$ не зависи од изборот на претставникот на класата.

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\sim \{0\}_{n=1}^{\infty}$. Тоа значи дека $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \not\sim \{0\}_{n=1}^{\infty}$. Од лема 8.4 следува дека постојат $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}^+$ и постојат $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^+$ такви што $|a_n| > r_1$ за секој $n > n_1$ и $|A_n| > r_2$ за секој $n > n_2$. Нека сега $\varepsilon > 0$ е зададен рационален број. Од $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ следува дека постои $n_3 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_3$ важи $|a_n - A_n| < \varepsilon r_1 r_2$. Земаме $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ и добиваме дека за секој $n > n_0$ важи

$$|a_n^{'} - A_n^{'}| = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A_n}\right| = \frac{|A_n - a_n|}{|a_n A_n|} < \frac{\varepsilon r_1 r_2}{r_1 r_2} = \varepsilon\,,$$

т.е. $\{a_n^{'}\}_{n=1}^{\infty} \sim \{A_n^{'}\}_{n=1}^{\infty}$, што значи дека $\frac{1}{C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}}$ не зависи од изборот на претставникот на класата.

8.8. Теорема. *i)* $(\mathbf{R}, +)$ е комутативна група со нула 0.

ii) $(\mathbf{R}^*, \cdot)$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ е комутативна група со единица 1.

iii) За секои $x, y, z \in \mathbf{R}$ важи $(x + y)z = xz + yz$.

Доказ. *i)* Веќе докажавме дека $(\mathbf{R}, +)$ е групоид. Од

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{b_n+a_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$$

следува дека $x + y = y + x$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$. Од

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{0\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n+0\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$$

следува $x + 0 = x$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Понатаму, од

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + (-C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}) = C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n-a_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{0\}_{n=1}^{\infty}}$$

следува дека за секој $x \in \mathbf{R}$ постои спротивен елемент $-x \in \mathbf{R}$ таков што $x + (-x) = 0$. На крајот, од

$$\begin{aligned}(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}) + C_{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}} &= C_{\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{(a_n+b_n)+c_n\}_{n=1}^{\infty}} \\ &= C_{\{a_n+(b_n+c_n)\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{b_n+c_n\}_{n=1}^{\infty}} \\ &= C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + (C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}})\end{aligned}$$

следува $(x + y) + z = x + (y + z)$, за секои $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Според тоа, $(\mathbf{R}, +)$ е комутативна група.

ii) Веќе докажавме дека $(\mathbf{R}^*,\cdot)$ е групоид. Од

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{b_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{a_n b_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{b_n a_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{b_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty}$$

следува дека $xy = yx$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$. Од

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{1\}_{n=1}^\infty} = C_{\{a_n \cdot 1\}_{n=1}^\infty} = C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty}$$

следува $x \cdot 1 = x$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Понатаму, нека $x = C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} \neq 0$ е даден реален број. Тогаш, постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што кога $n > n_0$ важи $|a_n| > r$ за некој $r \in \mathbf{Q}^+$, што значи дека за $n > n_0$ важи $a_n \neq 0$. Сега од (5) добиваме

$$C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{a_n^{'}\}_{n=1}^\infty} = C_{\{a_n a_n^{'}\}_{n=1}^\infty} = C_{\{1\}_{n=1}^\infty},$$

за секој $n > n_0$, па следува дека за секој $x \in \mathbf{R}^*$ постои инверзен елемент $\frac{1}{x} \in \mathbf{R}^*$ таков што $x\frac{1}{x} = 1$. На крајот, од

$$\begin{aligned}(C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{b_n\}_{n=1}^\infty}) C_{\{c_n\}_{n=1}^\infty} &= C_{\{a_n b_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{c_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{(a_n b_n) c_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{a_n (b_n c_n)\}_{n=1}^\infty} \\ &= C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{b_n c_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} (C_{\{b_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{c_n\}_{n=1}^\infty})\end{aligned}$$

следува $(xy)z = x(yz)$, за секои $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Според тоа, $(\mathbf{R}^*,\cdot)$ е комутативна група.

iii) Од

$$\begin{aligned}(C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} + C_{\{b_n\}_{n=1}^\infty}) C_{\{c_n\}_{n=1}^\infty} &= C_{\{a_n + b_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{c_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{(a_n + b_n) c_n\}_{n=1}^\infty} \\ &= C_{\{a_n c_n + b_n c_n\}_{n=1}^\infty} = C_{\{a_n c_n\}_{n=1}^\infty} + C_{\{b_n c_n\}_{n=1}^\infty} \\ &= C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{c_n\}_{n=1}^\infty} + C_{\{b_n\}_{n=1}^\infty} C_{\{c_n\}_{n=1}^\infty}\end{aligned}$$

следува дека за секои $x, y, z \in \mathbf{R}$ важи $(x + y)z = xz + yz$. ♦

8.9. Нека $C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty}$ е даден реален број.

$C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty} > 0$ *ако и само ако постои* $r \in \mathbf{Q}^+$ *и постои* $n_0 \in \mathbf{N}^+$ *таков што за секој* $n > n_0$ *важи* $a_n > r$. (6)

И овде треба да докажеме дека дефиницијата на позитивен реален број не зависи од изборот на претставникот $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ на класата $C_{\{a_n\}_{n=1}^\infty}$. Навистина нека $\{a_n\}_{n=1}^\infty \sim \{b_n\}_{n=1}^\infty$ и нека за низата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ и постои $r \in \mathbf{Q}^+$ таков што од $n > n_0$ следува $a_n > r$. Од $\{a_n\}_{n=1}^\infty \sim \{b_n\}_{n=1}^\infty$ следува дека постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_1$ е исполнето неравенството $|a_n - b_n| < \frac{r}{2}$. Тогаш ако $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ при $n > n_2$, добиваме

$$b_n = a_n + (b_n - a_n) \geq a_n - |b_n - a_n| > r - \tfrac{r}{2} = \tfrac{r}{2},$$
што според (6) значи дека дефиницијата на позитивен реален број не зависи од изборот на претставникот на класата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ на класата $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

8.10. Лема. *i)* За секој $x \in \mathbf{R}$ важи или $x > 0$, или $x = 0$, или $-x > 0$.

ii) Ако $x, y > 0$, тогаш $x + y > 0$ и $xy > 0$.

Доказ. *ii)* Ако $x = C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} > 0$ и $y = C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} > 0$ се два позитивни броја, тогаш од (6) следува дека постојат $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}^+$ и постојат $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^+$ такви што за $n > n_1$ важи $a_n > r_1$ и за $n > n_2$ важи $b_n > r_2$. Но, тогаш за $n > n_0$ каде што $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ добиваме $a_n + b_n > r_1 + r_2$ и $a_n b_n > r_1 r_2$, од што следува дека $x + y > 0$ и $xy > 0$, соодветно.

i) За секој $x \in \mathbf{R}$ важи или $x > 0$ или не е $x > 0$.

Ако не е $x > 0$, тогаш според (6) имаме дека

за секој $r \in \mathbf{Q}^+$ и за секој $n_0 \in \mathbf{N}^+$ постои $n > n_0$ таков што $a_n \leq r$. (7)

Имаме два случаја:

1. низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има најмногу конечно многу негативни членови и
2. низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има бесконечно многу негативни членови.

Во првиот случај постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$, таков што за секој $n > n_1$ важи $a_n \geq 0$. Нека $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$. Бидејќи низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева постои $n_2 \in \mathbf{N}^+$ и $n_2 \geq n_1$ таков што за секои $m, n > n_2$ важи $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Ако земеме $\varepsilon = r$, $n_0 = n_2$, тогаш од (7) следува дека постои $n_3 \in \mathbf{N}^+$ таков што за $n_3 > n_2$ важи $a_{n_3} \leq \varepsilon$. Конечно, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_3 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_3$ важи
$$|a_n - 0| = |a_n - a_{n_3} + a_{n_3}| \leq |a_n - a_{n_3}| + |a_{n_3}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$
од што следува дека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{0\}_{n=1}^{\infty}$ т.е. $x = 0$.

Во вториот случај, ако ја разгледаме низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, каде што $b_n = -a_n$, заклучуваме дека таа има бесконечно многу позитивни членови. Ќе разгледаме два потслучаја:

2.1. Постои $r \in \mathbf{Q}^+$ и постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_0$ важи $b_n > r$

2.2. За секој $r \in \mathbf{Q}^+$ и за секој $n_0 \in \mathbf{N}^+$ постои $n > n_0$ таков што $b_n \leq r$.

Во случајот 2.1. од (4) и (6) следува дека $-x > 0$.

Ако низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ има бесконечно многу позитивни членови и ако важи случајот 2.2. тогаш $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{0\}_{n=1}^{\infty}$. Навистина, нека $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$ е произволно. Бидејќи низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што за $m,n > n_1$ важи $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Бидејќи низата $\{b_n\}$ содржи бесконечно многу позитивни членови, заклучуваме дека постои $n_2 \in \mathbf{N}^+$, $n_2 \geq n_1$ таков да $b_{n_2} > 0$. Сега, ако земеме $r = \varepsilon$, $n_0 = n_1$, добиваме дека постои $n_3 \geq n_1$ таков да $b_{n_3} \leq \varepsilon$. Бидејќи

$$b_{n_2} = (b_{n_2} - b_{n_3}) + b_{n_3} \leq b_{n_3} + |b_{n_2} - b_{n_3}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

добиваме дека за $n > n_2$ важи

$$|b_n| = |b_n - b_{n_2} + b_{n_2}| \leq |b_{n_2}| + |b_n - b_{n_2}| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

што значи дека $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{0\}_{n=1}^{\infty}$, од што следува $x = 0$. ♦

8.11. Забелешка. Во теорема 8.8 докажавме дека $(\mathbf{R},+,\cdot)$ е поле. Инверзните операции одземање и делење во $(\mathbf{R},+,\cdot)$ ги дефинираме со

$$x - y = x + (-y) \text{ и } \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}, \text{ ако } y \neq 0,$$

соодветно. Понатаму дефинираме

$$x < 0 \text{ ако } -x > 0; \; x > y \text{ ако } x - y > 0; \; x < y \text{ ако } y > x;$$
$$x \geq y \text{ ако } x - y > 0 \text{ или } x = y; \text{ и } x \leq y \text{ ако } y \geq x.$$

Сега, од лема 8.10, следува дека $(\mathbf{R},\geq)$ е потполно подредено поле.

Реалните броеви кои се поголеми од 0 ќе ги наречеме позитивни, а оние кои се помали од нула ќе ги наречеме негативни. Множеството позитивни реални броеви ќе го означуваме со $\mathbf{R}^+$, а множеството негативни реални броеви - со $\mathbf{R}^-$. Од претходната лема следува дека $\mathbf{R} = \{0\} \cup \mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^-$.

Нека $r \in \mathbf{Q}$. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, каде $a_n = r$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$ е Кошиева, па затоа таа дефинира реален број $C_{\{r\}_{n=1}^{\infty}}$, кој го нарекуваме $C-$рационален број и ќе го означуваме со $\overline{r}$. Множеството $C-$рационални броеви ќе го означува со $\overline{S}_{|\sim}$. Лесно се докажува ова $(\overline{S}_{|\sim},+,\cdot)$ е потполе од полето реални броеви $(\mathbf{R},+,\cdot)$ и дека пресликувањето $f: \mathbf{Q} \to \overline{S}_{|\sim}$ дефинирано со $f(r) = C_{\{r\}_{n=1}^{\infty}}$ е изоморфизам, кој го запазува подредувањето. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8.12. Теорема. Во подреденото поле на реалните броеви важи аксиомата на супремум.

Доказ. Нека A е непразно множество реални броеви ограничено од горе со реалниот број $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$. Според теорема 7.2 низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, па затоа постои рационален број r таков што $a_n \leq r$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$. Но, тогаш $C_{\{r+1-a_n\}_{n=1}^{\infty}} > 0$, што значи

$$C_{\{r+1\}_{n=1}^{\infty}} - C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} > 0,$$

па затоа

$$C_{\{r+1\}_{n=1}^{\infty}} > C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}},$$

од што следува дека $C_{\{r+1\}_{n=1}^{\infty}}$ е мајоранта на A. Јасно, меѓу $C-$рационалните броеви има барем еден кој не е мајоранта на множеството A. Навистина, ако $C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}$ е произволен елемент од A, тогаш повторно од лема 7.2 следува дека постои рационален број q таков што $b_n > q$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$, па затоа $C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} > C_{\{q-1\}_{n=1}^{\infty}}$, од што следува дека $C_{\{q-1\}_{n=1}^{\infty}}$ не е мајоранта на A. Според тоа, за множеството A постојат $C-$рационални броеви $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ такви што $\overline{a}_1$ не е мајоранта на A, $\overline{a}_2$ е мајоранта на A. Сега дефинираме две рационални низи $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ на следниот начин: $t_1 = a_1, s_1 = a_2$. Понатаму ги разгледуваме броевите $t_1, \frac{t_1+s_1}{2}, s_1$ и меѓу нив ги земаме соседните броеви u, v, каде што $\overline{u}$ не е, а $\overline{v}$ е мајоранта на множеството A. Ставаме $t_2 = u, s_2 = v$. Понатаму ги разгледуваме броевите $t_2, \frac{t_2+s_2}{2}, s_2$ и меѓу нив ги земаме соседните броеви u, v, каде што $\overline{u}$ не е, а $\overline{v}$ е мајоранта на множеството A. Ставаме $t_3 = u, s_3 = v$, итн.

Од конструкцијата следува дека за низите $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$ важи

$t_i < s_j$, за секои $i, j \in \mathbf{N}^+$, $t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \le ...$, $s_1 \ge s_2 \ge ... \ge s_n \ge ...$

$$s_2 - t_2 = \frac{s_1-t_1}{2}, s_3 - t_3 = \frac{s_2-t_2}{2}, ..., s_n - t_n = \frac{s_{n-1}-t_{n-1}}{2}, ... \qquad (8)$$

Со последователна примена на равенствата во (8) добиваме дека за секој $n = 2,3,4,...$ е точно равенството

$$s_n - t_n = \frac{s_1-t_1}{2^{n-1}}. \qquad (9)$$

Ќе докажеме дека низата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. Нека $n, p \in \mathbf{N}^+$. Тогаш од (8) и (9) добиваме

$$|s_{n+p} - s_n| = s_n - s_{n+p} < s_n - t_n = \frac{s_1-t_1}{2^{n-1}}.$$

Нека $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$. Тогаш постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за $n > n_0$ важи $\frac{s_1-t_1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Навистина, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ е Архимедово поле, па затоа постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$, таков што $s_1 - t_1 < (n_0 - 1)\varepsilon$ и како $n_0 - 1 < 2^{n_0-1}$, за $n_0 \in \mathbf{N}^+$, пример 8.14, добиваме $s_1 - t_1 < 2^{n_0-1}\varepsilon$, па затоа за $n > n_0$ важи

$$s_1 - t_1 < 2^{n_0-1}\varepsilon < 2^{n-1}\varepsilon,$$

т.е. $\frac{s_1-t_1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Значи, за секои $n, p \in \mathbf{N}^+$ такви што $n, p > n_0$ важи $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, од што следува дека низата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

Ставаме $s = C_{\{s_n\}_{n=1}^{\infty}}$. Ќе докажеме дека $s = \sup A$. Прво ќе докажеме дека s е мајоранта на A. Нека претпоставиме дека постои $C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} \in A$ таков што $s < C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}$. Но, тоа значи дека $C_{\{b_n - s_n\}_{n=1}^{\infty}} > 0$ од што следува дека за некој $n_0 \in \mathbf{N}^+$ и $r \in \mathbf{Q}^+$ важи $b_n - s_n > r$, за секој $n > n_0$. Но, низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, па затоа постои $n_1 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секои $m,n > n_1$ важи $|b_n - b_m| < \frac{r}{2}$. Нека $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Тогаш, за $n > n_2$ добиваме

$$s_{n_2} < b_{n_2} - r = (b_{n_2} - b_n) - r + b_n \leq |b_{n_2} - b_n| - r + b_n < \frac{r}{2} - r + b_n = b_n - \frac{r}{2}.$$

Според тоа, $C-$рационалниот број $\bar{s}_{n_2}$ е помал од $C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} \in A$, што противречи на начинот на конструкцијата на низата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Значи, s е мајоранта на A.

Сега да претпоставиме дека $C_{\{r_n\}_{n=1}^{\infty}}$ е мајоранта на A таква што $C_{\{s_n\}_{n=1}^{\infty}} > C_{\{r_n\}_{n=1}^{\infty}}$. Тогаш, постојат $n_1 \in \mathbf{N}^+$ и $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$ такви што важи

$$s_n - r_n > \varepsilon, \text{ за секој } n > n_1. \tag{10}$$

Од друга страна, од (9) следува дека постои $n_2 \in \mathbf{N}^+$ таков што

$$s_n - t_n < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за секој } n > n_2. \tag{11}$$

Нека $n > \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш, $r_n - s_n < -\varepsilon$ и $s_n - t_n < \frac{\varepsilon}{2}$, па, ако ги собереме последните две неравенства, добиваме

$$t_n > r_n + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за } n > \max\{n_1, n_2\}. \tag{12}$$

Бидејќи низата $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, постои $n_3 \in \mathbf{N}^+$ таков што

$$|t_n - t_m| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ за } m,n > n_3. \tag{13}$$

Нека $p = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Тогаш, при $n > p$ од (12) и (13) следува

$$t_{p+1} - r_n = (t_{p+1} - t_n) + (t_n - r_n) \geq (t_n - r_n) - |t_{p+1} - t_n| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$$

односно за $n > p$ важи $t_{p+1} - r_n > \frac{\varepsilon}{4}$. Оттука следува дека $\bar{t}_{p+1} > C_{\{r_n\}_{n=1}^{\infty}}$, што е противречност, бидејќи по конструкција $\bar{t}_{p+1}$ не е мајоранта на A.

Од добиената противречност следува $s = \sup A$. ♦

8.13. Заради забелешка 8.11 во натамошните разгледувања $C-$рационалните броеви ќе ги поистоветуваме со рационалните броеви, а реалните броеви кои не се рационални ќе ги нарекуваме ирационални броеви и ќе ги означуваме со $\mathbf{I}$. Според тоа, $\mathbf{I} \cap \mathbf{Q} = \varnothing$ и $\mathbf{I} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{R}$.

Во делот 6 го воведовме поимот апсолутна вредност од рационален број. На ист начин се дефинира апсолутна вредност од реален број, при што тврдењата искажани за рационалните броеви важат и за реалните броеви. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8.14. Ќе докажеме дека множеството реални броеви е единствено со точност до изоморфизам.

Теорема. Ако $\mathbf{R}^*$ е потполно подредено поле во кое важи аксиомата на супремум, тогаш $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^*$ се изоморфни.

Доказ. Бидејќи $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^*$ се потполни подредени полиња, во секое од нив има нула и единица и нека тоа се $0,1 \in \mathbf{R}$ и $0^*, 1^* \in \mathbf{R}^*$. Ставаме

$$f(0) = 0^* \text{ и } f(1) = 1^*. \tag{14}$$

На елементот $n = \underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ пати}}$ му го придружуваме елементот

$$f(n) = \underbrace{1^*+1^*+...+1^*}_{n \text{ пати}}, \tag{15}$$

а на елементот $-n$ му го придружуваме елементот $-f(n)$, т.е.

$$f(-n) = -f(n). \tag{16}$$

Ако со $\mathbf{Z}^*$ го означиме множеството цели елементи во полето $\mathbf{R}^*$, тогаш пресликувањето $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^*$ е биекција. Понатаму, ако $0 < m < n$, тогаш

$$f(m) = \underbrace{1^*+1^*+...1^*}_{m \text{ пати}} < \underbrace{1^*+1^*+...+1^*}_{n \text{ пати}} = f(n) \tag{17}$$

што заедно со (16) значи дека пресликувањето f го запазува подредувањето. Исто така се запазуваат и операциите собирање и множење, т.е. точни се равенствата

$$f(m+n) = f(m) + f(n), \tag{18}$$

$$f(mn) = f(m) f(n). \tag{19}$$

Јасно, ако $m = 0$ или $n = 0$, тогаш равенствата (18) и (19) важат.

Нека, ако $m > 0$ и $n > 0$, тогаш

$$f(m+n) = \underbrace{1^*+1^*+...+1^*}_{m+n \text{ пати}} = \underbrace{1^*+1^*+...+1^*}_{m \text{ пати}} + \underbrace{1^*+1^*+...+1^*}_{n \text{ пати}} = f(m) + f(n). \tag{20}$$

Ако пак $m < 0$ и $0 < -m < n$, тогаш

$$\begin{aligned} f(m+n) &= \underbrace{1^*+1^*+...+1^*}_{n+m=n-(-m) \text{ пати}} = -\underbrace{(1^*+1^*+...+1^*)}_{-m \text{ пати}} + \underbrace{1^*+1^*+...+1^*}_{n \text{ пати}} \\ &= -f(-m) + f(n) = f(m) + f(n). \end{aligned} \tag{21}$$

Ако $0 < m < -n$, тогаш од (16) и (21) добиваме:

$$f(m+n) = -f(-m-n) = -[f(-m) + f(-n)] = -[-f(m) - f(n)] = f(m) + f(n).$$

На крајот, ако $m<0, n<0$, тогаш (16) и (20) следува:

$$f(m+n)=-f(-m-n))=-[f(-m)+f(-n)]=-[-f(m)-f(n)]=f(m)+f(n),$$

со што равенството (18) е докажано.

За да го докажеме равенството (19), најпрво да забележиме дека од својствата на апсолутната вредност за елементите на $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^*$ важи:

ако $x\geq 0, y\geq 0$ или $x\leq 0, y\leq 0$, тогаш $xy=|xy|$, (22)

ако $x>0, y<0$ или $x<0, y>0$, тогаш $xy=-|xy|$. (23)

Од равенствата (15) и (16) следува дека за секој $n\in\mathbf{Z}$ важи

$$f(|n|)=|f(n)|. \tag{24}$$

Ако за множителите $m,n\in\mathbf{Z}$ важи условот (22), тогаш од (16) следува дека истиот услов важи и за множителите $f(m), f(n)$, па затоа

$$\begin{aligned} f(mn)&=f(|m|\cdot|n|)=\underbrace{1^*+1^*+\ldots+1^*}_{|mn|\text{ пати}}=\underbrace{(1^*+1^*+\ldots+1^*)}_{|m|\text{ пати}}\underbrace{(1^*+1^*+\ldots+1^*)}_{|n|\text{ пати}}\\ &=f(|m|)f(|n|)=|f(m)|\cdot|f(n)|=|f(m)f(n)|=f(m)f(n). \end{aligned} \tag{25}$$

Ако множителите се со различен знак, тогаш од (16), (23), (24) и (25) следува

$$\begin{aligned} f(mn)&=f(-|mn|)=-f(|mn|)=-f(|m|\cdot|n|)=-f(|m|)f(|n|)=-f(|mn|)\\ &=-|f(m)f(n)|=f(m)f(n). \end{aligned}$$

Според тоа, пресликувањето f е биекција од множеството $\mathbf{Z}$ во множеството $\mathbf{Z}^*$, која го запазува подредувањето и операциите собирање и множење.

Понатаму, на секој рационален број $\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$, во $\mathbf{R}$ му придружуваме елемент $\frac{f(m)}{f(n)}\in\mathbf{R}^*$, т.е. ставаме

$$f(\tfrac{m}{n})=\frac{f(m)}{f(n)}. \tag{26}$$

Лесно се гледа дека пресликувањето f биективно го пресликува полето $\mathbf{Q}$ на полето $\mathbf{Q}^*$ од сите рационални елементи на $\mathbf{R}^*$. Ова пресликување е изоморфизам меѓу подредените полиња $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^*$. Навистина, ако

$$0<\tfrac{m}{n}<\tfrac{p}{q}, m,n,p,q\in\mathbf{Z}, n\neq 0, q\neq 0 \tag{27}$$

тогаш $mq<np$, па затоа $f(mq)<f(np)$, т.е. $f(m)f(q)<f(n)f(p)$. Според тоа $\frac{f(m)}{f(n)}<\frac{f(p)}{f(q)}$, па од (26) следува дека

$$f(\tfrac{m}{n})<f(\tfrac{p}{q}). \tag{28}$$

За рационални броеви со произволен знак запазувањето на подредувањето при пресликувањето f следува од (27) и (28) и од тоа што

$$f(-\frac{m}{n}) = f(\frac{-m}{n}) = \frac{f(-m)}{f(n)} = -\frac{f(m)}{f(n)} = -f(\frac{m}{n})\,. \tag{29}$$

Понатаму од равенствата (18), (19) и (26) за секои $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ добиваме

$$\begin{aligned} f(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}) &= f(\frac{mq+np}{nq}) = \frac{f(mq+np)}{f(nq)} = \frac{f(m)f(q)+f(n)f(p)}{f(n)f(q)} \\ &= \frac{f(m)}{f(n)} + \frac{f(p)}{f(q)} = f(\frac{m}{n}) + f(\frac{p}{q}) \end{aligned} \tag{30}$$

и

$$f(\frac{m}{n}\frac{p}{q}) = f(\frac{mp}{nq}) = \frac{f(mp)}{f(nq)} = \frac{f(m)f(p)}{f(n)f(q)} = \frac{f(m)}{f(n)}\frac{f(p)}{f(q)} = f(\frac{m}{n})f(\frac{p}{q})\,. \tag{31}$$

Пресликувањето f е изоморфизам од $\mathbf{Q}$ во $\mathbf{Q}^*$ кој го запазува подредувањето, па затоа низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во $\mathbf{Q}$ ако и само ако низата $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во $\mathbf{Q}^*$ (проверете!). Според тоа, постои биекција меѓу Кошиевите низи во $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^*$, па затоа постои биекција и меѓу соодветните класи на еквиваленција. Понатаму, на секој $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} \in \mathbf{R}$ му го придружуваме елементот $C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}} \in \mathbf{R}^*$, т.е. ставаме

$$f(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}) = C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}}\,. \tag{32}$$

Вака дефинираното пресликување f е изоморфизам од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^*$ кој го запазува подредувањето. Навистина, од равенствата (30), (31) и (32) добиваме:

$$\begin{aligned} f(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}) &= f(C_{\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}}) = C_{\{f(a_n+b_n)\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}+\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}} \\ &= C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}} + C_{\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}} = f(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}) + f(C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}) &= f(C_{\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}}) = C_{\{f(a_nb_n)\}_{n=1}^{\infty}} \\ &= C_{\{f(a_n)f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}} \\ &= C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}} C_{\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}} = f(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}) f(C_{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}), \end{aligned}$$

што значи дека f е изоморфизам од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^*$. Нека $C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} > 0$, што значи дека постои $r \in \mathbf{Q}^+$ и постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_0$ важи $a_n > r$. Но, тогаш постои $f(r) \in \mathbf{Q}^*$, $f(r) > 0$ и постои $n_0 \in \mathbf{N}^+$ таков што за секој $n > n_0$ важи $f(a_n) > f(r)$, што значи дека $f(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}) = C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}} > 0$. ♦

8.15. Во претходните разгледувања видовме дека множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$ е вистинско подредено потполе од полето реални броеви $\mathbf{R}$ и дека во полето $\mathbf{Q}$ не е исполнета аксиомата за супремум. На крајот од овој дел ќе докажеме дека множеството реални броеви не е изоморфно со свое вистинско подмножество, тврдење кое е последица од следната теорема.

Теорема. Не постои подредено поле во кое важи аксиомата на супремум, кое како вистинско подмножество го содржи множеството реални броеви.

Доказ. Нека $\mathbf{R}^*$ е подредено поле во кое е исполнета аксиомата на супремум и нека полето на реални броеви $\mathbf{R}$ е негово потполе. Ќе докажеме дека $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$.

Во теорема 8.14 видовме дека меѓу секои две подредени полиња во кои важи аксиомата на супремум, во случајот меѓу $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^*$, постои изоморфизам f кој се добива со соодветно додефинирање на пресликувањето

$$f(0) = 0^*, \quad f(1) = 1^*. \tag{33}$$

на сите елементи на полето $\mathbf{R}$, каде 0 и 1 се нулата и единицата на полето, а 0^* и 1^* се нулата и единицата на полето $\mathbf{R}^*$. Но, $\mathbf{R}$ е потполе од $\mathbf{R}^*$, па затоа $0^* = 0$ и $1^* = 1$, што значи дека равенствата (33) можеме да ги запишеме во обликот

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1. \tag{34}$$

Сега од релациите (15) и (34) следува дека

$$f(n) = \underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ пати}} = n \tag{35}$$

за секој природен број n. Ако n е цел број, тогаш од релациите (16) и (35) следува дека $f(n) = n$. Нека $r = \frac{m}{n}$, тогаш од претходното равенство и од релацијата (26) следува дека

$$f(r) = f(\tfrac{m}{n}) = \frac{f(m)}{f(n)} = \frac{m}{n} = r,$$

што значи дека рационалните броеви при пресликувањето f се пресликуваат во самите себе.

Нека $x \in \mathbf{R}$. Тогаш постои Кошиева низа рационални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $x = C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$, па затоа

$$f(x) = f(C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}) = C_{\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}} = C_{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} = x,$$

што значи дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$f(x) = x. \tag{36}$$

Пресликувањето f е изоморфизам од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^*$, па затоа тоа е сурјекција, што според (36) значи дека $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$. ♦

9. АРИТМЕТИЧКИ СВОЈСТВА НА ИНФИМУМОТ И СУПРЕМУМОТ. ТЕОРЕМА НА АРХИМЕД

9.1. Во овој дел ќе се осврнеме на аритметичките својства на инфимумот и супремумот на подмножества од множеството реални броеви $\mathbf{R}$. Прво ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Секое непразно ограничено од долу множество $A \subseteq \mathbf{R}$ има инфимум, при што $\inf A = -\sup(-A)$, каде што $-A = \{-x \mid x \in A\}$.

Доказ. Бидејќи множеството A е ограничено од долу, постои $m \in \mathbf{R}$ таков што $x \geq m$, за секој $x \in A$, па значи $-x \leq -m$, за секој $x \in A$, т.е. множеството $-A$ е ограничено од горе. Според тоа, постои $\sup(-A) = M^*$. Значи, $-x \leq M^*$, за секој $x \in A$ и затоа $-M^* \leq x$, за секој $x \in A$. Според тоа, $-M^*$ е миноранта на множеството A. Ако N е друга миноранта на множеството A, тогаш $-N$ е мајоранта на множеството $-A$ и затоа $-N \geq M^* = \sup\{-A\}$, т.е. $N \leq -M^*$, што значи $\inf A = -M^* = -\sup\{-A\}$. ♦

9.2. Теорема. Нека A и B се ограничени множества реални броеви и $C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Тогаш,

$$\inf C = \inf A + \inf B \text{ и } \sup C = \sup A + \sup B.$$

Доказ. Ќе го докажеме првото равенство.

Од ограниченоста на A и B следува дека постојат m и m_1 такви што $m \leq x$, за секој $x \in A$ и $m_1 \leq y$, за секој $y \in B$. Но, тоа значи дека $m + m_1 \leq x + y$, за секој $x + y \in C$, т.е. множеството C е ограничено од долу. Сега од теорема 9.1 следува дека постои $\inf C$ и притоа $\inf C \geq m^* + m_1^*$ каде што $m^* = \inf A$ и $m_1^* = \inf B$.

Од дефиницијата на инфимум следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $x' \in A$ таков што $m^* \leq x' < m^* + \frac{\varepsilon}{2}$ и постои $y' \in B$ таков што $m_1^* \leq y' < m_1^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $x' + y' \in C$ таков што $m^* + m_1^* \leq x' + y' < m^* + m_1^* + \varepsilon$.

Сега, од произволноста на ε следува дека $\inf C \leq \inf A + \inf B$, па затоа $\inf C = \inf A + \inf B$.

Второто равенство се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

9.3. Теорема. Нека A и B се ограничени подмножества од $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ и $C = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$. Тогаш, $\inf C = \inf A \cdot \inf B$ и $\sup C = \sup A \cdot \sup B$.

Доказ. Од ограниченоста на множеството A следува дека постои реален број m таков што $m \leq x$, за секој $x \in A$. Но, $A \subset \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, па затоа $m \geq 0$. Слично, постои $m_1 \geq 0$ таков што $m_1 \leq y$, за секој $y \in B$. Според тоа, за секој

$xy \in C$ важи $mm_1 \leq xy$, што значи дека егзистенцијата на $\inf A, \inf B$ повлекува егзистенција на $\inf C$ (зошто?).

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен реален број. Од дефиницијата на инфимумот следува дека постои $x \in A$ таков што $\inf A \leq x < \inf A + \varepsilon$. Аналогно, постои $y \in B$ таков што $\inf B \leq y < \inf B + \varepsilon$. Од последните две неравенства добиваме дека постои $xy \in C$ таков што

$$\inf A \cdot \inf B \leq xy < \inf A \cdot \inf B + \varepsilon(\varepsilon + \inf A + \inf B) .$$

Од произволноста на ε следува дека $\inf C = \inf A \cdot \inf B$.

Второто равенство се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

9.4. Теорема (Архимед). Ако $a > 0$ и b е произволен реален број, тогаш постои $n \in \mathbf{Z}$ таков што $(n-1)a \leq b$ и $na > b$.

Доказ. Прво ќе докажеме дека постои $n \in \mathbf{Z}$ таков што $na > b$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. $ka \leq b$, за секој $k \in \mathbf{Z}$. Тогаш множеството $\{ka \mid k \in \mathbf{Z}\}$ е ограничено од горе, па затоа постои

$$\sup\{ka \mid k \in \mathbf{Z}\} = M^* \leq b .$$

Бидејќи бројот $M^* - a$ не е мајоранта на множеството $\{ka \mid k \in \mathbf{Z}\}$, постои $pa \in \{ka \mid k \in \mathbf{Z}\}$ таков што $M^* - a < pa \leq M^*$. Но, тоа значи дека постои $p+1 \in \mathbf{Z}$ таков што $(p+1)a > M^*$, што противречи на дефиницијата на M^*. Според тоа, постои $k \in \mathbf{Z}$ таков што $ka > b$.

Аналогно се докажува, дека постои $m \in \mathbf{Z}$ таков, што $ma < b$. Да ги разгледаме броевите $ma, (m+1)a, ..., (k-1)a, ka$. Сега, од $ka > b$ и $ma < b$ следува дека постои $n \in \{m+1, m+2, ..., k-1, k\}$ таков што $(n-1)a \leq b < na$. ♦

9.5. Последица. За секој $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ постои $n \in \mathbf{N}$, таков што $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Доказ. Ставаме $b = \frac{1}{\varepsilon}$ и $a = 1$ и од теорема 9.4 добиваме дека постои $n \in \mathbf{Z}$ таков што $n \cdot 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Од $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, следува дека $n \in \mathbf{N}$. ♦

9.6. Пример. Нека $X = \{\frac{1}{3} \pm \frac{n}{3n+1} \mid n \in \mathbf{N}^+\}$. Докажете дека $\inf X = 0$ и $\sup X = \frac{2}{3}$.

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Тогаш, од неравенствата $0 < \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} < \varepsilon$ и $\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{1}{3} + \frac{n}{3n+1} < \frac{2}{3}$ кои се точни за секој $n > \frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$ следува дека множеството X е ограничено. Од произволноста на ε и дефиницијата на инфимум и супремум следува дека $\inf X = 0$ и $\sup X = \frac{2}{3}$. ♦

9.7. Последица. Нека $a,b \in \mathbf{R}$ се такви што $a < b$. Тогаш, постои $r \in \mathbf{Q}$ таков што $a < r < b$.

Доказ. Нека $h = b - a > 0$. Од последица 9.5 следува дека постои $n \in \mathbf{N}$ таков што $n > \frac{1}{h}$ т.е. $h > \frac{1}{n}$. Од теорема 9.4 следува дека постои $m \in \mathbf{Z}$ таков што

$$m \le na < m+1, \text{ т.е. } \frac{m}{n} \le a < \frac{m+1}{n}.$$

Но, тоа значи дека

$$a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b,$$

односно постои рационален број $r = \frac{m+1}{n}$ таков што $a < r < b$. ♦

9.8. Мерење на отсечки. Во овој дел за означување на отсечките ќе ги користиме ознаките $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, ...$.

Дефиниција. За две отсечки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ќе велиме дека се *сомерливи* ако постои отсечка $\mathbf{c}$ и природни броеви m и n, такви што ако m пати ја собереме отсечката $\mathbf{c}$ добиваме отсечка еднаква на отсечката $\mathbf{a}$ и ако n пати ја собереме отсечката $\mathbf{c}$ добиваме отсечка еднаква на отсечката $\mathbf{b}$.

Да ја разгледаме задачата на мерење на отсечки, која се состои во следното:

На секоја отсечка $\mathbf{a}$ да и се придружи позитивен реален број $d(\mathbf{a})$, кој го нарекуваме *должина (мера)* на $\mathbf{a}$, така што:

1) избираме отсечка $\mathbf{e}$, која ја нарекуваме *еталон за должина*, на која и го придружуваме бројот 1, т.е. ставаме $d(\mathbf{e}) = 1$,
2) еднакви отсечки имаат еднакви должини и
3) за секои отсечки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ важи $d(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = d(\mathbf{a}) + d(\mathbf{b})$.

Ќе докажеме дека при дадените услови задачата има единствено решение. Претходно, да забележиме дака отсечките $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се сомерливи ако и само ако постои отсечка $\mathbf{c}$ и природни броеви m и n, такви што $d(\mathbf{a}) = md(\mathbf{c})$ и $d(\mathbf{b}) = nd(\mathbf{c})$. Притоа за отсечката $\mathbf{c}$ ќе велиме дека е *заедничка мера* на отсечките $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Нека отсечката $\mathbf{a}$ е сомерлива со еталонот на должината $\mathbf{e}$. Тогаш, постојат отсечка $\mathbf{c}$ и природни броеви m и n, такви што $d(\mathbf{a}) = md(\mathbf{c})$ и $d(\mathbf{e}) = nd(\mathbf{c})$. Од последните две равенства и од 2) следува дека $d(\mathbf{a}) = \frac{m}{n}$. Според тоа, за секоја отсечка која е сомерлива со еталонот на должина, нејзината должина е позитивен рационален број.

Обратно, нека $x = \frac{p}{q}$ е произволен позитивен рационален број. Ако еталонот $\mathbf{e}$ го поделиме на q еднакви отсечки, тогаш од 2) и 3) следува дека $q-$от дел од еталонот има должина $\frac{1}{q}$. Понатаму, ако $q-$от дел од еталонот го собереме сам со себе p пати, тогаш повторно од 2) и 3) следува дека добиваме отсечка **a** со должина $d(\mathbf{a})=\frac{p}{q}$. Според тоа, за секој рационален број $x=\frac{p}{q}$ постои отсечка **a** која е сомерлива со еталонот **e** и таква што $d(\mathbf{a})=\frac{p}{q}$.

Природно е да се запрашаме дали постојат отсечки кои се несомерливи со **e**. Одговорот на ова прашање е позитивен. Имено, хипотенузата на рамнокракиот правоаголен триаголник со катети еднакви на **e** има должина $d(\mathbf{c})=\sqrt{2}$, што значи дека таа е несомерлива со **e**.

Ќе докажеме дека должината на секоја несомерлива отсечка со **e** е ирационален број.

Нека отсечката **x** е несомерлива со еталонот **e** и нека со S го означиме множеството отсечки кои се сомерливи со **e** и кои имаат помала должина од **x**. Значи, ако $\mathbf{s}\in S$, тогаш $s=d(\mathbf{s})<d(\mathbf{x})$, па затоа множеството

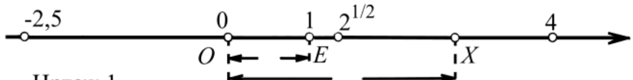
$$A=\{s\mid s=d(\mathbf{s}),\mathbf{s}\in S\}$$

е ограничено од горе и како A нема најголем елемент (зошто?) добиваме дека

$$\sup A=d(\mathbf{x})\in\mathbf{I}.$$

Од досега изнесеното е јасно дека својствата 1) и 2) од задачата на мерење на отсечки се исполнети, а својството 3) следува од теоремата 9.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

9.9. Реална права. Нека на ориентирана права избереме почетна точка O и еталон на должина OE. Од 18.8 следува дека на секоја точка X на правата и соодветствува реален број $x=d(OX)$, ако X лежи во позитивна насока од O и $x=-d(OX)$, во спротивен случај (црт. 1).

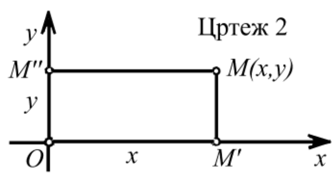


Цртеж 1

Јасно, ова пресликување е инјекција. Природно се наметнува прашањето, дали пресликувањето е и сурјекција, т.е. дали на секој реален број x соодветствува точка од правата? Одговорот на ова прашање е позитивен и истиот следува од геометриската аксиома за непрекинатост на правата.

Според тоа, меѓу множеството реални броеви и точките на ориентирана права може да се воспостави биекција, т.е. реалните броеви можеме да ги пресликаме во точки на правата, која ја нарекуваме *реална оска.*

Ако во почетната точка O конструираме нормална ориентирана права Oy на реалната оска Ox, со иста почетна точка, тогаш добиваме *правоаголен координатен систем* во кој на секоја точка M од рамнината соодветствува подреден пар реални броеви (x,y) и обратно (црт. 2). Јасно, ова соодветствие е биекција.



Цртеж 2

10. КОРЕН ОД РЕАЛЕН БРОЈ

10.1. Теорема. За секој $x \in \mathbf{R}^+$ и за секој $n \in \mathbf{N}^+$ постои еден и само еден $y \in \mathbf{R}^+$ таков што $y^n = x$.

Доказ. Единственоста следува од фактот дека ако $0 < y < y_1$, тогаш $y^n < y_1^n$.

Нека $A = \{t \mid t \in \mathbf{R} \text{ i } t^n < x\}$. Ако $t_1 = \frac{x}{1+x}$, тогаш $0 < t_1 < 1$, па затоа $t_1^n \le t_1 < x$, што значи дека A не е празно множество. Да ставиме $t_2 = 1 + x$. Тогаш, од неравенството на Бернули добиваме дека $t_2^n = (1+x)^n > 1 + nx > x$, па затоа $t_2 \notin A$ и t_2 е мајоранта на A. Значи непразното множество A е ограничено од горе, па затоа има супремум. Нека $y = \sup A$.

Нека претпоставиме дека $y^n < x$ и да избереме h таков што $0 < h < 1$ и $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$. Тогаш, со примена на биномната формула добиваме:

$$(y+h)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} h^k = y^n + h \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k}$$

$$= y^n + h[(1+y)^n - y^n] < y^n + \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}[(1+y)^n - y^n] = y^n + (x - y^n) = x$$

т.е. $y + h \in A$ што противречи на фактот дека y е мајоранта на A.

Да претпоставиме дека $y^n > x$. Тогаш избираме $0 < p < 1$, $p < y$ и $p < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$. Тогаш, за $t \ge y - p$ наоѓаме

$$t^n \ge (y-p)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k y^{n-k} p^k = y^n - p \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k y^{n-k} p^{k-1}$$

$$> y^n - p \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} = y^n - p[(1+y)^n - y^n]$$

$$> y^n - \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}[(1+y)^n - y^n] = y^n - (y^n - x) = x$$

што значи дека $y - p$ е мајоранта на A, што не е можно бидејќи $y = \sup A$.

Конечно, $y^n = x$. ♦

10.2. Дефиниција. Реалниот број y од теорема 10.1 го нарекуваме $n-$*ти корен* на реалниот број x.

Притоа означуваме $y = \sqrt[n]{x}$ или $y = x^{\frac{1}{n}}$.

10.3. Теорема. Нека $m,n \in \mathbf{N}^+$ и $a,b \in \mathbf{R}^+$. Тогаш, точни се следните формули:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}\,,\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}\,,\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\,,\ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \text{ и } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,.$$

Доказ. Ќе ја докажеме само првата формула. Доказот на останатите го оставаме на читателот за вежба.

Нека $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Од дефиницијата на корен имаме $x^n = \sqrt[m]{a}$ и затоа $a = (x^n)^m = x^{mn}$, од што следува $x = \sqrt[mn]{a}$, па затоа $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x = \sqrt[mn]{a}$. ♦

10.4. Дефиниција. Нека $a \in \mathbf{R}^+$, $r \in \mathbf{Q}$, т.е. $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^+$. Тогаш, бројот $\sqrt[n]{a^m}$ го нарекуваме $r -$ *ти степен на* a.

Притоа означуваме $a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

10.5. Во следнава теорема ќе ги наведеме основните својства на степени со рационален показател.

Теорема. *i)* Нека $r, r_1 \in \mathbf{Q}$ и $a,b \in \mathbf{R}^+$. Тогаш, точни се формулите:

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}\,,\ a^r a^{r_1} = a^{r+r_1}\,,\ (a^r)^{r_1} = a^{rr_1}\,,\ \frac{a^r}{a^{r_1}} = a^{r-r_1}\,,\ (ab)^r = a^r b^r \text{ и } (\tfrac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}\,.$$

ii) Нека $r_1 > r_2, r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$. Ако $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$, тогаш $a^{r_1} > a^{r_2}$. Ако $0 < a < 1$, тогаш $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Доказ. *i)* Ќе ја докажеме само првата формула. Доказот на останатите го оставаме на читателот за вежба.

Ако $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^+$, тогаш

$$a^{-r} = a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^r}\,.$$

ii) Нека $r_1 > r_2, r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$. Ако $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$, тогаш $a^{r_1} > a^{r_2}$. Навистина, ако $r_1 = \frac{p}{q}, r_2 = \frac{m}{n}$, тогаш од $r_1 > r_2$ следува $r_1 - r_2 = \frac{np-mq}{nq} > 0$, па затоа можеме да земеме дека $np - mq \geq 1$ и $nq \geq 1$. Сега од својствата на степен со природен експоненет имаме $a^{np-mq} > 1 = 1^{nq}$, па затоа $a^{\frac{np-mq}{nq}} > 1$ (зошто?). Според тоа $a^{r_1} > a^{r_2}$.

Понатаму, ако $0 < a < 1$, тогаш $\frac{1}{a} > 1$, па затоа $(\frac{1}{a})^{r_1} > (\frac{1}{a})^{r_2}$, што значи $a^{r_1} < a^{r_2}$. ♦

11. ЛЕМА ЗА ВЛОЖЕНИ ЗАТВОРЕНИ ИНТЕРВАЛИ

11.1. Дефиниција. Нека $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Множеството $\{x \mid a < x < b,\, x \in \mathbf{R}\}$ го нарекуваме *отворен интервал* со крајни точки a и b и го означуваме со (a,b).

Множеството $\{x \mid a \le x \le b,\, x \in \mathbf{R}\}$ го нарекуваме *затворен интервал* со крајни точки a и b и го означуваме со $[a,b]$.

Множествата $\{x \mid a \le x < b,\, x \in \mathbf{R}\}$ и $\{x \mid a < x \le b,\, x \in \mathbf{R}\}$ ги нарекуваме *полуотворени (полузатворени) интервали* и ги означуваме со $[a,b)$ и $(a,b]$, соодветно.

11.2. Лема. Нека $M, N \subseteq \mathbf{R}$ се непразни множества такви што, за секој $x \in M$ и за секој $y \in N$ е исполнето неравенството $x \le y$. Тогаш, постои $r \in \mathbf{R}$, таков што $x \le r \le y$ за секој $x \in M$ и за секој $y \in N$.

Доказ. Да замеме произволен елемент $y \in N$. По услов $x \le y$ за секој $x \in M$, што значи дека y е мајоранта на M. Од аксиомата за супремум следува дека постои $r = \sup M$ и притоа важи $x \le r$, за секој $x \in M$. Но, r е најмалата мајоранта за M и, бидејќи сите елементи на множеството N се мајоранти за M, добиваме дека $r \le y$, за секој $y \in N$. ♦

11.3. Лема (вложени интервали). Нека $[a_n, b_n],\, n = 1,2,\ldots$ е низа интервали, која ги задоволува условите:

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],\, n = 1,2,\ldots$

ii) за секој $\varepsilon > 0$, постои $n \in \mathbf{N}$, таков што $b_n - a_n < \varepsilon$.

Тогаш, $\bigcap\limits_{n \ge 1} [a_n, b_n] = \{x\}$, за некој $x \in \mathbf{R}$.

Доказ. Ако искористиме дека $[a,b] \subseteq [c,d]$ ако и само ако $c \le a < b \le d$ добиваме дека

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_1, \text{ за секој } n = 1,2,3,\ldots.$$

За множеството $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ бројот b_m, за секој $m = 1,2,3,\ldots$ е мајоранта. Имено, ако $n \le m$, тогаш од условот *i)* имаме $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$, т.е. $a_n \le a_m < b_m \le b_n$, па затоа $a_n < b_m$. Ако пак $n > m$ тогаш од условот *i)* имаме $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$, т.е. $a_m \le a_n < b_n \le b_m$, па затоа $a_n < b_m$.

Ако земеме $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, тогаш од лема 10.2 следува дека постои $x \in \mathbf{R}$ таков што за секој $n = 1,2,3,\ldots$ важи $a_n \le x$ и за секој $m = 1,2,3,\ldots$ важи $x \le b_m$. Затоа, $x \in [a_n, b_n]$, за секој $n = 1,2,3,\ldots$.

Нека $y \in \mathbf{R}$ е таков, што $y \in [a_n, b_n]$, за секој $n = 1,2,3,\ldots$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $y \ge x$. Од условот *ii)* следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n \in \mathbf{N}$ таков што $0 \le y - x \le b_n - a_n < \varepsilon$, т.е. за секој $\varepsilon > 0$ важи $0 \le y - x < \varepsilon$. Од произволноста на ε следува $y = x$, т.е. $\bigcap\limits_{n \ge 1} [a_n, b_n] = \{x\}$. ♦

11.4. Забелешка. Очигледно, ако за интервалите $[a_n, b_n],\ n=1,2,...$ е исполнет само условот *i)* од лемата 10.3, тогаш $\bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n]=[x,y]$, при што

$$x=\sup\{a_1,a_2,a_3,...\} \text{ и } y=\inf\{b_1,b_2,b_3,...\}.$$

Доказот на ова тврдење е аналоген на доказот на лема 11.3 и го оставаме на читателот за вежба.

11.5. Пример. Во случај кога интервалите од лема 11.3 не се затворени, тогаш нивниот пресек може да биде празно множество. Имено, да ги разгледаме интервалите $(0,\frac{1}{n}),\ n=1,2,3,...$. Тогаш, $(0,\frac{1}{n+1})\subset(0,\frac{1}{n})$, за секој $n=1,2,3,...$ меѓутоа $\bigcap_{n\geq 1}(0,\frac{1}{n})=\varnothing$.

Последното непосредно следува од тоа што $\mathbf{R}$ е Архимедово поле. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

11.6. На крајот од овој дел ќе се осврнеме на проширениот систем реални броеви. Така, ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција. *Проширениот систем реални броеви* се состои од множеството реални броеви $\mathbf{R}$, кон кое се додадени симболите $+\infty$ и $-\infty$ со следните својства:

i) ако $x\in\mathbf{R}$, тогаш $-\infty<x<+\infty$ и $x+\infty=+\infty,\ x-\infty=-\infty,\quad \frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0$;

ii) ако $x>0$, тогаш $x(+\infty)=+\infty,\ x(-\infty)=-\infty$;

iii) ако $x<0$, тогаш $x(+\infty)=-\infty,\ x(-\infty)=+\infty$; и

iv) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $(+\infty)(+\infty)=+\infty$
$(+\infty)(-\infty)=-\infty$, $(-\infty)(-\infty)=+\infty$ и $(-\infty)(+\infty)=-\infty$.

Овде уште да забележиме дека множеството $\{x\,|\,x>a,\ x\in\mathbf{R}\}$ исто така е отворен интервал, кој го означуваме со $(a,+\infty)$. Аналогно ги дефинираме интервалите $[a,+\infty), (-\infty,b]$ и $(-\infty,b)$.

Кога има потреба да направиме разлика меѓу реалните броеви, од една, и симболите $+\infty$ и $-\infty$, од друга страна, за првите велиме дека се конечни реални броеви.

Дефиниција. Нека множеството A е подмножество од проширениот систем реални броеви. Ако A не е ограничено од горе, т.е. ако за секој реален број y постои $x\in A$ таков, што $x>y$, тогаш по дефиниција ставаме $\sup A=+\infty$.

Аналогно, ако множеството A не е ограничено од долу, тогаш по дефиниција ставаме $\inf A=-\infty$.

На тој начин во проширениот систем реални броеви секое множество има супремум и инфимум. Тоа е и главната причина за воведувањето на симболите $+\infty$ и $-\infty$.

12. ПОИМ ЗА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

12.1. Пред да преминеме на разгледување на множеството комплексни броеви, да забележиме дека во натамошните разгледувања за означување на природните ќе ги користиме ознаките $\mathbf{N}=\{1,2,...,n,...\}$ и $\mathbf{N}_0=\{0,1,2,...,n,...\}$.

Дефиниција. *Комплексен број* z го нарекуваме подредениот пар реални броеви (a,b).

Множеството комплексни броеви ќе го означуваме со симболот $\mathbf{C}$, т.е. $\mathbf{C}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbf{R}\}$.

За комплексните броеви $(0,0)$ и $(1,0)$ ќе ги прифатиме ознаките n и e, соодветно.

Непосредно од дефиницијата следува дека комплексните броеви $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ се *еднакви,* ако $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

12.2. Дефиниција. Нека се дадени комплексните броеви $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$. *Збир* на броевите z_1 и z_2 ќе го нарекуваме комплексниот број $z_1+z_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)$.

12.3. Дефиниција. Нека се дадени комплексните броеви $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$. *Производ* на броевите z_1 и z_2 ќе го нарекуваме комплексниот број $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$.

12.4. Теорема. За воведените аритметички операции, собирање и множење на комплексни броеви, важат познатите закони на аритметиката. Имено, за секои комплексни броеви z_1,z_2,z_3 важи:

$z_1+z_2=z_2+z_1$, комутативност на собирањето,

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, асоцијативност на собирањето,

$z_1z_2=z_2z_1$, комутативност на множењето,

$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$, асоцијативност на множењето, и

$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$, дистрибутивност.

Доказ. Нека $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ и $z_3=(a_3,b_3)$ се произволни комплексни броеви. Имаме:

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)=(a_2+a_1,b_2+b_1)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$$

односно, $z_1+z_2=z_2+z_1$.

Исто така,

$$\begin{aligned}[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]+(a_3,b_3)&=(a_1+a_2,b_1+b_2)+(a_3,b_3)=((a_1+a_2)+a_3,(b_1+b_2)+b_3)\\&=(a_1+(a_2+a_3),b_1+(b_2+b_3))=\left(a_1,b_1\right)+(a_2+a_3,b_2+b_3)\\&=(a_1,b_1)+[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)],\end{aligned}$$

односно $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

Слично имаме:

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)=(a_2a_1-b_2b_1,b_2a_1+a_2b_1)=(a_2,b_2)\cdot(a_1,b_1),$$

односно, $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

Аналогно на претходно изнесеното, ќе го покажеме асоцијативниот закон за множењето на комплексни броеви. Имено:

$$\begin{aligned}[(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3)&=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)\cdot(a_3,b_3)\\&=((a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3,(a_1a_2-b_1b_2)b_3+a_3(a_1b_2+b_1a_2))\\&=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3,a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_3a_1b_2+b_1a_2a_3)\\&=(a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_3b_2+b_3a_2),a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3-b_2b_3))\\&=(a_1,b_1)\cdot(a_2a_3-b_2b_3,a_3b_2+b_3a_2)=(a_1,b_1)\cdot[(a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)],\end{aligned}$$

односно, $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

Конечно:

$$\begin{aligned}[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3)&=(a_1+a_2,b_1+b_2)\cdot(a_3,b_3)\\&=((a_1+a_2)a_3-(b_1+b_2)b_3,(a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)a_3)\\&=(a_1a_3+a_2a_3-b_1b_3-b_2b_3,a_1b_3+a_2b_3+b_1a_3+b_2a_3)\\&=(a_1a_3-b_1b_3,b_3a_1+b_1a_3)+(a_2a_3-b_2b_3,a_2b_3+a_3b_2)\\&=(a_1,b_1)\cdot(a_3,b_3)+(a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3),\end{aligned}$$

односно, $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.♦

Да напоменеме дека во доказот на теорема 12.4 експлицитно (но по координати) се искористени комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон за операциите собирање и множење на реални броеви.

12.5. Теорема. За секој комплексен број z важат следните равенства $z+n=z$, $z\cdot n=n$ и $z\cdot e=z$.

Доказ. Навистина, ако $z=(a,b)$ е произволен комплексен број, тогаш:

$$z+n=(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)=z,$$
$$z\cdot n=(a,b)\cdot(0,0)=(a\cdot 0-b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 0)=(0,0)=n \text{ и}$$
$$z\cdot e=(a,b)\cdot(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0,a\cdot 0+1\cdot b)=(a,b)=z. \ ♦$$

12.6. Теорема. Ако $z_1+z_3=z_2+z_3$, тогаш $z_1=z_2$.

Доказ. Нека $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ и $z_3=(a_3,b_3)$ се произволни комплексни броеви. Имаме,

$$z_1+z_3=(a_1,b_1)+(a_3,b_3)=(a_1+a_3,b_1+b_3) \text{ и}$$
$$z_2+z_3=(a_2,b_2)+(a_3,b_3)=(a_2+a_3,b_2+b_3).$$

Од $z_1+z_2=z_2+z_3$ и дефиницијата 12.1 добиваме

$$a_1 + a_3 = a_2 + a_3 \text{ и } b_1 + b_3 = b_2 + b_3 .$$

Од својствата на реални броеви следува дека последните равенства се еквивалентни на равенствата $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ што според дефиницијата 12.1 значи $z_1 = z_2$. ♦

12.7. Теорема. За секој комплексен број z постои еден и само еден комплексен број w, таков што $z + w = n$.

Доказ. Нека $z = (a, b)$ е произволен комплексен број. Земаме $w = (-a, -b)$ и добиваме:

$$z + w = (a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = n$$

Со тоа ја докажавме егзистенцијата на комплексниот број w. Единственоста следува од теорема 12.6. ♦

Во натамошните разгледувања комплексниот број w за кој важи $z + w = n$, ќе го означуваме со $w = -z$.

12.8. Теорема. За секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи

$$(-z_1) \cdot z_2 = z_1 \cdot (-z_2) = -(z_1 z_2) = (-e) \cdot (z_1 z_2)$$

така што нема двосмисленост во записот $-z_1 z_2$.

Доказ. Нека $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ се произволни комплексни броеви. Имаме:

$$\begin{aligned}(-z_1) \cdot z_2 &= (-a_1, -b_1) \cdot (a_2, b_2) = (-a_1 a_2 + b_1 b_2, -a_1 b_2 - b_1 a_2) \\ &= -(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) = -(z_1 z_2).\end{aligned}$$

Но, за множењето важи комутативниот закон, па од докажаното равенство добиваме

$$-(z_1 z_2) = -(z_2 z_1) = (-z_2) z_1 = z_1 (-z_2).$$

Конечно, според теорема 12.5 и претходно покажаните равенства имаме

$$(-e)(z_1 z_2) = -(e(z_1 z_2)) = -(z_1 z_2) = (-z_1) z_2 = z_1 (-z_2) . ♦$$

12.9. Дефиниција. Аритметичката вредност на бројот

$$| z | = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ќе ја нарекуваме *модул на комплексниот број* $z = (a, b)$.

Да забележиме дека модулот на секој комплексен број z е ненегативен реален број.

12.10. Теорема. а) Ако $z \neq n$, тогаш $| z | > 0$ и $| n | = 0$.

б) $| z_1 \cdot z | = | z_1 | \cdot | z |$, за секои комплексни броеви z и z_1.

Доказ. Нека $z = (a, b)$ и $z_1 = (a_1, b_1)$ се произволни комплексни броеви.

а) Јасно $|n|=\sqrt{0^2+0^2}=0$. Ако $z\neq n$, тогаш $a\neq 0$ или $b\neq 0$ т.е. $a^2>0$ или $b^2>0$. Според тоа, $|z|^2=a^2+b^2>0.$

б) Од

$$|z_1z|^2=|(a_1a-b_1b,a_1b+b_1a)|^2=(a_1a-b_1b)^2+(a_1b+b_1a)^2$$
$$=a_1^2a^2+b_1^2b^2+a_1^2b^2+b_1^2a^2=(a_1^2+b_1^2)(a^2+b^2)=|z_1|^2|z|^2$$

добиваме $|z_1\cdot z|=|z_1|\cdot|z|$. ♦

12.11. Забелешка. Од принципот на математичка индукција и од теорема 12.10.б) непосредно следува

$$|z_1z_2...z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_n|. \blacklozenge \qquad (1)$$

12.12.Теорема. Ако $zw=n$, тогаш $z=n$ или $w=n$.

Доказ. Ако $zw=n$, тогаш од теорема 12.10 следува

$$|z|\cdot|w|=|zw|=|n|=0.$$

Бидејќи $|z|$ и $|w|$ се реални броеви, од последното равенство следува $|z|=0$ или $|w|=0$, односно $z=n$ или $w=n$. ♦

12.13. Теорема. Ако $z\neq n$ и $zw=zw_1$, тогаш $w=w_1$.

Доказ. Од $zw=zw_1$ имаме $-zw=-zw_1$, па значи

$$n=zw-zw_1=z(w-w_1)$$

Бидејќи $z\neq n$, од 12.12 следува $w-w_1=n$ т.е. $w=w_1$. ♦

12.14. Теорема. За секој комплексен број $z\neq n$ постои еден и само еден комплексен број w, во ознака $\frac{e}{z}$, таков што $zw=e$.

Доказ. Најпрво ќе ја докажеме егзистенцијата на комплексниот број $w=\frac{e}{z}$. Нека $z=(a,b)\neq n$ е произволен комплексен број. Ставаме

$$w=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Тогаш,

$$zw=(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=e.$$

Единственоста непосредно следува од теоремата 12.13. ♦

12.15. Теорема. Ако $z\neq n$, тогаш за секој комплексен број w постои единствен комплексен број u, таков што $zu=w$.

Доказ. Според теорема 12.14 за комплексниот број $z\neq n$ постои единствен комплексен број $\frac{e}{z}$, таков што $z\cdot\frac{e}{z}=e$. Ставаме $u=\frac{e}{z}\cdot w$ и добиваме единствен комплексен број u за кој важи $zu=z\cdot\frac{e}{z}w=w$. ♦

12.16. Во досегашните разгледувања ја развивме аритметиката на комплексните броеви без да го воведеме вообичаениот симбол i. Сега ќе покажеме дека ознаката (a,b) е еквивалентна на вообичаената ознака $a+ib$.

Доказите на тврдењата во теорема 12.17 се елементарни, па затоа нив нема да ги презентираме.

12.17. Теорема. За секои реални броеви a и b исполнети се следните неравенства

а) $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$,

б) $(a,0)(b,0)=(ab,0)$,

в) $|(a,0)|=|a|$, со $|a|$ е означена апсолутната вредност на реалниот број a и

г) $\frac{(a,0)}{(b,0)}=(\frac{a}{b},0)$, ако $b\neq 0$. ♦

12.18. Од тврдењата во теорема 12.17 непосредно следува дека пресликувањето $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ дефинирано со $f(a)=(a,0)$ е изоморфизам од множеството $\mathbf{R}$ во множеството $A=\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}\subseteq\mathbf{C}$. Затоа множеството реални броеви $\mathbf{R}$ можеме да го сметаме за подмножество од множеството комплексни броеви $\mathbf{C}$.

Според тоа, за комплексните броеви e и n природни се ознаките 1 и 0, соодветно и нив ќе ги користиме во натамошните излагања.

12.19. Дефиниција. Комплексниот број $i=(0,1)$ го нарекуваме *имагинарна единица.*

За имагинарната единица важи следното равенство

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+0\cdot 1)=(-1,0)=-1.$$

12.20. Од очигледното равенство $(0,1)(b,0)=(0,b)$ за произволен комплексен број $z=(a,b)$ имаме:

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)=a+ib. \tag{2}$$

Дефиниција. Записот $z=a+ib$ го нарекуваме *алгебарски запис* на комплексниот број $z=(a,b)$.

Со помош на алгебарскиот запис на комплексен број, операциите собирање и множење на комплексни броеви ги запишуваме во следниот облик

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$
$$(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

12.21. Дефиниција. Компонентите a и b на комплексниот број $z=a+ib$ ги нарекуваме *реален дел и имагинарен дел* од z, соодветно. Притоа ги користиме ознаките $a=\operatorname{Re}z$ и $b=\operatorname{Im}z$.

12.22. Во претходните разгледувања, всушност докажавме дека алгебарската структура $(\mathbf{C},+,\cdot)$ е поле, т.е. дека $(\mathbf{C},+)$ и $(\mathbf{C}^*,\cdot)$ се комутативни групи, каде што $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}\setminus\{n\}$ и

$$x(y+z)=xy+xz\text{, за секои } x,y,z\in\mathbf{C}. \qquad (1)$$

Како што видовме $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ се $(\mathbf{R},+,\cdot)$ подредени полиња. Меѓутоа, може да се докаже дека во полето $(\mathbf{C},+,\cdot)$ не може да се воведе подредување.

13. КОНЈУГИРАН КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

13.1. Дефиниција. Комплексниот број $a-ib$ го нарекуваме *конјугиран* на комплексниот број $z=a+ib$ и го означуваме со $\overline{z}$.

13.2. Теорема. а) $\overline{\overline{z}}=z$, за секој комплексен број z.

б) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, за секои комплексни броеви z_1 и z_2,

в) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, за секои комплексни броеви z_1 и z_2,

г) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$, за секој комплексен број z,

д) $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}z$, за секој комплексен број z, и

ѓ) $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2\geq 0$, за секој комплексен број z.

Доказ. Непосредно следува од дефиницијата на конјугиран комплексен број и операциите собирање и множење на комплексни броеви. ♦

13.3. Забелешка. Од равенството $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}z$ непосредно следува дека комплексниот број z е реален ако и само ако $z=\overline{z}$.

13.4. Забелешка. Користејќи го равенството $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ и принципот на математичка индукција лесно може да се докаже следното равенство:

$$\overline{z_1z_2z_3...z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot...\cdot\overline{z_n} \qquad (1)$$

за секој $n\in\mathbf{N}^+$ и произволни комплексни броеви $z_1,z_2,...,z_n$. Ако $z_k=z$, за секој $k=1,2,...,n$, тогаш од равенството (1) следува $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.

13.5. Забелешка. Од теорема 13.2. ѓ) и а) добиваме

$$|\overline{z}|^2=\overline{z}\cdot\overline{\overline{z}}=\overline{z}\cdot z=|z|^2\text{, т.е. } |\overline{z}|=|z|.$$

Нека $z=x+iy$. Од равенството $|z|^2=z\overline{z}=x^2+y^2$ непосредно следуваат неравенствата

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| \quad \text{и} \quad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z| \tag{2}$$

13.6. Забелешка. Пред да ги разгледаме следните примери повторно ќе се осврнеме на делењето на комплексни броеви. Во теоремата 12.15 докажавме дека, ако $z \neq n$, тогаш за секој комплексен број w постои единствен комплексен број u таков, што $zu = w$. Комплексниот број u ќе го нарекуваме *количник* на комплексните броеви w и z.

Притоа, ако $z = a_2 + ib_2$ и $w = a_1 + ib_1$, тогаш за количникот добиваме:

$$u = \frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Притоа за количникот на комплексните броеви z_1 и z_2 важи, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

13.7. Пример. Ако $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1z_2 \neq -1$, докажете дека $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број.

Решение. Имаме,

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \cdot \frac{\overline{1+z_1z_2}}{\overline{1+z_1z_2}} = \frac{(z_1+z_2)(1+\overline{z_1z_2})}{|1+z_1z_2|^2} = \frac{z_1+z_2+z_1\overline{z_1z_2}+\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}{|1+z_1z_2|^2} = \frac{z_1+\overline{z_1}}{|1+z_1z_2|^2} + \frac{z_2+\overline{z_2}}{|1+z_1z_2|^2}.$$

Но, $z_1 + \overline{z_1}$ и $z_2 + \overline{z_2}$ се реални броеви, па затоа и $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број. ♦

13.8. Пример. Докажете, дека ако модулот на еден комплексен број е еднаков на 1, тогаш тој може да се претстави во облик $\frac{c+i}{c-i}$, каде што c е реален број.

Решение. Нека $|z| = 1$. Земаме $c = i\,\frac{z+1}{z-1}$. Тогаш $z = \frac{c+i}{c-i}$ и $\left|\frac{c+i}{c-i}\right| = 1$ т.е. $\frac{c+i}{c-i} \cdot \frac{\bar{c}-i}{\bar{c}+i} = 1$.

Со средување на последното равенство, добиваме $c - \bar{c} = 0$. Значи, $c \in \mathbf{R}$ и $z = \frac{c+i}{c-i}$, што и требаше да докажеме. ♦

13.9. Теорема. За секои комплексни броеви z и $w \neq 0$, важи

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

Доказ. Имаме $\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \frac{z}{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{z}}{w\bar{w}} = \frac{|z|^2}{|w|^2}$, односно $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$. ♦

13.10. Теорема. За секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{и} \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Доказ. Според теорема 13.2 за секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи:

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2} \tag{3}$$

и

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\ . \tag{4}$$

Ако го искористиме првото неравенство во (2), тогаш од равенствата (3) и (4) ги добиваме неравенствата

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2| \tag{5}$$

и

$$|z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||\ . \tag{6}$$

Неравенството (5) е познато како *неравенство на триаголник.* ♦

13.11. Последица. За секои комплексни броеви $z_1, z_2, ..., z_n$ точно е неравенството $|\sum_{i=1}^{n} z_i| \le \sum_{i=1}^{n} |z_i|$.

Доказ. Непосредно следува од неравенството (5) и принципот на математичка индукција. ♦

13.12. Пример. Докажете дека за секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи идентитетот

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2). \tag{7}$$

Решение. Ако ги собереме равенствата (3) и (4) го добиваме бараниот идентитет.♦

13.13. Теорема. Нека $z_i, w_i, i=1,2,...,n$ се произволни комплексни броеви. Тогаш

$$|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\ . \tag{8}$$

Доказ. Означуваме $C=\sum_{i=1}^{n} w_i z_i$, $A=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$ и $B=\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2$. Ако $A=0$, тогаш $|z_i|=0$, за секој $i=1,2,...,n$, па значи $z_i=0$, за секој $i=1,2,...,n$. Но, тогаш и $C=0$, па неравенството (8) е исполнето.

Ако $A\neq 0$, тогаш неравенството (8) следува од очигледното равенство

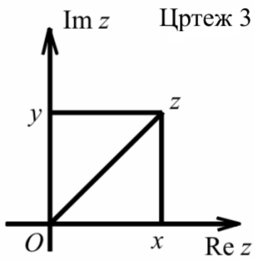
$$\sum_{i=1}^{n}|C\overline{z_i}-Aw_i|^2=\sum_{i=1}^{n}(C\overline{z_i}-Aw_i)(\overline{C}z_i-A\overline{w_i})=A(AB-|C|^2)$$

и неравенствата $\sum_{i=1}^{n}|C\overline{z_i}-Aw_i|^2\ge 0$, $A>0$.

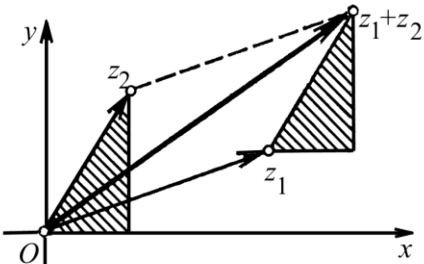
Неравенството (8) е познато како неравенство на *Коши-Буњаковски-Шварц за комплексни броеви.* ♦

14. ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

14.1. Со $\mathbf{R}^2$ ја означуваме Евклидската рамнина со Декартови координати. Секој комплексен број $z = x + iy$ е подреден пар реални броеви (x, y). Бидејќи множеството подредени парови реални броеви (x, y) е во обратно еднозначно соодветствие со $\mathbf{R}^2$, добиваме дека на секоја точка $A \in \mathbf{R}^2$ можеме да и придружиме комплексен број $z = x + iy$, и обратно (црт. 3). За комплексниот број z кој соодветствува на точката A ќе велиме дека е нејзин *афикс.* Ова соодветствие меѓу комплексните броеви и точките од Евклидската рамнина е биекција. Притоа, реалните броеви се пресликуваат на точките од апцисната оска, а имагинарните - на точките од ординатата. Затоа, апцисната оска ја нарекуваме *реална,* а ординатната оска ја нарекуваме *имагинарна оска*. При вакво толкување $\mathbf{R}^2$, природно ја нарекуваме *комплексна рамнина,* а комплексните броеви - *точки* од оваа рамнина.



Цртеж 3

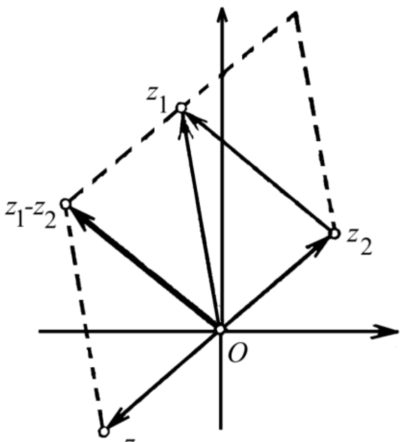


Цртеж 4

Јасно, точките z и $-z$ се симетрични во однос на координатниот почеток, а $\bar{z}$ и z се симетрични во однос на реалната оска. Имено, ако $z = x + iy$, тогаш

$$-z = (-x) + i(-y) \text{ и } \bar{z} = x + (-y)i\,.$$

Очигледно, комплексниот број z соодветствува на векторот со почетна точка O и крај во точката z. Јасно, ова соодветствие меѓу комплексните броеви и векторите на комплексната рамнина со почеток во O исто така е биекција. Затоа, векторот, кој го одредува комплексниот број z, ќе го означуваме со истата буква z. Со помош на векторската интерпретација нагледно можеме да ги илустрираме собирањето и одземањето на комплексни броеви. Според 12.2 добиваме дека бројот $z_1 + z_2$ соодветствува на векторот, добиен со собирање на векторите z_1 и z_2 (црт. 4). Векторот $z_1 - z_2$ се конструира како збир на векторите z_1 и $-z_2$ (црт. 5).



Цртеж 5

Од досега изнесеното и од црт. 5 следува дека растојанието меѓу точките z_1

и z_2 е еднакво на должината на векторот $z_1 - z_2$, т.е. еднакво е на $|z_1 - z_2|$. Јасно, модулот $|z|$ е еднаков на должината на радиус-векторот на точката z.

Ако ги разгледаме триаголниците со темиња во точките $O, z_1, z_1 + z_2$ и $O, z_1, z_1 - z_2$, тогаш е очигледна геометриската смисла на неравенствата (5) и (6) од параграфот 13.

14.2. Пример. а) Множеството точки z, кои ја задоволуваат равенката $|z - z_0| = R$, е кружница со радиус R и центар во точката z_o. Имено, $|z - z_0|$ е растојание помеѓу точките A и B чии афикси се z и z_0, соодветно.

б) Равенката $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$, каде $a < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ е равенка на хипербола со фокуси во точки со афикси z_1 и z_2 и реална полуоска, еднаква на a, (зошто?).

в) Множеството точки z, кои ја задоволуваат равенката $|z - z_1| = |z - z_2|$, е множество точки, еднакво оддалечени од точките z_1 и z_2. Значи $|z - z_1| = |z - z_2|$ е равенката на симетралата на отсечката чии крајни точки имаат афикси z_1 и z_2.

г) Множеството точки z, кои ја задоволуваат равенката

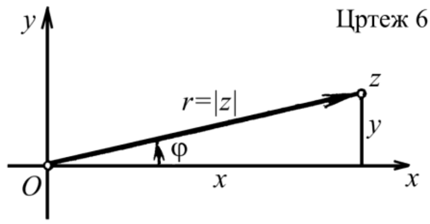
$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a,$$

каде што $a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$, е елипса со фокуси во точките z_1, z_2, и голема полуоска еднаква на a, бидејќи $|z - z_1| + |z - z_2|$ е збирот на растојанијата од точката M со афикс z до точките A и B чии афикси се z_1 и z_2, соодветно. ♦

15. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ. КОРЕН ОД КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

15.1. Во овој дел, заради целовитост на излагањата за комплексните броеви, ќе си допуштиме некоректност во излагањата, со тоа што ќе воведеме тригонометриски запис на комплексен број, иако не сме ги воведе тригонометриските функции, ниту, пак, сме ги докажале нивните својства.

15.2. Аргумент на комплексен број. Аголот φ, кој го зафаќа радиус-векторот на точката z со позитивната насока на реалната оска, го нарекуваме *аргумент* на комплексниот број z, и за него ја прифаќаме ознаката $\varphi = \text{Arg } z$ (црт. 6). Аргументот го сметаме за позитивен или негативен во зависност од тоа,



Цртеж 6

дали истиот е ориентиран од позитивната насока на реалната оска кон позитивната или кон негативната насока на имагинарната оска , соодветно.

За бројот $z=0$ аргументот не е определен, па затоа во сите натамошни разгледувања поврзани со аргументот, претпоставуваме, дека $z \neq 0$.

Положбата на точката z во комплексната рамнина е еднозначно определена како со нејзините декартови координати x, y така и со поларните координати $r=|z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Овие координати меѓу себе се поврзани со формулите

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{1}$$

За дадена точка z нејзиниот модул е еднозначно определен, а аргументот со точност до собирок $2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Вредноста на аргументот, која го задоволува условот $0<\operatorname{Arg} z \leq 2\pi$, ја нарекуваме *главна вредност на аргументот* и ја означуваме со $\arg z$. Во натамошните разгледувања најчесто работиме со главната вредност на аргументот.

15.3. Тригонометриски запис на комплексен број. Од формулите (1), кои ги сврзуваат Декартовите и поларните координати на точката z, го добиваме таканаречениот *тригонометриски запис* на комплексен број

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)). \tag{2}$$

Користејќи го записот (2) за производот на комплексните броеви:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

добиваме

$$z_1z_2 = |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \tag{3}$$

Според 12.10 и дефиницијата на $\arg$ од

$$z_1z_2 = |z_1z_2|(\cos(\arg(z_1z_2)) + i\sin(\arg(z_1z_2)))$$

следува, дека

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \ k=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4}$$

Аналогно, од равенсвото $z_1 = z_2z_3$, при $z_2 \neq 0$, од 31.9 добиваме:

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

15.4. Моаврова формула. Формулите (3) и (4), за производ на два комплексни броја, со помош математичка индукција, лесно се обопштуваат за конечно многу множители $z_1, z_2, \dots, z_n$. Имено,

$$\arg\left(z_1z_2\dots z_n\right) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n + 2k\pi, \ k=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{5}$$

Специјално, ако $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, тогаш добиваме:

$$|z^n| = |z|^n \text{ и } \arg z^n = n\arg z + 2k\pi, \ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

односно

$$z^n = |z|^n(\cos(n\arg z) + i\sin(n\arg z)). \tag{6}$$

Формулата (6) е позната како *Моаврова формула.*

15.5. Пример. Пресметајте ја разликата $(-1+i\sqrt{3})^9-(1+i\sqrt{3})^9$.

Решение. Од

$$|-1+i\sqrt{3}|=2 \text{ и } \arg(-1+i\sqrt{3})=\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi\,,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

добиваме

$$-1+i\sqrt{3}=2(\cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3})\,.$$

Согласно Моавровата формула имаме:

$$(-1+i\sqrt{3})^9=2^9(\cos\tfrac{2\pi}{3}\cdot 9+i\sin\tfrac{2\pi}{3}\cdot 9)=2^9$$

Аналогно добиваме

$$(1+i\sqrt{3})^9=2^9(\cos\tfrac{9\pi}{3}+i\sin\tfrac{9\pi}{3})=-2^9\,.$$

Според тоа,

$$(-1+i\sqrt{3})^9-(1+i\sqrt{3})^9=2^9-(-2^9)=2^{10}\,.\ \blacklozenge$$

15.6. Дефиниција. Нека е даден комплексен број $z\neq 0$ и природен број n. $n-$*ти корен* од z дефинираме како комплексен број w за кој важи

$$w^n=z\,. \tag{7}$$

Притоа ја прифаќаме ознаката $w=\sqrt[n]{z}$. Користејќи ја Моавровата формула (6) и тригонометриските записи

$$z=|z|(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z)) \text{ и } w=|w|(\cos(\arg w)+i\sin(\arg w))$$

добиваме:

$$|w|^n(\cos n(\arg w)+i\sin n(\arg w))=|z|(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z))$$

односно

$$|w|^n=|z| \quad \text{и} \quad n(\arg w)=\arg z+2k\pi,\ \ k=0,\pm1,\pm2,... \tag{8}$$

Од (4) и (8) добиваме:

$$|w|=\sqrt[n]{|z|}\,,\ \arg w=\frac{\arg z+2k\pi}{n}\,,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

т.е.

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n})\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,... \tag{9}$$

Ако во формулата (9) ставиме $k=0,1,2,...,n-1$ за w добиваме n различни вредности $w_0,w_1,...,w_{n-1}$. Ставајќи $k=n$, заради периодичноста на тригонометриските функции, повторно го добиваме бројот w_0 итн. Според тоа, $n-$от корен од комплексниот број z, има точно n различни вредности, кои се добиваат од формулата (9) за $k=0,1,2,...,n-1$.

15.7. Пример. Најдете $\sqrt[3]{27i^5}$.

Решение. Од $i^5 = i^4 \cdot i = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ добиваме

$$\sqrt[3]{27i^5} = \sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = 3(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})$$
$$= 3(\cos\frac{(4k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{6}), \text{ за } k = 0,1,2. \ \blacklozenge$$

15.8. Пример. Докажете дека за секои комплексни броеви a и b важи идентитетот

$$2(|a|+|b|) = |a+b-2\sqrt{ab}| + |a+b+2\sqrt{ab}|,$$

каде што со $\sqrt{ab}$ е означен еден од двата корена на ab.

Решение. Од равенството

$$2(|a|+|b|) = 2(|\sqrt{a}|^2 + |\sqrt{b}|^2)$$

добиваме

$$2(|a|+|b|) = |\sqrt{a}+\sqrt{b}|^2 + |\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2 = |(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2| + |(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2|$$
$$= |a+b+2\sqrt{ab}| + |a+b-2\sqrt{ab}|,$$

што и требаше да се докаже. ♦

15.9. $n-$ти корени на единицата. Во 15.6 зборувавме за коренување на комплексните броеви. Ако $z=1$, тогаш $\arg z = 0$ и според (9) $n-$те различни корени на бројот 1 се зададени со

$$u_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,2,\dots,n-1. \tag{10}$$

Ако ставиме

$$u = u_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

тогаш од Моавровата формула добиваме $u_k = u^k$, $k = 0,1,\dots,n-1.$

Да забележиме дека, во геометриска смисла, при $n \geq 3$, точките во комплексната рамнина, чии афикси се $n-$те корени на единицата, образуваат правилен $n-$аголник, впишан во единичната кружница и едно теме на $n-$аголникот се совпаѓа со точката чиј афикс е $z=1$.

15.10. Пример. а) Нека $S_p = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^p$ е збирот на $p-$тите степени на $n-$те корени на единицата, $n \in \mathbf{N}$. Докажете дека

$$S_p = \begin{cases} n, & \text{ako } n \mid p \\ 0, & \text{ako } n \nmid p. \end{cases}$$

б) Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се дадени комплексни броеви такви, што

$$|a_1| = |a_2| = ... = |a_n| = 1 \text{ и } a_1 + a_2 + ... + a_n = 0.$$

Докажете дека за секој комплексен број z важи

$$|a_1 - z| + |a_2 - z| + ... + |a_n - z| \geq n.$$

в) Нека $a_0, a_1, ..., a_n$ се комплексни броеви такви, што ако $z \in \mathbf{C}$, $|z| \leq 1$, тогаш

$$|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \leq 1.$$

Докажете дека

$$|a_k| \leq 1 \text{ и } |a_0 + a_1 + ... + a_n - (n+1)a_k| \leq n, \text{ за секој } k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Решение. а) Од

$$u_k = u^k, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \text{ и } u = \cos\tfrac{2\pi}{n} + i\sin\tfrac{2\pi}{n},$$

добиваме:

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + ... + u^{(n-1)p}. \tag{11}$$

Ако $n \mid p$ и $\frac{p}{n} = m$, тогаш

$$u^p = u^{mn} = (u^n)^m = 1^m = 1$$

и од (11) следува $S_p = n$.

Нека $n \nmid p$. Притоа важи

$$u^{np} = (u^n)^p = 1^p = 1.$$

Од $n \nmid p$ следува $u^p - 1 \neq 0$, па затоа

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + ... + u^{(n-1)p} = \frac{u^{np} - 1}{u^p - 1} = 0.$$

б) Бидејќи $|a_i| = |\overline{a_i}|$, за секој $i = 1, 2, ..., n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a_i} = 0$, добиваме:

$$n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} - z \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \overline{a_i} - z\overline{a_i})$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (a_i - z)\overline{a_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - z| |a_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i - z|.$$

в) Нека

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

и w_i, $i = 0, 1, ..., n$ се $(n+1)$-те корени на единицата. Но, $\sum\limits_{i=0}^{n} w_i^k = 0$, ако k не се дели со $n+1$ и $\sum\limits_{i=0}^{n} w_i^k = n+1$, ако k се дели со $n+1$, од што следува

$$\sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i) = (n+1)a_{n-k}, \text{ за секој } k \in \{0,1,\dots,n\}.$$

Според тоа,

$$(n+1)\,|\,a_{n-k}\,| = \Big|\sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i)\Big| \le \sum_{i=0}^{n} |\,w_i^k P(w_i)\,| = \sum_{i=0}^{n} |\,P(w_i)\,| \le \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ pati}} = n+1$$

од што следува $|\,a_{n-k}\,| \le 1,$ за секој $k \in \{0,1,\dots,n\}.$

За вториот дел од тврдењето имаме:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^k P(w_i) = \sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i) - P(1) = (n+1)a_{n-k} - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

и

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} w_i^k P(w_i)\Big| \le \sum_{i=1}^{n} |\,w_i^k P(w_i)\,| = \sum_{i=1}^{n} |\,P(w_i)\,| \le n,$$

па затоа $\Big|(n+1)a_{n-k} - \sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \le n$, за секој $k \in \{0,1,\dots,n\}$. ♦

15.11. Дефиниција. Комплексниот број u го нарекуваме *примитивен* n*-ти корен* на единицата, ако $u^n = 1$ и ниеден понизок степен на u не е еднаков на 1.

15.12. Пример. Нека $u_k = u^k$, $k = 0,1,\dots,n-1$ се n-те корени на единицата. Докажете дека u_k е примитивен n-ти корен на единицата ако и само ако n и k се заемно прости броеви.

Решение. Нека n и k се заемно прости броеви и да допуштиме дека за некој $r < n$ важи $u_k^r = 1.$ Од Моавровата формула имаме

$$1 = u_k^r = \cos\tfrac{2kr\pi}{n} + i\sin\tfrac{2kr\pi}{n}.$$

Од последното равенство имаме

$$\cos\tfrac{2kr\pi}{n} = 1, \;\; \sin\tfrac{2kr\pi}{n} = 0.$$

Според тоа, $\frac{kr}{n} \in \mathbf{Z}$ и како n и k се заемно прости добиваме $n\,|\,r,$ што не е можно, бидејќи $r < n$. Значи, u_k е примитивен n-ти корен на единицата.

Обратно, нека u_k е примитивен n-ти корен на единицата. Да претпоставиме дека најголемиот заеднички делител на n и k е $d,$ $d > 1.$ Нека $k = k_1 d,$ $n = n_1 d.$ Тогаш

$$u_k^{n_1} = (u_1^k)^{n_1} = u_1^{n_1 k} = u_1^{k_1 d n_1} = u_1^{k_1 n} = (u_1^n)^{k_1} = 1^{k_1} = 1,$$

што противречи на примитивноста на u_k, бидејќи $n_1 < n.$ ♦

ЗАДАЧИ

1. Најдете ја унијата на множествата:
   а) $A=\{x\,|\,-1\le x<2,\ x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x\,|\,2\le x<4,\ x\in \mathbf{R}\}$;
   б) $A=\{x\,|\,x\le -2,\ x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x\,|\,x\ge 2,\ x\in \mathbf{R}\}$.
2. Најдете го пресекот на множествата:
   а) $A=\{x\,|\,-1\le x<2,\ x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x\,|\,0<x<4,\ x\in \mathbf{R}\}$;
   в) $A=\{x\,|\,x>-2,\ x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x\,|\,x<2,\ x\in \mathbf{R}\}$;
   г) $A=\{x\,|\,x<-2,\ x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x\,|\,x\ge -2,\ x\in \mathbf{R}\}$.
3. Ако множеството $S,\ S\subseteq \mathbf{Z}$ не е празно и ако од $z\in S$ следува $z-1, z+1\in S$, тогаш $S=\mathbf{Z}$. Докажете!
4. Докажете, дека за секои $a,b,c\in \mathbf{R}$ важи $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$.
5. Докажете, дека за секои $a,b\in \mathbf{R}$ такви, што $ab>0$ важи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.
6. Докажете, дека $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, за секој природен број n.
7. (*Низа на Фибоначи*). Броевите $a_n,\ n=1,2,3,...$ се зададени со $a_1=1,\ a_2=1$ и $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, за $n>2$. Докажете, дека $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$, за секој $n=1,2,3,...$.
8. Пресметајте ја вредноста на изразот: $\frac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9-4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}$.
9. Упростете го изразот: $88\cdot(89^{1994}+89^{1993}+...+89^2+89+1)+1$.
10. Пресметајте ја вредноста на изразот:
$$9^{15}-10\cdot 9^{14}+10\cdot 9^{13}-10\cdot 9^{12}+...-10\cdot 9^2+10\cdot 9-1.$$
11. Нека a,b,c,d се рационални броеви $c\ne 0$ или $d\ne 0$ и нека x е ирационален број. Кој услов треба да го задоволуваат броевите a,b,c,d за да $\frac{ax+b}{cx+d}$ биде рационален број?
12. Пресметајте ја вредноста на изразот: $2\sqrt{75}-3\sqrt{48}+5\sqrt{108}-27\sqrt{3}$.
13. Докажете дека за секои $x,y,x_1,x_2,...,x_n\in \mathbf{R}$ се исполнети неравенствата:
   а) $|x-y|\ge||x|-|y||$, и
   б) $|x+x_1+x_2+...+x_n|\ge|x|-(|x_1|+|x_2|+...+|x_n|)$
14. Пресметајте $x\cdot|y|+y\cdot|z|+z\cdot|x|$ ако:
   а) $x=-2,\ y=3,\ z=-4$; б) $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{4}$; и
   в) $x=-\sqrt{3},\ y=2\sqrt{3},\ z=\sqrt{12}$.
15. Пресметајте $|2\cdot|x-1|-3\cdot|y+2|+|z-2||$ ако:

а) $x=-2,\ y=3,\ z=-4$; б) $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}$; и

в) $x=\sqrt{3},\ y=-2\sqrt{3},\ z=\sqrt{3}$.

16. За кои реални броеви се исполнети неравенствата:
а) $|x|<2$; б) $|x|\geq -1$;
в) $|x|\geq 3$; г) $|x+2|\geq 2$; и д) $|x-3|\leq 5$.
Добиените множества претстави ги на бројна оска.

17. Во множеството реални броеви решете ги неравенките:
а) $|x-2|>x-1$, и б) $|x-1|+|2-x|>3+x$.

18. Во множеството реални броеви решете ги равенките
а) $|x-2|=x+1$, б) $|x+3|=2x-3$,
в) $x^2+2x-3|x+1|+3=0$ и г) $|x-2|+|x-1|=|2x+3|$.

19. Во множеството на реалните броеви решете ја равенката
$$|x|+|x-1|+|x-2|-2{,}5=0.$$

20. Докажете дека за секој $x\in\mathbf{R}$ постои еден и само еден $z\in\mathbf{Z}$ таков што $z\leq x<z+1$. Бројот z го означуваме со $[x]$ и го нарекуваме *цел дел од бројот* x.

21. Докажете дека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ и за секој $n\in\mathbf{N}$ важи :
а) $[x]+[y]\leq[x+y]\leq[x]+[y]+1$,
б) $[x][y]\leq[xy]\leq[x][y]+[x]+[y]$,
в) $[\frac{[x]}{n}]=[\frac{x}{n}]$.

22. а) Докажете дека $\sqrt{p_1p_2...p_k}$ е ирационален број ако $p_1,p_2,...,p_k$ се различни прости броеви.
б) Ако $n\in\mathbf{N}$ и n не е квадрат на природен број, тогаш $\sqrt{n}$ е ирационален број. Докажете!

23. Нека $n\in\mathbf{N}$. Докажете дека од $\sqrt{n}\in\mathbf{Q}$ следува $\sqrt{n}\in\mathbf{N}$.

24. Нека $a,b\in\mathbf{N}$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Докажете ги следниве тврдења:
а) ако $\sqrt{ab}\in\mathbf{N}$, тогаш $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbf{N}$, и
б) ако $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbf{Q}$, тогаш $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbf{N}$.

25. Нека $a,b\in\mathbf{R}$, $a>1$. Докажете дека постои $n\in\mathbf{N}$ таков, што $a^n>b$.

26. Дали множеството $A=\{3^n+2^{-n}\mid n=1,2,...\}$ е ограничено:
а) од долу, б) од горе

27. Најдете $\inf A$ и $\sup A$, ако
а) $A=(-1,2]\cup[3,4)$, б) $A=\{(-1)^n+\frac{1}{n}\mid n=1,2,3,...\}$.
Дали овие множества имаат најмал и најголем елемент.

28. Најдете $\inf A$ и $\sup A$, ако

а) $A=\{x \mid (x-1)^2 < \sqrt{2},\ x \in \mathbf{R}\}$, б) $A=\{x \mid (x+2)^2 \le \sqrt{3},\ x \in \mathbf{R}\}$

Дали овие множества имаат најмал и најголем елемент.

29. Докажете дека множеството од сите позитивни правилни рационални дропки $A=\{\frac{m}{n} \mid 0<m<n;\ m,n \in \mathbf{N}\}$ нема најголем и најмал елемент. Најдете $\sup A$ и $\inf A$.

30. Нека A е затворено и ограничено од горе подмножество на $\mathbf{R}$. Докажете дека $\sup A \in A$.

31. Ако A е ограничено множество позитивни реални броеви, тогаш

$$\sup A^n = (\sup A)^n,$$

каде што $A^n = \{a^n \mid a \in A\}$. Докажете!

32. Докажете дека:

а) Ако $A \subset B \subset \mathbf{R}$, тогаш $\sup A \le \sup B$, $\inf A \ge \inf B$.

б) Нека $\mathbf{R} \supset X \ne \varnothing$ и $\mathbf{R} \supset Y \ne \varnothing$. Ако за секој $x \in X$ и за секој $y \in Y$ важи $x \le y$, тогаш X е ограничено од горе, Y е ограничено од долу и важи $\sup X \le \inf Y$. Ако, дополнително важи $\mathbf{R} = X \cup Y$, тогаш $\sup X = \inf Y$.

33. За кои реални броеви x и y важат равенствата:

а) $2x+(y-1)i = 4-3i$, б) $x+2-yi = 3-i$ и

в) $x+3-2yi = 4-6i$.

34. Најдете ги реалните броеви x и y, ако:

а) $3x+xi-2y = 12-yi-i$, б) $5x-3yi+2i = 6-xi-y$ и

в) $x+yi-2 = 4xi+3y+3i$.

35. Пресметајте ја вредноста на изразот:

а) $\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}$ ако $z=1+i$ и б) $\frac{z+\bar{z}}{2z+3}$ ако $z=\frac{i-1}{2}$.

36. Пресметајте ја вредноста на изразот:

а) z^2+2z-3, за $z=2\pm i$ и б) $2z^2+z-1$, за $z=3\pm 5i$.

37. Пресметајте $\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}\left(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i}\right)$.

38. Докажете, дека $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4 = 1$.

39. Реши ја по z равенката:

а) $2z(3-5i)+z-1 = -30-65i$ и б) $(z+i)(1+2i)+(1+zi)(3-4i) = 1+7i$.

40. Без да преминувате во тригонометриски облик најдете го множеството на вторите корени на комплексниот број $z=a+ib.$ Посебно пресметајте $\sqrt[4]{-7+24i}$.

41. Докажете дека, за секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи идентитетот

$$|1-\overline{z_1}z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = \left(1+|z_1 z_2|\right)^2 - \left(|z_1|+|z_2|\right)^2.$$

42. Докажете дека за секои комплексни броеви a и b важи идентитетот

$$|a+b|+|a-b|=|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|,$$

каде што со $\sqrt{a^2-b^2}$ и означен еден од двата корена на a^2-b^2.

43. Ако $n=2,3,...$ докажете дека:

а) $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+...+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1,$

б) $\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+...+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=0.$

44. Одредете го множеството точки z во комплексната рамнина за кои постои реален број c таков, што $z=\frac{c-i}{2c-i}$.

45. Ако z и w се комплексни броеви такви, што $\operatorname{Re} z>0$ і $\operatorname{Re} w>0,$ тогаш $|\frac{z-w}{z+w}|<1.$ Докажете!

46. Која е најголемата вредност на $|z|$ ако се знае дека комплексниот број z го задоволува условот $|z+\frac{1}{z}|=1$?

47. Нека z_1, z_2, z_3 се различни комплексни броеви со еднакви модули. Ако броевите $z_1+z_2z_3,$ $z_2+z_3z_1$ и $z_3+z_1z_2$ се реални, тогаш важи равенството $z_1z_2z_3=1.$ Докажете!

48. Одредете го и претставете го во комплексната рамнина множеството $\{z=\frac{3t+i}{t-i}: t\in\mathbf{R}\}.$

49. Нека $a_1, a_2 ..., a_n$ се дадени комплексни броеви такви што

$$|a_1|=|a_2|=...=|a_n|=r.$$

Со T_n^s го означуваме збирот од сите производи од c попарно различни броеви. На пример,

$$T_n^2=a_1a_2+a_1a_3+...+a_1a_n+a_2a_3+.....+a_{n-1}a_n.$$

Докажете дека, $\frac{|T_n^{n-s}|}{|T_n^s|}=r^s,$ $s=1,2,3,...,n-1.$

50. Нека се $z_1, z_2, ..., z_n$ произволни комплексни броеви. Докажете дека може да се изберат природни броеви $i_1, ..., i_k$ такви, што $1\le i_1<...<i_k\le n$ и

$$|z_{i_1}+z_{i_2}+...+z_{i_k}|\ge\frac{2}{4\sqrt{2}}\left(|z_1|+|z_2|+...+|z_n|\right).$$

51. Нека се a и b позитивни реални броеви. Одредете го минимумот на изразот $|\frac{x+y}{1+xy}|$, ако се x и y комплексни броеви такви, што $|x|=a,$ $|y|=b$.

52. Докажете, дека:

а) Ако $|\alpha|<1$, тогаш $|\frac{z-\alpha}{1-z\alpha}|\le 1$ ако и само ако $|z|<1$.

б) Ако $|\alpha|<1$, тогаш $|\frac{z-\alpha}{1-\bar{z}\alpha}|\geq 1$ ако и само ако $|z|<1$.

53. Претставете ги во тригонометриски облик комплексните броеви:

а) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ б) $\sin\alpha+i(1+\cos\alpha)$

54. Нека a,b,c се произволни комплексни броеви и $w=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Докажете дека

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw).$$

55. Докажете, дека од $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ следува $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta$.

56. Докажете дека, ако $(\frac{a+i}{a-i})^n=1$, тогаш $a=\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,2,...,n-1$.

57. Ако $w_0,w_1,...,w_{n-1}$ се $n-$тите корени на единицата пресметајте ги збировите:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} kw_{k-1}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2w_{k-1}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3w_{k-1}$.

58. Пресметајте ги збировите:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cos\frac{2k\pi}{n}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin\frac{2k\pi}{n}$.

59. Докажете, дека:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\cos(k+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$,

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\sin(k+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha$.

XII ГЛАВА
НИЗИ

1. ПОИМ ЗА НИЗА. КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

1.1. Во дефиниција IV 12.1 го воведовме поимот за низа во произволно множество *A*. Во оваа глава ќе ги разгледаме низите реални броеви, кои се од посебно значење во науката воопшто. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Секое пресликување $a:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ го нарекуваме *низа реални броеви*. Притоа реалниот број $a_n = a(n),\ n\in\mathbf{N}$ го нарекуваме $n-$*член на низата*, а за означување на низата ги користиме ознаките $\{a_n\}$ или $a_n,\ n\geq 1$. Множеството $M_a=\{a_n\mid n=1,2,...\}$ го нарекуваме *множество вредности* на низата $\{a_n\}$.

1.2. Пример. а) За низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = 1+(-1)^n$ важи

$$a_1 = 1+(-1)^1 = 1-1 = 0,\ a_2 = 1+(-1)^2 = 1+1 = 2,\ a_3 = 1+(-1)^3 = 1-1 = 0 \ \text{ итн.}$$

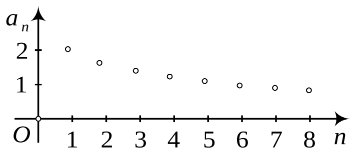
множеството вредности е $M_a = \{0, 2\}$.

б) За низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = 1+\frac{1}{n}$ множеството вредности е

$$M_a = \{2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{4}, ..., \tfrac{k+1}{k}, ...\}.$$

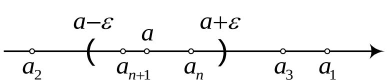
в) За низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = 2^n$ множеството вредности е $M_a = \{2, 4, 8, ..., 2^k, ...\}$. ♦

1.3. Забелешка. Според дефиниција 1.1 секоја низа $a_n = a(n),\ n\in\mathbf{N}$ е пресликување $a:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, па затоа за истата можеме да го нацртаме нејзиниот график. Така, на пример, графикот на низата $a_n = 1+\frac{1}{n}$ е даден на црт. 1.



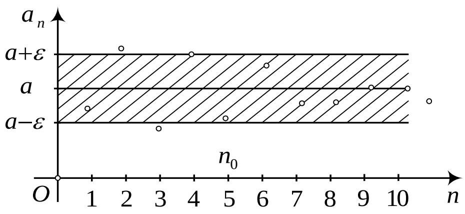
Црт. 1

1.4. Дефиниција. За реалниот број a ќе велиме дека е *граница* (*лимес*) на низата $\{a_n\}$, ако за секој реален број $\varepsilon > 0$ постои природен број $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \varepsilon$ (црт. 2). Притоа велиме дека низата $\{a_n\}$ е *конвергентна* (*конвергира кон бројот* a) и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, односно $a_n \to a$, $n\to\infty$. Низите кои не се конвергентни, ќе ги нарекуваме *дивергентни*.



Црт. 2

1.5. Забелешка. Од дефиницијата на граница на низа следува дека низата $\{a_n\}$ конвергира кон бројот a, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, што значи дека во секој отворен интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ на бројот a се наоѓаат сите членови на низата $\{a_n\}$, освен можда конечно многу. Меѓутоа, ако го нацртаме графикот на низата, добиваме дека сите точки (n, a_n) се наоѓаат во областа ограничена со правите $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$ (црт. 3)



Црт. 3

Во натомошните разгледувања за секој реален број x со $[x]$ ќе го означуваме најголемиот цел број кој е помал или еднаков на бројот x. Така, на пример,

$$[2,5] = 2, [-1,3] = -2 \text{ и } [-0,999] = -1.$$

1.6. Пример. а) Да ја разгледаме низата $a_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Ќе докажеме дека нејзина граница е бројот $a = 0$. Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од аксиомата на Архимед следува дека постои природен број N таков што $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Јасно, множеството природни броеви кои го задоволуваат претходното неравенство има најмал елемент. Нека тоа е бројот n_0. Сега, при $n > n_0$ имаме $n > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$, па затоа $|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

б) Да ја разгледаме низата $a_n = \frac{n^2+1}{2n^2}$, $n \geq 1$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Имаме

$$\varepsilon > |a_n - a| = \left|\frac{n^2+1}{2n^2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n^2}, \text{ т.е. } n^2 > \frac{1}{2\varepsilon},$$

односно $n > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$. Според тоа, ако земеме природен број $n_0 = [\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}] + 1$, тогаш при $n > n_0$ наоѓаме $|a_n - a| < \varepsilon$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

в) Нека $a \in \mathbf{R}, |a| > 1$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$.

Ставаме $|a| = 1 + x$, каде што $x = |a| - 1 > 0$. Од неравенството на Бернули следува дека за секој $n \geq 1$ важи

$$|a|^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx,$$

што значи $\frac{1}{|a|^n} < \frac{1}{nx}$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Ибираме $n_0 = [\frac{1}{x\varepsilon}] + 1$ и добиваме дека за секој $n > n_0$ важи

$$|\frac{1}{a^n}-0|=\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{nx}<\varepsilon,$$

што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$.

г) Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

За $n>1$ земаме $a_1=a_2=\sqrt{n}, a_3=a_4=...=a_n=1$ и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$1<\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+(n-2)}{n}=\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

т.е. $0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n_0=[\frac{4}{\varepsilon^2}]+1$ и добиваме дека за секој $n>n_0$ важи $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$, т.е. $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, па затоа

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon,$$

што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ♦

1.7. Теорема. Низа реални броеви може да има само една граница.

Доказ. Нека претпоставиме дека за низата $\{a_n\}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, $a\neq b$ и да земеме $\varepsilon=\frac{|a-b|}{3}>0$. Од $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ следува дека постои $n_1\geq 1$ таков што за секој $n>n_1$ важи $|a_n-a|<\varepsilon$, а од $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$ следува дека постои $n_2\geq 1$ таков што за секој $n>n_2$ важи $|a_n-b|<\varepsilon$. Нека земеме $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Тогаш, за секој $n>n_0$ важи:

$$|a-b|=|(a-a_n)+(a_n-b)|\leq|a_n-a|+|a_n-b|<2\varepsilon=\frac{2|a-b|}{3}\text{, т.е. }\frac{|a-b|}{3}<0$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $a=b$. ♦

1.8. Теорема. Ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

Доказ. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ следува дека постои $n_0\geq 1$ таков што за секој $n>n_0$ важи $|a_n-a|<\varepsilon$.

Сега од својствата на апсолутна вредност добиваме дека за вака најдениот $n_0\geq 1$ при $n>n_0$ важи $||a_n|-|a||\leq|a_n-a|<\varepsilon$, што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. ♦

1.9. Забелешка. Обратното тврдење во теорема 1.8 не важи. Навистина, за низата $a_n=(-1)^n, n\geq 1$ имаме $|a_n|=1, n\geq 1$, од што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$.

Меѓутоа, низата $a_n = (-1)^n, n \geq 1$ не конвергира бидејќи на пример за секој $\varepsilon < 1$ надвор од секој од интервалите $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ и во секој од овие интервали имаме бесконечно многу точки од низата, што не е можно доколку дадената низа конвергира.

2. ЕЛЕМЕНТАРНИ СВОЈСТВА НА КОНВЕРГЕНТНИТЕ НИЗИ

2.1. Дефиниција. За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е *ограничена*, ако множеството нејзини вредности M_a е ограничено, т.е. ако постои реален број K таков што $|a_n| \leq K$ за секој $n \geq 1$.

За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е ограничена од *горе (десно)* ако постои реален број K таков што $a_n \leq K$ за секој $n \geq 1$.

За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е ограничена од *долу (лево)* ако постои реален број K таков што $K \leq a_n$ за секој $n \geq 1$.

2.2. Пример. а) Множеството вредности на низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = 1 + (-1)^n \cdot 2$, $n \geq 1$ е $M_a = \{-1, 3\}$. Според тоа, оваа низа е ограничена.

б) За низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$ множеството вредности е

$$M_a = \{-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4} ..., \frac{(-1)^k}{k}, ...\},$$

што значи дека оваа низа е ограничена.

в) За низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = 2^n$, $n \geq 1$ множеството вредности е

$$M_a = \{2, 4, 8, ..., 2^k, ...\}.$$

Според тоа, оваа низа е ограничена од лево, но не е ограничена од десно.

г) За низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = (-2)^n$, $n \geq 1$ множеството вредности е

$$M_a = \{-2, 4, -8, ..., -2^{2k-1}, 2^{2k}, ...\}.$$

Според тоа, оваа низа не е ограничена ниту од лево ниту од десно. ♦

2.3. Теорема. Конвергентна низа е ограничена.

Доказ. Нека $a_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbf{R}$. Тогаш, од дефиницијата на граница на низа, за бројот $\varepsilon = 1$ постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < 1$.

Нека

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|, 1 + |a|\}.$$

Тогаш, за $n = 1, 2, ..., n_0$ важи $|a_n| \leq K$, а за $n > n_0$ важи

$$|a_n| \leq |a| + |a_n - a| < 1 + |a| \leq K,$$

што значи дека низата $\{a_n\}$ е ограничена. ♦

2.4. Забелешка. Обратното тврдење од теорема 2.3 не важи. Имено, како што видовме во пример 2.2 а) низата $a_n = 1 + (-1)^n \cdot 2$, $n \geq 1$ е ограничена, но таа не е конвергентна (зошто?), а истото важи и за низата од пример 1.2 а).

2.5. Теорема. Нека претпоставиме дека

$$a_n \to a,\ b_n \to b,\ n \to \infty,\ a, b \in \mathbf{R}.$$

Тогаш:

i) за секој $c \in \mathbf{R}$ важи $ca_n \to ca, n \to \infty$,

ii) $a_n + b_n \to a + b, n \to \infty$,

iii) $a_n b_n \to ab, n \to \infty$, и

iv) ако дополнително $b \neq 0$, тогаш $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}, n \to \infty$.

Доказ. *i*) Очигледно тврдењето важи за $c = 0$.

Затоа нека претпоставиме дека $c \neq 0$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $a_n \to a$, $n \to \infty$ следува дека постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Но, тогаш $|ca_n - ca| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$, што значи дека $ca_n \to ca, n \to \infty$.

ii) Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $a_n \to a, n \to \infty$ следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_1$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогно, постои $n_2 \geq 1$ таков што за секој $n > n_2$ важи $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш од претходно изнесеното следува дека за секој $n > n_0$ важи:

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што значи дека $a_n + b_n \to a + b, n \to \infty$.

iii) Најпрво да забележиме дека

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|. \qquad (1)$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, постои $K > 0$ таков што $|b_n| \leq K$, за секој $n \geq 1$. Од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков што за секој $n > n_1$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ и постои $n_2 \geq 1$ таков што за секој $n > n_2$ важи $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$.

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш од (1) и од претходните две неравенства следува дека при $n > n_0$ важи

$$|a_n b_n - ab| < \tfrac{\varepsilon}{2K} K + \tfrac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \cdot |a| < \varepsilon \text{, т.е. } a_n b_n \to ab, n \to \infty .$$

iv) Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $b > 0$. Тогаш, постои $n_1 \geq 1$ таков што $b_n > \frac{b}{2}$. Од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_2 \geq 1$ таков што за секој $n > n_2$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon b}{4}$ и постои $n_3 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_3$ важи $|b_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4(1+|a|)}$.

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, тогаш од претходно изнесеното следува дека:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - ab_n|}{|bb_n|} = \frac{|a_n b - ab + ab - ab_n|}{|bb_n|} < \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a| \cdot |b - b_n|}{|b| \cdot |b_n|} < \frac{2}{b}\frac{\varepsilon b}{4} + \frac{2|a|}{bb}\frac{\varepsilon b^2}{4(1+|a|)} < \varepsilon ,$$

што значи дека при $b \neq 0$, важи $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, $n \to \infty$. ♦

2.6. Пример. Пресметај ги границите на низите

а) $a_n = \frac{(n+1)^2}{2n^2}, n \geq 1$,

б) $a_n = \frac{1000n^3 + 3n^2}{0{,}001n^4 - 100n^3 + 1}, n \geq 1$,

в) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}, n \geq 1$,

г) $a_n = \frac{n}{\sqrt{2n^2 - n + 1}}, n \geq 1$,

д) $a_n = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}, n \geq 1$,

ѓ) $a_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!}, n \geq 1$,

е) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}, n \geq 1$,

ж) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}, n \geq 1$,

з) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n, n \geq 1$.

Решение. а) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1+0+0}{2} = \frac{1}{2} ,$$

б) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000n^3+3n^2}{n^4}}{\frac{0{,}001n^4-100n^3+1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000}{n}+\frac{3}{n^2}}{0{,}001-\frac{100}{n}+\frac{1}{n^4}} = \frac{0}{0{,}001} = 0 ,$$

в) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{n^2+n}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[3]{0+0}}{1+0} = 0 ,$$

г) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{2n^2-n+1}}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2n^2-n+1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

д) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+1)!+(n+1)!}{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2+1)\cdot(n+1)!}{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0,$$

ѓ) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!-n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1-1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

е) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

ж) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\dots+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

з) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}.\ \blacklozenge$$

3. ТЕОРЕМА ЗА ТРИ НИЗИ

3.1. Лема. Нека за низата $\{a_n\}$ важи $a_n \to a, a\in\mathbf{R}$ и нека $b\in\mathbf{R}$ е таков што $a<b$. Тогаш постои $n_0\ge 1$ таков што $a_n<b$, за секој $n>n_0$.

Доказ. Нека $\varepsilon=b-a$. Од $a_n\to a, a\in\mathbf{R}$ следува дека постои $n_0\ge 1$ таков што $|a_n-a|<\varepsilon=b-a$ кога $n>n_0$. Според тоа, постои $n_0\ge 1$ таков што

$$2a-b<a_n<b, \tag{1}$$

кога $n>n_0$. Конечно, тврдењето следува од десното неравенство во (1). ♦

3.2. Забелешка. Аналогно се докажува дека од $a_n\to a, a\in\mathbf{R}$ и $a>b$ следува дека постои $n_0\ge 1$ таков што $a_n>b$, за секој $n>n_0$.

3.3. Последица (лема за запазување на знакот). Нека $a_n\to a\ne 0$. Тогаш постои $n_0\ge 1$ таков што за секој $n>n_0$ важи

$$a_n>\frac{a}{2},\ \text{ако } a>0, \tag{2}$$

$$a_n<\frac{a}{2},\ \text{ако } a<0. \tag{3}$$

Доказ. Нека $a>0$. Земаме $b=\frac{a}{2}$ и како $a>b=\frac{a}{2}$ од забелешка 3.2 следува дека постои $n_0\ge 1$ таков што за секој $n>n_0$ важи $a_n>b=\frac{a}{2}$, т.е. важи (2).

Нека $a<0$. Земаме $b=\frac{a}{2}$ и како $a<b=\frac{a}{2}$ од лема 3.1 следува дека постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $n>n_0$ важи $a_n<b=\frac{a}{2}$, т.е. важи (3). ♦

3.4. Забелешка. Тврдењето докажано во последица 3.3 всушност значи дека во случај кога границата a на низата $\{a_n\}$ е позитивна, тогаш сите членови на низата, освен можеби конечно многу, се позитивни, а кога границата a е негативна, тогаш сите членови на низата, освен можеби конечно многу, се негативни.

3.5. Лема. Нека $a_n \to a, b_n \to b$ и $a_n \leq b_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Тогаш $a \leq b$.

Доказ. Нека претпоставиме дека $a>b$. Земаме $\varepsilon=\frac{a-b}{2}>0$. Од условот на лемата и дефиницијата за конвергентна низа следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков што за секој $n>n_1$ важи $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$ и постои $n_2 \geq 1$ таков што за секој $n>n_2$ важи $b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$. Земаме $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ и добиваме дека за секој $n>n_0$ важи

$$b_n<b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}=a-\frac{a-b}{2}=a-\varepsilon<a_n,$$

што противречени на условот на лемата. Конечно, од добиената противречност следува дека $a \leq b$. ♦

3.6. Теорема (за три низи). Нека за низите $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ се исполнети условите:

i) $a_n \to a, c_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbf{R}$, и

ii) $a_n \leq b_n \leq c_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Тогаш, $b_n \to a, n \to \infty$.

Доказ. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од условот *i)* и дефиницијата за конвергентна низа следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков што за секој $n>n_1$ важи

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$$

и постои $n_2 \geq 1$ таков што за секој $n>n_2$ важи

$$a-\varepsilon<c_n<a+\varepsilon.$$

Ако земеме $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, тогаш од претходно изнесеното и од условот *ii)* следува дека за секој $n>n_0$ важи

$$a-\varepsilon<a_n \leq b_n \leq c_n<a+\varepsilon.$$

Според тоа, за секој $n>n_0$ важи

$$a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon, \text{ т.е. } |b_n-a|<\varepsilon,$$

што значи $b_n \to a, \ n \to \infty$. ♦

3.7. Пример. Нека $a>0$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$.

За $a=1$ очигледно $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$.

Ако $a>1$, тогаш $\sqrt[n]{a}>1$ и од неравенството на Бернули следува

$$a=[1+(\sqrt[n]{a}-1)]^n > 1+n(\sqrt[n]{a}-1) > n(\sqrt[n]{a}-1).$$

Според тоа, $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Но, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$, па затоа од теоремата за три низи добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}-1=0$, т.е $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Ако $1>a>0$, тогаш $\frac{1}{a}>1$ и затоа $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1$, од што следува:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.\blacklozenge$$

4. МОНОТОНИ НИЗИ

4.1. Во следната теорема ќе докажеме важно својство на монотоните и ограничени низи реални броеви. Пред да преминеме на оваа теорема ќе го воведеме поимот монотона низа. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека *строго монотоно расте,* ако за секој $n\geq 1$ важи $a_{n+1}>a_n$. За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека *строго монотоно опаѓа,* ако за секој $n\geq 1$ важи $a_{n+1}<a_n$.

За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека *монотоно расте,* ако за секој $n\geq 1$ важи $a_{n+1}\geq a_n$, а *монотоно опаѓа,* ако за секој $n\geq 1$ важи $a_{n+1}\leq a_n$.

За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е *монотона,* ако таа или строго монотоно расте или строго монотоно опаѓа, или монотоно опаѓа, или монотоно расте.

4.2. Пример. Испитај ја монотоноста на низата

а) $a_n=\frac{n}{n+1}, n\geq 1$, б) $a_n=\frac{n+2}{n}, n\geq 1$

Решение. а) Имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1+\frac{1}{n^2+2n}>1$$

и како $a_n>0$ добиваме $a_{n+1}>a_n$, што значи дека низата монотоно расте.

б) Имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+3}{n+1}}{\frac{n+2}{n}}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=\frac{n^2+3n+2-2}{n^2+3n+2}=1-\frac{2}{n^2+3n+2}<1$$

и како $a_n > 0$ добиваме $a_{n+1} < a_n$, што значи дека низата монотоно опаѓа. ♦

4.3. Теорема. Монотона и ограничена низа реални броеви е конвергентна.

Доказ. Ќе го разгледаме случајот само кога низата $\{a_n\}$ монотоно не опаѓа. Од условот на теоремата следува дека постои $K \in \mathbf{R}$ таков, што за секој $n \geq 1$ важи $a_n \leq K$. Според тоа, множеството вредности на низата $\{a_n \mid n \geq 1\}$ е ограничено, па затоа постои

$$a = \sup\{a_n \mid n \geq 1\} = \sup_{n\geq 1} a_n .$$

Ќе докажеме дека $a_n \to a, n \to \infty$.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, за бројот $a - \varepsilon < a$, согласно со дефиницијата на супремум постои природен број n_0 таков, што $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Освен тоа, за секој $n \geq 1$ важи $a_n \leq a$. Но, низата $\{a_n\}$ монотоно не опаѓа, па затоа за секој $n > n_0$ важи

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon ,$$

односно $| a_n - a | < \varepsilon$, што значи $a_n \to a, n \to \infty$. ♦

4.4. Пример. Ќе докажеме дека низата $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k+1}, n \in \mathbf{N}$ конвергира.

Од

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{5^k+1} = \frac{1}{5^{n+1}+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k+1} = \frac{1}{5^{n+1}+1} + a_n > a_n$$

следува дека низата $\{a_n\}$ строго монотоно расте.

Ако го искористиме неравенствата

$$\frac{1}{5^k+1} < \frac{1}{5^k}, k = 1, 2, ..., n$$

добиваме дека

$$a_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k} < \frac{1}{5} \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4} ,$$

што значи дека низата $\{a_n\}$ е ограничена од горе.

Конечно, низата $\{a_n\}$ е монотона и ограничена, па од теорема 4.3 следува дека таа е конвергентна. ♦

4.5. Пример. Во овој пример, користејќи ја низата

$$e_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

ќе ја воведеме една од најважните константи во математиката, бројот e. Имено, ќе докажеме дека низата (1) е монотоно растечка и ограничена од горе, па од теорема 4.3 ќе следува дека таа е конвергентна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ и оваа граница се означува со e.

За да докажеме дека низата монотоно расте, доволно е во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина да ставиме

$$a_i = 1+\tfrac{1}{n},\ i=1,2,\dots,n \ \text{ и } \ a_{n+1}=1$$

Добиваме:

$$\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n})^n \cdot 1} \le \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

односно

$$e_n = (1+\tfrac{1}{n})^n \le (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1} = e_{n+1}, \quad n \ge 1$$

што значи, разгледуваната низа монотоно расте.

За да докажеме дека низата (1) е ограничена од горе, ќе ја разгледаме помошната низа $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1},\ n\ge 1$ Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}} &= (1+\tfrac{1}{n+1})\sqrt[n+1]{1+\tfrac{1}{n+1}} = (1+\tfrac{1}{n+1})\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})\cdot 1^n} \\
&\le \frac{1+\frac{1}{n}+n\cdot 1}{n+1}(1+\tfrac{1}{n+1}) = (1+\tfrac{1}{n+1})(1+\tfrac{1}{(n+1)^2}) \\
&= 1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}
\end{aligned}$$

Значи,

$$\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}} < 1+\frac{1}{n},$$

или

$$b_{n+1} = (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = b_n, \quad n \ge 1,$$

т.е. низата $\{b_n\}$ монотоно опаѓа. Сега имаме,

$$e_n = (1+\tfrac{1}{n})^n < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = b_n < b_1 = 4, \quad n \ge 1$$

т.е. низата (1) е ограничена од горе.

Од теоремата за монотони и ограничени низи следува дека низата (1) е конвергентна, т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n,$$

постои.

Да забележиме дека претходната постапка ни овозможува да добиеме по желба добри апроксимации за бројот e. Имено, ако земеме доволно голем број n, тогаш можеме да кажеме дека

$$e_n = (1+\tfrac{1}{n})^n < b_{20} = (1+\tfrac{1}{20})^{21} < 2,79. \ \blacklozenge$$

4.6. Пример. Пресметај ги границите на низите:

а) $a_n=(\frac{n}{n+1})^n,\ n\geq 1$, б) $a_n=(\frac{n-2}{n+1})^{2n-1},\ n\geq 1$.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(\tfrac{n}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n}{n+1}-1)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n-n-1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{-1}{n+1})^n \\ &= \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-1}})^{\frac{n+1}{-1}\cdot\frac{-n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}[(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-1}})^{\frac{n+1}{-1}}]^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1}.\end{aligned}$$

б) Имаме

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(\tfrac{n-2}{n+1})^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n-2}{n+1}-1)^{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n-2-n-1}{n+1})^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{-3}{n+1})^{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-3}})^{\frac{n+1}{-3}\cdot\frac{-3(2n-1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}[(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-3}})^{\frac{n+1}{-3}}]^{\frac{-6n+3}{n+1}} = e^{-6}.\end{aligned}$$

Да забележиме дека при решавањето на претходните два примери користевме резултат кој следува од пример 4.5, кој овде ќе го прифатиме без да го докажуваме. Имено, ако f е функција таква, што $f(n)\to+\infty,\ n\to\infty$ или $f(n)\to-\infty$, $n\to\infty$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{f(n)})^{f(n)}=e\,.\ \blacklozenge$$

4.7. Пример. Нека $a\in\mathbf{R}$. Ќе докажеме дека $a_n=\frac{a^n}{n!}\to 0,\ n\to\infty$.

Од аксиомата на Архимед следува дека за реалниот број $|a|$ постои природен број n_0 таков што $|a|<n_0$. Но, тоа значи дека за секој природен број $n\geq n_0$ важи $|a|<n+1$. Според тоа, за секој $n\geq n_0$ важи

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|a^{n+1}/(n+1)!|}{|a^n/n!|}=\frac{|a|}{n+1}<1,\ \text{т.е. } |a_{n+1}|<|a_n|,\ \text{за } n\geq n_0\,.$$

Значи, низата $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа. Но, $|a_n|>0$, т.е. таа е конвергентна, па од теорема 4.3 следува дека низата $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=A$. Имаме

$$A=\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}|=\lim_{n\to\infty}|a_n|\frac{|a|}{n+1}=\lim_{n\to\infty}|a_n|\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{n+1}=A\bullet 0=0\,.$$

Конечно, од претходно изнесеното, дефиницијата за конвергентна низа и равенството

$$|\frac{a^n}{n!}-0|=\frac{|a|^n}{n!}=|\frac{|a|^n}{n!}-0|=||a_n|-0|$$

следува дека $a_n=\frac{a^n}{n!}\to 0,\ n\to\infty$. ♦

4.8. На крајот од овој дел ќе докажеме уште две тврдења поврзани со структурата на множеството реални броеви.

Лема. Секој реален број е граница на строго монотоно растечка низа рационални броеви.

Доказ. Нека $a \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon = 1$. За реалните броеви $b = a - 1$ и a постои рационален број r_1 таков што $a - 1 = b < r_1 < a$. Аналогно, за $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $b = \max\{r_1, a - \frac{1}{2}\}$ и a постои рационален број r_2 таков што $b < r_2 < a$ т.е. $a - \frac{1}{2} < r_2 < a$ и $r_1 < r_2 < a$. Понатаму, за $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $b = \max\{r_2, a - \frac{1}{3}\}$ и a постои рационален број r_3 таков што $b < r_3 < a$ т.е. $a - \frac{1}{3} < r_3 < a$ и $r_2 < r_3 < a$, итн. Низата рационални броеви $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ по конструкција е монотоно растечка и од неравенствата $-\frac{1}{n} < r_n - a < \frac{1}{n}$ следува $r_n \to a$ кога $n \to \infty$. ♦

Забелешка. Аналогно може да се докаже дека секој реален број е граница на строго монотоно опаѓачка низа рационални броеви. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4.9. Лема. Секој реален број е граница на строго монотоно растечка низа ирационални броеви.

Доказ. Бројот $\sqrt{2}$ е ирационален број, па затоа за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $\frac{\sqrt{2}}{n}$ е ирационален. Според тоа, за секој $a \in \mathbf{Q}$ низата $x_n = a - \frac{\sqrt{2}}{n}$, $n \geq 1$ е монотоно растечка низа ирационални броеви за која важи:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a - \tfrac{\sqrt{2}}{n}) = a.$$

Ако $a \in \mathbf{I}$, тогаш низата ирационални броеви $x_n = a - \frac{1}{n}, n \geq 1$ монотоно расте и важи: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a - \frac{1}{n}) = a$. ♦

Забелешка. Аналогно може да се докаже дека секој реален број е граница на строго монотоно опаѓачка низа ирационални броеви. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. ТЕОРЕМИ НА КАНТОР И БОЛЦАНО-ВАЕРШТРАС

5.1. Дефиниција. Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во множеството $\mathbf{R}$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ е строго монотоно растечка низа во множеството $\mathbf{N}$, тогаш низата $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ја нарекуваме *подниза* на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

5.2. Лема. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во $\mathbf{R}$ и $a_n \to a$, $n \to \infty$. Тогаш за секоја подниза $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи $a_{m_n} \to a$, $n \to \infty$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, од $a_n \to a$, $n \to \infty$ следува дека постои $n_0 \geq 1$ таков што $|a_n - a| < \varepsilon$ кога $n > n_0$.

Нека $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна подниза на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогаш $m_n \geq n$, па затоа од $n > n_0$ следува $m_n \geq n_0$, што значи дека $|a_{m_n} - a| < \varepsilon$, односно $a_{m_n} \to a$, $n \to \infty$. Конечно, тврдењето следува од произволноста на поднизата $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$. ♦

5.3. Лема. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во $\mathbf{R}$. Ако сите поднизи на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се конвергентни, тогаш $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и сите имаат иста граница.

Доказ. Бидејќи низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е подниза на самата себе, од условот следува дека таа е конвергентна. Сега вториот дел од тврдењето следува од лема 5.2. ♦

5.4. Дефиниција. За бројот $a \in \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *точка на натрупување* на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ако за секој $\varepsilon > 0$ интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содржи бесконечно многу членови на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

5.5. Пример. а) Низата $a_n = (-1)^n$ има две точки на натрупување 1 и -1.

б) Низата $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ има три точки на натрупување 1, 0 и -1. ♦

5.6. Од дефиниција 1.4 е јасно дека границата на конвергентна низа е точка на натрупување на таа низа. Нека $b < a$ е точка на натрупување на конвергентната низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ со граница a. Земаме $\varepsilon = \frac{a-b}{3} > 0$. Според забелешка 1.5 во интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \equiv (\frac{2a+b}{3}, \frac{4a-b}{3})$ се содржат сите точки на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, освен можда конечно многу и како $\frac{2b+a}{3} < \frac{2a+b}{3}$ добиваме дека во интервалот $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \equiv (\frac{4b-a}{3}, \frac{2b+a}{3})$ има конечно многу членови на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, што противречи на претпоставката дека b е точка на натрупување на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, различна од нејзината граница a. Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема. Секоја конвергентна низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има само една точка на натрупување која се совпаѓа со нејзината граница. ♦

5.7. Забелешка. Обратното тврдење на лема 5.6 не е точно. Навистина низата $a_n = n + (-1)^n n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ има само една точка на натрупување $b = 0$, но не е конвергентна. Проверете!

5.8. Лема. Монотоно растечка низа е конвергетна ако и само ако содржи барем една конвергентна подниза.

Доказ. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растечка низа. Ако низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна, тогаш бидејќи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е подниза на самата себе добиваме дека таа содржи барем една конвергентна подниза.

Обратно, нека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи барем една конвергентна подниза $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $a_{m_k} \to a$, $m_k \to \infty$ и нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш постои $n_0 \geq 1$ таков што $a - \varepsilon < a_{m_k} < a + \varepsilon$, за секој $m_k > n_0$. Нека $n_1 = m_{n_0+1} > n_0$ и $n > n_1$. Тогаш постои m_k таков што $n_0 < m_k \leq n < m_{k+1}$ (зошто?). Но, низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте, а поднизата $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е конвергентна, па од претходно изнесеното следува дека $a - \varepsilon < a_{m_k} \leq a_n < a_{m_{k+1}} < a + \varepsilon$, што значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон a. ♦

5.9. Теорема (Кантор). Ако $[a_n, b_n]$, $n = 1,2,3,...$ е низа затворени интервали такви што $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $n = 1,2,3,...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, тогаш постои единствен реален број x таков што $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x\}$.

Доказ. Од условот на теоремата следуваат неравествата

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ и } b_{n+1} \leq b_n \text{, за секој } n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Освен тоа, интервалот $[a_1, b_1]$ го содржи секој интервал $[a_n, b_n]$, $n = 1,2,3,...$, па затоа за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1. \quad (2)$$

Да ги разгледаме низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, првата од кои е формирана од левите крајни точки на дадените интервали, а втората од десните крајни точки на интервалите. Од неравенствата (1) следува дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте, а низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа. Понатаму, од неравенствата (2) следува дека дадените низи се ограничени, па од теорема 4.3 следува дека тие се конвергентни, т.е. дека $a_n \to a, n \to \infty$ и $b_n \to b,\ n \to \infty$, а од лема 3.5 следува дека $a \leq b$. Тогаш за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n, \quad (3)$$

од што добиваме $b_n - a_n \geq b - a \geq 0$. Од друга страна $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, па ако се земат предвид претходните неравенства добиваме $a = b$, што значи дека низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ имаат иста граница $a = b = x$, што значи дека неравенствата (3) преминуваат во неравенствата

$$a_n \le x \le b_n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

од што следува дека $x \in [a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$.

Останува да докажеме дека x е единствена точка која припаѓа на сите интервали $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Навистина, ако допуштиме за точка $x' \ne x$ да важи $a_n \le x' \le b_n$, $n \in \mathbf{N}$, тогаш од неравенствата $|x - x'| \le b_n - a_n$ и од условот $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ следува $|x - x'| = 0$, т.е. $x = x'$ што е противречност. ♦

5.10. Забелешка. Нека x е точката од доказот на теоремата на Кантор. Тогаш за секој интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ сите интервали $[a_n, b_n]$ со доволно голем индекс ќе се содржат во $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Навистина, од $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ следува дека постои $n_0 \ge 1$ таков што за секој $n > n_0$ важи $b_n - a_n < \varepsilon$. Понатаму, од неравенствата (4) добиваме $x - a_n \le b_n - a_n$ и $b_n - x \le b_n - a_n$, па затоа за $n > n_0$ важи $x - a_n < \varepsilon$ и $b_n - x < \varepsilon$, односно $x - \varepsilon < a_n$ и $b_n < \varepsilon + x$, што значи дека за секој $n > n_0$ важи $[a_n, b_n] \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

5.11. Теорема (Болцано-Вaерштрас). Секоја ограничена низа содржи конвергентна подниза.

Доказ. Нека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена и нека $[a,b]$ е еден интервал кој ги содржи сите нејзини членови. Да го поделиме овој интервал на два еднакви дела и со $[a_1, b_1]$ да го означиме едниот од така добиените делови кој содржи бесконечно многу членови на низата (барем еден од двата дела го има тоа својство, бидејќи во спротивно низата би имала конечно многу членови, што не е можно). Потоа да земеме еден член x_{n_1} од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, кој се содржи во интервалот $[a_1, b_1]$. Потоа, $[a_1, b_1]$ го делиме на два еднакви дела, со $[a_2, b_2]$ да го означиме едниот од деловите кој содржи бесконечно многу членови од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и со x_{n_2} да означиме еден од членовите на низата кој се содржи во $[a_2, b_2]$ и за чиј индекс n_2 важи $n_2 > n_1$ (член со таков индекс сигурно постои бидејќи во $[a_2, b_2]$ има бесконечно многу членови од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$). Продолжувајќи ја постапката конструираме низа затворени интервали

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ [a_3, b_3],\ \ldots,\ [a_k, b_k],\ \ldots \tag{5}$$

и низа реални броеви

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \tag{6}$$

формирана од членовите на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ и

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots. \tag{7}$$

Неравенствата (7) покажуваат дека (6) е подниза од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Што се однесува до низата интервали (5), лесно се гледа дека тие ги задоволуваат условите од теоремата на Кантор, па затоа постои единствена точка x која припаѓа на сите овие интервали. Понатаму, согласно со забелешка 5.10 за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $k > n_0$ интервалот $[a_k, b_k]$ се содри во интервалот $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Оттука следува дека за секој $k > n_0$ членот x_{n_k} на поднизата се содржи во интервалот $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, па затоа точно е неравенството $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$, што значи дека низата (6) која е подниза од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x. ♦

6. КОШИЕВИ НИЗИ

6.1. Една од најважните класи низи реални броеви се Кошиевите низи реални броеви, за кои ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е *Кошиева (фундаментална)* низа, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \geq 1$ таков, што за секои $m, n > n_0$ важи

$$|a_m - a_n| < \varepsilon .$$

6.2. Теорема. Секоја Кошиева низа е ограничена.

Доказ. Нека $\{a_n\}$ е произволна Кошиева низа. Тогаш, за $\varepsilon = 1$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секои $m, n \geq n_0, m, n \in \mathbf{N}$ важи $|a_n - a_m| < 1$, од што следува дека $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| < 1$ за секој $p \in \mathbf{N}$. Нека ставиме

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\} .$$

Јасно, за $n = 1, 2, ..., n_0$ важи $|a_n| \leq M$. Ако $n > n_0$, тогаш $n = n_0 + p$, за некој $p \in \mathbf{N}$, па затоа

$$|a_n| = |a_{n_0+p}| = |a_{n_0+p} - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_{n_0+p} - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| \leq M .$$

Конечно, за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $|a_n| \leq M$, што значи дека низата $\{a_n\}$ е ограничена. ♦

6.3. Теорема (Коши). Низата $\{a_n\}$ е Кошива ако и само ако е конвергентна.

Доказ. Нека $\{a_n\}$ е конвергентна низа, при што $a_n \to a, n \to \infty$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, па затоа за секои $m, n > n_0$ важи:

$$|a_m - a_n| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

т.е. низата $\{a_n\}$ е Кошиева.

Обратно, нека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. Од теорема 6.2 следува дека таа е ограничена. Сега од теоремата на Боцано-Ваерштрас следува дека низата

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи конвергентна подниза $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Нека $a_{m_k} \to a, k \to \infty$. Ќе докажеме дека $a_n \to a, n \to \infty$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Понатаму, низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, што значи дека постои $n_0 \geq 1$ таков што за секои $m, n > n_0$ важи $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, а од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $k_0 \geq 1$ таков што за секој $k > k_0$ важи $|a_{m_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Да фиксираме произволен $k^* > k_0$ таков што $m_{k^*} \geq n_0$. Тогаш, за секој $n > n_0$ важи

$$|a_m - a| \leq |a_n - a_{m_{k^*}}| + |a - a_{m_{k^*}}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

што значи дека $a_n \to a, n \to \infty$, т.е. Кошиевата низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна. ♦

6.4. Пример. Ќе докажеме дека низата $\{a_n\}$ со општ член

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$$

конвергира.

Навистина, од

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1},$$

за секој $k > 1$, при $m > n$ добиваме:

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} .$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Избираме $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ и добиваме дека за секои $m, n > n_0$, $m > n$ важи $|a_n - a_m| < \frac{1}{n} < \varepsilon$, што значи дека низата $\{a_n\}$ е Кошиева. Сега од теорема 6.3 следува дека низата $\{a_n\}$ е конвергентна. ♦

6.5. Пример. Да ја разгледаме низата $\{a_n\}$ со општ член

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1 .$$

Нека $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Од

$$|a_n - a_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

при $p = n$ добиваме дека за секој $n \geq 1$ важи $|a_{2n} - a_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$, што значи дека разгледуваната низа не е Кошиева. Од теорема 6.3 следува дека оваа низа не е конвергентна.

Оваа низа во литературата е позната како *хармониска низа* и таа има посебно значење, особено во теоријата на редови. ♦

7. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ СО БЕСКОНЕЧНИ ДЕСЕТИЧНИ ДРОПКИ

7.1. Дефиниција. Ако $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbf{N}$, $\alpha_i < 10$ за $i \geq 1$, тогаш бројот

$$a = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_k}{10^k} \tag{1}$$

го нарекуваме *конечна десетична дропка* и го означуваме со

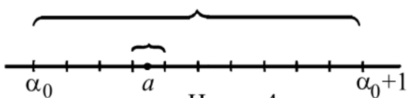
$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_k \, . \tag{2}$$

Притоа α_0 е цел дел од бројот a, т.е. $\alpha_0 = [a]$, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ се децимали на бројот a.

7.2. Нека е даден произволен реален број a, $a \geq 0$. Од теоремата на Архимед следува дека постои природен број $n_0 \geq a$. Меѓу броевите $n = 1, 2, ..., n_0$ го земаме најмалиот природен број n со својство $n > a$ и овој број да го означиме со $\alpha_0 + 1$. Тогаш, важи $\alpha_0 \leq a < \alpha_0 + 1$.

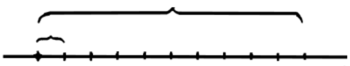
Да го поделиме интервалот $I_0 = [\alpha_0; \alpha_0 + 1]$ на десет еднакви интервали, т.е. да ги разгледаме интервалите $[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$ каде што α_0, α_1 е конечна десетична дропка, при што α_1 го означува редниот број на интервалот кој го содржи бројот a и е добиен при поделбата на интервалот I_0 на десет еднакви интервали при нивна последователна нумерација од лево на десно со броевите 0,1,2,3,...,9.

Можни се два случаја: или точката a не се совпаѓа ниту со една точка од поделбата (црт. 4), или точката a се совпаѓа со точка од поделбата (црт. 5 и 6). Во првиот случај точката a припаѓа само на еден од овие интервали (црт. 4). Овој интервал да го означиме со I_1, т.е.



Цртеж 4

$$I_1 = [\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \tfrac{1}{10}] \, .$$

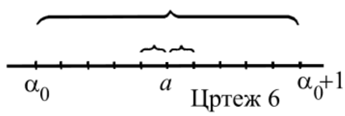


Цртеж 5

Во вториот случај точката a може да припаѓа на два соседни интервала (црт. 6). Тогаш со

$$I_1 = [\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \tfrac{1}{10}]$$

да го означиме оној интервал за кој точката a е негова лева крајна точка. Јасно, и во двата случаја $a \in I_1$. Да го поделиме интервалот I_1, на ист начин на десет еднакви интервали и со



Цртеж 6

$$I_2 = [\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2; \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 + \tfrac{1}{10^2}]$$

да го означиме оној од добиените интервали кој ја содржи точката a и за кој оваа точка не е десна крајна точка. Продолжувајќи ја постапката наоѓаме фамилија вложени интервали

$$I_n = [\underline{a}_n, \overline{a}_n], \quad n = 0,1,2,...,$$

каде што

$$\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n \,, \quad \overline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n + \frac{1}{10^n} \,,$$

а α_i е една од цифрите 0,1,2,...,9. Секој од интервалите I_n ја содржи точката a, при што a не е негова десна крајна точка, т.е. $a \in I_n$ и $a \neq \overline{a}_n$, за $n = 0,1,2,...$. Јасно, должината на I_n е еднаква на 10^{-n}, па затоа таа тежи кон нула кога $n \to \infty$.

Бројот $\underline{a}_n$ го нарекуваме *долно десетично приближување* од $n-$ти ред за бројот a, а бројот $\overline{a}_n$ *-горно десетично приближување* од $n-$ти ред за бројот a. Од конструкцијата на горното и долното десетично приближување непосредно следува:

$$\underline{a}_n \leq a < \overline{a}_n \tag{3}$$

$$\underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1}, \overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n \tag{4}$$

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = \frac{1}{10^n} \,. \tag{5}$$

Ако $a < 0$, тогаш ставаме $b = -a$ и определуваме $\underline{a}_n = -\overline{b}_n$, $\overline{a}_n = -\underline{b}_n$. Притоа условите (3), (4) и (5) се запазуваат, со таа разлика што во неравенството (3) знаците $\leq$ и $<$ ги менуваат местата.

Од неравенствата (4) следува дека интервалите $[\underline{a}_n, \overline{a}_n]$ формираат систем на вложени интервали, а од равенството (5) следува дека должината на интервалите $[\underline{a}_n, \overline{a}_n]$ тежи кон 0. Понатаму, од (3) следува дека точката a припаѓа на сите овие интервали. Сега од лемата за вложени интервали следува точноста на следнава лема.

Лема. За секој реален број a низата $\{\underline{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте, а низата $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа, и притоа важи $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = a$. ♦

7.3. Забелешка. Од претходната лема следува точноста на лемата 4.8. Уште повеќе од оваа лема следува дека секој реален број a е граница на монотоно опаѓачка низа рационални броеви.

7.4. Дефиниција. Ако низата $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ...\}$ е определена како во 7.2, тогаш пишуваме

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ... \tag{6}$$

и велиме дека реалниот број a е претставен со *бесконечна десетична дропка*. Притоа, α_0 е цел дел од бројот a, т.е. $\alpha_0 = [a]$, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ...$ се децимали на бројот a.

За бесконечната десетична дропка (6) ќе велиме дека е *периодична* ако постојат природни броеви k и p такви, што $\alpha_{k+i+1} = \alpha_{k+p+i+1}$ за секој $i \in \mathbf{N}$. Записот $\underline{\alpha_{k+i+1}\alpha_{k+i+2}...\alpha_{k+p+i}}$ го нарекуваме *периода* на периодичната бесконечна десетична дропка. Притоа пишуваме:

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k \underline{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}...\alpha_{k+p}}. \tag{7}$$

7.5. Нека $a \geq 0$ и $\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1...\alpha_n$, каде што α_0 е ненегативен цел број и $\alpha_i, i = 1, 2, ...$ е една од цифрите $0, 1, 2, ..., 9$. Бројот a е единствен реален број кој припаѓа на сите интервали $I_k, k = 1, 2, ...$ па затоа при воспоставеното соодветство на различните реални броеви соодветствуваат различни десетични дропки, т.е. десетични дропки кои се разликуваат барем во еден $\alpha_k, k = 0, 1, 2, 3, ...$.

Понатаму, да забележиме дека при разгледуваната конструкција не може да се добие десетична дропка со период, кој се состои само од цифрата 9. Навистина, нека претпоставиме дека постои $m \in \mathbf{N}$, таков што $\alpha_{m+k} = 9$, за секој $k \geq 1$ и нека m е најмалиот број со ова својство. Тогаш, $\alpha_m \neq 9$ и $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = ... = 9$. Да ставиме $b = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m + \frac{1}{10^m}$. Од конструкцијата во 7.2 следува дека

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m 9 \leq a < \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m 9 + \frac{1}{10^{m+1}} = b,$$

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m 99 \leq a < \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m 99 + \frac{1}{10^{m+2}} = b,$$

т.е.

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m \underset{n}{9...9} \leq a < b, \text{ за секој } n \geq 1.$$

Да ставиме $t = b - a > 0$. Тогаш, ако се има предвид равенството

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m \underset{n}{9...9} = b - \frac{1}{10^{m+n}}$$

добиваме дека

$$0 < t = b - a \leq b - \alpha_0, \alpha_1...\alpha_m \underset{n}{9...9} = \frac{1}{10^m 10^n}$$

за секој $n \geq 1$, што не е можно.

Според тоа, на секој реален број $a \geq 0$ му придруживме бесконечна десетична дропка, која нема период кој се состои само од цифрата 9. Ваквите десетични дропки ги нарекуваме *допустливи.*

Од друга страна, на секоја допустлива бесконечна десетична дропка $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ и соодветствува единствен реален број $a \geq 0$ кој припаѓа на сите интервали:

$$[\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{1}{10^n}], \ n = 1, 2, ...$$

Воспоставеното соодветствие меѓу ненегативните реални броеви и множеството допустливи бесконечни десетични дропки може да се распространи и на негативните реални броеви: ако на бројот $a>0$ му соодветствува десетичната дропка $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, тогаш на бројот $-a$ ќе му соодвествува десетичната дропка $-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, која исто така ја нарекуваме допустлива.

Во претходните излагања ја докажавме следната теорема.

Теорема. Множеството реални броеви е еквивалентно со множеството допустливи десетични дропки, при што ако на реалниот број a му соодветствува десетичната дропка $\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, тогаш

$$\pm\lim_{n\to\infty}\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = a\ . \ \blacklozenge$$

7.6. Забелешка. На секоја бесконечна десетична дропка

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

и соодветствува единствен реален број, кој припаѓа на сите интервали

$$[\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n;\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n+\tfrac{1}{10^n}]\ .$$

Меѓутоа притоа вака добиеното пресликување не е биекција. Имено на дропките од обликот $\alpha_0,\alpha_1...\alpha_n999...$ и $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\overset{+}{\alpha_n}000...$, $\alpha_n\neq 9$ им соодветствува еден ист реален број (проверете!).

7.7. Во следната лема ќе дадеме карактеризација на множеството рационални броеви со помош на бесконечните периодични десетични дропки.

Лема. Множеството рационални броеви е еквивалентно на множеството бесконечни периодични допустливи десетични дропки.

Доказ. Нека $a=\frac{c}{d}$. Од теоремата за делење со остаток добиваме:

$$c=\alpha_0 d+r_0,\ a=\alpha_0+\tfrac{r_0}{d}\ .$$

Потоа го делиме $10r_0$ со d и добиваме

$$10r_0=\alpha_1 d+r_1,\ a=\alpha_0+\tfrac{\alpha_1}{10}+\tfrac{r_1}{10d}\ ,$$

при што од $r_0<d$ следува $\alpha_1\leq 9$. Да претпоставиме дека

$$a=\alpha_0+\tfrac{\alpha_1}{10}+\tfrac{\alpha_2}{10^2}+...+\tfrac{\alpha_n}{10^n}+\tfrac{r_n}{10^n d}\ ,$$

каде што $\alpha_k\leq 9$ за $k\geq 1, r_n<d$. Тогаш α_{n+1} е количникот што се добива при делењето на $10r_n$ со d, па затоа од $r_n<d$ следува $\alpha_{n+1}\leq 9$, што значи дека рационалниот број a може да се претстави во облик $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$. Јасно, ова следува и од фактот што секој рационален број е реален број, па тврдењето важи според теорема 7.5, но овде посебно го презентиравме алгоритмот за претворање на

рационален број во десетична дропка, бидејќи истиот ни е потребен за да ја докажеме периодичноста.

Сега да ја разгледаме низата $r_0, r_1, ..., r_n, ...$ добиена во споменатиот алгоритам. Од $r_n < d$ следува дека $r_k = r_{k+p}$ за некои k и p, $p > 0$. Да ги избереме најмалите природни броеви со ова својство. Од равенствата

$$10r_k = \alpha_{k+1}d + r_{k+1}, 10r_{k+p} = \alpha_{k+p+1}d + r_{k+p+1}$$

следува $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+p+1}, r_{k+1} = r_{k+p+1}$, па сега лесно се гледа дека

$$\alpha_{k+n} = \alpha_{k+p+n}, \text{ за секој } n \geq 1,$$

што значи дека секој рационален број може да се претстави како бесконечна периодична допустлива десетична дропка.

Обратно, ако е дадена бесконечна периодична допустлива десетична дропка

$$a = \alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_k \underline{\alpha_{k+1} ... \alpha_{k+p}},$$

тогаш $a = \frac{b-c}{d}$ каде што b е бројот кој се добива кога на α_0 од десно му се допишат цифрите $\alpha_1 ... \alpha_k \alpha_{k+1} ... \alpha_{k+p}$, c е бројот кој се добива кога на α_0 од десно му се допишат цифрите $\alpha_1 ... \alpha_k$ и $d = 10^k(10^p - 1)$, што значи a е рационален број. Деталите од доказот на равенството $a = \frac{b-c}{d}$ му ги препуштаме на читателот за вежба. ♦

ЗАДАЧИ

1. Определи го множеството вредности на низата

   а) $a_n = \frac{1+(-1)^2}{2}, n \geq 1$, б) $a_n = \frac{1}{2^n}, n \geq 1$, в) $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 1$.

2. Докажи дека:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+5} = 2$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-3}{6n+5} = \frac{2}{3}$, в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+12} = 2$.

3. За низата $a_n, n \geq 1$ е познато дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$. Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$?

4. Пресметај ги границите на низите

   а) $a_n = \frac{(n+4)^2}{0,001n^3}, n \geq 1$, б) $a_n = \frac{n^3-n^2+1}{4n^3+1000n^2+n+1}, n \geq 1$,

   в) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3-n}}{n+1}, n \geq 1$, г) $a_n = \frac{5n-2}{\sqrt{n^2+n+1}}, n \geq 1$,

   д) $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}, n \geq 1$, ѓ) $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}, n \geq 1$,

   е) $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, n \geq 1$, ж) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \geq 1$.

5. Пресметај ги границите на низите

а) $a_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}, n \geq 1$, б) $a_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1}, n \geq 1$,

в) $a_n = \frac{1-3^n}{2 \cdot 3^n}, n \geq 1$, г) $a_n = \frac{5^{n+1}-125}{4 \cdot 5^n}, n \geq 1$

6. Докажи дека $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, каде $y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \geq 1$.

7. Испитај ја монотоноста на низата

а) $a_n = \frac{n+1}{n!}, \ n \geq 1$, б) $a_n = \frac{10^n}{n!}, \ n \geq 1$ в) $a_n = \frac{n}{2^n}, \ n \geq 1$.

8. Испитај ја монотоноста на низата

а) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \ n \geq 1$, б) $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \ n \geq 1$.

9. Докажи дека низата

а) $a_n = \frac{n^2-n+1}{n^2-2n+5}, \ n \geq 1$, б) $a_n = \frac{2^n}{n!}, \ n \geq 1$, в) $a_n = \frac{n+1}{n!}, \ n \geq 1$

е ограничена.

10. Докажи дека низата $\{a_n\}$ зададена со $a_1 = \sqrt{6}, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \ n \geq 1$ е конвергентна.

11. Докажи дека низата $\{a_n\}$ зададена со $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ n \geq 1$ е конвергентна.

12. Докажи дека низата $\{a_n\}$ зададена со $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ е конвергентна.

13. Докажи дека низата $\{a_n\}$ зададена со $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4+a_n^2}{4}, \ n \geq 1$ е конвергентна.

14. Пресметај ги границите на низите:

а) $a_n = (\frac{2n+3}{2n-1})^n, n \geq 1$, б) $a_n = (\frac{n^2+2}{n^2-2})^{n^2}, n \geq 1$, в) $a_n = (\frac{3n-4}{3n+2})^{\frac{n+1}{3}}, n \geq 1$,

г) $a_n = (\frac{n+1}{2n-1})^n, n \geq 1$, д) $a_n = (\frac{n^2-1}{n^2+1})^{n^2}, n \geq 1$, ѓ) $a_n = (\frac{n+k}{n})^{mn}, n \geq 1$.

15. Докажи дека низата $a_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{3^n}, \ n \geq 1$ конвергира.

16. Докажи дека низата $a_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n!}{n(n+1)}, \ n \geq 1$ конвергира.

17. Докажи дека низата $a_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}, \ n \geq 1$ не конвергира.

XIII ГЛАВА
ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

1. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА РЕАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

1.1. Во четвртата глава го воведовме поимот функција (пресликување) и докажавме повеќе својства на функциите. Во оваа глава ќе се осврнеме на реалните функции и на нивните својства, т.е. ќе разгледуваме функции $f : A \to \mathbf{R}$, каде што $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \varnothing$.

1.2. Пример. а) Како што знаеме функцијата

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,,\ a,b,c \in \mathbf{R}\,,\ a \neq 0$$

е определена за секој реален број x, што значи нејзината дефинициона област е множеството реални броеви.

б) Функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е определена за секој $x \geq 0$, т.е. нејзината дефинициона област е множеството $[0,+\infty)$.

в) Функцијата $f(x) = \frac{1}{x+1}$ е дефинирана за секој реален број x таков, што $x+1 \neq 0$, т.е. $x \neq -1$. Според тоа, нејзината дефинициона област е множеството $(\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$. ♦

1.3. Дефиниција. Нека се дадени функциите $f : A \to \mathbf{R}$ и $g : A \to \mathbf{R}$.

Функцијата $h_1 : A \to \mathbf{R}$, определена со

$$h_1(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)\text{, за секој } x \in A$$

ја нарекуваме *збир* на функциите f и g.

Функцијата $h_2 : A \to \mathbf{R}$, определена со

$$h_2(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x)\text{, за секој } x \in A$$

ја нарекуваме *разлика* на функциите f и g.

Функцијата $h_3 : A \to \mathbf{R}$, определена со

$$h_3(x) = (fg)(x) = f(x)g(x),$$

за секој $x \in A$ ја нарекуваме *производ* на функциите f и g.

Ако $g(x) \neq 0$, за секој $x \in A$, тогаш функцијата $h_4 : A \to \mathbf{R}$, определена со

$$h_4(x) = (\tfrac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

за секој $x \in A$ ја нарекуваме *количник* на функциите f и g.

1.4. Пример. За функциите $f(x)=x+2$ и $g(x)=x^2+1$ нивниот збир, разлика, производ и количник се функциите

$$h_1(x)=x+2+x^2+1=x^2+x+3,\ h_2(x)=x+2-(x^2+1)=-x^2+x+1,$$
$$h_3(x)=(x+2)(x^2+1)=x^3+2x^2+x+2 \text{ и } h_4(x)=\tfrac{x+2}{x^2+1},$$

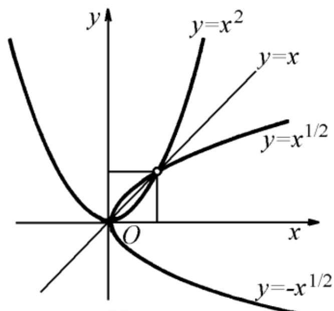
соодветно. ♦

1.5. Претходно го воведовме поимот инверзна функција и покажавме дека ако $a,b\in\mathbf{R}$ и $a\neq 0$, тогаш функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со $f(x)=ax+b$ е биекција, што значи дека таа има инверзна функција (пресликување) која е дадена со $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. Во врска со инверзните функции да ги разгледаме следниов пример.

1.6. Пример. а) Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, определена со $f(x)=x^3$ има инверзна функција. Навистина, од $x\neq x'$ следува $f(x)=x^3\neq x'^3=f(x')$, што значи f е инјекција. Меѓутоа, за секој $y\in\mathbf{R}$ важи $f(\sqrt[3]{y})=\sqrt[3]{y}^3=y$ па затоа f е сурјекција, што значи дека е биекција. Според тоа, f има инверзно пресликување кое е определено со $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

б) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^2$, која е определена на $\mathbf{R}$. За оваа функција важи $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, т.е. таа не е инјекција, што значи дека не е биекција. Според тоа, функцијата $f(x)=x^2$ нема инверзна функција.

Меѓутоа, ако функцијата $f(x)=x^2$ одделно ја разгледаме на секое од множествата $A_1=(-\infty,0]$ и $A_2=[0,+\infty)$, тогаш функцијата $f_1:A_1\to A_2$ определена со $f_1=x^2$ е биекција (провери!) и нејзина инверзна функција е $f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ и функцијата $f_2:A_2\to A_2$, определена со $f_2=x^2$ е биекција (провери!) и нејзина инверзна функција е $f_2^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Графиците на функциите $f_2=x^2$ и $f_2^{-1}(x)=\sqrt{x}$ се дадени на црт. 1. ♦



Цртеж 1

1.7. Како што можеме да видиме графиците на функциите f_2 и f_2^{-1} се симетрични во однос на правата $y=x$. Природно е да се запрашаме дали ова важи за графиците на секоја функција f и нејзината инверзна функција f^{-1}? Одговорот на ова прашање го дава следнава теорема, која ќе ја презентираме без доказ.

Теорема 1. Графиците на f и f^{-1} се заемно симетрични во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант. ♦

2. ПАРНИ И НЕПАРНИ, ПЕРИОДИЧНИ, МОНОТОНИ И ОГРАНИЧЕНИ ФУНКЦИИ.

2.1. Дефиниција. Нека $A \subseteq \mathbf{R}$ е *симетрично множество* во однос на координатниот почеток, т.е. од $x \in A$ следува $-x \in A$. За функцијата $f : A \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *парна* ако $f(-x) = f(x)$, за секој $x \in A$. За функцијата $f : A \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *непарна* ако $f(-x) = f(x)$, за секој $x \in A$.

2.2. Пример. а) За функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена со $f(x) = x^2$ важи $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Според тоа, оваа функција е парна.

б) За функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ важи

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \text{ за секој } x \in \mathbf{R}.$$

Според тоа, оваа функција е непарна.

в) Дефиниционата област на функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е множеството $[0, +\infty)$. Ова множество не е симетрично во однос на координатниот почеток, па затоа оваа функција е ниту парна ниту непарна.

г) Дефиниционата област на функцијата $f(x) = x^3 + x^2$ е множеството $\mathbf{R}$. Меѓутоа, за оваа функција важи

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 \neq \pm f(x),$$

што значи дека таа е ниту парна ниту непарна. ♦

2.3. Забелешка. Ако функцијата f е парна, тогаш од $f(-x) = f(x)$ следува дека точките $M(x, f(x))$ и $N(-x, f(x))$ припаѓаат на нејзиниот график. Но, тоа значи дека графикот на секоја парна функција е симетричен во однос на y-оската.

Слично, ако функцијата f е непарна, тогаш од $f(-x) = -f(x)$ следува дека точките $M(x, f(x))$ и $N(-x, -f(x))$ припаѓаат на нејзиниот график. Но, тоа значи дека графикот на секоја непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

2.4. Теорема. а) Збир на две парни (непарни) функции е парна (непарна) функција.

б) Производ (количник) на две функции со иста парност е парна функција, а производ (количник) на две функции со различна парност е непарна функција.

Доказ. а) Нека f и g се парни функции. Тогаш,

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x),$$

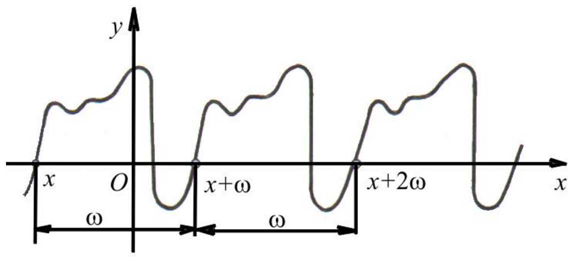
т.е. функцијата $f+g$ е парна. Доказот кога f и g се непарни функции е аналоген.

б) Нека, f и g се парни функции. Тогаш,

$$(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=(fg)(x),$$

т.е. функцијата fg е парна. Доказот во останатите случаи е аналоген. ♦

2.5. Дефиниција. За функцијата $f:A\to\mathbf{R}$ ќе велиме дека е *периодична* ако постои реален број $\omega\neq 0$ таков што $f(x+\omega)=f(x)$, за секој $x\in A$. Најмалиот позитивен број ω со својство $f(x+\omega)=f(x)$, за секој $x\in A$ го нарекуваме *основна периода* за функцијата f (црт. 2).



Цртеж 2

2.6. Забелешка. Од дефиниција 2.5 непосредно следува дека

$$f(x+2\omega)=f((x+\omega)+\omega)=f(x+\omega)=f(x) \text{ и } f(x-\omega)=f((x-\omega)+\omega)=f(x).$$

Понатаму, користејќи математичка индукција може да се докаже дека

$$f(x+n\omega)=f(x) \text{ и } f(x-n\omega)=f(x), \text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

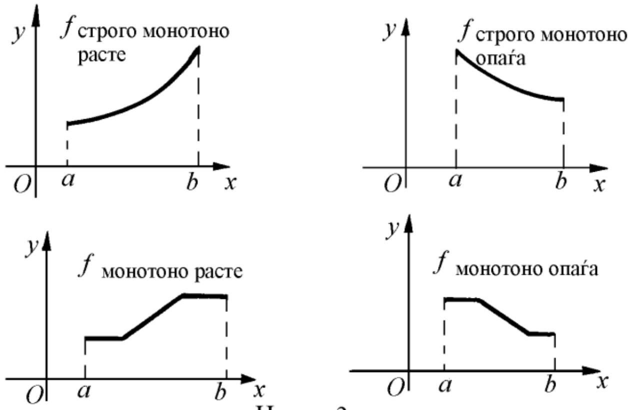
Исто така, непосредно од дефиниција 2.5 следува дека ако f е периодична функција со основна периода ω, тогаш точките $(x,f(x))$ и $(x+\omega,f(x))$ припаѓаат на графикот на функцијата од каде се добива следново правило за цртање на периодична функција: се црта графикот на функцијата f на интервалот $[0,\omega]$ и потоа истиот се поместува за ω по должина на $x-$оската (црт. 2).

2.7. Дефинција. За функцијата f ќе велиме дека *монотоно расте* на множеството A ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)\leq f(x_2)$, црт. 3.

За функцијата f ќе велиме дека *строго монотоно расте* на множеството A ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)<f(x_2)$, црт. 3.

За функцијата f ќе велиме дека *монотоно опаѓа* на множеството A ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)\geq f(x_2)$, црт. 3.

За функцијата f ќе велиме дека *строго монотоно опаѓа* на множеството A ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)>f(x_2)$, црт. 3.

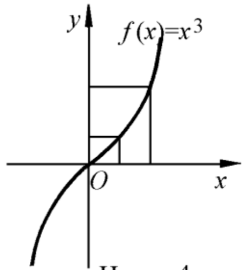


Цртеж 3

2.8. Пример. а) Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^3,\ x \in \mathbf{R}$. Бидејќи од $x_1 < x_2$ следува

$$f(x_1) = x_1^3 < x_2^3 = f(x_2)$$

добиваме дека оваа функција строго монотоно расте на целата реална права, црт. 4.



Цртеж 4

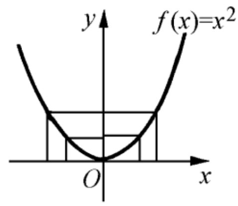
б) Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$. Бидејќи од $x_1 < x_2 \le 0$ следува

$$f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$$

добиваме дека оваа функција строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 0]$. Меѓутоа, ако $0 \le x_1 < x_2$, тогаш

$$f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2),$$

па затоа функцијата $f(x) = x^2$ строго монотоно расте на интервалот $[0, \infty)$, црт. 5. ♦



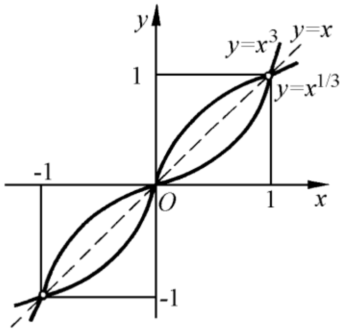
Цртеж 5

2.9. Теорема. Нека функцијата f строго монотоно расте (опаѓа) на множеството A и нека $B = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Тогаш f има инверзна функција f^{-1} која е определена на B и која исто така е строго монотоно растечка (опаѓачка).

Доказ. Нека $x_1 \ne x_2$, да кажеме $x_1 < x_2$. Бидејќи f строго монотоно расте добиваме $f(x_1) < f(x_2)$, што значи $f(x_1) \ne f(x_2)$, т.е. f е инјекција. Но, f е сурјекција од A на B, па затоа f е биекција од A на B. Според тоа, f има инверзна функција f^{-1}, која е дефинирана со $f^{-1}(y) = x$ ако и само ако $f(x) = y$.

Ќе докажеме дека f^{-1} строго монотоно расте на B. Нека $y_1 < y_2$ и $f^{-1}(y_1) = x_1$ и $f^{-1}(y_2) = x_2$. Ако $x_1 \ge x_2$, тогаш бидејќи функцијата f строго монотоно расте добиваме $f(x_1) \ge f(x_2)$, т.е. $y_1 \ge y_2$, што е противречност. Значи, $x_1 < x_2$, т.е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, т.е. функцијата f^{-1} строго монотоно расте на B. ♦

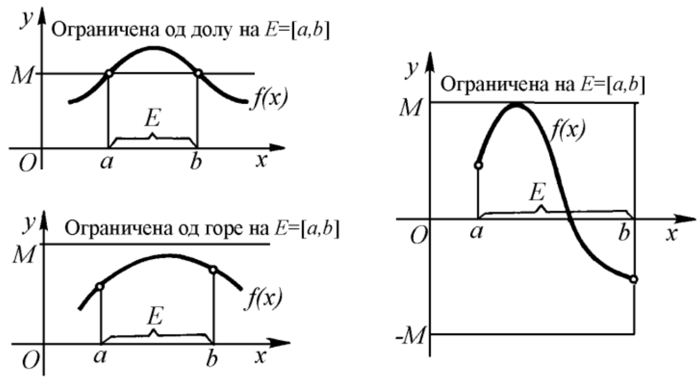
2.10. Пример. Во пример 2.8 а) видовме дека функцијата $f(x) = x^3$ строго монотоно расте на целата реална права. Според тоа, таа има инверзна функција $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (види пример 1.6 а)) и истата строго монотоно расте на целата реална права, црт. 6. ♦



Цртеж 6

2.11. Дефиниција. За функцијата f ќе велиме дека е *ограничена од горе* (*долу*) *на множеството* E ако постои реален број M таков што $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$), за секој $x \in E$, црт. 7.

За функцијата f ќе велиме дека е *ограничена на множеството* E ако постои реален број M таков што $|f(x)| \le M$, за секој $x \in E$, црт. 7.



Цртеж 7

2.12. Пример. Од $x^2 \ge 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ следува $x^2 + 1 \ge 1$, за секој $x \in \mathbf{R}$, па затоа $0 < \frac{1}{x^2+1} \le 1$, за секој $x \in \mathbf{R}$, т.е. $|\frac{1}{x^2+1}| \le 1$. Според тоа, функцијата $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ е ограничена на целата реална права. ♦

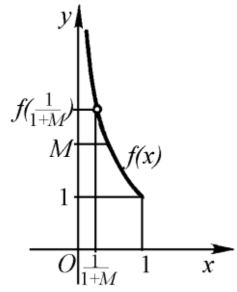
2.13. Дефиниција. За функцијата f ќе велиме дека е *неограничена од горе* (*долу*) *на множеството* E ако за секој реален број M постои $x \in E$ таков што $f(x) \ge M$ ($f(x) \le M$).

За функцијата f ќе велиме дека е *неограничена на множеството* E ако таа е неограничена од горе или од долу.

2.14. Пример. Функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ (црт. 8) е неограничена од горе на множеството $(0,1)$. Навистина, за секој $M>0$ постои $x=\frac{1}{1+M}\in(0,1)$ таков што

$$f(x)=f(\tfrac{1}{1+M})=M+1>M\ .$$

Јасно, ако $M\le 0$, тогаш бројот x од дефиниција 2.13 е кој било број од интервалот $(0,1)$. ♦



Цртеж 8

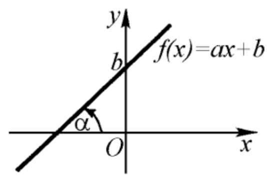
3. ОСНОВНИ РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

3.1. Линеарна функција. Како што знаеме, наједноставниот вид на реална функција е линеарна функција чиј општ вид е

$$f(x)=ax+b\ , \qquad (1)$$

каде што $a,b\in\mathbf{R}$, кои ги нарекуваме коефициенти на линеарната функцијата f. Дефиниционата област на линеарната функција е $D(f)=\mathbf{R}$, а множеството вредности е

$$E(f)=\begin{cases}\mathbf{R}, & a\neq 0,\\ \{b\}, & a=0.\end{cases}$$



Цртеж 9

Линеарната функција монотоно расте за $a>0$ и монотоно опаѓа за $a<0$. Графикот на функцијата е права со коефициент на агол $k=a=\mathrm{tg}\,\alpha$, која на $y-$оската отсекува отсечка еднаква на b.

3.2. Квадратна функција. Функција $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbf{R}, a\neq 0$ ја нарекуваме квадратна функција. Ќе разгледаме два случаја.

а) Нека $a>0$. Тогаш $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$. Функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ и расте на интервалот $[-\frac{b}{2a},+\infty)$. Графикот на функцијата е парабола свртена на горе, со оска $x=-\frac{b}{2a}$ и теме $M(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$, црт. 10.

б) Нека $a<0$. Тогаш $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}]$. Функцијата расте на интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ и опаѓа на интервалот $[-\frac{b}{2a},+\infty)$. Графикот на функцијата е парабола свртена на долу, со оска $x=-\frac{b}{2a}$ и теме $N(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$, црт. 11.

Нека

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (2)$$

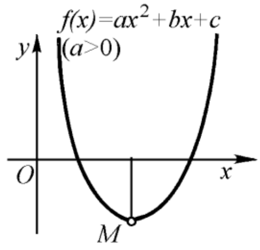
$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad (3)$$

и да ставиме

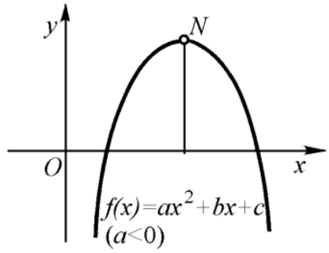
$$D=b^2-4ac\geq 0.$$

Тогаш решенијата на (2) се

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$



Цртеж 10



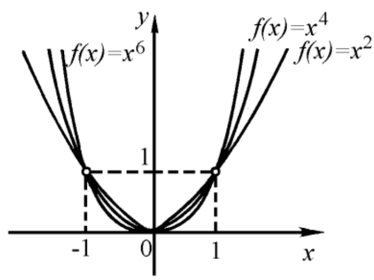
Цртеж 11

па затоа

- ако $D<0$, тогаш корените на равенката (2) се коњугирано комплексни броеви, што значи графикот на (3) нема заеднички точки со $x-$оската,
- ако $D=0$, тогаш равенката (2) има реални и еднакви корени, т.е. $x_1=x_2$, што значи графикот на функцијата (3) ја допира $x-$оската и
- ако $D>0$, тогаш равенката (2) има реални и различни корени x_1 и x_2, што значи графикот на функцијата (3) ја сече во две точки $x-$оската.

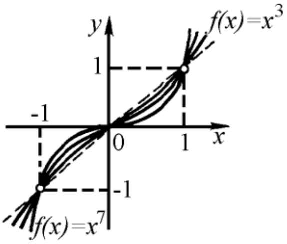
3.3. Степенска функција. Функцијата $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbf{R}$ ја нарекуваме *степенска функција*. Ќе ги разгледаме најчесто користените случаи на степенската функција.

а) Ако $\alpha=2n, n\in\mathbf{N}$, т.е. $f(x)=x^{2n}$, тогаш $D(f)=\mathbf{R},\ E(f)=[0,+\infty)$. Функцијата е парна, опаѓа на интервалот $(-\infty,0]$ и расте на интервалот $[0,+\infty)$. На црт. 12 се дадени графиците на овој вид степенски функции за $n=1,2,$ и 3.



Цртеж 12

б) Ако $\alpha=2n+1, n\in\mathbf{N}$, т.е. $f(x)=x^{2n+1}$, тогаш $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=\mathbf{R}$. Функцијата е непарна и таа монотоно расте на целата дефинициона област. На црт. 13 се дадени графиците на овој вид степенски функции за $n=1,2$ и 3.

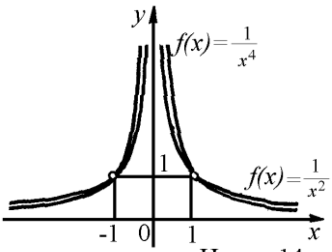


Цртеж 13

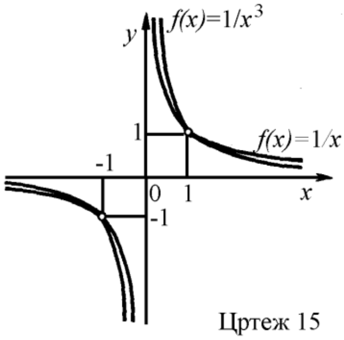
в) Ако $\alpha=-2n, n\in\mathbf{N}$, т.е. $f(x)=\frac{1}{x^{2n}}$, тогаш $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $E(f)=(0,+\infty)$. Функцијата е парна, расте на интервалот $(-\infty,0)$ и опаѓа на интервалот $(0,+\infty)$. На црт. 14 се дадени графиците на овој вид степенски функции за $n=1,2$.

г) Ако $\alpha = -2n+1, n \in \mathbf{N}$, т.е. $f(x) = \frac{1}{x^{2n-1}}$, тогаш $D(f) = E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Функцијата е непарна и монотоно опаѓа на интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. На црт. 15 се дадени графиците на овој вид степенски функции за $n = 1, 2$.

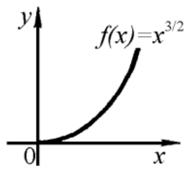
д) Ако $\alpha = \frac{p}{q}, \alpha \notin \mathbf{Z}$, тогаш $(0, +\infty) \subseteq D(f)$ и $(0, +\infty) \subseteq E(f)$. На пример, за функцијата $f(x) = x^{3/2}$ имаме $D(f) = E(f) = (0, +\infty)$ и таа монотоно расте на интервалот $(0, +\infty)$, црт. 16.



Цртеж 14



Цртеж 15



Цртеж 16

3.4. Експоненцијална функција. Нека $a > 0$, $a \neq 1$. Функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, определена со

$$f(x) = a^x, \text{ за секој } x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

ја нарекуваме *експоненцијална функција* со основа a.

Природно е да се запрашаме кои својства ги има експоненцијалната функција.

i) Нека $a > 0$. Од својствата на степените имаме дека $a^0 = 1$, што значи дека графикот на експоненцијалната функција (1) ја сече $y-$оската во точката $A(0,1)$. Понатаму, од својствата на степените и од $a > 0$ следува дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $a^x > 0$, што значи дека графикот на експоненцијалната функција не ја сече $x-$оската, т.е. оваа функција нема нули.

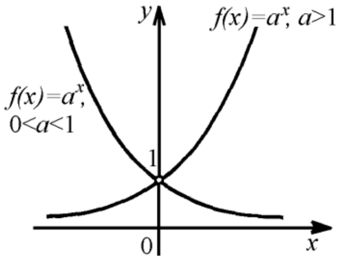
ii) Нека $x_1 \neq x_2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1 < x_2$. Имаме:

- ако $0 < a < 1$, тогаш $a^{x_1} > a^{x_2}$, т.е. $f(x_1) \neq f(x_2)$, и
- ако $a > 1$, тогаш $a^{x_1} < a^{x_2}$, т.е. $f(x_1) \neq f(x_2)$,

па затоа при $a \neq 1$ со (1) е зададена инјекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^+$.

Може да се докаже дека при $a \neq 1$, за секој $y \in \mathbf{R}^+$ постои $x \in \mathbf{R}$ таков, што $f(x) = y$, т.е. дека со (1) е зададена сурјекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^+$. Според тоа, точна е следнава теорема.

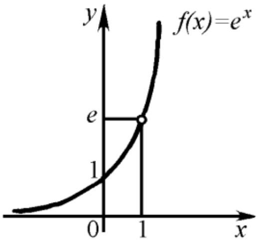
Теорема А. Ако $a \neq 1$, тогаш експоненцијалната функција (1) е биекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^+$. ♦



Цртеж 17

iii) Од претходната теорема непосредно следува дека дефиниционата област на експоненцијалната функција (1) е множеството $\mathbf{R}$, а нејзиното множество вредности е множеството позитивни реални броеви $\mathbf{R}^+$.

iv) Во *ii*) видовме дека за $0 < a < 1$ од $x_1 < x_2$ следува $a^{x_1} > a^{x_2}$ т.е. $f(x_1) > f(x_2)$, а за $a > 1$ од $x_1 < x_2$ следува $a^{x_1} < a^{x_2}$ т.е. $f(x_1) < f(x_2)$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.



Цртеж 18

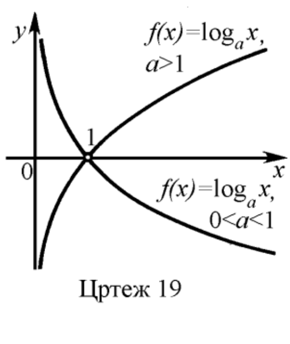
Теорема Б. а) Ако $0 < a < 1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област.

б) Ако $a > 1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно расте на целата дефинициона област. ♦

Графикот на екпоненцијалната функција е даден на црт. 17. Ако $a = e$, тогаш функцијата $f(x) = e^x$ ја нарекуваме *експонентна функција.* Графикот на оваа функција е даден на црт. 18.

3.5. Логаритамска функција. Нека $a > 1$. Во досегашните разгледувања видовме дека експоненцијалната функција $f(x) = a^x$ (цртеж 17) монотоно расте на интервалот $(-\infty, +\infty)$ и дека нејзиното множество вредности е интервалот $(0, +\infty)$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ таква што: g монотоно расте на $(0, +\infty)$ и за секој $x \in (-\infty, +\infty)$ важи $g(f(x)) = x$ и за секој $y \in (0, +\infty)$ важи $f(g(y)) = y$.

Аналогно тврдење важи и кога $0 < a < 1$ (цртеж 17), со тоа што бидејќи функцијата $f(x) = a^x$ монотоно опаѓа на $(-\infty, +\infty)$, добиваме дека и инверзната функција g монотоно опаѓа на $(0, +\infty)$.

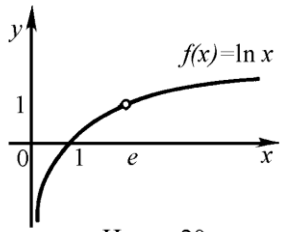


Цртеж 19

Функцијата g која е инверзна на функцијата $f(x) = a^x$ ја нарекуваме *логаритамска функција* и ја означуваме со $g(x)=\log_a x$. За секој $x\in(0,+\infty)$ бројот $\log_a x$ го нарекуваме *логаритам од* x *со основа* a. Значи, $y=\log_a x$ ако и само ако $x=a^y$. Да забележиме дека од последните две равенства добиваме дека $x=a^{\log_a x}$.

Графикот на логаритамската функција $f(x)=\log_a x$, во случаите кога $a>1$ и $0<a<1$ е даден на цртеж 19.

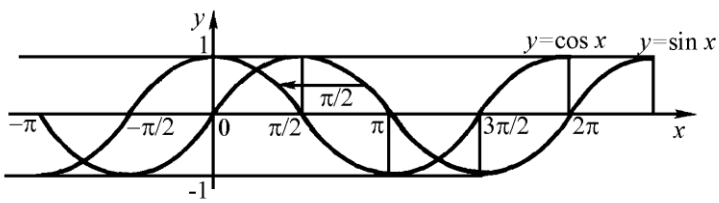
Логаритмот од x со основа $a=e$ го нарекуваме *природен логаритам* и го означуваме со $\ln x$. Според тоа, за секој $x>0$ важи $x=e^{\ln x}$. Графикот на функцијата $y=\ln x$ е даден на цртеж 20.



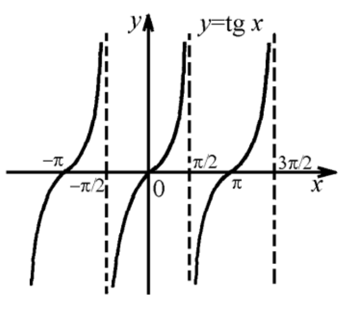
Цртеж 20

3.6. Тригонометриски функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$**.** За функцијата $y=\sin x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[-1,1]$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T=2\pi$, монотоно расте на интервалите $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi],\ k\in\mathbf{Z}$ и монотоно опаѓа на интервалите $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*синусоидата*) е даден на цртеж 21.

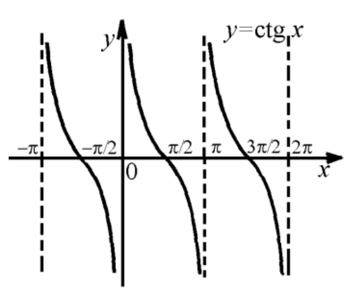
За функцијата $y=\cos x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[-1,1]$. Понатаму, таа е парна, е периодична со основна периода $T=2\pi$, монотоно расте на интервалите $[(2k-1)\pi,2k\pi],\ k\in\mathbf{Z}$ и монотоно опаѓа на интервалите $[2k\pi,(2k+1)\pi],\ k\in\mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*косинусоидата*) е даден на цртеж 21.



Цртеж 21



Цртеж 22

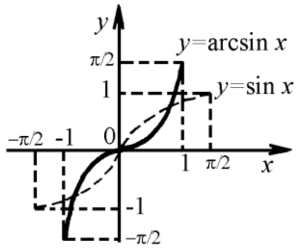


Цртеж 23

За функцијата $y = \operatorname{tg} x$ имаме $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ и $E(f) = \mathbf{R}$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T = \pi$ и монотоно расте на интервалите $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*тангенсоида*) е даден на цртеж 22.

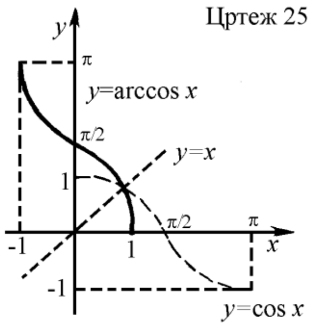
За функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ имаме $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ и $E(f) = \mathbf{R}$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T = \pi$ и монотоно опаѓа на интервалите $(k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*котангенсоида*) е даден на цртеж 23.

3.7. Инверзни тригонометриски фунции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.



Цртеж 24

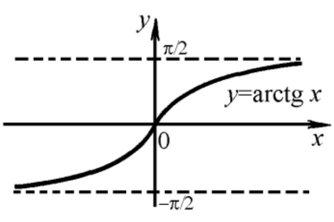
Функцијата $y = \sin x$ монотоно расте на интервалот $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и нејзиното множество вредности е $[-1,1]$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g:[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ таква што: g монотоно расте на $[-1,1]$, таа е непарна и за секој $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ важи $g(f(x)) = x$ и за секој $y \in [-1,1]$ важи $f(g(y)) = y$. Функцијата g која е инверзна на функцијата $y = \sin x$ ја нарекуваме *аркуссинус* и ја означуваме со $y = \arcsin x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 24.



Цртеж 25

Функцијата $y = \cos x$ монотоно опаѓа на интервалот $[0, \pi]$ и нејзиното множество вредности е $[-1,1]$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g:[-1,1] \to [0, \pi]$ таква што: g монотоно опаѓа на $[-1,1]$ и за секој $x \in [0, \pi]$ важи $g(f(x)) = x$ и за секој $y \in [-1,1]$ важи $f(g(y)) = y$. Функцијата g која е инверзна на функцијата $y = \cos x$ ја нарекуваме *аркускосинус* и ја означуваме со $y = \arccos x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 25.

Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ монотоно расте на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и нејзиното множество вредности е $(-\infty, +\infty)$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g:(-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ таква што: g монотоно расте на $(-\infty, +\infty)$ и за секој $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ важи $g(f(x)) = x$ и за секој $y \in (-\infty, +\infty)$ важи $f(g(y)) = y$. Функцијата g

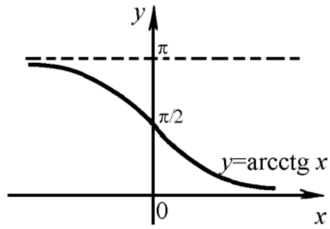


Цртеж 26

која е инверзна на функцијата $y = \mathrm{tg}\, x$ ја нарекуваме *аркустангенс* и ја означуваме со $y = \mathrm{arctg}\, x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 26.

Функцијата $y = \mathrm{ctg}\, x$ монотоно расте на интервалот $(0, \pi)$ и нејзиното множество вредности е $(-\infty, +\infty)$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$ таква што: g монотоно расте на $(-\infty, +\infty)$ и за секој $x \in (0, \pi)$ важи $g(f(x)) = x$ и за секој $y \in (-\infty, +\infty)$ важи $f(g(y)) = y$. Функцијата g која е инверзна на функцијата $y = \mathrm{ctg}\, x$ ја нарекуваме *аркускотангенс* и ја означуваме со $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 27.

Цртеж 27



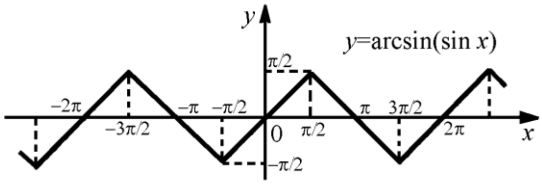
Забелешка А. Користејќи ги релациите меѓу тригонометриските функции и својствата на заемно инверзните функции може да ги пресметаме вредностите на тригономентриските функции од инверзните тригонометриски функции. Овие вредности се дадени во следнава табела.

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathrm{arcctg}\, x$
sin	$x, \lvert x\rvert \le 1$	$\sqrt{1-x^2}$, $\lvert x\rvert \le 1$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$, $\lvert x\rvert \le 1$	$x, \lvert x\rvert \le 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < \lvert x\rvert \le 1$	x	$\frac{1}{x}, x \ne 0$
ctg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < \lvert x\rvert \le 1$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{x}, x \ne 0$	x

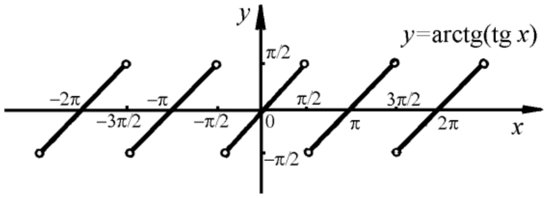
Забелешка Б. За збировите на инверзните тригонометриски функции од ист аргумент точни се следниве равенства:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2},\ \arcsin x + \arcsin(-x) = 0,$$
$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi,\ \mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}(-x) = 0,\ \mathrm{arcctg}\, x + \mathrm{arcctg}(-x) = \pi\ .$$

Забелешка В. Дефиниционите области на инверзните тригонометриски функции од тригонометриските функции се совпаѓаат со дефиниционите области на тригонометриските функции. Така, на пример, функцијата $y = \arcsin(\sin x)$ е дефинирана на целата реална права. Графикот на оваа функција е даден на цртеж 28.



Цртеж 28



Цртеж 29

Дефиниционата област на функцијата

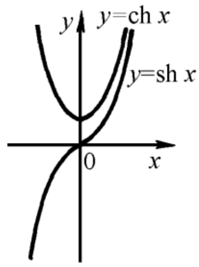
$$y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$$

е множеството

$$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

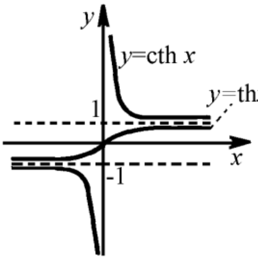
Графикот на оваа функција е даден на цртеж 29.

3.8. Хиперболички функции. Функцијата $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ја нарекуваме *синус хиперболикум* и означуваме $y = \mathrm{sh}\, x$. Имаме, $D(f) = \mathbf{R}, E(f) = \mathbf{R},$ функцијата е непарна и монотоно расте на целата реална права. Графикот на функцијата $y = \mathrm{sh}\, x$ е даден на цртеж 30.



Цртеж 30

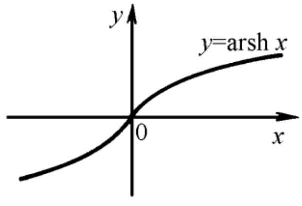
Функцијата $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ја нарекуваме *косинус хиперболикум* и означуваме $y = \mathrm{ch}\, x$. Имаме, $D(f) = \mathbf{R}, E(f) = [1, +\infty)$, функцијата е парна, монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 0]$ и монотно расте на интервалот $[0, +\infty)$. Графикот на функцијата $y = \mathrm{ch}\, x$ е даден на цртеж 30.



Цртеж 31

Функцијата $y = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ја нарекуваме *тангенс хиперболикум* и означуваме $y = \mathrm{th}\, x$. Имаме, $D(f) = \mathbf{R}, E(f) = (-1, 1)$, функцијата е непарна и монотоно расте на целата реална права. Графикот на функцијата $y = \mathrm{th}\, x$ е даден на цртеж 31.

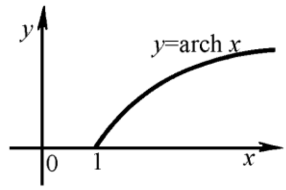
Функцијата $y = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ја нарекуваме *котангенс хиперболикум* и означуваме $y = \mathrm{cth}\, x$. Имаме, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}, E(f) = \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$, функцијата е непарна и монотоно опаѓа на интервалите $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Графикот на функцијата $y = \mathrm{th}\, x$ е даден на цртеж 31.



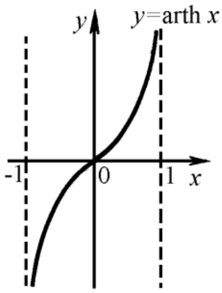
Цртеж 32

3.9. Инверзни хиперболични функции. Функцијата $y = \mathrm{sh}\, x$ монотоно расте на $\mathbf{R}$ и нејзиното множество вредности е $\mathbf{R}$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таква што: g монотоно расте на $\mathbf{R}$, таа е непарна, за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $g(f(x)) = x$ и за секој $y \in \mathbf{R}$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата g која е инверзна на функцијата $y=\operatorname{sh} x$ ја нарекуваме *ареа-синус* и ја означуваме со $y=\operatorname{arsh} x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 32.

Функцијата $y=\operatorname{ch} x$ монотоно расте на интервалот $[0,+\infty)$ и нејзиното множество вредности е $[1,+\infty)$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ таква што: g монотоно расте на $[1,+\infty)$, за секој $x\in[0,+\infty)$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in[1,+\infty)$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата g која е инверзна на функцијата $y=\operatorname{ch} x$ ја нарекуваме *ареа-косинус* и ја означуваме со $y=\operatorname{arch} x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 33.



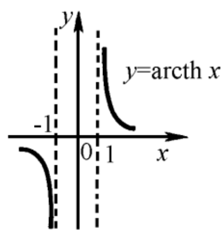
Цртеж 33



Цртеж 34

Функцијата $y=\operatorname{th} x$ монотоно расте на $\mathbf{R}$ и нејзиното множество вредности е $(-1,1)$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g:(-1,1)\to\mathbf{R}$ таква што: g монотоно расте на $(-1,1)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in(-1,1)$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата g која е инверзна на функцијата $y=\operatorname{th} x$ ја нарекуваме *ареа-тангенс* и ја означуваме со $y=\operatorname{arth} x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 34.

Функцијата $y=\operatorname{cth} x$ монотоно опаѓа на $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ и нејзиното множество вредности е $\mathbf{R}\setminus[-1,1]$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g:\mathbf{R}\setminus[-1,1]\to\mathbf{R}\setminus\{0\}$ таква што: g монотоно опаѓа на $\mathbf{R}\setminus[-1,1]$, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in\mathbf{R}\setminus[-1,1]$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата g која е инверзна на функцијата $y=\operatorname{cth} x$ ја нарекуваме *ареа-котангенс* и ја означуваме со $y=\operatorname{arcth} x$. Нејзиниот график е даден на цртеж 35.



Цртеж 35

4. КЛАСИФИКАЦИЈА НА РЕАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

4.1. Во претходната точка ги разгледавме степенската, експоненцијалната, логаритамската, тригонометриските и инверзните тригонометриски функции, кои ги нарекуваме *основни елементарни функции*. Понатаму, сите функции добиени со помош на конечен број аритметички операции на основните елементарни функции, а исто така и нивните композиции, ја формираат класата *елементарни функции.*

Примери на елементарни функции се:

$$f(x)=|x|,\ \ f(x)=\log_5^3 \arcsin 2^{\sqrt{5x}}+\cos 7x,\ \ f(x)=\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{7x}},\ \ f(x)=7^{1-\cos^3\frac{2}{x}} \text{ итн.}$$

4.2. Елементарните функции се од особена важност, па така ја имаме следнава класификација на истите.

а) Функцијата од видот

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ \ n\in\mathbf{N}_0,\ a_i\in\mathbf{R},\ i=0,1,2,\ldots,n$$

ја нарекуваме *полином од* $n-$*ти степен* или *цела рационална функција*.

б) Фунцијата од видот $R(x)=\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$, каде $P_m(x)$ и $P_n(x)\neq 0$ се полиноми ја нарекуваме *дробно-рационална функција*. Множеството од сите цели и дробно-рационални функции ја формираат класата *рационални функции*.

в) Функциите, добиени со помош на конечен број композиции и четирите аритметички операции над степенските функции како со цели, така и со дробно рационални експоненти, и кои не се рационални ги нарекуваме *ирационални функции*.

Примери на ирационални функции се:

$$f(x)=\sqrt[3]{x},\ f(x)=\frac{2+x+\sqrt[3]{x}}{x^3+3},\ f(x)=\sqrt[5]{\frac{x+x^4}{2+5x^2}},\ f(x)=\sqrt{2+3x^4}-\sqrt{2-x^2},\ \text{ итн.}$$

Рационалните и ирационалните функции ја формираат класата *алгебарски функции*.

г) Секоја функција, која не е алгебарска, ја нарекуваме *трансцедентна*. На пример, тригонометриските и инверзните тригонометриски функции се транс-цедентни функции,

Во математиката се разгледуваати функции кои не се елементарни. На пример, такви се функциите: $f(x)=[x],\quad f(x)=\operatorname{sgn} x$ итн.

5. ПАРАМЕТАРСКИ ЗАДАДЕНИ ФУНКЦИИ

5.1. Нека $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ се две функции од иста независна променлива $t\in T$. Ако $\varphi(t)$ е монотона на T, тогаш според теорема 2.9 постои инверзната на неа функција $t=\varphi^{-1}(x)$. Затоа функцијата $y=\psi(t),\ t=\varphi^{-1}(x)$ може да се разгледува како сложена функција, т.е.

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t)\ \Rightarrow t=\varphi^{-1}(x) \\ y=\psi(t) \end{array}\right\}\Leftrightarrow y=\psi(\varphi^{-1}(x))=F(x).$$

Променливата t ја нарекуваме *параметар* и во случајот велиме дека сложената функција $y=F(x)\Leftrightarrow y=\psi(t),\ t=\varphi^{-1}(x)$ е зададена параметарски и пишуваме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \ t \in T. \end{cases} \tag{1}$$

Во формулите (1) често пати функцијата $\varphi(t)$ ја означуваме со $x(t)$, а функцијата $\psi(t)$ со $y(t)$.

5.2. Забелешка. а) Секоја експлицитно зададена функција $y = f(x)$ може да се зададе параметарски, т.е. да се параметризира. Навистина,

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \ t \in T. \end{cases}$$

5.3. Пример. а) Нека $x = 3t + 1,\ y = \frac{1}{t^2},\ t \in (0, +\infty)$. Овие две функции на интервалот $(1, +\infty)$ параметарски ја задаваат функцијата $F(x) = \frac{9}{(x-1)^2}$.

Навистина, од првата равенка добиваме $t = \frac{x-1}{3}$ и ако замениме во втората равенка го добиваме експлицитното задавање на функцијата F. Притоа, кога $t \in (0, +\infty)$, од равенството $x = 3t + 1$ добиваме дека $x \in (1, +\infty)$.

б) Да ја разгледаме функцијата $y = \frac{1}{x},\ D(f) = (0, +\infty)$. Ако го воведеме параметарот $t = x$, тогаш

$$\begin{aligned} &x = t, \\ &y = \tfrac{1}{x},\ t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Да забележиме дека функцијата $y = \frac{1}{x},\ D(f) = (0, +\infty)$ параметарски може да се зададе и спо помош на равенките

$$\begin{aligned} &x = e^t, \\ &y = e^{-t},\ t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

т.е. една иста функција параметарски може да се зададе со различни аналитички изрази. ♦

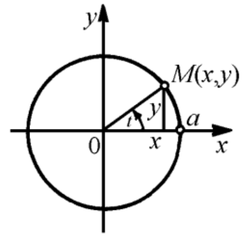
5.4. Параметарско задавање на некои линии во рамнината. Множеството точки $M(x, y)$ во рамнината $\mathbf{R}^2$, чии кординати ги задоволуваат равенките $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T$, параметарски задава некоја линија $L \in \mathbf{R}^2$. Ќе ги разгледаме параметарските задавања на најчесто користените линии во математиката.

5.5. Пример. а) Параметарските равенки на правата $y = ax + b$ се

$$\begin{cases} x = t, \\ y = at + b,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

б) Кружницата со центар во координатниот почеток и радиус еднаков на a е дадена со равенките:

$$x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t,\ 0\le t<2\pi. \end{cases}$$

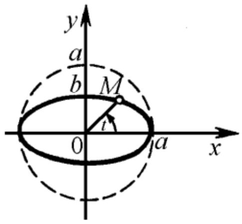


Цртеж 36

Овде параметарот t е аголот меѓу позитивната насока на $x-$оската и радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ на точката $M(x,y)$ која од $x-$оската се движи во насока спротивна на движењето на стрелката на часовникот.

в) Елипсата со центар во координатниот почеток и полуоски a и b е дадена со равенките

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t,\ 0\le t<2\pi. \end{cases}$$



Цртеж 37

Навистина, елипсата може да се добие со контракција на кружница со радиус a во $\frac{b}{a}$ долж оската Oy. При оваа деформација на кружницата параметарските равенки на елипсата се добиваат од параметаските равенки на кружницата со множење на ординатата со $\frac{b}{a}$ и за параметарските равенки на елипсата добиваме:

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=\frac{b}{a}a\sin t=b\sin t,\ 0\le t<2\pi. \end{cases}$$

Јасно, од параметарските равенки на елипсата лесно се добива нејзината канонична равенка. Имаме

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos t=\frac{x}{a}, \\ \sin t=\frac{y}{b}, t\in[0,2\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow (\tfrac{x}{a})^2+(\tfrac{y}{b})^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1.$$

г) *Параболата* $y^2=2px,\ p>0$ е зададена со параметарските равенки

$$\begin{cases} x=t, \\ y^2=2pt,\ t\in[0,+\infty). \end{cases}$$

д) *Хиперболата* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ е зададена со параметарските равенки

$$\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t,\ t\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

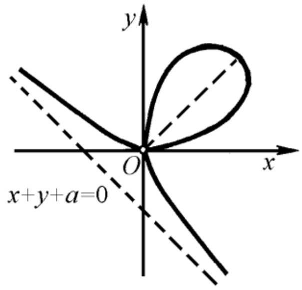
Точноста на параметарското задавање на хиперболата следува од својството $\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1$ на хиперболичните функции, (проверете!).

ѓ) *Декартовиот лист* (црт. 38) е крива од трет ред и нејзината равенка е

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0\,.$$

Јасно, оваа крива е симетрична во однос на правата $y = x$. Ако ставиме $y = tx$, добиваме $x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0$, од каде наоѓаме ги наоѓаме параметарските равенки на Декартовиот лист:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \text{ и } y = tx = t\,\frac{3at}{1+t^3} = \frac{3at^2}{1+t^3}\,.$$



Цртеж 38

е) *Астроидата* е затворена линија која се всушност е траекторијата на точката која лежи на кружница со радиус r и се тркала по внатрешната страна на неподвижна кружница со радиус $a = 4r$, црт. 39. Равенката на астроидата е

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\,,$$

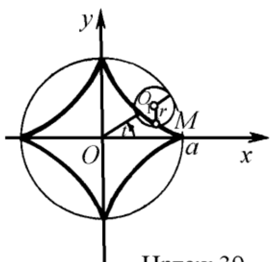
а додека нејзините параметарски равенки се дадени со

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \;\; 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

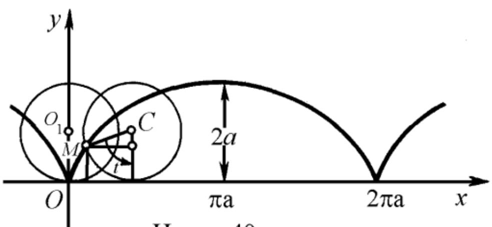
ж) *Циклоида* е кривата која ја опишува точката на крушницата која се тркала без лизгање по $x-$оската. Циклоидата се состои од складни лакови, секој од кои соодветствува на една ротација на кругот. Параметарските равенки на циклоидата се:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t, \; t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Графикот на циклоидата е даден на цртеж 40. ♦



Цртеж 39

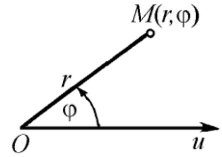


Цртеж 40

6. ФУНКЦИИ ЗАДАДЕНИ ВО ПОЛАРНИ КООРДИНАТИ

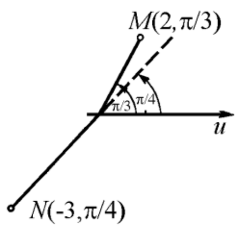
6.1. Поларни координати. Освен Декартовиот координатен систем Oxy на рамнината $\mathbf{R}^2$ се користи и поларниот координатен систем. Поларниот координатен систем се задава со: точка O која ја нарекуваме *пол*, *поларна оска* Ou и единечна должина на поларната оска (црт. 41).

Поларни координати на точката $M \in \mathbf{R}^2$, која не се совпаѓа со полот, ги нарекуваме *поларниот радиус* $r(M) = |\overrightarrow{OM}|$ на точката M и *поларниот агол* $\varphi(M)$, т.е. аголот кој го зафаќа векторот $\overrightarrow{OM}$ со поларната оска Ou. Притоа $\varphi(M) > 0$ ако се движиме обратно од движењето на стрелката на часовникот и $\varphi(M) < 0$ во спротивен случај. Записот $M(r, \varphi)$ означува дека точката M има поларни координати r и φ. Ако точката M се совпаѓа со полот, тогаш нејзиниот радиус вектор е еднаков на нула, т.е. $r(M) = 0$, а поларниот агол φ е произволен.



Цртеж 41

Поларниот агол $\varphi(M)$ прима бесконечно многу вредности, кои една од друга се разликуваат за $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Вредноста на поларниот агол од интервалот $[0, 2\pi)$ ја нарекуваме *главна вредност*.

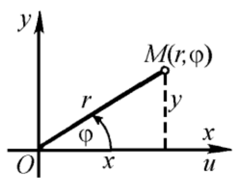


Цртеж 42

6.2. *Обопштени поларни координати на точката* M ги нарекуваме нејзините поларни координати r и φ, такви што $r, \varphi \in \mathbf{R}$. За да ја претставиме точката $M(r, \varphi)$ во обопштени поларни координати, треба да конструираме полуправа која со поларната оска зафаќа агол φ, потоа да нанесеме r единици должина на полуправата ако $r > 0$, и на нејзиното продолжение ако $r < 0$. На цртеж 42 во обопштени координати се претставени точките $M(2, \pi/3)$ и $N(-3, \pi/4)$.

6.3. Врска меѓу поларни и Декартови координати. Понекогаш истовремено ги користиме и поларните и Декартовите координати, па затоа од интерес е да се определат нивните заемни врски. Притоа природно се поставуваат две заемнообратни задачи:

а) ако ги знаеме поларните координати r и φ на точката M, да ги определиме нејзините Декартови координати x и y, и



Цртеж 43

б) ако ги знаеме Декартовите координати x и y на точката M, да ги определиме нејзините поларни координати r и φ.

Јасно, решението на поставените задачи зависи од заемната положба на поларната оска и оските на Декартовиот координатен систем. Ние ќе го разгледаме наједноставниот случај кога поларната оска Ou се совпаѓа со оската Ox и оските Ou, Ox, Oy имаат иста единична мера. Во овој случај зависноста меѓу Декартовите и поларните координати ја наоѓаме со помош на релациите (црт.43):

$$\frac{x}{r}=\cos\varphi,\ \frac{y}{r}=\sin\varphi,$$

од каде наоѓаме:

$$x=r\cos,\quad y=r\sin\varphi. \tag{1}$$

Формулите (1) ги изразуваат Декартовите координати преку поларните координати. За да ги изразиме поларните координати преку Декартовите, прво ќе ги квадрираме двете страни на равенствата (1) и ќе ги собереме:

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2,$$

од што наоѓаме

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{2}$$

Понатаму, ако ги поделиме равенствата (1) добиваме $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi$, од каде наоѓаме

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Формулите (2) и (3) ги изразуваат поларните координати преку Декартовите. Да забележиме дека ако $\varphi\in[0,2\pi)$, тогаш на најдената вредност $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi$ и соодветствуваат две вредности на аголот φ. Од овие две вредности ја избираме онаа за која се точни равенствата (1).

Понатаму, со помош на врските меѓу поларните и Декартовите координати, равенката на линијата L можеме да ја запишеме во видот $F(r,\varphi)=0$ или $r=r(\varphi)$. Дефиниционата област на функција во поларен координатен систем ѓе ја означуваме со $D(r)$, а множеството вредности со $E(r)$.

6.4. Пример. а) Равенката на правата која минува низ полот е $y=kx$, па од $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi$ следува дека нејзината равенка во поларни координати е $\operatorname{tg}\varphi=k$.

Равенката на правата која не минува низ полот е $Ax+By+C=0$. Може да се покаже дека нејзината равенка во поларни координати е $r=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$, каде p е растојанието од правата до полот и α е аголот на наклонот на нормалниот вектор на правата $\vec{n}(A,B)$.

б) Равенката на кружницата со центар во координатниот почеток и радиус a е $x^2+y^2=a^2$. Ако ја искористиме релацијата (2), за равенката на оваа кружница во поларни координати добиваме $r=a$, црт. 44 а).

Равенката на крушницата со центар $C(a,0)$, и радиус a (црт. 44 b)) е

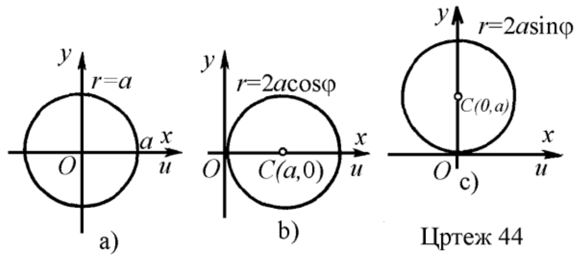
$$(x-a)^2+y^2=a^2\text{, т.е. } x^2+y^2=2ax.$$

Сега од разгледувањата во 6.3 следува дека нејзината равенка во поларни координати е $r=2a\cos\varphi$.

Равенката на кружницата со центар $C(0,a)$ и радиус a (црт. 44 c)) е

$$x^2+(y-a)^2=a^2\text{, т.е. } x^2+y^2=2ay\,.$$

Сега од разгледувањата во 6.3 следува дека нејзината равенка во поларни координати е $r=2a\sin\varphi$. ♦



Цртеж 44

6.5. Линии од втор ред. Равенките на елипсата, хиперболата и параболата во поларни координати имаат вид:

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\,, \tag{4}$$

каде p е параметар, а ε е ексцентритетот.

За $\varepsilon<1$ равенката (4) е равенка на *елипса*, за $\varepsilon>1$ таа е равенка на *хипербола*, а за $\varepsilon=1$ таа е равенка на *парабола*. Да забележиме дека при $\varepsilon>1$ равенката (4) треба да се разгледува во обопштени поларни координати, бидејќи во спротивно таа ќе ја опишува само десната гранка на хиперболата.

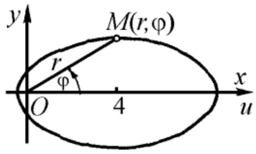
За да преминеме во Декартов координатен систем, во равенката (4) ставаме $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и после упростувањето на добиените равенки добиваме равенки на елипса, хипербола и парабола.

6.6. Пример. Определете каква линија е зададена со равенката:

а) $r=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$, б) $r=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$, в) $r=\frac{3}{1-\cos\varphi}$.

Решение. а) Дадената равенка ќе ја запишеме во видот $r=\frac{\frac{9}{5}}{1-\frac{4}{5}\cos\varphi}$. Бидејќи $\frac{4}{5}<1$, од 6.5 следува дека тоа е равенка на елипса (црт. 45). Понатаму, со замена за r и $\cos\varphi$ добиваме

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{5-\frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\text{, т.е. }\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{5}+\frac{4}{5}x\,,$$



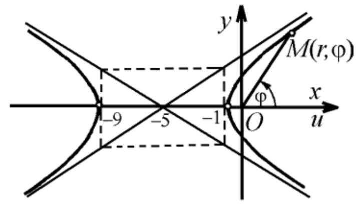
Цртеж 45

од што после квадрирање и средување ја добиваме равенката на елипсата

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\,.$$

б) Дадената равенка ја запишуваме во видот $r=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{5}{4}\cos\varphi}$ и како $\frac{5}{4}>1$ заклучуваме дека тоа е равенка на хипербола (црт. 46). Понатаму, со замена за r и $\cos\varphi$ добиваме

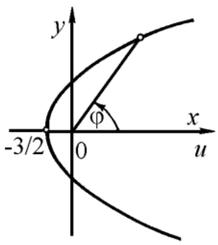
$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4-\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\text{, т.е. }\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4}+\frac{5}{4}x,$$



Цртеж 46

од што после квадрирање и средување ја добиваме равенката на хиперболата

$$\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$



Цртеж 47

в) Бидејќи $\varepsilon=1$, тоа е равенка на парабола (црт. 47). Понатаму, со замена за r и $\cos\varphi$ добиваме

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\text{, т.е. }\sqrt{x^2+y^2}=3+x,$$

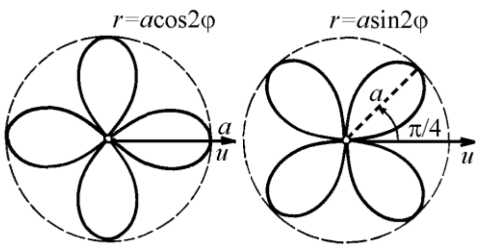
од што после квадрирање и средување ја добиваме равенката на параболата

$$y^2=9+6x.\ ♦$$

6.7. Дефиниција. Кривата чија равенка во поларни координати е од видот

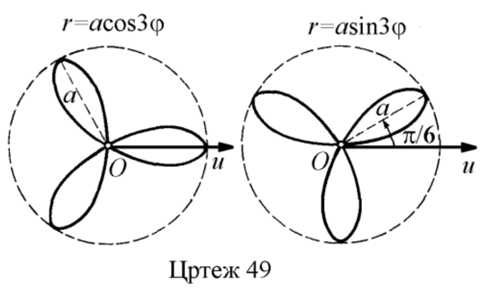
$$r=a\sin k\varphi \text{ или } r=a\cos k\varphi, \tag{5}$$

каде a,k се позитивни броеви ја нарекуваме *роза*.



Цртеж 48

За секои a,k,φ важи $r\le a$, што значи дека секоја роза се наоѓа во круг со радиус a. Понатаму, функциите $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ се периодични, па затоа розите се состојат од конгруентни листови кои се симетрични на во однос на најголемите радиуси, секој од кои е еднаков на a. Јасно, бројот на листовите на розата зависи од вредноста на k. Имено, ако k е цел број, тогаш во случај кога k е непарен број розата се состои од k листови, а ако k е парен број таа се состои од $2k$ листови. Ако $k=0$, тогаш првата равенка во (5) определува точка која се совпаѓа со полот, а втората равенка определува кружница со центар во по-



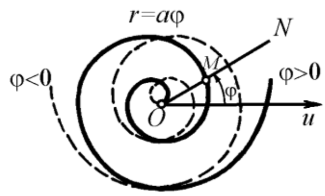
Цртеж 49

лот и радиус a. Ако $k=1$, тогаш согласно со пример 6.4 б) равенките $r=a\sin\varphi$ и $r=a\cos\varphi$ определуваат кружници со радиуси $\frac{a}{2}$ и центри $(0,\frac{a}{2})$ и $(\frac{a}{2},0)$, соодветно. Ако $k=2$, тогаш равенките $r=a\sin 2\varphi$ и $r=a\cos 2\varphi$ определуваат четирилисни рози, при што розата $r=a\sin 2\varphi$ може да се добие со ротација за агол $\frac{\pi}{4}$ на розата $r=a\cos 2\varphi$ (црт. 48). Ако $k=3$, тогаш равенките (5) определуваат трилисни рози, при што розата $r=a\sin 3\varphi$ може да се добие од розата $r=a\cos 3\varphi$ со нејзина ротација за агол $\frac{\pi}{6}$, (црт. 49).

6.8. Дефиниција. Кривата чија равенка во поларни координати е од видот

$$r=a\varphi \tag{6}$$

ја нарекуваме *Архимедова спирала*, (црт. 50).



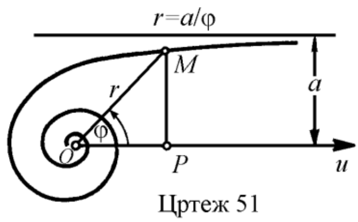
Цртеж 50

Забележуваме дека кај Архимедовата спирала поларниот радиус пропорционално зависи од поларниот агол со коефициент на пропорционалност a. Дадената крива се состои од две гранки, при што првата гранка се добива кога $\varphi>0$ и е во насока спротивна од движењето на стрелката на часовникот, а втората кога $\varphi<0$ и е во насока на движењето на стрелката на часовникот. Двете гранки се симетрични во однос на нормалата на поларната оска, која поминува низ таканаречените двојни точки на Архимедовата спирала. Јасно, $D(r)=\mathbf{R}$ и $E(r)=\mathbf{R}$.

6.9. Дефиниција. Кривата чија равенка во поларни координати е од видот

$$r=\frac{a}{\varphi},\ a>0 \tag{7}$$

ја нарекуваме *хиперболична спирала* (црт. 51).



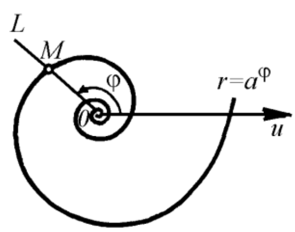
Цртеж 51

За хиперболичната спирала правата паралелна на поларната оска и оддалечена од неа на растојание a е нејзина асимптота. Јасно, $D(r)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ и $E(r)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

6.10. Дефиниција. Кривата чија равенка во поларни координати е од видот

$$r=a^{\varphi}, a>0, a\neq 1 \tag{8}$$

ја нарекуваме *логаритамска спирала* (црт. 52).



Цртеж 52

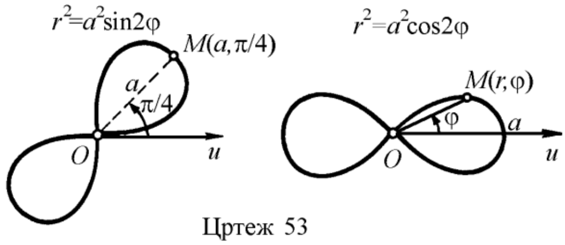
За логаритамската спирала важи $D(r)=\mathbf{R}$, $E(r)=(0,+\infty)$ и таа ги сече сите свои радиус-вектори под еден ист агол.

6.11. Дефиниција. Кривите чии равенки во поларни координати се од видот

$$r^m = a^m \sin m\varphi \text{ или } r^m = a^m \cos m\varphi \tag{9}$$

ги нарекуваме *синусоидални спирали*.

Во зависност од параметарот m равенките (9) определуваат криви од најразличен вид. Така, за $m=1$ равенките $r = a\cos\varphi$ и $r = a\sin\varphi$ определуваат кружници. Понатаму, за $m=\frac{1}{2}$ равенките



Цртеж 53

$$r = a\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2}(1+\cos\varphi)\,,\ r = a\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2}(1-\cos\varphi)$$

определуваат кардиоиди. За $m=2$ равенките

$$r^2 = a^2\sin 2\varphi \text{ и } r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

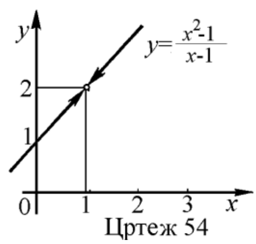
определуваат криви кои во литературата се познати како *лемискати* на *Бернули* (црт. 53).

7. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА

7.1. Дефиниција (Хајне). Нека функцијата $f(x)$ е определена во секоја точка на множеството $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, при што во точката x_0 функцијата може да не биде определена. Бројот y_0 го нарекуваме *граница на функцијата* $y=f(x)$ во точката x_0, ако за секоја низа $\{x_n\}$ точки од $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, која конвергира кон x_0, низата соодветни вредности $\{f(x_n)\}$ конвергира кон y_0.

Притоа ја користиме ознаката $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

7.2. Пример. а) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, $x\neq 1$. Оваа функција не е определена во точката $x_0=1$, но е определена во секоја точка од множеството $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$. Нека $\{x_n\}$ е произволна низа со општ член $x_n\neq 1$ и таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. За низата $\{f(x_n)\}$ имаме



Цртеж 54

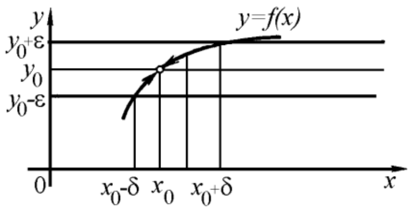
$$f(x_n) = \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1} = x_n + 1\,,$$

па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1) = 2$.

Според тоа, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ (црт. 54).

б) Функцијата $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ нема граница во точката $x_0 = 0$. Навистина, низите $\{\frac{1}{n\pi}\}$ и $\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\}$ конвергираат кон точката $x_0 = 0$, но соодветните низи вредности $\{\sin n\pi\}$ и $\{\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\}$ конвергираат кон 0 и 1 соодветно, па од дефиниција 7.1 следува дека $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ нема граница во $x_0 = 0$. ♦

Во врска со границата на функција во точка ќе ја дадеме и дефиницијата на Коши, која во литературата е позната и како дефиниција на јазикот "$\varepsilon - \delta$".



Цртеж 55

7.3. Дефиниција (Коши). Бројот y_0 го нарекуваме *граница на функцијата* $y = f(x)$ во точката x_0, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \neq x_0$ кој го задоволува условот $|x - x_0| < \delta$ важи $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ (црт. 55).

7.4. Пример. а) Ќе докажеме дека $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Функцијата $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ не е определена во точката $x_0 = 0$, но е определена на секое множество кое не ја содржи оваа точка. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Земаме $\delta = \varepsilon > 0$ и добиваме

$$|f(x) - 0| = |x\sin\tfrac{1}{x} - 0| = |x\sin\tfrac{1}{x}| \leq |x|\cdot 1 = |x| < \varepsilon, \text{ кога } |x-0| < \delta = \varepsilon,$$

што според дефиницијата на Коши значи дека $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. ♦

7.5. Забелешка. Дефинициите на граница на функција во точка според Хајне и Коши се еквивалентни, т.е од првата следува втората и обратно. Доказот на ова тврдење нема да го презентираме.

7.5. Теорема. Ако за функцијата $f(x)$ постои граничната вредност y_0 во точката x_0, тогаш таа е единствена.

Доказ. Непосредно следува од единственоста на границата на низа. ♦

7.6. Теорема. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ во точката x_0 имаат граници a и b, соодветно, т.е. ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогаш а) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$, б) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=ab$ и

в) ако $b\neq 0$, тогаш $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$.

Доказ. а) Ако $\{x_n\}$ е произволна низа која конвергира кон x_0, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a \text{ и } \lim_{n\to\infty} g(x_n)=b,$$

па од својствата на конвергентните низи следува дека

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)\pm g(x_n)]=a\pm b,$$

што според дефиниција 7.1 значи дека $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$.

б) Ако $\{x_n\}$ е произволна низа која конвергира кон x_0, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a \text{ и } \lim_{n\to\infty} g(x_n)=b,$$

па од својствата на конвергентните низи следува дека

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)g(x_n)]=ab,$$

што според дефиниција 7.1 значи дека $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=ab$.

в) Ако $\{x_n\}$ е произволна низа која конвергира кон x_0, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a \text{ и } \lim_{n\to\infty} g(x_n)=b\neq 0,$$

па од својствата на конвергентните низи следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{a}{b}$, што според дефиниција 7.1 значи дека $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$. ♦

7.7. Забелешка. Ако во теорема 7.6 б) ставиме $g(x)=c$, тогаш бидејќи во секоја точка важи $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (провери!), добиваме

$$\lim_{x\to x_0} cf(x)=ca=c\lim_{x\to x_0} f(x).$$

7.7. Пример. Ќе ги пресметаме границите

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, в) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1})$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=\frac{2^2+5}{2^2-3}=\frac{4+5}{4-3}=9$.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{1-1}{1\cdot(1+1)}=\frac{0}{2}=2$.

в) Имаме

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1.\ \blacklozenge$$

7.8. Теорема (за запазување на знакот). Нека $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=q$, $q\neq 0$. Тогаш постојат $\delta>0$ и $c>0$ такви што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ важи

$$g(x)>c\text{, ако } q>0, \tag{1}$$

$$g(x)<-c\text{, ако } q<0. \tag{2}$$

Доказ. Нека $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=q$, $q\neq 0$. Тогаш, од дефиницијата на Коши за граница на функција следува дека за $\varepsilon=\frac{|q|}{2}$ постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ важи $|g(x)-q|<\frac{|q|}{2}$, т.е. $-\frac{|q|}{2}<g(x)-q<\frac{|q|}{2}$ што значи $q-\frac{|q|}{2}<g(x)<q+\frac{|q|}{2}$

Според тоа, ако $q>0$, тогаш за секој $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ важи

$$\frac{|q|}{2}=q-\frac{|q|}{2}<g(x),$$

т.е. неравенството (1) важи за $c=\frac{|q|}{2}$, а ако $q<0$, тогаш за секој

$$g(x)<q+\frac{|q|}{2}=-\frac{|q|}{2},$$

т.е. неравенството (2) повторно важи за $c=\frac{|q|}{2}$. ♦

7.9. Конечни граници при $x\to\infty, x\to-\infty, x\to+\infty$. Со помош на низи ќе дадеме дефиниција на конечна граница на функција.

Дефиниција А. Бројот y_0 го нарекуваме *конечна граница на функцијата* $y=f(x)$, кога $x\to\infty$, ако за секоја неограничена низа $\{x_n\}$ вредности на аргументот важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_0$. Притоа ќе пишуваме

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=y_0.$$

Дефиниција Б. Бројот y_0 го нарекуваме *конечна граница на функцијата* $y=f(x)$, кога $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), ако за секоја неограничена низа $\{x_n\}$ вредности на аргументот, чии елементи се позитивни (негативни) важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_0$. Притоа ќе пишуваме

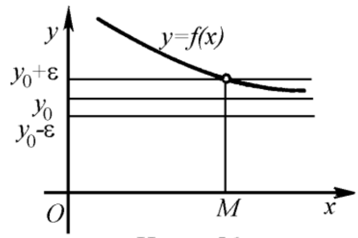
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \ \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0\right).$$

Пример. а) Нека $f(x)=\frac{1}{x}$. Оваа граница има граница кога $x\to\pm\infty$ еднаква на нула. Навистина, ако за низата $\{x_n\}$ важи: за секој $M>0$ постои k таков што кога $n>k$ важи $x_n>M$, тогаш за секој $\varepsilon>0$ постои k таков што кога $n>k$ важи $x_n>\frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $|\frac{1}{x_n}-0|=\frac{1}{x_n}<\varepsilon$, што значи дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

б) Имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}. \ \blacklozenge$$



Цртеж 56

Може да се даде еквивалентна дефиниција за конечна граница на функција кога $x\to\infty, x\to-\infty, x\to+\infty$ со помош на "$\varepsilon-\delta$" јазикот. На пример, ќе ја формулираме дефиницијата за конечна граница кога $x\to+\infty$.

Дефиниција В. Бројот y_0 го нарекуваме *конечна граница на функцијата* $y=f(x)$, кога $x\to+\infty$, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $M>0$ таков што неравенството $|f(x)-y_0|<\varepsilon$ е исполнето за секој $x>M$, т.е.

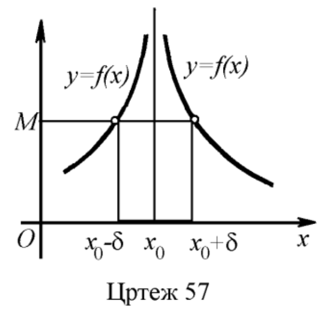
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M>0: \forall x>M \text{ важи } |f(x)-y_0|<\varepsilon.$$

Множеството $\{x\,|\,x>M\}$ го нарекуваме $M-$*околина* на бесконечно оддалечената точка. Последното геометриски значи дека за $x>M$ графикот на функцијата $y=f(x)$ се наоѓа во делот од рамнината ограничен со правите $y_0-\varepsilon$ и $y_0+\varepsilon$, црт. 56.

7.10. Бесконечни граници кога $x\to x_0$. Ќе го разгледаме случајот кога функцијата $y=f(x)$ кога $x\to x_0$ неограничено расте. Тогаш функцијата нема конечна граница, па затоа е потребно да го обопштиме поимот за граница.

Дефиниција А (Коши). Границата на функцијата $y=f(x)$, кога $x\to x_0$ ја нарекуваме *бесконечна*, ако за секој $M>0$ постои $\delta>0$, таков, што за секој x за кој важи $0<|x-x_0|<\delta$ важи $|f(x)|>M$. Притоа пишуваме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$



Цртеж 57

Ако $f(x)$ има бесконечна граница и прима само позитивни или само негативни вредности, тогаш пишуваме $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, соодветно.

На цртежите 57 и 58 се дадени геометриските интерпретации на бесконечните граници

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

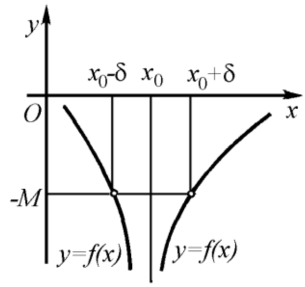
соодветно. Јасно, ако

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

тогаш графикот на функцијата $f(x)$ на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се наоѓа во полурамнината $y > M$ (црт. 57), а ако

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

тогаш графикот на функцијата $f(x)$ на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се наоѓа во полурамнината $y < -M$ (црт. 58).



Цртеж 58

Пример. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{1-x} = \infty$.

Нека $M > 0$. Тогаш, ако $\frac{M}{M+1} < x < 1$ добиваме $M < Mx + x$, односно $M(1-x) < x$ што значи $\frac{x}{1-x} > M$. Според тоа, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{1-x} = \infty$. ♦

Претходната дефиниција за бесконечна граница е дадена на "$\varepsilon - \delta$" на Коши. Истата дефиниција ќе ја презентираме во формулација на Хајне.

Дефиниција Б (Хајне). Функцијата $y = f(x)$ има *бесконечна граница* кога $x \to x_0$, ако за секоја низа $\{x_n\}$ која конвергира кон x_0 низата вредности на функцијата $\{f(x_n)\}$ конвергира кон бесконечност.

7.11. Бесконечни граници кога $x \to \pm\infty$. Постојат функции кои го имаат следново својство: при неограничено зголемување на $|x|$ вредностите $|f(x)|$ неограничено растат. Во таа смисла ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Границата на функцијата $y = f(x)$ кога $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) ја нарекуваме *бесконечна*, ако за секој $M > 0$ постои $N > 0$ таков што $|f(x)| > M$ кога $|x| > N$.

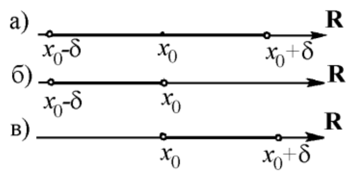
Пример. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{6-x} = +\infty$.

Нека $M > 0$. Ако земеме $N = M^2 - 6$, тогаш за $x < 6 - M^2$ добиваме $6 - x > 6 - 6 + M^2 = M^2$, па затоа $\sqrt{6-x} > \sqrt{M^2} = M$, што значи

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{6-x}=+\infty\ . \ \blacklozenge$$

7.12. Еднострани граници на функции. При разгледувањето на конечната граница на функција кога $x\to x_0$ претпоставуваме дека точката x се приближува кон точката x_0 како од лево, така и од десно. Меѓутоа, понекогаш имаме потреба да разгледуваме граница на функцијата $y=f(x)$ при услов дека точката x се приближува кон точката x_0 само од левио, односно само од десно. Пред да преминеме кон разгледување на ваквите граници, ќе ги воведеме поимите: околина на точка, лева и десна околина на точка.

Дефиниција А. *Лева* $\delta-$*околина* на точката x_0 го нарекуваме множеството $(x_0-\delta,x_0]$, црт. 59 б). *Десна* $\delta-$*околина* на точката x_0 го нарекуваме множеството $[x_0,x_0+\delta)$, црт. 59 в). $\delta-$*околина* на точката x_0 го нарекуваме множеството $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, црт. 59 а).



Цртеж 59

Користејќи ги поимите лева и десна $\delta-$околина на точка ќе ги воведеме поимите за лева и десна граница на функција во точка. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција Б. Бројот y_0 го нарекуваме *лева граница* на функцијата $f(x)$ во точката x_0, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0]$ важи $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. Притоа пишуваме $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=y_0$.

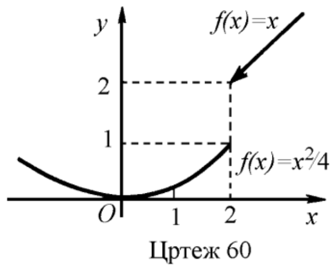
Бројот y_0 го нарекуваме *десна граница* на функцијата $f(x)$ во точката x_0, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in[x_0,x_0+\delta)$ важи $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. Притоа пишуваме $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=y_0$.

Пример. Едностраните граници на функцијата

$$f(x)=\begin{cases}x^2/4, & x\le 2\\ x, & x>2,\end{cases}$$

во точката $x_0=2$ се

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{4}=1 \text{ и } \lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}x=2\,.$$



Цртеж 60

Бидејќи $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=1\ne2=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ заклучуваме дека во оваа точка дадената функција нема граница (црт. 60). $\blacklozenge$

7.13. На крајот од овој дел ќе разгледаме уште еден пример.

Пример. а) Ќе ја пресметаме границата $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. Имаме

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}^2-2^2}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}.$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

б) Ќе ја пресметаме границата $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. Имаме

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3-1)}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)=3. \ \blacklozenge$$

8. ДВЕ ВАЖНИ ГРАНИЦИ

8.1. Теорема. Нека се дадени функциите f, g и h такви што

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=a$$

и ако постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ важи

$$f(x)\le h(x)\le g(x),$$

тогаш $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$.

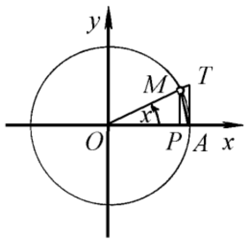
Доказ. Ако $\{x_n\}$ е произволна низа која конвергира кон x_0, тогаш

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=a$ и $f(x_n)\le h(x_n)\le g(x_n)$, за секој $n\ge 1$.

Од теоремата за три низи следува $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)=a$, што значи $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$. ♦

8.2. Пример. Ќе докажеме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



Цртеж 61

Нека AM е лак на единечната кружница, кој соодветствува на агол со големина $x>0$ радијани (црт. 61). Тогаш,

$$\overline{OA}=1, \overline{MP}=\sin x, \overline{OP}=\cos x.$$

Јасно плоштината на кружниот исечок OAM е поголема од плоштината на ΔOAM и е помала од плоштината на ΔOAT , т.е.

$$\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{MP} < \frac{1}{2}\overline{OA}^2 x < \frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AT}$$

т.е.

$$\overline{MP} < x < \overline{AT} \tag{1}$$

Но, $\overline{AT}:\overline{OA} = \overline{MP}:\overline{OP}$, т.е. $\overline{AT} = \frac{\overline{MP}\cdot\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\sin x}{\cos x}$, ако замениме во (1) добиваме $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$, односно $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Понатаму, функциите $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ се парни, па затоа ова неравенство важи и за $x < 0$ радијани. Според тоа, за секој $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ важи неравенството $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Значи, кога $x \to 0$ количникот $\frac{\sin x}{x}$ се наоѓа меѓу 1 и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, па од теорема 8.1 следува дека $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Претходно искористивме дека $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Уште повеќе, ќе докажеме дека $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$. Навистина, ако го искористиме неравенството $|\sin x| \le |x|$ добиваме

$$|\cos x - \cos a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \le 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|$$

и ако во дефиницијата на Коши за дадено $\varepsilon > 0$ земеме $\delta = \varepsilon > 0$ добиваме дека $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$. ♦

8.3. Пример. Пресметај ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{\cos 0} = 1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}) = \frac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}$.

в) Имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2^2(\frac{x}{2})^2} = \frac{2}{2^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}. \ ♦$$

8.4. При проучувањето на низите покажавме дека

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e, n \in \mathbf{N}.$$

Во врска со бројот e ќе докажеме дека

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\tfrac{1}{x})^x = e\,.$$

Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n = e \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n+1})^n = e$$

и дефиницијата на граница на низа следува дека за даденото $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0, таков што за секој $n \ge n_0$ важи:

$$e-\varepsilon < (1+\tfrac{1}{n})^n < e+\varepsilon \ \text{ и } \ e-\varepsilon < (1+\tfrac{1}{n+1})^n < e+\varepsilon\,.$$

Ставаме $C = n_0$ и нека $x > C$. Тогаш, постои природен број k таков што $k \le x < k+1$, што значи $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{k}$, па затоа $1+\frac{1}{k+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{k}$. Според тоа, од последните неравенства и од неравенствата $k \le x < k+1$ добиваме

$$(1+\tfrac{1}{k+1})^k < (1+\tfrac{1}{x})^x < (1+\tfrac{1}{k})^{k+1},$$

т.е.

$$e-\varepsilon < (1+\tfrac{1}{k+1})^k < (1+\tfrac{1}{x})^x < (1+\tfrac{1}{k})^{k+1} < e+\varepsilon\,,$$

од што следува $|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Користејќи го претходно докажаниот резултат, може да се докаже дека

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\tfrac{1}{x})^x = e \ \text{ и } \ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,. \ ♦$$

8.5. Пример. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x/k})^{x/k}]^k = e^k$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-3})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{-3}{x}})^x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{2}{x})^x}{(1+\frac{-3}{x})^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-3}{x})^x} = \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{-2}{x^2}})^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x^2})^{x^2}}{(1+\frac{-2}{x^2})^{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})^{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-2}{x^2})^{x^2}} = \frac{e}{e^{-2}} = e^3$. ♦

8.6. Пример. а) За $a > 0$, $a \ne 1$, важи

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e\,.$$

б) Нека $a > 0$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$. Ставаме $z = a^x - 1$ и добиваме $a^x = z+1$, т.е. $x = \log_a(1+z)$. Понатаму, кога $x \to 0$, добиваме $z \to 0$, па затоа од решението на задачата под а) следува

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a\,. \ ♦$$

9. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ ВО ТОЧКА И НА МНОЖЕСТВО

9.1. При разгледувањето на граница на функција $f : A \to \mathbf{R}$, кога $x \to x_0$ можни се два случаја: или $x_0 \in A$ или $x_0 \notin A$. Случајот $x_0 \in A$ е од посебен интерес, бидејќи доведува до важен поим, а тоа е непрекинатост на функција. Пред да поминеме на изучувањето на овој поим, ќе ја разгледаме следната теорема.

Теорема. Нека $f : A \to \mathbf{R}$ и $x_0 \in A$. Тогаш функцијата f има граница во точката x_0 ако и само ако

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Доказ. Нека условот (1) е исполнет. Од дефиницијата на граница на функција следува дека функцијата f има граница во точката x_0 и таа е еднаква на $f(x_0)$.

Обратно, нека функцијата f има граница во точката x_0, еднаква на p, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p$. Тоа значи дека за секоја низа $\{x_n\}$ таква што $x_n \in A$, за секој $n \geq 1$ и $x_n \to x_0, n \to \infty$, важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = p$.

Но, $x_0 \in A$, па затоа последното равенство важи и за низата $\{x_n\}$, $x_n = x_0$, за секој $n \geq 1$, т.е. важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_0) = p$. Но, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0)$, па од последните две равенства следува дека $p = f(x_0)$. Според тоа, за секоја низа $\{x_n\}$ таква, што $x_n \in A$, за секој $n \geq 1$ и $x_n \to x_0, n \to \infty$ важи

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

што значи важи условот (1). ♦

9.2. Дефиниција. Нека $f : A \to \mathbf{R}$ и $f : A \to \mathbf{R}$ и $x_0 \in A$. За функцијата f ќе велиме дека е *непрекината во точката* x_0 ако постои $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

т.е. ако

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Ако функцијата $f : A \to \mathbf{R}$ е непрекината во секоја точка од множеството A, тогаш ќе велиме дека таа е *непрекината на множеството* A.

Ако функцијата f не е непрекината во точката $x_0 \in A$, тогаш ќе велиме дека таа е *прекината во точката* x_0.

9.3. Забелешка. Ако ги искористиме дефинициите на Коши и Хајне за граница на функција во точка, тогаш ги добиваме следниее две дефиниции за непрекинатост на функција во точка, кои се еквивалентни на дефиниција 9.2.

Дефиниција А (Коши). Функцијата f е *непрекината во точката* x_0, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon .$$

Дефиниција Б (Хајне). Функцијата $f : A \to \mathbf{R}$ е *непрекината во точката* x_0, ако за секоја низа $\{x_n\}$ таква што $x_n \in A$, за секој $n \geq 1$ и $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, важи $f(x_n) \to f(x_0), n \to \infty$ т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_0) .$$

9.4. Ако во равенството $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, константата $f(x_0)$ ја префрлиме на левата страна и ја внесиме под знакот за граница и забележиме дека ознаката $x \to x_0$ е еквивалентна со ознаката $x - x_0 \to 0$, добиваме

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0 .$$

Разликата $x - x_0$ ја нарекуваме *нараснување на аргументот* и ја означуваме со Δx, а разликата $f(x) - f(x_0)$ ја нарекуваме *нараснување на функцијата* и ја означуваме со Δy. Според тоа,

$$\Delta x = x - x_0 \, , \ \Delta y = f(x) - f(x_0) \, , \ x, x_0 \in A$$

и при овие ознаки имаме $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, што значи дека непрекинатоста на функцијата означува дека на бесконечно мали нараснувања на аргументот соодветствуваат бесконечно мали нараснувања на функцијата.

9.5. Пример. Функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекината во секоја точка $x_0 \neq 0$.

Навистина, од

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0}$$

при $x_0 \neq 0$ добиваме

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} (x_0+\Delta x)x_0} = -\frac{0}{x_0^2} = 0$$

што значи дека функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекината во точката $x_0 \neq 0$. ♦

10. ЕЛЕМЕНТАРНИ СВОЈСТВА НА НЕПРЕКИНАТИТЕ ФУНКЦИИ

10.1. Теорема. Нека функциите $f: A \to \mathbf{R}$ и $g: A \to \mathbf{R}$ се непрекинати во точката $x_0 \in A$. Тогаш:

1) за секој $C \in \mathbf{R}$ функцијата Cf е непрекината во точката x_0;

2) функцијата $f+g$ е непрекината во точката x_0;

3) функцијата fg е непрекината во точката x_0 и

4) ако $g(x_0) \neq 0$, тогаш функцијата $\frac{f}{g}$ е непрекината во точката x_0.

Доказ. Непосредно следува од својствата на границата на функција во точка и дефиницијата за непрекинатост. ♦

10.2. Пример. а) Ќе докажеме дека секој полином од $n-$*ти степен*

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \ a_i \in \mathbf{R} \text{ и } a_n \neq 0,$$

е непрекинат за секој $x_0 \in \mathbf{R}$.

Навистина, од $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ следува дека полиномите $p(x) = c$ и $q(x) = x$ се непрекината за секој $x_0 \in \mathbf{R}$. Сега тврдењето следува од претходната теорема и принципот на математичка индукција.

б) Ќе докажеме дека секоја рационална $\frac{P(x)}{Q(x)}$, каде P и Q се полиноми е непрекината во секоја точка $x_0 \in \mathbf{R}$ во која $Q(x_0) \neq 0$. Навистина, од претходната теорема и од непрекинатоста на полиномите во секоја точка $x_0 \in \mathbf{R}$, следува дека секоја рационална функција е непрекината во секоја точка $x_0 \in \mathbf{R}$ во која $Q(x_0) \neq 0$. ♦

10.3. Теорема. Нека функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ е непрекината во точката $x_0 \in A$ и $p \in \mathbf{R}$ е таков што $f(x_0) < p$. Тогаш, постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x) < p$.

Доказ. Непосредно следува теоремата за запазување на знакот и дефиницијата за непрекинатост. ♦

10.4. Теорема. Нека $f: A \to \mathbf{R}$ и $g: B \to \mathbf{R}$ се функции такви што $f(A) \subseteq B$. Ако функцијата f е непрекината во точката a и функцијата g е непрекината во точката $b = f(a)$, тогаш композицијата на функциите f и g е непрекината во точката a.

Доказ. Ако $\{x_n\}$ е произволна низа во A таква, што $x_n \to a$. Од непрекинатоста на функцијата f следува дека

$$f(x_n) \to f(a), n \to \infty .$$

Но, функцијата g е непрекината во точката $b = f(a)$, па затоа за низата $\{f(x_n)\}$ важи

$$g(f(x_n)) \to g(f(a)), n \to \infty ,$$

т.е. композицијата на функциите f и g е непрекината во точката a . ♦

10.5. Пример. Ќе докажеме дека тригонометриските функции се непрекинати во секоја точка во која се определени.

Во пример 8.2 докажавме дека $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$, што значи дека функцијата $y = \cos x$ е непрекината во секоја точка $a \in \mathbf{R}$.

Понатаму, ако искористиме дека

$$\sin x = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)$$

и фактот дека функциите

$$f(x) = \tfrac{\pi}{2} - x \text{ и } g(x) = \cos x ,$$

тогаш од теорема 10.4 следува дека

$$\lim_{x\to a} \sin x = \lim_{x\to a} \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos[\lim_{x\to a} (\tfrac{\pi}{2} - x)] = \cos(\tfrac{\pi}{2} - a) = \sin a,$$

што значи функцијата $y = \sin x$ е непрекината во секоја точка $a \in \mathbf{R}$.

Понатаму, бидејќи $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ добиваме

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \sin x}{\lim\limits_{x\to a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a ,$$

за $\cos a \neq 0$, а од $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ добиваме

$$\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \lim_{x\to a} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \cos x}{\lim\limits_{x\to a} \sin x} = \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{ctg} a$$

за $\sin a \neq 0$, што значи дека функциите $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ се непрекинати во секоја точка во која се определени. ♦

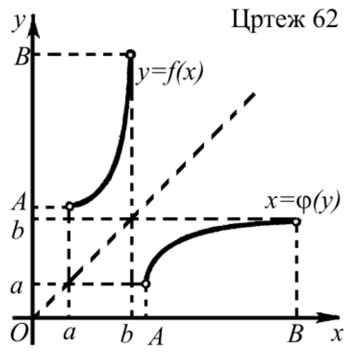
10.6. Во следнава теорема, без доказ ќе ја наведеме теоремата за непрекинатост на инверзната функција.

Теорема. Нека функцијата $y = f(x)$ е определена, непрекината и монотона на интервалот (a,b) и нека интервалот (A,B) е множеството нејзини вредности. Тогаш на множеството (A,B) инверзната функција

$$x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$$

е монотона и непрекината (црт. 62). ♦

Цртеж 62



10.7. Забелешка. Може да се докаже дека експоненцијалната функција $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ е непрекината во секоја точка $x_0 \in \mathbf{R}$. Сега, од монотоноста на функцијата $y = a^x$ следува дека нејзината инверзна функција $y = \log_a x$, $x > 0$ е монотона и непрекината.

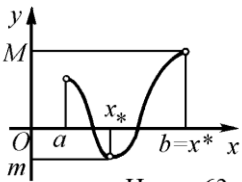
11. СВОЈСТВА НА ФУНКЦИИТЕ НЕПРЕКИНАТИ ЗАТВОРЕН ИНТЕРВАЛ

11.1. Во овој дел ќе неведеме неколку својства на функциите непрекинати на затворен интервал $[a,b]$, каде што $-\infty < a < b < +\infty$.

Теорема (Ваерштрас). Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш таа е ограничена на интервалот $[a,b]$ и ги достигнува својот максимум и минумум на интервалот $[a,b]$, т.е. постои $x_* \in [a,b]$ таква што за секој $x \in [a,b]$ важи $m = f(x_*) \leq f(x)$ и постои $x^* \in [a,b]$ таква што за секој $x \in [a,b]$ важи $M = f(x^*) \geq f(x)$ (црт. 63).

Доказ. Нека претпоставиме дека функцијата f не е ограничена на интервалот $[a,b]$. Тоа значи дека

за секој $n \in \mathbf{N}$ постои $x_n \in [a,b]$ таков што $|f(x_n)| > n$.



Цртеж 63

Од теоремата на Болцано-Ваерштрас (IX 5.11) следува дека ограничената низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ содржи конвергентна подниза $x_{m_k} \to x_0, k \to \infty$. Притоа, од $a \leq x_{m_k} \leq b$, за $k \geq 1$ следува $a \leq x_0 \leq b$. Но, функцијата f е непрекината во точката x_0, па затоа $f(x_{m_k}) \to f(x_0), k \to \infty$, што противречи на

$$|f(x_{m_k})| \geq m_k \to +\infty, k \to \infty.$$

Од добиената противречност следува дека функцијата f е ограничена.

Од претходно изнесеното следува дека множеството $f([a,b])$ е ограничено, па од аксиомата за супремум добиваме дека постои $p \in \mathbf{R}$ таков што $p = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Понатаму, од дефиницијата на супремум добиваме дека за секој $n \geq 1$ постои $x_n \in [a,b]$ таков што $p - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq p$. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, па од теоремата на Боцано-Ваерштрас (IX 5.11) следува дека содржи конвергентна подниза $x_{m_k} \to x^*, k \to \infty$, каде што $x^* \in [a,b]$. Но, функцијата f е непрекината, па затоа $f(x_{m_k}) \to f(x^*), k \to \infty$ и согласно со конструкцијата на низата, добиваме дека

$$p - \frac{1}{m_k} < f(x_{m_k}) \leq p \text{ , за секој } k \geq 1 ,$$

од што следува $f(x_{m_k}) \to p, k \to \infty$, односно

$$f(x^*) = p = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x) .$$

Аналогно се докажува егзистенцијата на точката $x_* \in [a,b]$. ♦

11.2. Пример. Функцијата $f(x) = x^2$ е непрекината на интервалот $[-2,3]$. Таа е ограничена на овој интервал и $|x^2| \leq 9$, за секој $x \in [-2,3]$ и постојат точки $x_* = 0$ и $x^* = 3$ такви што

$$0 = f(0) = \min_{x \in [-2,3]} f(x) \text{ и } 9 = f(3) = \max_{x \in [-2,3]} f(x) . \blacklozenge$$

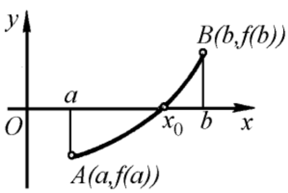
11.3. Забелешка. Непрекинатите функции на отворен интервал можат да бидат неограничени. На пример, функцијата $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ е непрекината на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и таа е неограничена на овој интервал.

Исто така, функцијата функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекината на интервалот $(0,1]$, но таа не е ограничена на овој интервал (зошто?).

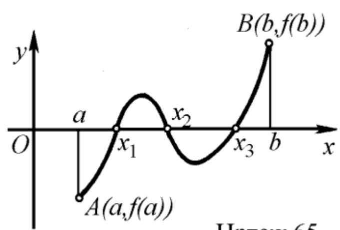
11.4. Следнава теорема е од фундаментални значење за непрекинатите функции, но заради тежината доказот на истата нема да го презентираме.

Теорема (Болцано-Коши). Ако функцијата $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и или $f(a) < 0 < f(b)$ или $f(a) > 0 > f(b)$, тогаш постои $x_0 \in [a,b]$ таква што $f(x_0) = 0$. ♦

11.5. Коментар. Геометриската смисла на оваа теорема е следнава: ако точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ на графикот на функцијата $f(x)$, кои соодветствуваат на интервалот $[a,b]$, лежат на различни страни од $x-$оската (црт. 64), тогаш графикот на непрекинатата функција $f(x)$ ја сече $x-$оската барем во една точка. Јасно, во случајов графикот на функцијата може да ја сече $x-$оската во повеќе од една точка (црт. 65)).



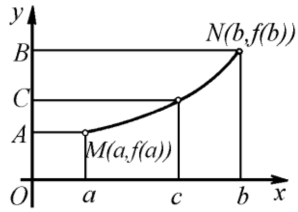
Цртеж 64



Цртеж 65

11.6. Пример. За функцијата $f(x) = x^7 - 3x + 1$ разгледувана на интервалот $[0,1]$ важи $f(0) = 1 > 0$ и $f(1) = -1 < 0$. Според тоа, од теорема 11.4 следува дека постои $x_0 \in [0,1]$ таков што $f(x_0) = 0$, т.е. $x_0^7 - 3x_0 + 1 = 0$. Значи, равенката $x^7 - 3x + 1 = 0$ има најмалку едно решение кое е поголемо од 0 и е помало од 1. ♦

11.7. Последица (Коши). Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш за секој број C од интервалот со краеви $f(a)$ и $f(b)$ постои $c \in [a,b]$ таков што $f(c) = C$ (црт. 66).



Цртеж 66

Доказ. Ако $f(a) < f(b)$, тогаш

$$f(a) \le C \le f(b).$$

Ако $C = f(a)$ или $C = f(b)$, тврдењето е докажано. Нека $f(a) < C < f(b)$. За функцијата $g(x) = f(x) - C$ се исполнети условите од теоремата 11.4, па затоа постои $c \in [a,b]$ таков што $g(c) = 0$, т.е. постои $c \in [a,b]$ таков што $f(x_0) = C$. ♦

12. РАМНОМЕРНА НЕПРЕКИНАТОСТ

12.1. Дефиниција. Нека $A \subseteq \mathbf{R}$ и $f : A \to \mathbf{R}$. За функцијата f ќе велиме дека е *рамномерно непрекината на множеството* A ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секои $x', x'' \in A$ за кои $|x' - x''| < \delta$ важи $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

12.2. Забелешка. Ако функцијата f е рамномерно непрекината на множеството A, тогаш таа е непрекината на A. Обратното тврдење не важи, што може да се види од следниов пример.

12.3. Пример. Нека $A = (0,1]$ и $f(x) = \frac{1}{x}$, за секој $x \in (0,1]$.

Земаме $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогаш, за секој $\delta > 0$ постои $n \ge 1$ таков што $n > \frac{1}{\delta}$. Точките $x' = \frac{1}{n}$ и $x'' = \frac{1}{n+1}$ припаѓаат на интервалот $(0,1]$ и за нив важи

$$|x' - x''| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta.$$

Меѓутоа,

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon,$$

што значи дека функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ не е рамномерно непрекината на множеството $A = (0,1]$. ♦

12.4. Следнава теорема ќе ја прифатиме без доказ, бидејќи истиот излегува надвор од рамките на нашите разгледувања.

Теорема. Нека $A \subseteq \mathbf{R}$ е затворен интервал и f е непрекината на A. Тогаш функцијата f е рамномерно непрекината на A. ♦

12.5. Пример. а) Функцијата $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ е непрекината на затворениот интервал $[-2,2]$ (зошто?), што според теорема 12.4 значи дека таа е рамномерно непрекината на овој интервал. Дали функцијата $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ е рамномерно непрекината на интервалот $[0,4]$? Одговорот да се образложи.

б) Функцијата $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$ е непрекината на секој затворен интервал $[a.b]$ (зошто?), па затоа таа е рамномерно непрекината на интервалот $[a.b]$. ♦

12.6. Во пример 12.3 видовме дека ако множеството A не е затворен интервал, тогаш непрекинатата функција f не мора да биде рамномерно непрекината. Меѓутоа, ако функцијата задоволува дополнителни услови, тогаш таа може да биде рамномерно непрекината, иако множеството A не е затворен интервал, што може да се види од следниве теореми.

Теорема А. Ако функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ на множеството A го задоволува условот: постојат $K, \alpha > 0$ такви, што за секои $x_1, x_2 \in A$ важи

$$| f(x_1) - f(x_2) | \leq K \, | x_1 - x_2 |^{\alpha},$$

тогаш f е рамномерно непрекината на A.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Избираме $\delta = (\frac{\varepsilon}{K})^{\frac{1}{\alpha}}$. За вака избраниот $\delta > 0$ добиваме, дека ако $x_1, x_2 \in A$ се такви што $| x_1 - x_2 | < \delta$, тогаш

$$| f(x_1) - f(x_2) | \leq K \, | x_1 - x_2 |^{\alpha} < K\delta^{\alpha} = K[(\tfrac{\varepsilon}{K})^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha} = \varepsilon,$$

што значи дека функцијата f е рамномерно непрекината на A. ♦

Ако $\alpha = 1$, тогаш условот од претходната теорема во литературата е познат како *Липшицов услов*, а ако $\alpha \neq 1$, тогаш тој е познат како *услов на Холдер од ред* α.

Теорема Б. Нека f е непрекината на $[0,+\infty)$ и нека $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha < +\infty$. Тогаш, f е рамномерно непрекината на $[0,+\infty)$.

Доказ. Од $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha < +\infty$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $C > 0$ таков што за секој $x > C$ важи

$$|f(x)-\alpha|<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Според тоа, за секој $\varepsilon>0$ постои $C>0$ таков што за секои $x,y>C$ важи

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-\alpha|+|f(y)-\alpha|<\varepsilon.$$

За вака определениот $C>0$ да го разгледаме интервалот $[0,2C]$. Според теорема 12.4 функцијата f е рамномерно непрекината на $[0,2C]$, т.е. за даденото $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што за секои $x,y\in[0,2C]$ такви што $|x-y|<\delta$ важи $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\delta<C$. Тогаш, од условот $|x-y|<\delta$ следува дека или $x,y\in[0,2C]$ или $x,y\in[C,+\infty)$, па затоа $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, што значи дека f е рамномерно непрекината на $[0,+\infty)$. ♦

12.7. Дефиниција. Нека $A\subseteq\mathbf{R}$ и $f:A\to\mathbf{R}$. *Модул на непрекинатост на функцијата* f ја нарекуваме функцијата $\delta\to\omega_{f,A}(\delta)$ определена со

$$\omega_{f,A}(\delta)=\sup_{\substack{x',x''\in A\\|x'-x''|<\delta}}|f(x')-f(x'')|.$$

12.8. Забелешка. Очигледно дека $\omega_{f,A}(\delta)\geq 0$, за секоја функција $f:A\to\mathbf{R}$. Понатаму, ако $0<\delta_1<\delta_2$, тогаш

$$\{|f(x')-f(x'')|\mid x',x''\in A,|x'-x''|<\delta_1\}\subseteq\{|f(x')-f(x'')|\mid x',x''\in A,|x'-x''|<\delta_2\}$$

од што следува:

$$\omega_{f,A}(\delta_1)=\sup_{\substack{x',x''\in A\\|x'-x''|<\delta_1}}|f(x')-f(x'')|\leq\sup_{\substack{x',x''\in A\\|x'-x''|<\delta_2}}|f(x')-f(x'')|=\omega_{f,A}(\delta_2)$$

т.е. функцијата $\omega_{f,A}(\delta)$ монотоно не опаѓа.

12.9. Теорема. Нека $A\subseteq\mathbf{R}$ и $f:A\to\mathbf{R}$. Функцијата f е рамномерно непрекината на множеството A ако и само ако $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_{f,A}(\delta)=0$.

Доказ. Нека $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_{f,A}(\delta)=0$. Тогаш, за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta_\varepsilon>0$ таков што ако $0<\delta<\delta_\varepsilon$, тогаш $\omega_{f,A}(\delta)<\varepsilon$. Да земеме произволен од посочените броеви δ. Тогаш, за секои $x',x''\in A$ такви што $|x'-x''|<\delta$ важи

$$|f(x')-f(x'')|\leq\sup_{\substack{x,y\in A\\|x-y|<\delta}}|f(x)-f(x)|=\omega_{f,A}(\delta)<\varepsilon,$$

т.е. функцијата f е рамномерно непрекината на A.

Нека функцијата f е рамномерно непрекината на множеството A. Тогаш, за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta_\varepsilon>0$ таков што ако $x',x''\in A$ и $|x'-x''|<\delta_\varepsilon$, тогаш

$| f(x') - f(x'') | < \frac{\varepsilon}{2}$. Оттука следува дека за секој $\delta < \delta_\varepsilon$ е исполнето неравенството

$$\sup_{\substack{x,y\in A \\ |x-y|<\delta}} | f(x) - f(x) | \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

т.е. ако $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, тогаш $\omega_{f,A}(\delta) < \varepsilon$ што значи $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_{f,A}(\delta) = 0$. ♦

12.10. Пример. а) Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ дефинирана на интервалот $(0,+\infty)$.

Нека $\delta > 0$ и $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ се такви што $| x_1 - x_2 | < \delta$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 > x_2$, т.е. $x_1 = x_2 + \Delta x$, каде што $0 < \Delta x < \delta$. Тогаш, за секој $x_2 > 0$ имаме:

$$| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} | = \sqrt{x_2 + \Delta x} - \sqrt{x_2} < \sqrt{x_2 + \delta} - \sqrt{x_2} = \frac{\delta}{\sqrt{x_2+\delta}+\sqrt{x_2}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}$$

Според тоа, кога $| x_1 - x_2 | < \delta$, тогаш важи $| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} | < \sqrt{\delta}$, што значи

$$\omega_{f,(0,+\infty)} = \sup_{\substack{|x_1-x_2|<\delta \\ x_1,x_2\in(0,+\infty)}} | \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} | < \sqrt{\delta} ,$$

па затоа

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_{f,(0,+\infty)}(\delta) = 0 .$$

Конечно, од теорема 12.9 следува дека функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е рамномерно непрекината на интервалот $(0,+\infty)$.

б) Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ определена на интервалот $(0,+\infty)$.

Нека $\delta > 0$, $x_1 > 0$ и $x_2 = x_1 + \delta$. Тогаш,

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+\delta}} .$$

Од

$$\lim_{x_1\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x_1}} = +\infty, \quad \lim_{x_1\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x_1+\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

добиваме

$$\lim_{x_1\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+\delta}}\right) = +\infty ,$$

па затоа

$$\sup_{x_1>0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+\delta}}\right) = +\infty ,$$

од што следува дека

$$\omega_{f,(0,+\infty)}(\delta) \ge \sup_{x_1>0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+\delta}}\right) = +\infty$$

за секој $\delta > 0$, т.е. $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_{f,(0,+\infty)}(\delta) = +\infty$. Според теорема 12.9 функцијата $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ не е рамномерно непрекината на интервалот $(0,+\infty)$. ♦

13. ТОЧКИ НА ПРЕКИН И НИВНА КЛАСИФИКАЦИЈА

13.1. Во дефиниција 9.2 рековме дека, ако функцијата $f : A \to \mathbf{R}$ не е непрекината во точката $x_0 \in A$, тогаш ќе велиме дека таа е прекината во точката x_0 и во овој случај x_0 ја нарекуваме *точка на прекин* на функцијата f. Во овој дел ќе ги разгледаме точките на прекин на функцијата f и нивната класификација, која е непосредно поврзана со левата и десната граница на функција во точка. Најпрво да забележиме дека, ако во точката x_0 функцијата има конечни лева и десна граница и ако овие граници се еднакви меѓу себе, тогаш функцијата има граница во точката x_0 и притоа важи

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 .$$

Јасно, ако $y_0 = f(x_0)$, тогаш функцијата е непрекината во точката x_0.

Што се однесува до точките на прекин, за истите ја имаме следнава класификација:

- ако $x_0 \notin A$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$, тогаш точката x_0 ја нарекуваме *точка на отстранлив прекин*,
- ако едностраните граници се конечни, меѓутоа
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \ne \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$
тогаш точката x_0 ја нарекуваме *точка на прекин од прв ред*, а бројот $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ го нарекуваме *скок* на функцијата во точката x_0 и
- ако барем една од едностраните граници е еднаква на бесконечност или воопшто не постои, тогаш точката x_0 ја нарекуваме точка на *прекин од втор ред*.

13.2. Пример. Да ја испитаме непрекинатоста на функцијата $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

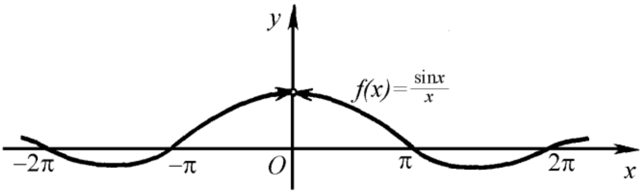
Дефиниционата област на дадената функција е множеството $A = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, па затоа $x_0 = 0$ е точка на прекин за оваа функција. Понатаму, од $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

следува дека $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}$ и како $0\notin A$ заклучуваме дека $x_0=0$ е точка на отстранлив прекин на функцијата $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ (црт. 67).

Функцијата $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ може да ја додефинираме во точката $x_0=0$ така, што таа да биде непрекината на $\mathbf{R}$. Со други зборови, ако ставиме

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

тогаш $f(x)$ ќе биде непрекината во точката $x_0=0$, што значи и на целата реална права. ♦



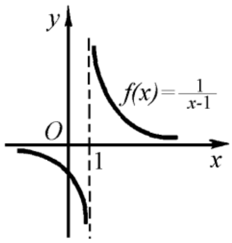
Цртеж 67

13.3. Пример. Да ја испитаме непрекинатоста на функцијата $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

Дефиниционата област на функцијата е множеството $A=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, што значи $x_0=1$ е точка на прекин на $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Понатаму,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty .$$

Значи, точката $x_0=1$ е точка на прекин од втор ред за функцијата $f(x)=\frac{1}{x-1}$, црт. 68. ♦



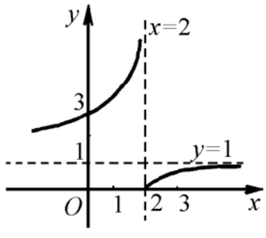
Цртеж 68

13.4. Пример. Од пример 7.12 следува дека точката $x_0=2$ е точка на прекин од прв ред за функцијата (1). Понатаму, за нејзиниот скок во точката $x_0=2$ добиваме

$$f(2^+)-f(2^-)=\lim_{x\to 2^+}f(x)-\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x-\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{4}=2-1=1\,. ♦$$

13.5. Пример. Ќе ја испитаме непрекинатоста на функцијата $f(x)=9^{1/(2-x)}$ во точките $x_1=0$ и $x_2=2$.

Дефиниционата област на дадената функција е $A=\mathbf{R}\setminus\{2\}$. Функцијата $g(t)=9^t$ е непрекината на целата реална права, а функцијата $h(x)=\frac{1}{2-x}$ е непрекината во точката $x_1=0$, па од теорема 10.4 следува дека сложената функција $f(x)=g(h(x)$ е непрекината во точката $x_1=0$, црт. 69.



Цртеж 69

Да ја разгледаме точката $x_2 = 2 \notin A$. Бидејќи функцијата не е определена во точката $x_2 = 2$ заклучуваме дека оваа точка е точкја на прекин. Да го испитаме видот на прекинот. Имаме

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 9^{1/(2-x)} = 9^{+\infty} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 9^{1/(2-x)} = 9^{-\infty} = 0.$$

Бидејќи во точката $x_2 = 2$ едната еднострана граница е еднаква на 0, а другата на $+\infty$ заклучуваме дека $x_2 = 2$ е точка на прекин од втор ред. ♦

ЗАДАЧИ

1. Определи ги дефиниционите области на функциите

   а) $f(x) = \frac{5-x}{x^2-4}$, б) $f(x) = \sqrt{x-5}$, в) $f(x) = \sqrt{3-2x-x^2}$.

2. Дали фунцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

   а) $f(x) = x^3 + 3$, б) $f(x) = \sqrt[5]{x^3+1}$, в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

   има инверзна. Во случај на потврден одговор најди ја инверзната функција на f.

3. Испитај ја парноста на функциите

   а) $f(x) = |x|$, б) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$, в) $f(x) = -x^4 - 3x^3 + x$.

4. Најди ги интервалите на кои функцијата $f(x)$ е монотона (строго монотона):

   а) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, б) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x \in \mathbf{R}$,

   в) $f(x) = |x| - x$, $x \in \mathbf{R}$, г) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$,

   д) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$.

5. Најди ги интервалите на кои функцијата $f(x)$ е монотона (строго монотона):

   а) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$, б) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{+1,-1\}$.

6. Докажи дека функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е ограничена на интервалот $[1,+\infty)$, но не е ограничена на интервалот $(0,1)$.

7. Докажи дека функцијата

   а) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$, б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$

   е ограничена

8. Докажи дека функцијата:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{+1,-1\}$, б) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbf{R}$

в) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$, $x\in\mathbf{R}$, д) $f(x)=\frac{x^{3/2}+5}{x+1}$, $x\geq 0$,

не е ограничена.

9. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x-2$, б) $f(x)=\frac{3}{2}x+3$ и в) $f(x)=-3x+4$.

10. Која од следниве функции монотоно расте, а која монотоно опаѓа:

а) $f(x)=4x-\frac{1}{2}$, б) $f(x)=-5x-2\sqrt{2}$.

Одговорот да се образложи.

11. Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$ ако:

а) $f(2)=3,\ f(-1)=2$, б) $f(-2)=1,\ f(1)=\frac{2}{3}$.

12. Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$ ако:

а) $f(x-1)=4-x$, б) $f(3x+4)=3x-1$.

13. За која вредност на параметарот m функцијата:

а) $f(x)=(2m-3)x^2+mx$, б) $f(x)=(4m-\frac{3}{5})x^2+x-5$.

е квадратна.

14. Одреди ја функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ ако:

а) $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=0$, б) $f(-1)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=0$.

15. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x)=x^2-4x+5$, б) $f(x)=-x^2+6x-5$.

16. Најди ги темето и оската на симетрија на квадратната функција:

а) $f(x)=x^2+x+1$, б) $f(x)=-x^2+2x-2$.

17. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x)=3^x+4$, б) $f(x)=-2^{x+2}+\sqrt{2}$.

18. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y=\log_3 x$, б) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

19. Најди ја дефиниционата област на функцијата

а) $y=\log(3x+4)$, б) $y=\log|x+1|$,

в) $y=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{6}}$, и г) $y=\log(16-x^2)+\frac{1}{1+\cos x}$.

20. Дадена е функцијата $y=\log_{\sqrt{5}}(3x^2-2x)$. Определи ги нулите и дефиниционата област на функцијата. За кои вредности на x вредноста на функцијата е 2 ?

21. Нацртај го графикот на следниве функции и испитај го текот:

а) $y = 3 \sin 2x$; б) $y = 2 \sin \frac{1}{2} \cdot x$;

в) $y = \sin (x - \frac{\pi}{4})$; г) $y = \cos (2x - \frac{\pi}{3})$.

д) $y = \text{ctg}(x + \pi)$; ѓ) $y = \text{ctg} (x - \frac{\pi}{6})$.

е) $y = 2\sin(\frac{4x}{3} + \frac{\pi}{3})$; ж) $y = \frac{1}{3}\sin(2x - 1)$.

з) $y = \frac{3}{2}\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{3}) + 1$; ѕ) $y = \frac{3}{4}\sin(\frac{x}{2} - 2) - 2$.

и) $y = -\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6})$. ј) $y = 2\text{tg} (-2x + \frac{\pi}{4})$;

22. Докажи дека следниве функции се неограничени:

а) $f(x) = x\log(x+5)$, б) $f(x) = x + \cos x$.

23. Докажи дека следниве функции се ограничени:

а) $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{1+x^2})$, б) $f(x) = 3\sin^2 \frac{2x+1}{3}$.

24. Пресметај ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{x^3-3x+1}{x-4} + 1)$, б) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^3+x^2+1}$, в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5x}{2x}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^7-3x^5+x^2}{x^7-4x^2}$, д) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^7-3x^5+x^2}{x^7-4x^2}$.

25. Пресметај ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$, в) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$, д) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{x^2-2x+1}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+2}{x^2-6x+8}$.

26. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{2x^4-3x^2+1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^3}{x^2+1} - x)$, в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x+3x^3}{1-x-2x^3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x + x^2} - x)$, д) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4 + x} - \sqrt{x})$, ѓ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

27. Пресметај ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2-\sqrt{x-4}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$,

г) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, д) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$.

28. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$, б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\text{tg}\, x})$,

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$, д) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(1-x^2)}{1-x}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{\sin x}}$, ж) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$, з) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

29. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x+2})^{2x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-4}{3x+2})^{\frac{x+1}{3}}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-5}{x^2+2})^{3x^2-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$, д) $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(x-1)}$.

30. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$, з) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

31. Докажи дека равенката $e^x-x^2=0$ има барем еден корен поголем од -1, а помал од 0.

32. Докажи дека равенката $e^{\frac{1}{x}}-x=0$ има барем едно позитивно решение.

33. Докажи дека равенката

а) $r^{33}-63,5r+62,5=0$, б) $r^{32}-62,7r+61,7=0$

има барем едно решение поголемо од 1 и помало од 2.

34. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=\frac{x}{x-2}$.

35. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=\frac{x^2+1}{x-3}$.

36. Испитај ја непрекинатоста на функцијата

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in(-\infty,0]\\ x^2+1, & x\in(0,\infty).\end{cases}$$

37. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=e^{\frac{2}{x-1}}$.

38. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x-3}}$.

39. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

XIV ГЛАВА
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ИЗВОД. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1.1. Нека $A \subseteq \mathbf{R}, x_0 \in A$ и постои $\delta > 0$ таков што $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ и $f : A \to \mathbf{R}$. Да ставиме $\Delta x = x - x_0,\ x \in A,\ x \neq x_0,\ \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Притоа $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Дефиниција. Ако постои границата

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

тогаш таа граница ја нарекуваме *прв извод на функцијата* f *во точката* x_0 и ја означуваме со $f'(x_0)$.

Според тоа,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

За првиот извод на функцијата f во точката x_0 најчесто ќе ги користиме ознаките $f'(x_0),\ f'_{x_0}, (f(x_0))',\ \frac{df(x_0)}{dx}$.

Да забележиме дека првиот извод на функцијата може да биде и бесконечен, односно дека во (1) не се исклучени случаите кога

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \ \text{ или } \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

Во натамошните разгледувања под изразот *функцијата има извод* ќе ги подразбираме само конечните изводи, ако не е поинаку кажано.

1.2. Пример. а) Ако $f(x) = c,$ каде c е константа, тогаш

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

што значи $(c)' = 0$

б) За функцијата $f(x) = \sin x$ добиваме

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x,$$

т.е. $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогно, се добива дека $(\cos x)' = -\sin x$.

в) Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Имаме

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} x + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} x + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} x + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}] = nx^{n-1},$$

што значи $(x^n)' = nx^{n-1}$.

г) За функцијата $f(x) = a^x$, $a > 0$ имаме

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

што значи $(a^x)' = a^x \ln a$. За $a = e$ добиваме $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

д) За функцијата $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ имаме

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a},$$

што значи $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. За $a = e$ добиваме $(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$. ♦

1.3. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = |x|$. Оваа функција е непрекината во точката $x_0 = 0$, но нема извод во оваа точка. Навистина, од

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ и}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

следува дека $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ не постои, што според дефиниција 1.1 значи дека функцијата $f(x) = |x|$ нема извод во точката $x_0 = 0$. ♦

1.4. Теорема. Ако функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x_0, тогаш таа е непрекината во оваа точка.

Доказ. Нека $|f'(x_0)| < \infty$. Ставаме

$$\alpha(\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0).$$

Од (1) имаме $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Според тоа

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x .$$

Ако во последното равенство преминеме кон граница кога $\Delta x\to 0$, добиваме

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x_0)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x=0,$$

што значи

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0),$$

т.е. функцијата $y=f(x)$ е непрекината во точката x_0. ♦

1.5. Забелешка. Обратното тврдење на теорема 1.4 не важи, што следува од пример 1.3. Имено, функцијата $f(x)=|x|$ е непрекината во точката $x_0=0$, но како што видовме таа во оваа точка нема извод.

1.6. Дефиниција. Ако за секој $x\in A$ постои $f'(x)$, тогаш функцијата $f':x\mapsto f'(x)$ ја нарекуваме *извод на функцијата* f *на множеството* A. Операцијата на наоѓање на f' често пати се нарекува *диференцирање на функцијата* f.

1.7. Теорема. Нека функциите $f:A\to\mathbf{R}$ и $g:A\to\mathbf{R}$ имаат изводи $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$ во точката x_0, соодветно.

а) Функцијата $f+g$ има извод во точката x_0 и притоа

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0). \tag{2}$$

б) Функцијата fg има извод во точката x_0 и притоа

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0). \tag{3}$$

в) Ако $g(x_0)\neq 0$, тогаш функцијата $\frac{f}{g}$ има извод во точката x_0 и притоа

$$(\tfrac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \tag{4}$$

Доказ. а) Од

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

и од дефиниција 1.1 следува дека $f+g$ има извод во точката x_0 и притоа важи (2).

б) Од

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0),$$

и од дефиницијата на $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, како и од непрекинатоста на функцијата $g(x)$ во точката x_0 следува дека функцијата fg има извод во точката x_0 и притоа важи (3).

в) Од $g(x_0) \neq 0$ и непрекинатоста на функцијата $g(x)$ во точката x_0 следува дека $g(x) \neq 0$ во некој интервал $(x_0 - \delta, x_0 - \delta)$ на точката x_0. Според тоа, за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функцијата $\frac{f}{g}$ е определена и притоа важи

$$\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right] = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

Сега, од дефиницијата на $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, како и од непрекинатоста на функцијата $g(x)$ во точката x_0, следува дека функцијата $\frac{f}{g}$ има извод во точката x_0 и притоа важи (4). ♦

1.8. Последица. Ако функцијата $f(x)$ има извод во точката x_0 и ако $c \in \mathbf{R}$, тогаш функцијата $cf(x)$ има извод во точката x_0 и притоа важи

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0). \tag{4}$$

Доказ. Од равенството (3) и од пример 1.2 а) непосредно следува

$$(cf)'(x_0) = (c)'f(x_0) + cf'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + cf'(x_0) = cf'(x_0).$$ ♦

1.9. Пример. а) За функцијата $y = 4x^3 - 12x^2 + e^x$ имаме

$$y' = (4x^3 - 12x^2 + e^x)' = (4x^3)' - (12x^2)' + (e^x)' = 4 \cdot 3x^{3-2} - 12 \cdot 1x^{1-1} + e^x$$

$$= 12x^2 - 12 + e^x.$$

б) За функцијата $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ имаме

$$y' = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+1)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(1+0)(x^2+1) - (2x+0)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2-2x}{(x^2+1)^2}.$$

в) За функцијата $y = e^x \cos x + 3x^4 \sin x$ имаме

$$y' = (e^x \cos x + 3x^4 \sin x)' = (e^x \cos x) + (3x^4 \sin x)'$$

$$= (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' + 3(x^4)'\sin x + 3x^4(\sin x)'$$

$$= e^x \cos x - e^x \sin x + 12x^3 \sin x + 3x^4 \cos x.$$

г) Нека $y = \operatorname{tg} x$. Ако ја искористиме формулата (3), тогаш за секој $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ добиваме

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = (\tfrac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогно, за секој $x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ добиваме $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. ♦

2. ИЗВОД НА ИНВЕРЗНА, СЛОЖЕНА И ИМПЛИЦИТНА ФУНКЦИЈА

2.1. Теорема. Ако функцијата f е монотона на интервалот $[a,b]$ и во секоја точка од интервалот (a,b) има ненулти извод $y' = f'(x)$, тогаш инверзната функција $x = g(y)$ е диференцијабилна во секоја точка од интервалот $(f(a), f(b))$ и за секој $y \in (f(a), f(b))$ важи

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{1}$$

Доказ. Нека функцијата f е монотона на интервалот $[a,b]$ и во секоја точка од интервалот (a,b) има ненулти извод $y' = f'(x)$. Понатаму, нека $f(a) = c$ и $f(b) = d$. Тогаш функцијата $y = f(x)$ има инверзна функција $x = g(y)$ која е непрекината и монотона на $[c,d]$ и која е определена со $x = g(y)$ ако и само ако $y = f(x)$.

Да земеме фиксирана вредност на аргументот y на инверзната функција и нека $\Delta y \neq 0$. Но инверзната функција е монотона, па затоа и $\Delta x \neq 0$, од што следува

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}. \ ♦$$

2.1. Пример. Докажи дека $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Земаме $(a,b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, за $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Притоа важи $(c,d) = \mathbf{R}$, $\operatorname{tg} x$ е монотона на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$, за секој $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Затоа за $y \in \mathbf{R}$, $x = \operatorname{arctg} y$ и за инверзната функција

$$g(y) = \operatorname{arctg} y, \ y \in \mathbf{R}$$

важи

$$(\operatorname{arctg} y)' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}. \ ♦$$

2.3. Забелешка. Аналогно, се докажува дека

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \text{ за секој } x \in \mathbf{R},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ за секој } x \in (-1,1), \text{ и}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ за секој } x \in (-1,1).$$

2.4. Теорема. Нека функцијата $f : A \to \mathbf{R}$ има извод $f'(x_0)$ во точката $x_0 \in A$ и функцијата $g : B \to \mathbf{R}$, $B \supset \{ f(x) \mid x \in A\}$ има извод $g'(y_0)$ во точката $y_0 = f(x_0)$. Тогаш, функцијата $g \circ f : A \to \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ има извод во точката x_0 и притоа важи

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0). \tag{2}$$

Доказ. Земаме $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, т.е.

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y = y_0 + \Delta y$$

и како f е непрекината имаме $\Delta y \to 0$ кога $\Delta x \to 0$. Понатаму, имаме

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0+\Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0),\end{aligned}$$

што значи дека изводот на функцијата $g \circ f$ постои и притоа важи равенството (2). ♦

2.5. Пример. а) Во пример 1.2 в) го определивме изводот на функцијата $f(x) = x^n, n \in \mathbf{N}$. Овде, користејќи ја претходната теорема, ќе го определиме изводот на функцијата $f(x) = x^\alpha,\ x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}$. Ако го искористиме равенството $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, добиваме

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \tfrac{\alpha}{x} = \alpha x^\alpha \cdot \tfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Така, за $y = \frac{1}{x}$ добиваме

$$y' = (\tfrac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = \tfrac{-1}{x^2},$$

а за $y = \sqrt{x}$ имаме

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \tfrac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Да забележиме дека во случај кога функцијата $f(x) = x^\alpha$ е определена при $x < 0$, тогаш $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

б) За функцијата $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$ ќе пресметаме $0{,}001 f'(0{,}01)$. Имаме

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x} = 1 - 2x^{-1/2} + x^{-1},$$

па затоа

$$f'(x)=(1-2x^{-1/2}+x^{-1})'=-2(-\tfrac{1}{2})x^{-3/2}+(-1)x^{-2}=\tfrac{1}{\sqrt{x^3}}-\tfrac{1}{x^2}\,.$$

Според тоа,

$$f'(0,01)=\frac{1}{\sqrt{0{,}01^3}}-\frac{1}{0{,}01^2}=1000-1000=-9000\,,$$

па затоа

$$0,001f'(0,01)=0,001\cdot(-9000)=-9\,.$$

в) Да ја разгледаме функцијата $y=u^v$, каде $u=u(x)>0$, $v=v(x)$. Аналогно на примерот под а) дадената функција можеме да ја запишеме во видот $y=e^{v\ln u}$. Сега, повторно од теорема 4 следува

$$y'=(e^{v\ln u})'=e^{v\ln u}(v\ln u)'=e^{v\ln u}(v'\ln u+v\tfrac{1}{u}u')=u^v v'\ln u+vu'u^{v-1}\,. \qquad (3)$$

Така, на пример, за функцијата $y=x^x$, $x>0$ имаме $u(x)=v(x)=x$ и бидејќи $u'(x)=v'(x)=1$, со замена во формулата (3) наоѓаме $y=x^x(\ln x+1)$.

г) За функцијата $y=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|$, $x\neq\pm a$ имаме

$$y'=\tfrac{1}{2a}\tfrac{x+a}{x-a}(\tfrac{x-a}{x+a})'=\tfrac{1}{2a}\tfrac{x+a}{x-a}\tfrac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2}=\tfrac{1}{x^2-a^2}\,.$$

Слично, за функцијата $y=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$ важи $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ (провери!). ♦

2.6. Забелешка. Ја логаритмираме функцијата $y=u^v$, каде $u=u(x)>0$, $v=v(x)$ и добиваме нејзино претставување $\ln y=v\ln u$. Од последното равенство добиваме $(\ln y)'=(v\ln u)'$, што значи

$$\frac{y'}{y}=v'\ln u+\frac{v}{u}u'\,,\text{ т.е. } y'=y(v'\ln u+\frac{v}{u}u')\,.$$

Ако во последната формула ставиме $y=u^v$ по средувањето ја добиваме формулата (3). Оваа постапка е позната како *логаритамско диференцирање* и неа ќе ја илустрираме на следниов пример.

2.7. Пример. Да ја разгледаме функцијата $y=(x^2+1)^{\sin x}$. Бидејќи $x^2+1>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ можеме да логаритмираме. Притоа добиваме

$$\ln y=\sin x\ln(x^2+1)\,,$$

од што следува

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\,,$$

односно

$$y' = (x^2+1)^{\sin x}[\cos x \ln(x^2+1) + \frac{2x\sin x}{x^2+1}]. \ \blacklozenge$$

2.8. Пример. Најди y' ако

а) $y = (x^2+3)^{25}$, б) $y = (1-2\sqrt{x})^4$, в) $y = (\frac{x+1}{x-1})^5$,

г) $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$, д) $y = \ln(1+x^2)$, ѓ) $y = e^{-x^2}$.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} y' &= [(x^2+3)^{25}]' = 25(x^2+3)^{25-1}\cdot(x^2+3)' \\ &= 25(x^2+3)^{24}\cdot(2x+0) = 50x(x^2+3)^{24}. \end{aligned}$$

б) Имаме

$$y' = [(1-2\sqrt{x})^4]' = 4(1-2\sqrt{x})^{4-1}(1-2\sqrt{x})' = 4(1-2\sqrt{x})^3(0-2\frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{-4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}.$$

в) Имаме

$$y' = [(\tfrac{x+1}{x-1})^5]' = 5(\tfrac{x+1}{x-1})^4(\tfrac{x+1}{x-1})' = 5(\tfrac{x+1}{x-1})^4\frac{(x+1)'(x-1)-(x-1)'(x+1)}{(x-1)^2} = 5(\tfrac{x+1}{x-1})^4\frac{-2}{(x-1)^2}.$$

г) Имаме

$$y' = (\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}})' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}}(\frac{x^2-1}{x^2+1})' = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

д) Имаме

$$y' = [\ln(1+x^2)]' = \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

ѓ) Имаме

$$y' = (e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}. \ \blacklozenge$$

2.9. Лема. Нека функцијата $y = y(x)$ е параметарски зададена со формулите $x = x(t),\ y = y(t)$. Ако функциите $x = x(t),\ y = y(t)$ имаат во точката t_0 изводи и ако $x'(t_0) \neq 0$, тогаш параметарски зададената функција $y = y(t(x))$, исто така, има извод во точката $x_0 = x(t_0)$ и притоа важи

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{4}$$

Доказ. Според теорема 2.4 за сложената функција $y = y(t(x))$, ако ги испуштиме аргументите, имаме $y'_x = y'_t t'_x$. Но, од теоремата за извод на инверзна функција добиваме $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. Сега формулата (4) следува од последните две равенства. ♦

2.10. Пример. а) За параметарски зададената функција $x=3t$, $y=6t-t^2$ имаме

$$x_t^{'}=3,\ y_t^{'}=6-2t,$$

па затоа

$$y_x^{'}=\frac{y_t^{'}}{x_t^{'}}=\frac{6-2t}{3}.$$

б) Ако $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\quad 0<t<\frac{\pi}{2}$, тогаш од

$$x_t^{'}=-a\sin t,\ \ y_t^{'}=b\cos t,$$

според формулата (3), добиваме

$$y_x^{'}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,\quad 0<t<\frac{\pi}{2}.\ \blacklozenge$$

2.11. Дефиниција. Ако функцијата $y:[a,b]\to \mathbf{R}$, $y=f(x)$ е зададена со равенката $F(x,y)=0$, тогаш ќе велиме дека таа е *имплицитно* зададена.

2.12. Нека со равенката $F(x,y)=0$ имплицитно е зададена функција $y=y(x)$ и да претпоставиме дека функцијата y е диференцијабилна. Ако во равенката $F(x,y)=0$ замениме $y=y(x)$ добиваме дека $F(x,y(x))=0$, за секој $x\in[a,b]$. Последното равенство го диференцираме по x, при што сметаме дека y е функција од x и добиваме нова равенка по x,y и y'. Оваа равенка ја решаваме по y' и го наоѓаме изводот на функција $y=f(x)$.

2.12. Пример. Најди го изводот на функцијата $y=f(x)$ која е имплицитно зададена со равенката

$$x^2+3xy+y^2+1=0.$$

Решение. Диференцираме по x, при што сметаме дека y е функција од x и добиваме

$$(x^2+3xy+y^2+1)'=0',$$

т.е.

$$2x+3y+3xy'+2yy'=0,$$

од каде наоѓаме

$$y'(3x+2y)=-(2x+3y),$$

т.е.

$$y'=-\frac{2x+3y}{3x+2y}.\ \blacklozenge$$

3. ИЗВОДИ ОД ПОВИСОК РЕД

3.1. Дефиниција. Нека функцијата $y = f(x)$ е определена на интервалот (a,b), во секоја точка $x \in (a,b)$ има извод $f'(x)$ и нека $x_0 \in (a,b)$. Ако во точката x_0 постои изводот на функцијата $f'(x)$, тогаш него го нарекуваме *втор извод* на функцијата f во точката x_0 и го означуваме со $f''(x_0)$ или со $f^{(2)}(x_0)$.

Аналогно, ако постои изводот $f^{(n-1)}(x),\ n = 1,2,3,\dots$, тогаш *$n-$от извод* $f^{(n)}(x)$, доколку постои, го дефинираме со равенството

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Притоа имаме $f^{(0)}(x) = f(x)$ и $f^{(1)}(x) = f'(x)$.

3.2. Пример. а) Ако $y = x^n$, тогаш

$$y' = nx^{n-1},\ y'' = (y')' = (nx^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2}, \dots,$$
$$y^{(n)} = n!,\ y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \dots = 0.$$

б) Ако $y = a^x,\ a > 0,$ тогаш

$$y' = a^x \ln a,\ y'' = (a^x \ln a)' = a^x \ln^2 a, \dots,\ y^{(n)} = a^x \ln^n a,$$

за секој природен број n. Јасно, ако $a = e$, тогаш $(e^x)^{(n)} = e^x$, за секој природен број n.

в) Ако $y = xe^x$, тогаш $y' = (xe^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x = (x+1)e^x$, па за вториот извод добиваме

$$y'' = (y')' = [(x+1)e^x]' = (1+0)e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x.$$

г) Ако $y = x \ln x$, тогаш $y' = (x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$, па за вториот извод добиваме

$$y'' = (y')' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

Третиот извод на оваа функција е

$$y''' = (y'')' = (\tfrac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}. \ ♦$$

3.3. Теорема. Ако за параметарски зададената функција $x = x(t)$, $y = y(t)$ постојат $x''_{tt}(t_0)$ и $y''_{tt}(t_0)$ и $x'_t(t_0) \neq 0$, тогаш постои и $y''_{xx}(x_0)$, каде $x_0 = x(t_0)$, и притоа важи

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}. \tag{1}$$

Доказ. Со непосредни пресметувања добиваме

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}. \ \blacklozenge$$

3.4. Пример. За параметарски зададената функција

$$y = 3t - t^3,\ x = 3t^2$$

имаме

$$y'_t = 3 - 3t^2,\ y''_{tt} = -6t,\ x'_t = 6t,\ x''_{ty} = 6$$

и ако замениме во формулата (1) за вториот извод по x добиваме

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t} = \frac{-6t\cdot 6t - 6(3-3t^2)}{(6t)^3} = \frac{-6(6t^2+3-3t^2)}{216t^3} = -\frac{3t^2+3}{36t^3} = -\frac{t^2+1}{12t^3}. \ \blacklozenge$$

4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ НА ФУНКЦИЈА

4.1. Нека претпоставиме дека функцијата f е диференцијабилна во точката x, т.е. дека постои

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

и $|f'(x)| < \infty$. Ставаме

$$\alpha(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x).$$

Од (1) имаме $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Според тоа

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Оттука, ако $f'(x) \neq 0$, тогаш

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)}\right) = 1$$

од што следува дека кога $\Delta x \to 0$ важи приближното равенство

$$\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Величината $f'(x)\Delta x$ ја нарекуваме *прв диференцијал* на функцијата f и ја означуваме со $df(x)$. Според тоа, по дефиниција

$$df(x) = f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

Во случајот, ако $y = x$, тогаш $y' = 1$ и затоа $dx = dy = \Delta x$, т.е. првиот диференцијал и нараснувањето на независно променливата се еднакви, па затоа првиот диференцијал на функцијата може да се запише во видот

$$df(x) = f'(x)dx.$$

4.2. Пример. а) Првиот диференцијал на функцијата $f(x) = x^3$ е

$$df(x) = f'(x)dx = 3x^2 dx.$$

б) Првиот диференцијал на функцијата $f(x) = e^x$ е

$$df(x) = f'(x)dx = e^x dx. \blacklozenge$$

4.3. Диференцијалот на функцијата може да се искористи за приближно пресметување на вредности на функцијата. Навистина, ако во $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$ замениме $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ го добиваме приближното равенство

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx. \tag{3}$$

Пример. Приближно ќе го пресметаме $\sqrt{10}$. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \sqrt{x}$. Земаме $x = 9,\ dx = 1$ и како $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ користејќи ја формулата (3) наоѓаме

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 1 = 3 + \frac{1}{6} \approx 3{,}166(6),$$

додека $\sqrt{10} = 3{,}1662276601\ldots$. $\blacklozenge$

4.4. Како што видовме првиот диференцијал на функцијата $y = f(x)$ зависи само од x и Δx, при што Δx не зависи од x, бидејќи нараснувањето во дадена точка x можеме да го избереме независно од точката x. Според тоа, dx во формулата $dy = f'(x)dx$ е константа, па затоа изразот $f'(x)dx$ зависи само од x и истиот можеме да го диференцираме по x.

Диференцијалот од првиот диференцијал на функцијата $y = f(x)$ во дадена точка x го нарекуваме *диференцијал од втор ред* или *втор диференцијал* и истиот го означуваме со $d^2 y$ или $d^2 f(x)$. Според тоа,

$$d^2 y \overset{\text{def}}{=} d(dy).$$

Воопшто земено, *диференцијал од* $n-$*ти ред* или $n-$*ти диференцијал* на функцијата $y = f(x)$ се определува како прв диференцијал од диференцијалот од $(n-1)-$ви ред, т.е.

$$d^n y \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1} y).$$

Ќе го определиме изразот за вториот диференцијал на функцијата $y = f(x)$. Имаме

$$d^2 y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = [f''(x)dx]dx = f''(x)dx^2.$$

Слично, користејќи го принципот на математичка индукција се докажува дека

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Оттука следува, дека изводот од $n-$ред е количник на диференцијалот од $n-$ред и $n-$от степен на диференцијалот на независно променливата, т.е. $f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}$.

5. ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ

5.1. Теорема (Ферма). Нека

$$f:(a,b)\to\mathbf{R},\ x_0\in(a,b),\ f(x_0)=\max_{x\in(a,b)} f(x) \text{ или } f(x_0)=\min_{x\in(a,b)} f(x).$$

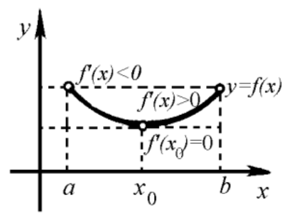
Ако во точката x_0 постои $f'(x_0)$, тогаш $f'(x_0)=0$ (црт. 1).

Доказ. Нека $f(x_0)=\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Според тоа, за секој $x\in(a,b)$ важи $f(x)\le f(x_0)$. Тогаш, ако $x<x_0$ имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0, \qquad (1)$$

а ако $x>x_0$, имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (2)$$



Цртеж 1

Ако во точката x_0 постои изводот $f'(x_0)$, т.е. ако постои конечната граница

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

тогаш преминувајќи кон граница во неравенството (1), кога $x\to x_0^-$, добиваме $f'(x_0)\ge 0$. Аналогно, преминувајќи кон граница во неравенството (2), кога $x\to x_0^+$, добиваме $f'(x_0)\le 0$. Од последните две неравенства следува $f'(x_0)=0$.

Ако $f(x_0)=\min\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, тогаш ставаме $g(x)=-f(x)$ и добиваме

$$g(x_0)=-f(x_0)=-\min_{x\in(a,b)} f(x)=\max_{x\in(a,b)}(-f(x))=\max_{x\in(a,b)} g(x).$$

Според тоа, $g'(x_0)=0$, т.е. $f'(x_0)=0$. ♦

5.2. Теорема (Рол). Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$ и $f(a)=f(b)$, тогаш постои барем една точка $\xi\in(a,b)$ таква што $f'(\xi)=0$.

Доказ. Од теоремата на Ваерштрас следува дека функција непрекината на интервал ги достигнува својот максимум и својот минимум во некои точки на тој интервал. Нека $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, тогаш за секој $x\in[a,b]$ се исполнети неравенствата $m \le f(x) \le M$.

Ако $m = M$, тогаш функцијата е константна, па значи $f' \equiv 0$ на (a,b) и во својство на точката ξ може да се земе која било точка од интервалот (a,b). Ако пак $m \ne M$, тоа значи дека барем една од вредностите m и M не се достигнува на краевите на интервалот $[a,b]$. Да претпоставиме дека тоа е вредноста m и нека точката $\xi\in(a,b)$ е таква, што $f(\xi) = m$. Јасно, во точката ξ функцијата f го достигнува својот минимум и на интервалот (a,b), па затоа од теоремата на Ферма следува дека $f'(\xi) = 0$. ♦

5.3. Коментар. Сите услови од теоремата на Рол се суштествени. На црт. 5 се дадени графиците на три функции, определени на интервалот $[-1,1]$, за кои одделно не е исполнет само еден од трите услови на теоремата на Рол и затоа не постои точка $\xi\in(-1,1)$ таква, што $f'(\xi) = 0$. На пример, за функцијата на црт. 2 а) точката $x_0 = 1$ е точка на

Цртеж 2

прекин, а за функцијата $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (црт. 2 b)) имаме: f е непрекината на интервалот $[-1,1]$, $f(1) = 1 = f(-1)$, меѓутоа, не постои точка $\xi\in(-1,1)$ таква што $f'(\xi) = 0$, бидејќи $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \ne 0$. Овде уште да напоменеме дека иако во точката $x_0 = 0$ оваа функција достигнува минимум, сепак не важи теоремата на Рол, за што причина е непостоењето на $f'(0)$.

5.4. Пример. а) Функцијата $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x^2$ е непрекината на интервалот $[-1,1]$ и притоа важи $f(1) = f(-1)$. Меѓутоа, $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 2x$, што значи дека првиот извод не постои во точката $x = 0$, па затоа не може да се примени теоремата на Рол.

б) Функцијата $f(x) = (x+3)(x+2)(x-1)$ е непрекината на интервалот $[-3,1]$ и има извод на интервалот $(-3,1)$. Од теоремата на Рол следува дека постои $\xi\in(-3,1)$ таков, што $f'(\xi) = 0$. Понатаму,

$$f'(x) = [(x+3)(x+2)(x-1)]' = (x+2)(x-1) + (x+3)(x-1) + (x+3)(x+2)$$
$$= 3x^2 + 8x + 1$$

и од $f'(x) = 0$ наоѓаме

$$x_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{64-12}}{6} = \frac{-4\pm\sqrt{13}}{3},$$

што значи дека постојат две точки кои за разгледуваната функција ја задоволуваат теоремата на Рол. ♦

5.5. Теорема (Лагранж). Ако функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$, тогаш, постои точка $\xi\in(a,b)$ таква што

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{3}$$

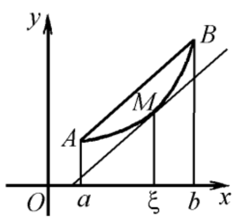
Доказ. Да ја разгледаме помошната функција

$$F(x)=f(x)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x. \tag{4}$$

За функцијата F се исполнети сите услови од теоремата на Рол. Навистина, таа е непрекината на интервалот $[a,b]$, како разлика на непрекинати функции на $[a,b]$, за секој $x\in(a,b)$ постои $F'(x)$ и од равенството (4) следува

$$F(a)=f(a)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\tfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(b)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b=F(b).$$

Затоа постои барем една точка $\xi\in(a,b)$ таква, што $F'(\xi)=0$, т.е. постои барем една точка $\xi\in(a,b)$ таква, што важи равенството $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ кое е еквивалентно на равенството (3). ♦



Цртеж 3

5.6. Коментар. Геометриската интерпретација на теоремата на Лагранж е во тоа што на лакот со крајни точки $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$ постои точка $M(\xi,f(\xi))$ во која тангентата е паралелена со тетивата AB (црт. 3) . Навистина, согласно со теоремата на Лагранж имаме

$$f'(\xi)=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{5}$$

каде $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ е коефициентот на правецот на тетивата AB, а $f'(\xi)$ е коефициентот на правецот на тангентата во точката $M(\xi,f(\xi))$. Сега тврдењето следува од равенството (5).

5.7. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на интервалот $[\frac{1}{2},2]$. На разгледуваниот интервал функцијата f е непрекината и за секој $x\in(\frac{1}{2},2)$ постои $f'(x)$. Ќе ја определиме константата ξ во теоремата на Лагранж. Имаме $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$ и како $b=2, a=\frac{1}{2}$, $f(b)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ и $f(a)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1/2}=\frac{5}{2}$ со замена во (3) добиваме

$$\frac{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{2-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{\xi^2},$$

од што следува $\xi^2=1$ т.е. $\xi=\pm1$. Но, $1-\notin[\frac{1}{2},2]$, па затоа $\xi=1$. ♦

5.8. Пример. Докажи дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $e^x \geq 1+x$, при што знакот за равенство важи ако и само ако $x=0$.

Решение. Нека $x>0$. Сега од теоремата на Лагранж за функцијата $f(u)=e^u$, $u \in [0,x]$ следува дека постои $\xi \in (0,x)$ таков, што

$$e^x - e^0 = e^\xi (x-0) > x,$$

бидејќи $e^\xi > 1$. Значи, за $x>0$ важи

$$e^x > 1+x.$$

Нека $x<0$. Сега од теоремата на Лагранж за функцијата $f(u)=e^u$, $u \in [x,0]$ следува дека постои $\xi \in (x,0)$ таков што

$$e^0 - e^x = e^\xi (x-0) < -x,$$

бидејќи $e^\xi < 1$ и $-x>0$. Значи, за $x<0$ важи

$$e^x > 1+x.$$

Според тоа, при $x \neq 0$ важи $e^x > 1+x$, а за $x=0$ имаме $e^0 = 1 = 1+0$, т.е. важи знакот за равенство. ♦

5.9. Теорема (Коши). Нека функциите f и g се непрекинати на $[a,b]$, f и g се диференцијабилни во (a,b) и $g'(x) \neq 0$, за секој $x \in (a,b)$. Тогаш, постои точка ξ, $\xi \in (a,b)$ таква, што

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{7}$$

Доказ. Најпрво да забележиме дека формулата (7) има смисла. Имено, ако $g(b)=g(a)$, тогаш функцијата g ги задоволува условите од теоремата на Рол, па значи ќе постои точка $\xi, \xi \in (a,b)$ таква, што $g'(\xi)=0$, што противречи на условот. Да ја разгледаме помошната функција

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Лесно се гледа дека $F(a)=F(b)$, што значи дека функцијата F ги задоволува условите од теоремата на Рол, па затоа постои $\xi \in (a,b)$ таков што $F'(\xi)=0$, односно постои $\xi \in (a,b)$ таков што е исполнето равенството

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$$

кое е еквивалентно со равенството (7). ♦

6. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

6.1. Теорема (Лопиталово правило). Ако функциите f и g ги задоволуваат условите:

а) тие се дефинирани и диференцијабилни на интервалот (a,b), освен можда во точката c, при што $g(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$ за секој $x\in(a,b)$,

б) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$ и

в) постои границата $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$,

тогаш постои и границата $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ и притоа важи

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A. \tag{1}$$

Доказ. Ќе го докажеме случајот кога $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$. Ги додефинираме функциите f и g ставајќи $f(c)=g(c)=0$ и да разгледаме интервал $[c,x]$, каде $c<x<b$. Јасно функциите f и g на овој интервал се непрекинати и диференцијабилни и на (c,x) важи $g'(x)\neq 0$, па затоа од теоремата на Коши следува дека постои $\xi\in(c,x)$ таков што $\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Но, $f(c)=g(c)=0$, што значи дека $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Ако во последното равенство земеме граница кога $x\to c$, тогаш и $\xi\to c$, па затоа

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A. \ \blacklozenge$$

6.2. Коментар. Смислата на последната теорема е во определувањето на граници на неопределени изрази од видот $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty$. Лопиталовото правило е точно и кога $c=\infty$, но доказот во овој случај нема да го презентираме. Да забележиме дека, ако изводите $f'(x)$ и $g'(x)$ ги задоволуваат истите услови како и функциите $f(x)$ и $g(x)$, а $\lim\limits_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ постои, тогаш применувајќи го Лопиталовото правило наоѓаме

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Да разгледаме неколку примери.

6.3. Пример. а) Ќе ја пресметаме границата $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. Имаме

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\left(\frac{0}{0}=?\right)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(x^3+3x^2+2x)'}{(x^2-x-6)'}=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+6x+2}{2x-1}=\frac{12-12+2}{-5-1}=-\frac{1}{3}.$$

б) Ќе ја пресметаме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$. Имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=(\tfrac{0}{0}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=(\tfrac{0}{0}=?)$$

$$\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.$$

в) Ќе ја пресметаме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}$. Имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}=(\tfrac{\infty}{\infty}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln 5x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\sin x=1\cdot 0=0\,.$$

г) Ќе ја пресметаме границата $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x})$. Имаме

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-\tfrac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=(\tfrac{0}{0}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=(\tfrac{0}{0}=?)$$

$$\overset{\text{l.p.}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{(x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

д) Ќе ја пресметаме границата $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$. Имаме

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=(0\cdot\infty=?)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=(\tfrac{\infty}{\infty}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0\,.\ \blacklozenge$$

7. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

7.1. Нека $n\in\mathbf{N}$ и $a_i\in\mathbf{R},\ i=0,1,2,...,n$. Ќе докажеме дека за секоја точка $x_0\in\mathbf{R}$ полиномот

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,\qquad x\in\mathbf{R}$$

може да се претстави во видот

$$P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+b_3(x-x_0)^3+...+b_n(x-x_0)^n,\quad x\in\mathbf{R}\qquad(1)$$

каде $b_i\in\mathbf{R},\ i=0,1,2,...,n$. Овие броеви можат да се определат на следниов начин: ако во равенството (1) ставиме $x=x_0$, добиваме $b_0=P(x_0)$. Го диференцираме равенството (1) и наоѓаме

$$P'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+...+nb_n(x-x_0)^{n-1},\quad x\in\mathbf{R}\,.\qquad(2)$$

Ако во (2) ставиме $x=x_0$, добиваме $b_1=P'(x_0)$. Понатаму, од (2) добиваме

$$P''(x)=2\cdot1\cdot b_2+3\cdot2b_3(x-x_0)+...+n(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2},\ \ x\in\mathbf{R}. \qquad (3)$$

Ако во (3) ставиме $x=x_0$, добиваме

$$b_2=\frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Продолжувајќи ја постапката, наоѓаме

$$b_m=\frac{P^{(m)}(x_0)}{m!},\ \text{за}\ m=3,4,...,n.$$

Според тоа,

$$P(x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \ x\in\mathbf{R}. \quad (4)$$

Оваа формула, која ја нарекуваме *Тејлорова формула за полиноми,* е интересна бидејќи полиномот $P(x)$ на $\mathbf{R}$ наполно е определен ако се знае вредноста на полиномот и на неговите изводи во некоја точка x_0.

7.2. Кога се работи за функција, која не е полином, формулата (4) не е точна. Сепак ако се ограничиме на вредности x кои се блиски до точката x_0, тогаш при определени услови може да се тврди дека аналоген израз на десната страна на (4) е многу близок до самата функција. За таа цел ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Нека $n\in\mathbf{N}$. Ако за функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ постои $f^{(n+1)}(x)$, за секој $x\in(a,b)$ и $x_0\in(a,b)$, тогаш за секој $x\in(a,b)$ постои $\theta,\ 0<\theta<1$ таков што

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x), \qquad (5)$$

каде

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (6)$$

Формулата (9) е *Тејлорова формула со остаточен член на Лагранж,* (6).

Доказ. Јасно, формулата (5) важи за $x=x_0$. Нека $x\neq x_0$. Да ја разгледаме функцијата

$$u(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-...-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n-\frac{L}{(n+1)!}(x-z)^{n+1},\qquad L\in\mathbf{R},$$

каде z се менува во интервалот со крајни точки x и x_0. Согласно со условите на теоремата, функцијата $u(z)$ е непрекината и има извод во точките на разгледуваниот интервал. Освен тоа, $u(x)=0$. Сега константата L ќе ја избереме така, што $u(x_0)=0$. Од теоремата на Рол следува дека постои $\theta,\ 0<\theta<1$ таков што $u'(x_0+\theta(x-x_0))=0$. Бидејќи

$$u'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n+\frac{L}{n!}(x-z)^n,$$

од последното равенство наоѓаме $L = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$. Јасно, при овој избор на константата L важи $u(x_0) = 0$, т.е. важи Тејлоровата формула (5), каде остаточниот член е даден со формулата (6). ♦

7.3. Забелешка. Полиномот $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ во Тејлоровата формула (5) го нарекуваме *Тејлоров полином.* Ако $x_0 = 0$, тогаш Тејлоровата формула ја нарекуваме *Маклоренова,* која е дадена со

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \tag{7}$$

каде остаточниот член во облик на Лагранж е

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \ \ 0 < \theta < 1.$$

7.4. Пример. Да ја разложиме функцијата $f(x) = \frac{1}{1-x}$ според Маклореновата формула. Да забележиме дека

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad |x| < 1.$$

Ако ставиме

$$r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

добиваме

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + r_n(x), \qquad |x| < 1 \tag{8}$$

и бидејќи

$$\lim_{x \to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

добиваме дека претставувањето (8) е Маклореновото разложување на функцијата $f(x) = \frac{1}{1-x}$. ♦

7.5. Пример. Бидејќи за функцијата $f(x) = e^x$ важи $(e^x)^{(n)} = e^x$, добиваме $f^{(n)}(0) = 1, \ n = 1, 2, \ldots$, па затоа

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \qquad x \to 0, \tag{9}$$

каде

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \ \ 0 < \theta < 1.$$

Ако во формулата (9), x го замениме со $-x$, добиваме

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \qquad x \to 0. \ ♦ \tag{10}$$

7.6. Пример. Функцијата $f(x)=\sin x$ има изводи од произволен ред. За оваа функција ќе ја најдеме Маклореновата формула со остаточен член во облик на Лагранж. Имаме,

$f(x)=\sin x$ $\qquad$ $f(0)=0$

$f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$f''(x)=-\sin x=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$ $\qquad$ $f''(0)=\sin\frac{2\pi}{2}=0$

$f'''(x)=-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$ $\qquad$ $f'''(x)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$

.... $\qquad$ ....

$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $\qquad$ па затоа $\qquad$ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

$f^{(n+1)}(x)=\sin(x+\frac{(n+1)\pi}{2})$ $\qquad$ $f^{(n+1)}(\theta x)=\sin(\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2}),\ 0<\theta<1$

и ако се искористи формулата (11), добиваме

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{x^n}{n!}\sin(x+\frac{n\pi}{2})+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2}),\ 0<\theta<1\,.\ \blacklozenge \quad (11)$$

7.7. Пример. Аналогно како во пример 7.6 се докажува дека за функцијата $f(x)=\cos x$ важи

$$(\cos x)^{(k)}=\cos(x+\frac{k\pi}{2}),\qquad k=1,2,...,$$

па затоа

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2}),\ 0<\theta<1\,.\ \blacklozenge \quad (12)$$

7.8. Забелешка. Тејлоровата формула може да се искористи за приближно пресметување на ведности на функции. Имено, ако е позната вредноста на функцијата во точката x_0, тогаш за пресметување на вредноста на функцијата во точки блиски до точката x_0 ја користиме Тејлоровата формула (5) при што грешката ја наоѓаме со формулата

$$|r_n(x)|=|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}|,\quad x_0<\xi<x$$

7.9. Пример. Да се пресмета $\sqrt{e}$ со точност до 10^{-4}.

Решение. Во пример 7.5 видовме дека Маклореновата формула за функцијата $f(x)=e^x$ со остаточен член во форма на Лагранж е дадена со (9), па затоа

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!},$$

при што грешката е дадена со

$$|r_n|=|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}|,\ 0<\theta<1\,.$$

Ако во (1) ставиме $x=\frac{1}{2}$, добиваме

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \ldots + \frac{1}{2^n n!}. \tag{13}$$

каде $r_n = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Од $0 < \theta < 1$ и $2 < e < 3$ следува $e^{\frac{\theta}{2}} < 2$, па затоа $r_n < \dfrac{1}{2^n(n+1)!}$. Треба да го определиме n така што $r_n < 10^{-4}$. Ако $n = 3$, тогаш $r_3 < \frac{1}{192}$. Ако $n = 4$, тогаш $r_4 < \frac{1}{1920}$, а ако $n = 5$, тогаш $r_5 < \frac{1}{23040} < 10^{-4}$. Според тоа, за да го определиме $\sqrt{e}$ со точност до 10^{-4}, доволно е во (13) да ги земеме првите шест собирци. Притоа добиваме

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 4!} + \frac{1}{2^5 5!} = 1,648697917. \ \blacklozenge$$

7.10. Забелешка. Остаточниот член во Тејлоровата формула може да се запише и во *форма на Коши*, т.е. во видот

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}.$$

8. МОНОТОНОСТ И ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМИ НА ФУНКЦИЈА

8.1. Теорема. Нека $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ и за секој $x \in (a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f монотоно расте на (a,b) ако и само ако

$$f'(x) \geq 0, \text{ за секој } x \in (a,b). \tag{1}$$

Доказ. Нека претпоставиме дека условот (1) е исполнет и нека $a < x' < x'' < b$. Ако ја примениме теоремата на Лагранж за функцијата f на интервалот $[x', x'']$ добиваме дека постои $c \in (x', x'')$ таков што

$$f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x') \geq 0$$

од што следува $f(x'') \geq f(x')$. Сега тврдењето следува од произволноста на точките x' и x''.

Нека претпоставиме дека функцијата f монотоно расте на (a,b). Тогаш,

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

бидејќи $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$. ♦

8.2. Пример. а) За функцијата $f(x) = x - \sin x$ имаме $f'(x) = 1 - \cos x$ и како $|\cos x| \leq 1$, за секој реален број x добиваме дека $f'(x) \geq 0$ за секој реален број x. Сега, од теорема 8.1 следува дека оваа функција монотоно расте на целата реална права.

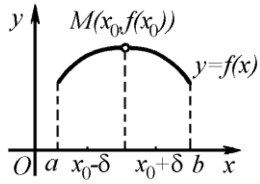
б) За функцијата $f(x) = xe^{-x}$ имаме $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

Бидејќи $e^{-x} > 0$, за секој реален број x, од $x > 1$ следува $f'(x) < 0$ што значи дека функцијата $f(x) = xe^{-x}$ монотоно опаѓа на интервалот $(1, +\infty)$, а од $x < 1$ следува $f'(x) > 0$ што значи дека функцијата $f(x) = xe^{-x}$ моното расте на интервалот $(-\infty, 1)$. ♦

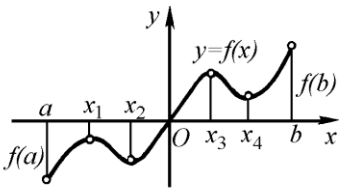
8.2. Дефиниција. Нека функцијата f е определена во некој интервал кој ја содржи точката x_0. Тогаш x_0 ја нарекуваме *точка на локален максимум (локален минимум)* ако постои $\delta > 0$ таков што

$$f(x) \leq f(x_0),\ (\ f(x) \geq f(x_0)\ )$$

за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, црт. 4 и црт. 5.



Цртеж 4



Цртеж 5

Ако постои $\delta > 0$ таков што

$$f(x) < f(x_0),\ (\ f(x) > f(x_0)\ ),$$

за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, тогаш за точката x_0 ќе велиме дека е *точка на строг локален максимум (строг локален минимум).*

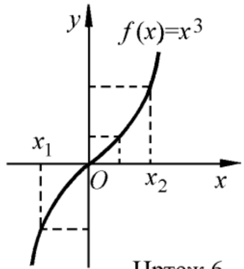
Точките на локален максимум (строг локален максимум) и на минимум (строг локален минимум) ги нарекуваме *точки на локален (строг локален) екстрем.*

8.3. Теорема (потребен услов за локален екстрем). Нека точката x_0 е точка на екстрем на функцијата f, определена во некој интервал кој ја содржи точката x_0. Ако изводот на функцијата f во точката x_0 постои, тогаш $f'(x_0) = 0$.

Доказ. Нека x_0 е точка на локален максимум. Тогаш, постои $\delta > 0$ таков што $f(x) \leq f(x_0)$, за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Според тоа, за функцијата f на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се исполнети условите од теоремата на Ферма, па затоа $f'(x_0) = 0$. ♦

8.4. Забелешка. а) Условот $f'(x_0) = 0$ не е доволен услов за да x_0 е точка на локален екстрем, т.е. од $f'(x_0) = 0$ не следува дека x_0 мора да биде точка на локален екстрем. Навистина, за функцијата $f(x) = x^3$ (црт. 6), во точката $x_0 = 0$ важи $f'(x_0) = 0$, но оваа точка не е точка на локален екстрем, бидејќи за секој $\delta > 0$ интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \equiv (-\delta, \delta)$ содржи точка $x_1 < 0$ и точка $x_2 > 0$ во кои

$$f(x_1) = x_1^3 < 0 \text{ и } f(x_2) = x_2^3 > 0 .$$



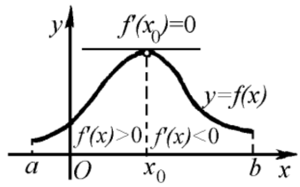
Цртеж 6

8.5. Во следнава теорема ќе дадеме доволен услов за локален екстрем, т.е. услов кој кога е исполнет, функцијата мора да има локален екстрем во дадената точка. За таа цел прво ќе го воведеме поимот стационарна (критична) точка.

Дефиниција. Точките, во кои изводот на функцијата f е еднаков на нула, ги нарекуваме *критични (стационарни)* точки за функцијата f .

8.6. Теорема (прв доволен услов за локален екстрем). Нека x_0 е критична точка на непрекинатата функција f . Ако f' при преминот низ точката x_0 го менува знакот од + во –, тогаш x_0 е точка на локален максимум за функцијата f , а ако f' при преминот низ точката x_0 го менува знакот од – во +, тогаш x_0 е точка на локален минимум за функцијата f . Ако f' при преминот низ точката x_0 не го менува знакот, тогаш x_0 не е точка на локален екстрем.

Доказ. Нека f' при преминот низ точката x_0 не го менува знакот, тогаш таа е монотона, па затоа x_0 не е точка на локален екстрем.



Цртеж 7

Нека x_0 е стационарна точка и нека $f'(x) > 0$, за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0]$ и $f'(x) < 0$, за секој $x \in [x_0, x_0 + \delta)$, црт. 7. Тогаш од $f'(x) > 0$, за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0]$ следува дека $f(x_0) > f(x)$, а од $f'(x) < 0$, за секој $x \in [x_0, x_0 + \delta)$ следува дека $f(x_0) > f(x)$. Според тоа, за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x_0) \geq f(x)$, што значи дека x_0 е точка на локален максимум за функцијата f .

Аналогно се разгледува случајот на локален минимум. ♦

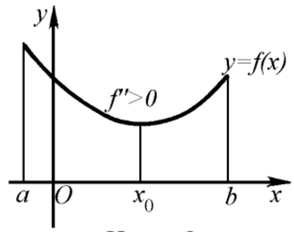
8.7. Теорема (втор доволен услов за локален екстрем). Стационарната точка x_0 на функцијата $f(x)$, кој има непрекинат втор извод на некој интервал кој ја содржи точката x_0, е точка на локален минимум на $f(x)$, ако $f''(x_0) > 0$ (црт. 8), а точка на локален максимум ако $f''(x_0) < 0$ (црт. 9).

Доказ. Од Тејлоровата формула имаме

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 ,$$

каде $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, и како $f'(x_0) = 0$ добиваме

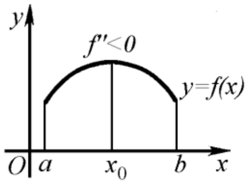
$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$



Цртеж 8

каде $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$. Понатаму, бидејќи ξ се наоѓа меѓу x_0 и x, добиваме дека $\xi \to x_0$ кога $x \to x_0$. Но, тогаш од непрекинатоста на вториот извод следува дека $\lim\limits_{x \to x_0} f''(\xi) = f''(x_0)$, па затоа $f''(\xi) = f''(x_0) + \alpha$ и $\alpha \to 0$, кога $x \to x_0$. Според тоа,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0) + \alpha}{2!}(x - x_0)^2, \ \alpha \to 0 \text{, кога } x \to x_0. \qquad (2)$$



Цртеж 9

Од досега изнесеното следува, дека

$$\lim_{x \to x_0} [f''(x_0) + \alpha] = f''(x_0) \neq 0.$$

Од теоремата за запазување на знакот следува дека постои $\delta > 0$, таков што на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ величините $f''(x_0) + \alpha$ и $f''(x_0)$ имаат ист знак. Затоа, ако $f''(x_0) < 0$, тогаш од (2) следува дека на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е.

$$f(x) < f(x_0)$$

што значи дека функцијата има локален максимум. Ако $f''(x_0) > 0$, тогаш од (2) следува дека на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е.

$$f(x) > f(x_0)$$

што значи дека функцијата има локален минимум. ♦

8.8. Забелешка. Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, тогаш не можеме да кажеме дали функцијата $f(x)$ има екстрем во точката x_0, што може да се види ако ги разгледаме функциите $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^4$.

Навистина, за функцијата $f(x) = x^3$ имаме $f(x) = x^3$ и $f(x) = x^3$, па затоа во точката $x_0 = 0$ важи $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$. Меѓутоа, како што видовме претходната забелешка таа во точката $x_0 = 0$ нема локален екстрем Од друга страна за функцијата $g(x) = x^4$ имаме $g'(x) = 4x^3$ и $g''(x) = 12x^2$, па во точката $x_0 = 0$ важи $g'(x_0) = 0$ и $g''(x_0) = 0$. Меѓутоа, во точката $x_0 = 0$ има локален минимум, што лесно може да се заклучи од фактот дека $g(x_0) = 0$ и $g(x) = x^4 > 0$ за $x \neq 0$.

8.9. Пример. Ќе ги определиме екстремните вредности на функцијата

$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2 .$$

а) Го наоѓаме првиот извод на функција $f'(x)=4x^3-12x^2+8x$ и ја решаваме равенката

$$f'(x)=4x^3-12x^3+8x=0 ,$$

со што ги наоѓаме стационарните точки. Последната равенка е еквивалентна на равенката $4x(x^2-3x+2)=0$ од каде наоѓаме $x_1=0$ и $x^2-3x+2=0$. Решенија на квадратната равенка се $x_2=1$ и $x_3=2$, што значи дека $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=2$ се стационарни точки на функцијата.

б) Го наоѓаме вториот извод на функцијата и го испитуваме неговиот знак во стационарните точки. Имаме $f''(x)=12x^2-24x+8$, па затоа

- од $f''(x_1)=f''(0)=8>0$ следува дека во $x_1=0$ функцијата има минимум, кој е еднаков на $f(0)=0^4-4\cdot 0^3+4\cdot 0^2=0$,
- од $f''(x_2)=f''(1)=-4<0$ следува дека во $x_2=1$ функцијата има максимум, кој е еднаков на $f(1)=1^4-4\cdot 1^3+4\cdot 1^2=1$ и
- од $f''(x_2)=f''(2)=8>0$ следува дека во $x_2=2$ функцијата има максимум, кој е еднаков на $f(2)=2^4-4\cdot 2^3+4\cdot 2^2=0$. ♦

8.10. Теорема (трет доволен услов за локален екстрем). Нека функцијата $f(x)$ е $n-$пати диференцијабилна во точката x_0 и нека

$$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0 ,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 .$$

Тогаш:

1) ако n е парен број и $f^{(n)}(x_0)<0$, тогаш x_0 е точка на локален максимум,
2) ако n е парен број и $f^{(n)}(x_0)>0$, тогаш x_0 е точка на локален минимум,
3) ако n е непарен број, тогаш x_0 не е точка на локален екстрем. ♦

8.11. Пример. Ќе ги определиме локалните екстреми на функцијата

$$f(x)=x^4-4x^3 .$$

Имаме,

$$f'(x)=4x^3-12x^2,\ f''(x)=12x^2-24x,\ f'''(x)=24x-24 .$$

Од $f'(x)=0$ добиваме дека $x_{1,2}=0$ и $x_3=3$ се стационарни точки на функцијата f. Понатаму, бидејќи $f''(3)=36>0$ заклучуваме дека $x_3=3$ е точка на локален минимум, а како $f''(0)=0$, наоѓаме $f'''(0)=-24<0$, па од теорема 8.10 следува дека $x_{1,2}=0$ не е точка на локален екстрем на функцијата $f(x)$. ♦

9. КОНВЕКСНИ ФУНКЦИИ

9.1. Дефиниција. За функцијата f ќе велиме дека е *конвексна* на интервалот (a,b) ако за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$ и за секој $\alpha \in [0,1]$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

За функцијата f ќе велиме дека е *конкавна* на (a,b) ако функцијата $-f$ е конвексна на (a,b).

9.2. Дефиниција. Функцијата f ја нарекуваме *строго конвексна* на (a,b) ако за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \ne x_2$ и за секој $\alpha \in (0,1)$ важи

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функцијата f ја нарекуваме *строго конкавна* на (a,b) ако функцијата $-f$ е строго конвексна на (a,b).

9.3. Пример. Ќе докажеме дека функцијата $f(x) = x^2$ е строго конвексна на $(-\infty, +\infty)$. Навистина, ако $x_1 \ne x_2$ и $\alpha \in (0,1)$, тогаш

$$\begin{aligned}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 &= \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 \\ &< \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) + (1-\alpha)^2 x_2^2 = \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2\end{aligned}$$

што значи дека функцијата $f(x) = x^2$ е строго конвексна на $(-\infty, +\infty)$. Притоа го искористивме неравенството $2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2$. ♦

9.4. Забелешка. Претходниот пример покажува дека постапката на непосредна проверка на конвексноста е доста сложена дури и кај наједноставните функции. Се поставува прашање, дали постои поедноставен начин да се провери конвексноста на една функција, користејќи ги на пример непрекинатоста, диференцијабилноста и слично. Во оваа точка подетално ќе се задржиме на претходните прашања, но прво ќе разгледаме неколку основни својства на конвексните функции.

9.5. Лема. Нека функциите f и g се конвексни на (a,b). Тогаш функцијата $c_1 f + c_2 g$, каде $c_1, c_2 > 0$ е конвексна на (a,b),

Доказ. Нека $x_1, x_2 \in (a,b)$ и $\lambda, \mu \in [0,1]$ се такви, што $\lambda + \mu = 1$. Тогаш, за секои $c_1, c_2 > 0$ добиваме

$$\begin{aligned}(c_1 f + c_2 g)(\lambda x_1 + \mu x_2) &= c_1 f(\lambda x_1 + \mu x_2) + c_2 g(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ &\le c_1 \lambda f(x_1) + c_1 \mu f(x_2) + c_2 \lambda g(x_1) + c_2 \mu g(x_2) \\ &= \lambda(c_1 f(x_1) + c_2 g(x_1)) + \mu(c_1 f(x_2) + c_2 g(x_2)) \\ &= \lambda(c_1 f + c_2 g)(x_1) + \mu(c_1 f + c_2 g)(x_2)\end{aligned}$$

што значи дека функцијата $c_1 f + c_2 g,$ каде $c_1, c_2 > 0$, е конвексна на (a,b). ♦

9.6. Лема. Конвексната функција $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $f \not\equiv \text{const}$ не достигнува максимумот во точка $x_0 \in (a,b)$.

Доказ. Нека претпоставиме дека функцијата f го достигнува својот максимум во точката $x_0 \in (a,b)$. Бидејќи $f \not\equiv \text{const}$, постои интервал $(x_1, x_2) \subseteq (a,b)$ таков што $x_0 \in (x_1, x_2)$ и на еден од неговите краеви вредноста на функцијата f е строго помала од нејзината вредност во точката x_0. Нека, на пример, $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) \le f(x_0)$. Понатаму, од $x_0 \in (x_1, x_2)$ следува дека постои $\alpha \in (0,1)$ таков што $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Ако последните две неравенства ги помножиме со α и $1-\alpha$, соодветно и ги собереме, добиваме

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) < f(x_0) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2),$$

што противречи на конвексноста на функцијата f. ♦

9.7. Последица. Конкавната функција $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $f \not\equiv \text{const}$ не достигнува минимумот во точка $x_0 \in (a,b)$.

Доказ. Непосредно следува од лема 9.6 и дефиниција 9.1. ♦

9.8. Теорема. Ако функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е конвексна (конкавна) и ограничена, тогаш таа е непрекината на (a,b).

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога функцијата е конвексна. Бидејќи f е ограничена, постои $M>0$ таков што $|f(x)| \le M$, за секој $x \in (a,b)$. Нека $x_0 \in (a,b)$ и нека $h>0$ е таков што $x_0 \pm h \in (a,b)$. Од конвексноста на f следува неравенството

$$2f(x_0) \le f(x_0 - h) + f(x_0 + h)$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$f(x_0) - f(x_0 - h) \le f(x_0 + h) - f(x_0). \tag{1}$$

Ако $x_0 \pm (k+1)h \in (a,b)$, за $k = 1,2,...,n-1$, тогаш од неравенството (1) го добиваме системот неравенства

$$\begin{aligned} f(x_0 - kh) - f(x_0 - (k+1)h) &\le f(x_0 + h) - f(x_0) \\ &\le f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh), \end{aligned} \tag{2}$$

за $k = 0,1,2,...,n-1$. Со собирање на неравенствата (2) го добиваме неравенството

$$\tfrac{f(x_0) - f(x_0 - nh)}{n} \le f(x_0 + h) - f(x_0) \le \tfrac{f(x_0 + nh) - f(x_0)}{n},$$

од кое, ако се има предвид ограниченоста на функцијата f, добиваме

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \le \tfrac{2M}{n}. \tag{3}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш го определуваме природниот број $n = [\frac{2M}{\varepsilon}] + 1$ и земаме $\delta = \min\{\frac{b-x_0}{n}, \frac{x_0-a}{n}\}$. Конечно, од (3) следува дека за вака најденото $\delta > 0$ важи

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon \text{, кога } | x - x_0 | < \delta ,$$

т.е. функцијата f е непрекината во произволната точка $x_0 \in (a,b)$. ♦

9.9. Теорема. Функцијата $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ е конвексна (строго конвексна) ако и само ако за секоја точка $x_0 \in (a,b)$ функцијата

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$$

монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b).

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога f е строго конвексна. Нека $a < x_0 < x_1 < x_2 < b$. Ставаме

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}, \quad 1 - \alpha = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} .$$

Тогаш $\alpha \in (0,1)$ и $x_1 = \alpha x_0 + (1-\alpha) x_2$. Сега тврдењето во овој случај следува од еквивалентноста на следнава низа равенства:

$$f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_2) < \alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_2)$$

$$f(x_1) < \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2)$$

$$(x_2 - x_0) f(x_1) < (x_2 - x_1) f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_2)$$

$$(x_2 - x_0)[f(x_1) - f(x_0)] < (x_1 - x_0)[f(x_2) - f(x_0)]$$

$$g(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = g(x_2) .$$

Доказите кога $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ и $a < x_1 < x_2 < x_0 < b$ се аналогни.

За конвексна функција во еквивалентните неравенства знакот "$<$" го заменуваме со знакот "$\leq$". ♦

9.10. Теорема. Нека $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ и за секој $x \in (a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f е конвексна (строго конвексна) на (a,b) ако и само ако функцијата f' монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b).

Доказ. Нека f е конвексна на (a,b) и $a < x_1 < x_2 < b$. Според теорема 9.9 за точките $a < u < x_1 < x_2 < v < b$, имаме

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2} ,$$

од што следува

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) .$$

Нека f' монотоно расте на (a,b) и нека за $x_0 \in (a,b)$ ја разгледаме функцијата

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad x \in (a,b) \setminus \{x_0\}.$$

Од теоремата на Лагранж следува дека постои точка c меѓу x и x_0 таква што

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Сега имаме

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2} = \frac{f'(x)-f'(c)}{x-x_0} \geq 0, \ x \in (a,b) \setminus \{x_0\},$$

т.е. функцијата $g(x)$ монотоно расте на интервалите (a, x_0) и (x_0, b), па од теорема 9.9 следува дека функцијата f е конвексна на (a,b). ♦

9.11. Теорема. Нека $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ и за секој $x \in (a,b)$ постои $f''(x)$.

Функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако за секој $x \in (a,b)$ важи $f''(x) \geq 0$.

Функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$ и не постои интервал $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ таков што за секој $x \in (\alpha, \beta)$ важи $f''(x) = 0$.

Доказ. Според теорема 9.10 функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако f' монотоно расте на (a,b). Но, f' монотоно расте на (a,b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$.

Според теорема 9.10, функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако f' строго монотоно расте на (a,b). Но, f' строго монотоно расте на (a,b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$ и не постои интервал $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ таков, што за секој $x \in (\alpha, \beta)$ важи $f''(x) = 0$. ♦

9.12. На крајот од оваа точка ќе го докажеме неравенството на Јенсен кое има важна улога при докажувањето на бројни неравенства, односно при користењето на конвексните функции.

Теорема (неравенство на Јенсен). Ако f е конвексна функција на (a,b), тогаш за секој $n \geq 2$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ и за секои $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1]$ такви што $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n). \qquad (1)$$

Ако функцијата f е строго конвексна, тогаш во (1) важи знак за строго неравенство при што броевите $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ не се сите меѓусебно еднакви, а броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ се позитивни.

Доказ. За $n = 2$ неравенството (1) се совпаѓа со неравенството од дефиницијата на конвексна функција.

Нека претпоставиме дека неравенството (1) е точно за произволен избор на $n-1$ точка од интервалот (a,b) и за $n-1$ ненегативни броеви чиј збир е еднаков на еден. Нека $n \geq 3$ и нека се дадени $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$. Од броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, најмалку еден е различен од 1. Без ограничување на општоста, можеме да земеме дека $\alpha_1 < 1$. Тогаш, од индуктивната претпоставка, имаме

$$\begin{aligned} f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) &= f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k) \\ &\leq \alpha_1 f\left(x_1\right) + (1-\alpha_1) f(\sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k) \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) \sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} f(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k). \end{aligned}$$

Според тоа, неравенството (1) важи и за n точки, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n. ♦

9.13. Пример. За функцијата $f(x) = -\ln x$, на интервалот $(0,+\infty)$ имаме $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, што значи дека таа е строго конвексна на интервалот $(0,+\infty)$. Затоа, согласно со неравенството на Јенсен, за $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$ и за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,+\infty)$ важи

$$-\ln(\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n} x_k) \leq -\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n} \ln x_k \text{, т.е. } \ln(\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n} x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n} \ln x_k$$

од што по средувањето добиваме $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$.

Ова, всушност, е уште еден доказ на неравенството на Коши меѓу аритметичката и геометриската средина. ♦

9.14. Пример. Докажете дека ако $x_i \in (0, \frac{\pi}{2}),$ за $i = 1, 2, ..., n,$ тогаш

$$\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n} \leq \sin \tfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \qquad (1)$$

Решение. За функцијата $f(x) = -\ln \sin x$, дефинирана на интервалот $(0, \frac{\pi}{2}),$ важи

$$f'(x) = -\operatorname{ctg} x \text{ и } f''(x) = \tfrac{1}{\sin^2 x} > 0,$$

за секој $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Значи, функцијата f е строго конвексна на $(0, \frac{\pi}{2})$.

Земаме, $x_i \in (0, \frac{\pi}{2})$, за $i = 1, 2, ..., n$ и $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, од неравенството на Јенсен, имаме:

$$-\ln\sin\frac{x_1+...+x_n}{n} = f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) \le \frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}$$
$$= -\frac{\ln\sin x_1+...+\ln\sin x_n}{n} = -\ln\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n}.$$

Според тоа,

$$\ln\sin\frac{x_1+...+x_n}{n} \ge \ln\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n}$$

и бидејќи функцијата $\ln$ монотоно расте, добиваме дека важи неравенството (1). ♦

10. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА

10.1. Дефиниција. Ако е зададена фамилија прави чии равенки се

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \qquad (1)$$

каде t е параметар и ако постојат конечните граници

$$\lim_{t\to t_0} a(t) = a_0, \ \lim_{t\to t_0} b(t) = b_0 \text{ и } \lim_{t\to t_0} c(t) = c_0,$$

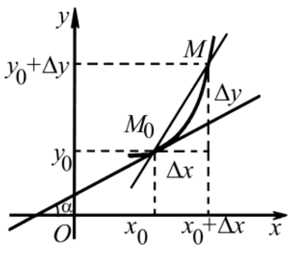
тогаш ќе велиме дека правата (1) *тежи кон гранична права*, кога $t \to t_0$, чија равенка е $a_0x + b_0y + c_0 = 0$.

10.3. Нека функцијата f е определена во некој интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и е непрекината во точката x_0. При ознаки $y_0 = f(x_0)$ и $M_0(x_0, y_0)$ (цртеж десно), да фиксираме произволно нараснување на аргументот Δx, при кое важи

$$x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

и да ставиме

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \ M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$



Дефиниција А. Правата која минува низ точките M и M_0 ја нарекуваме *секанта на графикот на функцијата* f и нејзината равенка гласи

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0). \qquad (2)$$

Очигледно, за секантата (2) нараснувањето Δx е параметар и притоа за да секантата (2) се стреми кон гранична положба, различна од права паралелна со оската Oy, кога $\Delta x \to 0$, потребно и доволно е да постои конечната граница $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, што значи потребно и доволно е во точката x_0 да постои конечен извод.

Дефиниција Б. Равенката на граничната положба на секантатата, која ја нарекуваме *тангента на графикот на функцијата* f во точката M_0, има вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) . \tag{3}$$

Правата која минува низ точката M_0 и е нормална на тангентата во точката M_0 ја нарекуваме *нормала на графикот на функцијата* f во точката M_0. Ако $f'(x_0) \neq 0$, тогаш нејзината равенка е

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) , \tag{4}$$

а ако $f'(x_0) = 0$, тогаш равенката на нормалата во точката M_0 е $x = x_0$.

Овде, да забележиме дека од геометриското значење на коефициентот пред $x - x_0$ во равенката (3) имаме $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, каде α е аголот меѓу тангентата во точката M_0 и позитивниот дел на оската Ox (црт. 5).

10.3. Пример. За функцијата $f(x) = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ состави ги равенките на тангентата и нормалата во точка со апсциса $x_0 = 2a$.

Решение. За $x_0 = 2a$ наоѓаме $f(x_0) = \frac{8a^3}{4a^2+4a^2} = a$, т.е. точката во која минуваат тангентата и нормалата е $M(2a, a)$.

Од друга страна, $f'(x) = (\frac{8a^3}{4a^2+x^2})' = -\frac{16xa^3}{(4a^2+x^2)^2}$, што значи

$$f'(x_0) = -\frac{16 \cdot 2aa^3}{(4a^2+4a^2)^2} = -\frac{1}{2} .$$

Со замена во $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ за равенката на тангентата наоѓаме

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a) .$$

Со замена во $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ за равенката на нормалата наоѓаме

$$y - a = 2(x - 2a) . \ \blacklozenge$$

10.4. Пример. Докажи дека тангентите на кривата $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, повлечени во точки за кои $y_0 = 1$, се сечат во координатниот почеток.

Решение. За $y_0 = 1$ имаме $1 = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, т.е. $x_0 = -1$ и $x_1 = 1$. Од друга страна $y'(x) = \frac{16x}{(3+x^2)^2}$, па затоа $y'(1) = 1$ и $y'(-1) = -1$. Со замена во равенката за тангента $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ за тангентите во точките $M_0(-1,1)$ и $M_1(1,1)$ добиваме $y = -x$ и $y = x$, соодветно. Јасно, овие прави се сечат во координатниот почеток. ♦

11. ПРЕВОЈНИ ТОЧКИ

11.1. Дефиниција. Нека функцијата f е диференцијабилна во точката x_0 и нека $y = L(x)$ е равенката на тангентата на графикот на функцијата f во точката $(x_0, f(x_0))$. Ако разликата $f(x) - L(x)$ го менува знакот при премин низ точката x_0, тогаш x_0 ја нарекуваме *превојна точка на функцијата* f.

11.2 Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^3$. Равенката на тангентата на графикот на функцијата во точката $(0,0)$ е $y = 0$. Затоа, бидејќи за $x < 0$ важи $f(x) < 0$, а за $x > 0$ важи $f(x) > 0$, добиваме дека точката $x_0 = 0$ е превојна точка за функцијата $f(x) = x^3$. ♦

11.3. Теорема. Ако во точката на превој x_0 на функцијата f постои $f''(x_0)$, тогаш $f''(x_0) = 0$.

Доказ. Нека во точката x_0 функцијата f има втор извод и нека $y = L(x)$ е равенката на тангентата на графикот на функцијата f во точката $(x_0, f(x_0))$, т.е.

$$L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогаш,

$$f(x_0) - L(x_0) = 0, \ \ f'(x_0) - L'(x_0) = 0 \ \text{ и } \ f''(x_0) - L''(x_0) = f''(x_0)$$

па од Тејлоровата формула добиваме

$$f(x) - L(x) = \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \qquad x \to x_0.$$

Ако $f''(x_0) \neq 0$, тогаш знакот на $f(x) - L(x)$ во некоја околина на точката x_0 се совпаѓа со знакот на бројот $f''(x_0)$, па затоа точката x_0 не е превојна точка. Според тоа, ако x_0 е превојна точка на функцијата f, тогаш $f''(x_0) = 0$. ♦

11.4. Теорема. Ако $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, тогаш x_0 е превојна точка за функцијата f.

Доказ. Нека $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$. Од Тејлоровата формула добиваме

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3), \qquad x \to x_0.$$

Според тоа,

$$f(x) - L(x) = (x - x_0)^3 [\tfrac{f'''(x_0)}{3!} + \tfrac{o((x - x_0)^3)}{(x - x_0)^3}], \qquad x \to x_0$$

и бидејќи во некоја околина на точката x_0 изразот во заградата во претходното равенство го има истиот знак како и $\tfrac{f'''(x_0)}{3!}$, (зошто?), а множителот $(x - x_0)^3$ при премин низ точката x_0 го менува знакот, заклучуваме дека разликата $f(x) - L(x)$

при премин низ точката x_0 го менува знакот. Според тоа, x_0 е превојна точка за функцијата f . ♦

11.5. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Имаме,

$$f'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2},$$

$$f''(x) = (4x^4 - 10x^2 + 2)e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = (-8x^5 + 36x^3 - 24x)e^{-x^2}.$$

Превојните точки на оваа функција треба да ги бараме како решенија на равенката $f''(x) = 0$. Бидејќи $e^{-x^2} \neq 0$ за секој $x \in \mathbf{R}$, последната равенка е еквивалентна на биквадратната равенка $4x^4 - 10x^2 + 2 = 0$ чии решенија се

$$x_1 = -\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}},\ x_2 = -\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}},\ x_3 = \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}} \text{ и } x_4 = \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}}.$$

Со непосредни пресметувања добиваме дека $f'''(x_i) \neq 0,$ за $i = 1,2,3,4$, што значи дека точките x_i , $i = 1,2,3,4$ се превојни точки за разгледуваната функција. ♦

12. АСИМПТОТИ. КОНСТРУИРАЊЕ ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

12.1. Дефиниција. Нека функцијата f е определена за секој $x > 0$ (соодветно за секој $x < 0$). Ако постои права

$$y = kx + l \tag{1}$$

таква што

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0 \tag{2}$$

(соодветно кога $x \to -\infty$), тогаш оваа права ја нерекуваме *асимптота на функцијата* f кога $x \to +\infty$ (соодветно кога $x \to -\infty$).

12.2. Забелешка. Јасно дека не секоја функција има асимптота. Постоењето асимптота на функцијата f означува дека кога $x \to +\infty$ (или кога $x \to -\infty$) таа се разликува од линеарната функција (1) за произволно мали вредности.

Ќе го објасниме методот за наоѓање на асимптотата (1), при што ќе го разгледаме само случајот кога $x \to +\infty$, бидејќи кога $x \to -\infty$ асимптотата се наоѓа аналогно. Нека графикот на функцијата f има асимптота (1). Бидејќи $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, од условот (2) добиваме

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (kx + l)}{x} = 0 \text{, т.е. } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right) = 0$$

од што следува

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k\ . \qquad (3)$$

Ако k е определено, тогаш вредноста на l ја наоѓаме од условот (2) и добиваме

$$l=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]\,. \qquad (4)$$

Очигледно, точно е и обратното тврдење: ако постојат такви броеви k и l, што се исполнети (3) и (4), тогаш правата (1) е асимптота на функцијата f кога $x\to+\infty$, бидејќи од условот (4) следува условот (2).

Јасно, од единственоста на границата (2), доколку таа постои, следува дека, кога $x\to+\infty$, функцијата f има единствена асимптота.

12.3. Примери. а) Ќе ја определиме асимптотата на функцијата

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}\ .$$

Ако ги искористиме формулите (3) и (4), добиваме

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x+1}{x(x-1)}=1 \text{ и } l=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$$

од што следува дека правата $y=x+2$ е асимптота на разгледуваната функција и кога $x\to+\infty$ и кога $x\to-\infty$.

б) Ќе ја определиме асимптотата на функцијата $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$. Ако ја искористиме формулата (3), добиваме

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x\sqrt{x^2+2}}=0\ .$$

Но, од формулата (4), кога $x\to+\infty$ имаме

$$l=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=1,$$

што значи, кога $x\to+\infty$ правата $y=1$ е асимптота на разгледуваната функција. Ако $x\to-\infty$, тогаш од формулата (4) имаме

$$l=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=-1,$$

што значи, кога $x\to-\infty$ правата $y=-1$ е асимптота на разгледуваната функција. ♦

12.4. Забелешка. Претходниот пример покажува дека функција може да има различни асимптоти кога $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, па затоа неопходно е при испитувањето на функциите нив посебно да ги побараме.

12.5. Дефиниција. Нека функцијата f е дефинирана на пресекот на некоја околина на точката a со интервалот $(a,+\infty)$, односно со интервалот $(-\infty,a)$. Ако за функцијата f е исполнет еден од условите

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty, \tag{5}$$

односно

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty, \tag{6}$$

тогаш правата $x=a$ ја нарекуваме *вертикална асимптота* на функцијата f.

12.6. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^{1/x}-x$. Функцијата е определена за секој реален број, освен за $x=0$. Ако ги искористиме формулите (5) и (6), добиваме

$$\lim_{x\to 0^+}[e^{1/x}-x]=+\infty \text{ и } \lim_{x\to 0^-}[e^{1/x}-x]=0,$$

што според дефиниција 12.5 значи дека за разгледуваната функција правата $x=0$ е вертикална асимптота оддесно, а додека одлево таа не е вертикална асимптота. Да забележиме дека

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{e^{1/x}}{x}-1)=-1 \text{ и } \lim_{x\to\pm\infty}[e^{1/x}-x-(-1)x]=1,$$

следува дека правата $y=-x+1$ е асимптота на разгледуваната функција. ♦

12.7. Испитувањето на дадена функција и скицирањето на нејзиниот график со помош на претходно развиениот аналитички апарат во целост може да се постигне со следниве постапки:

а) ја наоѓаме дефиниционата област на функцијата и точките на прекин,

б) ја определуваме парноста и периодичноста на функцијата,

в) ги наоѓаме пресечните точки на кривата со координатните оски (доколку постојат),

г) ги определуваме асимптотите на функцијата,

д) ги наоѓаме локалните екстреми на функцијата,

ѓ) ги наоѓаме интервалите на растење и опаѓање на функцијата,

е) ја испитуваме конвексноста и конкавноста и ги определуваме превојните точки на функцијата и

ж) го скицираме графикот на функцијата.

12.8. Пример. Ќе го испитаме текот на графикот на функцијата $y=f(x)$, каде $f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

а) Дробно рационална функција е дефинирана за сите вредности на аргументот за кои именителот е различен од нула, па затоа треба да е $4(x-1)\neq 0$, т.е.

$x \neq 1$. Според тоа, дефинициoната област е множеството $\mathbf{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, а точката $x = 1$ е точка на прекин.

б) Бидејќи дефинициoната област не е симетрично множество во однос на координатниот почеток функцијата не е парна, не е непарна и не е периодична.

в) За $x = 0$, добиваме $f(x) = -\frac{9}{4}$, а ако ставиме $f(x) = 0$, добиваме $x = 3$. Според тоа, кривата ги сече координатните оски во точките $(0, -\frac{9}{4})$ и $(3, 0)$.

г) Од

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{4x(x-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x} = \frac{1}{4} \quad \text{и}$$

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} [\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{1}{4} x]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4} \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4} \frac{-5x + 9}{x-1} = -\frac{5}{4}$$

следува дека правата $y = \frac{1}{4} x - \frac{5}{4}$ е асимптота на кривата и кога $x \to +\infty$ и кога $x \to -\infty$.

Од $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = +\infty$ и $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = -\infty$ следува дека правата $x = 1$ е вертикална асимптота на кривата, при што одлево функцијата тежи кон $-\infty$, а оддесно кон $+\infty$.

д) За првиот и вториот извод на функцијата имаме

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2} \quad \text{и} \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Решенија на равенката $f'(x) = 0$ се $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$. Од $f''(3) = \frac{1}{4} > 0$ следува дека $(3, 0)$ е точка на локален минимум, а од $f''(-1) = -\frac{1}{4} < 0$ следува дека $(-1, -2)$ е точка на локален максимум.

ѓ) За да ги определиме интервалите на монотоност на функцијата, дефинициoната област ја разбиваме на интервали со најдените екстремни вредности и на овие интервали го испитуваме знакот на првиот извод. Притоа, имаме

интервали	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$\pm f'(x)$	+	-	-	+
монотоно	*расте*	*опаѓа*	*опаѓа*	*расте*

е) Вториот извод на функцијата $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ е различен од нула за секој $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, па затоа кривата нема превојни точки. Од $f''(x) > 0$ за секој $x > 1$ следува дека функцијата е конвексна на интервалот $(1, +\infty)$, а од $f''(x) < 0$ за секој $x < 1$ следува дека функцијата е конкавна на интервалот $x \in (-\infty, 1)$.

ж) На читателот му препуштаме самостојно да го скицира графикот на оваа функција. ♦

ЗАДАЧИ

1. Најди y' ако

а) $y=3x^2-5x+1$, б) $y=5x^4-12x-2003$, в) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$

г) $y=4x^6-2x^5$, д) $y=\frac{x}{e^x+1}$, ѓ) $y=xe^x+3$.

2. Најди y' ако

а) $y=x^2\ln x$, б) $y=\frac{\ln x}{x}$, в) $y=\frac{x+1}{\ln x}$,

г) $y=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$, д) $y=\frac{x^5}{\ln x+x}$, ѓ) $y=x+\frac{\ln x}{x}$.

3. Најди y' ако

а) $y=\sin x+x\cos x$, б) $y=\frac{\sin x}{x+1}$, в) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$,

г) $y=e^x\sin x$, д) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$, ѓ) $y=x\operatorname{tg}x$,

е) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$, ж) $y=x\sin x+\cos x$, ѕ) $y=\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}x}$,

и) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin x+x\cos x}$, ј) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

4. Најди y' ако

а) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, б) $y=\sqrt{x^2+1}$, в) $y=(\frac{x+1}{x^2-1})^5$,

г) $y=(\frac{x+1}{x-1})^{35}$, г) $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, д) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

5. Најди y' ако

а) $y=\ln(x^2-4x)$, б) $y=\ln(1-2x)$, в) $y=\sqrt{\ln x}$.

г) $y=\sqrt{1+e^x}$, д) $y=e^{x^2+2x}$, ѓ) $y=e^{\sqrt{x+1}}$,

е) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$, ж) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, з) $y=\ln(\ln x)$.

6. Најди y' ако

а) $y=\ln\sin x$, б) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$, в) $y=e^{\sin x}$,

г) $y=\sin e^x+\cos e^x$, д) $y=\ln(1-\sin x)$, ѓ) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

7. Најди y' ако $y=f(x)$ е имплицитно зададена функција

а) $x^2+y^2=5$, б) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, в) $y^4-2y^2x-1=0$,

г) $x\ln y-2xy+y^2=4$, д) $x^2y-xy^2=1$, ѓ) $y=e^{x^2+y^2}$.

8. За параметарски зададената функција $y = f(x)$ најди y':

а) $x = t^3 + 1,\ y = t^2$, б) $x = \frac{t+1}{t},\ y = \frac{t-1}{t}$.

9. Со помош на логаритамско диференцирање најди y' ако

а) $y = x^{\ln x}$, б) $y^x = x^y$, в) $y = x^{\frac{1}{x}}$, г) $y = x^{\sin x}$.

10. Најди y'' ако

а) $y = (x^2+1)^3$, б) $y = \sqrt{2x - x^2}$, в) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^9$,

г) $y = \frac{1-x}{1+x^2}$ д) $y = xe^{-x}$, ѓ) $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$,

е) $y = x^2 \ln x$, ж) $y = e^{4x} + 2e^{-x}$, з) $y = (x-2)e^x$.

11. Најди y'' ако

а) $y = \frac{1-\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$, б) $y = xe^{\sin x}$, в) $y = e^x \sin x$,

г) $y = \sqrt{1+\sin x}$, д) $y = \sin^2 x$, ѓ) $y = \sin e^x + \cos e^x$.

12. За параметарски зададената функција $x = 2t + 3t^2,\ y = t^2 + 2t^3$ најди y''_{xx}.

13. За параметарски зададената функција $x = \frac{1+t}{t^2},\ y = \frac{3+4t}{2t^2}$ најди y''_{xx}.

14. а) За функцијата $y = -\frac{1}{x}$ во точката $x = 3$ имаме $dy = 0,01$. Пресметај dx.

б) Пресметај го првиот диференцијал на функцијата $y = x^2 - x - 2$ при промена на независно променливата од 2 на 2,1.

15. Најди dy ако

а) $y = x^2 - 5x + 6$, б) $y = e^x + \ln(x+1)$, в) $y = \frac{x+1}{x^3-1}$.

16. Користејќи го првиот диференцијал приближно пресметај

а) $\ln 1,02$, б) $\sqrt{17}$, в) $e^{0,25}$.

17. Најди $d^2 y$ ако

а) $y = \ln(x^2+1)$, б) $y = e^{\sqrt{x}}$, в) $y = \frac{x+4}{1-x^2}$.

18. Дали може да се примени теоремата на Рол за функцијата:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ на интервалот $[0, \sqrt{3}]$,

б) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на интервалот $[-1,1]$,

в) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ на интервалот $[-1,1]$.

19. Дали може да се примени теоремата на Лагранж за функцијата:

а) $f(x) = \frac{4}{x}$ на интервалот $[-1, 2]$,

б) $f(x) = x^3 - 3x^2$ на интервалот $[1, 4]$.

20. За функцијата f најди ја константата ξ од теоремата на Лагранж:

а) $f(x)=1-x^2$ на интервалот $[0,2]$,

б) $f(x)=\frac{x}{x-4}$ на интервалот $[5,8]$.

21. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-e^{\sin x}}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$, ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$, з) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$.

22. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{2}{x})$.

23. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}+1}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{e^{2x}}$.

24. По Маклоренова формула разложи ја функцијата $f(x)=\ln(1+x)$.

25. По Маклоренова формула разложи ја функцијата $f(x)=e^{-x^2}$.

26. По Тејлорова формула разложи ја функцијата $f(x)=\ln x$.

27. Користејќи ја Маклореновата формула приближно пресметај $e^{0,1}$ со точност 10^{-3}.

28. Користејќи ја Тејлоровата или Маклореновата формула приближно пресметај:

а) $\sqrt[3]{29}$ со точност до 10^{-3} и

б) $\sin 12^0$ со точност до 10^{-6}.

29. Докажи дека функцијата $y=\frac{x}{1-x}$ монотоно опаѓа на целата дефинициона област.

30. Определи ги интервалите на растење и опаѓање на следниве функции:

а) $y=\frac{4x}{x^2+1}$, б) $y=x+\frac{1}{x}$, в) $y=\frac{1-x}{2x-1}$.

31. Најди ги екстремните вредности на функциите

а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+21$, б) $y=3x-x^3$, в) $y=\frac{1-x}{2x-1}$,

г) $y=x^3+x^4$, д) $y=\frac{4x}{x^2+1}$, ѓ) $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$.

32. Најди ги екстремните вредности на функциите

а) $y=x(x-1)^2$, б) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$, в) $y=(x+1)e^x$,

г) $y=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, д) $y=e^x+e^{-x}$, ѓ) $y=x\ln x$.

33. За цисоидата $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ состави ги равенките на тангентата и нормалата во точката $M(x_0, y_0)$.

34. Тетивата на параболата $y = x^2 - 2x + 5$ поврзува две точки со апсциси $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Состави ја равенката на онаа тангента на параболата која е паралелна на тетивата.

35. Состави ја равенката на онаа нормала на параболата $y = x^2 - 6x + 6$ која е нормална на правата што ги соединува координатниот почеток и темето на параболата.

36. Најди ги равенките на тангентата на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ во точката $M(x_0, y_0)$.

37. Докажи дека збирот на отсечките што тангентата во секоја точка од параболата $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ги отсекува на координатните оски има константна должина a.

38. Докажи дека отсечката на тангентата на астроидата $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ која лежи меѓу координатните оски има константна должина a.

39. Докажи дека тангентите на сите елипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ со заедничка оска $2a$ и различни оски $2b$, повлечени во точка со иста апсциса, се сечат во иста точка која лежи на апсцисната оска.

40. *Агол меѓу кривите* $y = f(x)$ и $y = g(x)$ е аголот меѓу тангентите на кривите во пресечната точка $M(x_0, y_0)$, т.е. аголот меѓу правите

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ и } y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0).$$

Според тоа, за аголот φ меѓу кривите $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имаме $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) g'(x_0)}$.

Најди го аголот под кој се сечат кривите:

а) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ и $g(x) = \frac{x^2+4x+8}{16}$, б) $f(x) = \frac{x^2}{4a}$ и $g(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$,

в) $x^2 + y^2 = 8$ и $2y = x^2$, г) $x^2 + y^2 = 8ax$ и $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

41. Да се испитаат функциите и скицираат нивните графици:

а) $y = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$, б) $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$,

в) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$, г) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$.

42. Да се испита функцијата и скицира нејзиниот график $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

43. Да се испитаат функциите и скицираат нивните графици:

а) $y = x^2 e^{-x}$, б) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$, в) $y = \frac{x^2-4}{x} e^{-\frac{5}{3x}}$.

XV ГЛАВА
ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

1. ПОИМ ЗА ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА И НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

1.1. Ако функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ е диференцијабилна за секој $x \in A$, тогаш со операцијата диференцирање на функцијата f и придруживме нова функција $f': A \to \mathbf{R}$ која ја нарековме извод на функцијата f. Меѓутоа, во практиката често пати е потребно да се најде функцијата кога е даден нејзиниот извод и на ова прашање ќе се задржиме во следните разгледувања.

Во следните разгледувања со I ќе го означуваме едно од следниве множества во $\mathbf{R}$:

$$[a,b], (a,b], [a,b), (a,b), (-\infty,a], (-\infty,a), [b,+\infty), (b,+\infty), (-\infty,+\infty) \text{, кога } a<b .$$

1.2. Дефиниција. Нека $f: I \to \mathbf{R}$. За функцијата $F: I \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *примитивна функција* на f на I, ако за секој $x \in I$ постои $F'(x)$ и

$$F'(x) = f(x) . \qquad (1)$$

1.3. Пример. а) Функцијата $F(x)=\frac{x^5}{5}$ е примитивна функција за функцијата $f(x)=x^4$ на целата реална права, бидејќи $F'(x)=(\frac{x^5}{5})'=x^4$.

б) Функцијата $F(x)=e^x$ е примитивна за функцијата $f(x)=e^x$ на целата реална права, бидејќи $F'(x)=(e^x)'=e^x$.

в) Функцијата $F(x)=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|$ е примитивна за функцијата $f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$, при $x \neq \pm a$, бидејќи $F'(x)=f'(x)$, провери. ♦

1.4. Лема. Функциите $G(x)$ и $F(x)$, диференцијабилни на интервалот I, се примитивни функции на I за една иста функција ако и само ако

$$G(x)=F(x)+C, \quad x \in I, \; C=\text{const} . \qquad (2)$$

Доказ. Нека на интервалот I, $G(x)$ и $F(x)$ се примитивни функции за функцијата $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$. Тогаш $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=f(x)$, $x \in I$. Значи,

$$(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=0=(C)', \; x \in I$$

од што следува $F(x)-G(x)=C$, т.е. $G(x)=F(x)+C, \quad x \in I, \; C=\text{const}$.

Обратно, ако на интервалот I функцијата $F(x)$ е примитивна за функцијата $f(x)$, тогаш $F'(x) = f(x)$, $x \in I$. Но, тогаш за секоја константа C важи

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x), \ x \in I$$

од што следува дека секоја функција $G(x) = F(x)+C, \quad x \in I, \ C = \text{const}$ е примитивна за функцијата $f(x)$. ♦

1.5. Дефиниција. Нека функцијата f е определена на некој интервал I. Фамилијата од сите нејзини примитивни функции на интервалот I ја нарекуваме *неопределен интеграл* на функцијата f и ја означуваме со $\int f(x)dx$. Симболот $\int$ го нарекуваме *знак за интегралот*, а функцијата f ја нарекуваме *подинтегрална функција*.

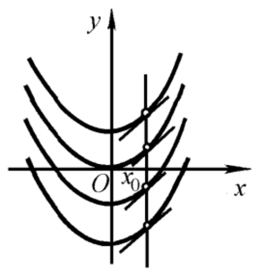
1.6. Коментар. Од лема 1.4 следува дека, ако F е произволна примитивна функција на функцијата f на интервалот I, тогаш

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad C \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Од досега изнесеното е јасно дека секое равенство, во кое на двете страни имаме неопределени интеграли, е равенство меѓу множества. Од геометриска гледна точка неопределениот интеграл претставува еднопараметарска фамилија криви $y = F(x)+C$, C е параметар, која го има следново својство: сите тангенти на кривите во точка со апсциса $x = x_0$ се паралелни меѓу себе:

$$(F(x)+C)'|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

На црт. 1 е претставен неопределениот интеграл $x^2 + C$ на функцијата $f(x) = 2x$, т.е. фамилијата параболи $y = x^2 + C$.



Цртеж 1

Како што рековме, интегралот $\int f(x)dx$ е фамилијата примитивни функции на функцијата f, па затоа наместо да велиме дека функцијата има примитивна функција, ќе велиме дека интегралот $\int f(x)dx$ постои. Постапката за наоѓање примитивна функција или неопределен интеграл за функцијата f ќе ја нарекуваме интегрирање на f.

Во следниве неколку леми ќе ги докажеме основните својства на неопределениот интеграл.

1.7. Лема. Ако функцијата F е диференцијабилна на интервалот I, тогаш на I важи $\int dF(x) = F(x)+C$, т.е. важи

$$\int F'(x)dx = F(x)+C. \tag{4}$$

Доказ. Непосредно следува од дефиницијата на неопределениот интеграл како фамилија од сите диференцијабилни функции чиј диференцијал стои под знакот на интегралот. ♦

1.8. Лема. Ако функцијата f има примитивна функција на интервалот I, тогаш за секој $x \in I$ важи

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx . \tag{5}$$

Доказ. Најпрво да забележиме дека во ова равенство под интеграл $\int f(x)dx$ се подразбира произволна примитивна функција F на функцијата f. Затоа равенството (5) можеме да го запишеме во облик $dF(x) = f(x)dx$. Бидејќи F е примитивна функција за функцијата f, важи $F'(x) = f(x)$. Од својствата на диференцијалот имаме

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

од што следува точноста на равенството (5). ♦

1.9. Лема (линеарност на интегралот). Ако функциите f_1 и f_2 имаат примитивни функции на интервалот I и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ се такви што $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, тогаш функцијата $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, исто така, има примитивна функција на интервалот I и притоа важи

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx . \tag{6}$$

Доказ. Нека F_1 и F_2 се примитивни функции на функциите f_1 и f_2 на интервалот I, соодветно. Тогаш, $F_1'(x) = f_1(x)$ и $F_2'(x) = f_2(x)$, $x \in I$. Да ставиме

$$F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) .$$

Тогаш, на интервалот I функцијата F е примитивна за функцијата $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, бидејќи

$$F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x))' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) , \ x \in I .$$

Затоа интегралот

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx$$

се состои функции $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$, каде C е произволна константа. Од друга страна имаме

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \end{aligned}$$

каде C_1 и C_2 се произволни константи. Од произволноста на константите C, C_1 и C_2 следува дека фамилиите

$$\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \text{ и } \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$$

се совпаѓаат, т.е. точно е равенството (6). ♦

1.10. Таблични интеграли. Од секоја формула за извод на некоја функција

$$F'(x) = f(x) \tag{7}$$

следува формулата за неопределен интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{8}$$

Притоа за да се провери точноста на формулата (8) за конкретни функции, доволно е за тие функции да се провери формулата (7) во сите точки на разгледуваниот интервал. Така, може да се докаже точноста на следниве формули, кои ги нарекуваме таблични интеграли:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C, \ |x| > |a|.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ |x| < a,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + C, \ |x| < a,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

Со помош на табличните интеграли и претходно докажаните својства на неопределениот интеграл може да се најдат интегралите и на посложени елементарни функции. Ќе разгледаме неколку примери.

1.11. Пример. а) Имаме

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} + 1\right) dx = \int x^{-2} dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int dx$$
$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2\ln|x| + x + C = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

б) Имаме

$$\int \left(4\sin x + 3 - 5x^4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = 4\int \sin x dx + 3\int dx - 5\int x^4 dx + \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= -4\cos x + 3x - x^5 + \ln|x| - 2\operatorname{arctg} x + C.$$

в) Имаме

$$\int (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \int (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \int (x^1 - 2x^{1/2} + 1) dx$$
$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} - 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + x + C = \frac{x^2}{2} - \frac{4\sqrt{x}^3}{3} + x + C.$$

г) Имаме

$$\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{x^2})dx=\int(e^x+\frac{1}{x^2})dx=e^x-\frac{1}{x}+C\,.$$

д) Имаме

$$\int\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^3 x}{\cos^2 x})dx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x)dx=\operatorname{tg} x-\sin x+C\ .$$

ѓ) Имаме

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{x^2+1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int(\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)})dx$$

$$=\int(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2})dx=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}+C.\ ♦$$

2. ЗАМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ

2.1. Во оваа и во следната точка ќе разгледаме две својства на неопределениот интеграл кои имаат огромна примена при наоѓањето на примитивните функции.

Теорема. Нека функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$ се определени на интервалите I_x и I_t, при што $\varphi(I_t)\subset I_x$. Ако функцијата f на интервалот I_x има примитивна функција $F(x)$, т.е. ако

$$\int f(x)dx=F(x)+C\,, \tag{1}$$

а функцијата φ е диференцијабилна на I_t, тогаш функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на I_t има примитивна функција $F(\varphi(t))$ и важи

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)}\,. \tag{2}$$

Доказ. Функциите $f(x)$ и $F(x)$ се определени на интервалот I_x. Од $\varphi(I_t)\subset I_x$ следува дека сложените функции $f(\varphi(t))$ и $F(\varphi(t))$ се добро дефинирани. Притоа, бидејќи $F'(x)=f(x),\ x\in I_x$ од правилото за диференцирање на сложена функција, добиваме

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt}=\frac{dF}{dx}\,|_{x=\varphi(t)}\cdot\frac{d\varphi(t)}{dt}=f(\varphi(t))\varphi'(t),\quad t\in I_t\,.$$

Според тоа, функцијата $F(\varphi(t))$ е примитивна функција за функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Оттука, согласно со дефиницијата на неопределен интеграл, имаме

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C\,. \tag{3}$$

Ако во (1) ставиме $x=\varphi(t)$, добиваме

$$\int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)}=F(\varphi(t))+C\,. \tag{4}$$

Десните страни во (3) и (4) се еднакви, па затоа се еднакви и левите, т.е. важи (2). ♦

2.2. Коментар. Формулата (2) ја нарекуваме формула за интегрирање со *замена на променливата*. Оваа формула може да се запише и во видот

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)} . \tag{5}$$

Нејзината примена се состои во тоа што наместо да го пресметуваме интегралот $\int f(\varphi(t))d\varphi(t)$, го пресметуваме интегралот $\int f(x)dx$ и потоа ставаме $x = \varphi(t)$.

Формулата (2) може да биде искористена и во обратен редослед. Имено, понекогаш полесно може наместо интегралот $\int f(x)dx$, со помош на соодветна замена на променливата $x = \varphi(t)$, да се пресмета интегралот $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Ако функцијата φ на интервалот I_t има инверзна функција φ^{-1}, тогаш со замената $t = \varphi^{-1}(x)$ во (2) преминуваме кон променлива x и добиваме

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)} . \tag{6}$$

Всушност, оваа формула обично се нарекува формула за интегрирање со замена на променливата.

Јасно, за да постои функцијата φ^{-1}, инверзна на φ, потребно е дополнување на условот на теорема 2.1. Ова дополнување може да биде, на пример, строга монотоност на функцијата φ на интервалот I_t, при што, како што е познато, постои инверзната функција φ^{-1}.

2.3. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот $\int (3x+2)^{12}dx$.

Воведуваме замена $3x+2=t$ и добиваме $(3x+2)'dx=(t)'dt$, т.е. $3dx = dt$ од каде што следува $dx = \frac{1}{3}dt$. Според тоа,

$$\int (3x+2)^{12}dx = \int t^{12}\cdot\tfrac{1}{3}dt = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{t^{13}}{13} + C = \tfrac{t^{13}}{39} + C = \tfrac{(3x+2)^{13}}{39} + C .$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

Воведуваме замена $2-5x=t$ и добиваме $(2-5x)'dx=(t)'dt$, т.е. $-5dx = dt$ од каде што следува $dx = -\frac{1}{5}dt$. Според тоа,

$$\int \tfrac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\tfrac{1}{5}\int \tfrac{dt}{\sqrt{t}} = -\tfrac{1}{5}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\tfrac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C .$$

в) Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{\ln x+2}{x}dx$.

Воведуваме замена $\ln x + 2 = t$ и добиваме $(\ln x+2)'dx = dt$, т.е. $\frac{dx}{x} = dt$ од каде што следува

$$\int \tfrac{\ln x+2}{x}dx = \int tdx = \tfrac{t^2}{2} + C = \tfrac{(\ln x+2)^2}{2} + C .$$

г) Ќе го пресметаме интегралот $\int x\sin x^2 dx$.

Воведуваме замена $x^2 = t$ и добиваме $(x^2)'dx = dt$ т.е. $2xdx = dt$ од каде што следува $xdx = \frac{1}{2}dt$. Според тоа,

$$\int x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sin t dx = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

д) Ќе го пресметаме интегралот $\int \operatorname{tg} x dx$.

Имаме

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Воведуваме замена $\cos x = t$ и добиваме $(\cos x)'dx = dt$, односно $\sin x dx = -dt$, па затоа

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

ѓ) Ќе го пресметаме интегралот $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

Воведуваме замена $\sin x = t$ и добиваме $(\sin x)'dx = dt$, т.е. $\cos x dx = dt$. Според тоа,

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C. \ \blacklozenge$$

2.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1+3x^3-x^6} dx$.

Од $(1+3x^3 - x^6)' = 9x^2 - 6x^5 = 3(3x^2 - 2x^5) = -3(2x^5 - 3x^2)$, следува замената $t = 1+3x^3 - x^6$. Имаме, $-\frac{1}{3}dt = (2x^5 - 3x^2)dx$, па затоа

$$\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = C - \frac{1}{3}\ln|1+3x^3 - x^6|. \ \blacklozenge$$

2.5. Забелешка. Постапката применета во пример 2.4 може да се примени за решавање на секој интеграл од видот

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx, \quad g(x) \neq 0.$$

Имено, со замената $g(x) = t, \ g'(x)dx = dt$, добиваме

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|g(x)| + C.$$

2.6. Пример. Ќе докажеме дека од $\int f(x)dx = F(x) + C$ следува

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0. \tag{7}$$

Ја воведуваме замената $t = ax+b$, $dx = \frac{1}{a}dt$, и добиваме

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Ако се искористат табличните интеграли со помош на (7) може да се пресметаат голем број интеграли од елементарните функции. Така, на пример,

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C, \qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C \text{ итн. } \blacklozenge$$

2.7. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

Воведуваме замена $x=t^6,\ dx=6t^5dt$, и добиваме

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt = 6\int \left(\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 6\int \left(\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C = 2\sqrt[6]{x^3}-3\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$$

$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

Според тоа,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C\ . \ \blacklozenge$$

2.8. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$.

Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})} = \int \frac{e^x dx}{e^x(3e^x+1)} = \int \frac{3e^x dx}{3e^x(3e^x+1)} = (*)\,.$$

Воведуваме замена $3e^x=t,\quad 3e^x dx = dt$, и добиваме

$$(*) = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{t+1-t}{t(t+1)}dt = \int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t|-\ln|t+1|+C$$

$$= \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C = \ln\frac{3e^x}{3e^x+1}+C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})} = \ln\frac{3e^x}{3e^x+1}+C\ . \ \blacklozenge$$

2.9. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = (*)$$

Воведуваме замена $3x-1=t,\quad dx=\frac{dt}{3}$, и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3}\ln(t+\sqrt{t^2+1})+C = \frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C\,.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C \text{ . } \blacklozenge$$

2.10. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-4x+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = (*) \text{ .}$$

Воведуваме замена $x-2=t, \quad dx=dt$ и добиваме

$$(*) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(x-2)+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \arcsin(x-2)+C \text{ . } \blacklozenge$$

3. ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

3.1. Теорема (парцијална интеграција). Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни на некој интервал и на тој интервал постои интегралот $\int vdu$, тогаш на овој интервал постои и интегралот $\int udv$ и притоа важи

$$\int udv = uv - \int vdu \text{ .} \tag{1}$$

Доказ. Нека функциите u и v се диференцијабилни на интервалот I . Од својствата на диференцијалот за секоја точка на интервалот I важи

$$d(uv) = udv + vdu \text{ ,}$$

па затоа

$$udv = d(uv) - vdu \text{ .}$$

Јасно, интегралот од првиот собирок на десната страна во последното равенство постои и притоа важи $\int d(uv) = uv + C$, а интегралот од вториот собирок постои според условот на теоремата, што значи дека постои интегралот $\int udv$ и притоа важи

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \text{ .} \tag{2}$$

Конечно, ако на десната страна во (2) го замениме $\int d(uv)$ со $uv+C$ и сметаме дека произволната константа се однесува на интегралот $\int vdu$, ја добиваме формулата (1). ♦

3.2. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот $\int x \ln x dx$.

Овој интеграл ќе го решиме со парцијална интеграција. Земаме

$$\begin{array}{lcl} u = \ln x & & du = (\ln x)'\,dx = \frac{dx}{x} \\ & \text{и добиваме} & \\ dv = x\,dx & & v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}. \end{array}$$

Со замена во формулата (1) наоѓаме

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int \ln(x^2+1)dx$.

Овој интеграл ќе го решиме со парцијална интеграција. Земаме,

$$\begin{array}{lcl} u = \ln(x^2+1) & & du = \frac{2x}{x^2+1}dx \\ & \text{и добиваме} & \\ dv = dx & & v = \int dv = \int dx = x \end{array}.$$

Со замена во формулата (1) наоѓаме

$$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int (1 - \frac{1}{x^2+1})dx = x\ln(x^2+1) - 2\left(x - \operatorname{arctg} x\right) + C$$

Значи,

$$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C\,. \ \blacklozenge$$

3.3. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот $\int xe^x dx$.

Земаме

$$\begin{array}{lcl} u = x & & du = dx \\ & \text{и добиваме} & \\ e^x dx = dv & & v = \int e^x dx = e^x. \end{array}$$

Ако замениме во формулата (1) наоѓаме

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C\,.$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int x \sin x\,dx$.

Земаме

$$\begin{array}{lcl} u = x & & du = dx \\ & \text{и добиваме} & \\ dv = \sin x\,dx & & v = \int \sin x\,dx = -\cos x. \end{array}$$

Според тоа,

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx - x\cos x + \sin x + C\,.$$

в) Ќе го пресметаме интегралот $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Земаме

$$\begin{array}{lcl} u = \operatorname{arctg} x & & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ & \text{и добиваме} & \\ dv = x\,dx & & v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}, \end{array}$$

па затоа

$$\int x\operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)+C.$$

г) Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

Ќе направиме парцијална интеграција со

$$u = x$$
$$dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$$

од што следува

$$du = dx$$
$$v = \int dv = \int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \left(\begin{matrix}\cos x = t\\ -\sin dx = dt\end{matrix}\right) = -\int\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2\cos^2 x}.$$

Добиваме

$$\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C\ .\ ♦$$

3.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx$.

Со примена на методот за парцијална интеграција при

$$u = \operatorname{arctg}(x+1) \qquad\qquad du = \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$
$$dv = xdx \qquad \text{имаме} \qquad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

од што следува

$$\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2})dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = (*)$$

Сега замена $x^2+2x+2=t$, од што добиваме $(2x+2)dx = dt$, па затоа

$$(*) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C\ .$$

Значи,

$$\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C\ .\ ♦$$

3.5. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

Прво воведуваме замена $x = t^2$. Имаме $dx = 2tdt$, па затоа

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2tdt = 2\int te^t dt = (*).$$

Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{array}{lcl} u = t & & du = dt \\ & \text{од што следува} & \\ dv = e^t dt & & v = \int dv = \int e^t dt = e^t \end{array}.$$

Имаме,

$$(*) = 2(te^t - \int e^t dt) = 2(te^t - e^t) + C = 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C.$$

Значи,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C,\ \ x > 0. \ \blacklozenge$$

3.6. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \sin\sqrt{x}dx$

Воведуваме замена $x = t^2$ и добиваме $dx = 2tdt$, односно

$$\int \sin\sqrt{x}dx = \int 2t\sin tdt = (*)$$

Сега со парцијална интеграција, при

$$\begin{array}{lcl} u = t & & du = dt \\ & \text{добиваме} & \\ dv = \sin tdt & & v = \int dv = \int \sin tdt = -\cos t \end{array},$$

од што следува

$$(*) = 2\left(-t\cos t + \int \cos tdt\right) = 2\left(-t\cos t + \sin t\right) + C = 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

Значи,

$$\int \sin\sqrt{x}dx = 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C, \quad x > 0. \ \blacklozenge$$

4. ИНТЕГРИРАЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

4.1. Како што знаме $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, каде P_n и Q_m се полиноми, е рационална функција. Ако степенот на полиномот во броителот е поголем или еднаков на степенот на полиномот во именителот, тогаш за рационалната функција $R(x)$ ќе велиме дека е *неправилна*, а во спротивно ќе велиме дека е *правилна*.

Секоја неправилна рационална функција може да се запише како збир на полином (цел дел) и правилна рационална функција и истото може да се постигне со делење на двата полиноми.

Бидејќи интегрирањето на полином не претставува тешкотија, заклучуваме дека интегрирањето на рационалните функции се сведува на интегрирање на правилни рационални функции.

4.2. Дефиниција. Правилните рационални функции од видовите

1) $\frac{A}{x-a}$, 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, $n \geq 2$, 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n \geq 2$,

каде $A, a, p, q, M, N \in \mathbf{R}$ и $p^2/4 - q < 0$, ги нарекуваме *прости рационални дропки*.

4.3. Интегрирање на прости дропки од видот $\frac{A}{x-a}$. Имаме

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

4.4. Интегрирање на прости дропки од видот $\frac{A}{(x-a)^n}$, $n \geq 2$. Имаме

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

4.5. Интегрирање на прости дропки од видот $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$. Интегрирањето на простите дропки од овој вид се сведува на таблични интеграли по пат на одделување во броителот диференцијал на именителот и сведување на именителот на збир на квадрати:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx, \\ Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + (N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}$$

$$= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + (N - \frac{Mp}{2}) \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

4.6. Интегрирање на прости дропки од видот $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n \geq 2$. Воведуваме замена $x + p/2 = t, dx = dt$:

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 = t^2 + a^2, \ \ a^2 = q - p^2/4.$$

Тогаш

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{M(x+p/2)+N-Mp/2}{[(x+p/2)^2+q-p^2/4]^n} dx = M \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + (N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

$$= MI_0 + (N - \frac{Mp}{2}) I_n.$$

За интегралот I_0 имаме

$$I_0 = \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-n} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

За да го пресметаме интегралот $I_n, n \geq 2$ истиот ќе го преставиме во видот:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Вториот интеграл во (1) ќе го пресметаме со парцијална интеграција:

$$u = t, \qquad du = dt$$

$$dv = \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}, \qquad v = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

па затоа

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} = \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1},$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} \right). \tag{2}$$

Според тоа, за пресметување на интегралот I_n ја добивме рекурентната формула (2), која лесно се користи ако се има предвид табличниот интеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

4.7. Разложување на рационална функција на прости дропки. Секоја правилна рационална функција $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ може да се престави во вид на збир на конечен број прости дропки од видовите 1) – 4). За разложување на $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на прости дропки потребно е да се разложи именителот $Q_m(x)$ на линеарни и квадратни множители, што значи де се реши равенката

$$Q_m(x) = 0 \iff b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0. \tag{3}$$

Ако претпоставиме дека равенката (3) е решена и се најдени нејзините корени. Согласно основната теорема на алгебрата, равенката (3) има m корени, сметајќи ја нивната кратност. Корените на равенката можат да бидат реални (прости или кратни) и комплексни (прости и кратни). При разложувањето на полиномот $Q_m(x)$ на множители користиме:

1) ако α е реален прост корен на $Q_m(x)$, тогаш $Q_m(x)$ се дели со $x-\alpha$ и важи: $Q_m(x) = (x-\alpha) Q_{m-1}(x)$,
2) ако α е реален корен со кратност k, тогаш $Q_m(x)$ се дели со $(x-\alpha)^k$ и важи: $Q_m(x) = (x-\alpha)^k Q_{m-k}(x)$,
3) ако комплексниот број $z = u + iv$ е прост корен на $Q_m(x)$, тогаш и неговиот коњугиран број $\overline{z} = u - iv$ е корен на $Q_m(x)$ и полиномот $Q_m(x)$ се дели со

$$(x-z)(x-\bar{z})=x^2+px+q,\ p=-2u,\ q=u^2+v^2,\ p^2/4-q<0\,,$$

т.е. $Q_m(x)=(x^2+px+q)Q_{m-2}(x)$, и

4) ако комплексно коњугираните броеви $u\pm iv$ се корени на полиномот $Q_m(x)$ со кратност k, тогаш полиномот $Q_m(x)$ може да се запише во видот: $Q_m(x)=(x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x)$.

Нека, на пример, бројот α е реален корен на полиномот $Q_m(x)$ со кратност k, бројот β е реален корен со кратност l и коњугираните комплексни броеви $u\pm iv$ се корени со кратност s. Тогаш полиномот $Q_m(x)$ може да се запише во видот

$$Q_m(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l(x^2+px+q)^s,\ k+l+2s=m\,,$$

и правилната рационална функција $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ може на единствен начин да се разложи како збир на прости дропки:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}&=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+\\&=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}\,,\end{aligned}\tag{4}$$

каде

$$A_1,A_2,\ldots,A_k,B_1,B_2,\ldots,B_l,M_1,M_2,\ldots,M_s,N_1,N_2,\ldots,N_s\tag{5}$$

се реални броеви.

Забележуваме дека во разложувањето (4) на линеарните множители на $Q_m(x)$ соодветствуваат простите дропки од прв и втор вид, а на квадратните множители соодветствуваат линеарните множители од трет и четврт вид. Формулата (4) за разложување на правилна рационална функција е точна за секој конечен број линеарни и квадратни множители кои учествуваат во разложувањето на полиномот $Q_m(x)$.

Пример. Ќе ја илустрираме формулата (4), без притоа да ги определуваме коефициентите на разложувањето:

$$\frac{x^3}{(x^3-1)(x^2+1)}=\frac{x^3}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}\,,$$

$$\frac{2x^2-1}{(x-1)(x+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\,,$$

$$\frac{x^3+13}{x^3(x-1)(x^2+3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{x^2+3}+\frac{Gx+H}{(x^2+3)^2}\,.\ \blacklozenge$$

4.8. Метод на неопределени коефициенти. Нека е дадено разложувањето (4) на правилната рационална функција $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Ги сведуваме простите дропки на заеднички именител $Q_m(x)$ и ги изедначуваме добиените коефициенти со коефициентите пред соодветните степени на полиномот $P_n(x)$. На тој начин добиваме систем од m линеарни равенки со m непознати, чие решение се коефициентите (5).

Пример А. Ќе ја разложиме рационалната функција $\frac{x^3-2x^2}{x+2}$. Бидејќи степенот на броителот е поголем од степенот на именителот, прво ги делиме полиномите и добиваме

$$\frac{x^3-2x^2}{x+2}=x^2-4x+8-\frac{16}{x+2}\,.\ \blacklozenge$$

Пример Б. Ќе ја разложиме рационалната функција $\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}$. Ако ја искористиме формулата (4) добиваме $\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$, каде броевите A и B се непознати. Десната страна на последното разложување ја сведуваме под заеднички именител и добиваме

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)}\,.$$

Според тоа,

$$x+2=(A+B)x+(-2A-B)$$

и ако ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени на x го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases}1-A-B=0\\ 2+2A+B=0,\end{cases}$$

чие решение е $A=-3$ и $B=4$. Според тоа,

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-2}\,.\ \blacklozenge$$

Пример В. Ќе ја разложиме рационалната функција $\frac{1}{x(x+1)^2}$. Ако ја искористиме формулата (4) и ги сведеме простите дропки на заеднички именител добиваме

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}\,.$$

каде броевите A, B и C се непознати. Според тоа,

$$1=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

и ако ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени на x го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases}A+B=0\\ 2A+B+C=0\\ A=1\end{cases}$$

чие решение е $A=1,\ B=C=-1$. Според тоа

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\,.\ \blacklozenge$$

Пример Г. Ќе ја разложиме рационалната функција $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$. Ако ја искористиме формулата (4) и ги сведеме простите дропки на заеднички именител добиваме

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x-1)}$$

каде броевите A , B и C се непознати. Според тоа,

$$x^2+1=(A+C)x^2+(A+B)x+B$$

и ако ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени на x го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases}$$

чие решение е $A=-1,\ B=1,\ C=2$. Според тоа,

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\,.\ \blacklozenge$$

Пример Д. Ќе ја разложиме рационалната функција $\frac{1}{x(x^2+1)}$. Ако ја искористиме формулата (4) и ги сведеме простите дропки на заеднички именител добиваме

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}\,,$$

од каде го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

чие решение е $A=1, B=-1, C=0$. Според тоа,

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\,.\ \blacklozenge$$

Пример Ѓ. Ќе ја разложиме рационалната функција $\frac{x^2}{x^4-1}$. Ако ја искористиме формулата (4) и ги сведеме простите дропки на заеднички именител добиваме

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{x^2}{(x^2)^2-1}=\frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

од каде го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases}$$

чие решение е $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=-\frac{1}{2}, D=\frac{1}{2}$. Според тоа,

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}\ . \ \blacklozenge$$

4.9. Правило за интегрирање на рационални функции. За да интегрираме рационална функција потребно е да се придржуваме на следнава постапка:

- ако разгледуваната рационална функција $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ не е правилна, т.е. ако $k \geq m$, тогаш истата ќе ја запишеме во вид на збир на полином и правилна рационална функција: $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}=P^*(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n<m$.
- правилната рационална функција $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ја запишуваме како збир на прости дропки,
- интегралот од рационалната функција го наоѓаме со интегрирање на правилните дропки 1) – 4), при што ги користиме алгоритмите 4.3 – 4.6.

4.10. Пример . Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x^3-2x^2}{x+2}dx$.

Ако го искористиме разложувањето од пример 4.8 А добиваме:

$$\int \frac{x^3-2x^2}{x+2}dx=\int (x^2-4x+8-\frac{16}{x+2})dx=\frac{x^3}{3}-2x^2+8x-16\ln|x+2|+C\ . \ \blacklozenge$$

4.11. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x+2}{(x-1)(x-2)}dx$.

Ако го искористиме разложувањето од пример 4.8 Б добиваме:

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x-2)}dx=\int (\frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-2})dx=-3\int \frac{1}{x-1}dx+4\int \frac{4}{x-2}dx$$
$$=-3\ln|x-1|+4\ln|x-2|+C\ . \ \blacklozenge$$

4.12. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

Ако го искористиме разложувањето од пример 4.8 В добиваме:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2}=\int (\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2})dx=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C_1\ . \ \blacklozenge$$

4.13. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

Ако го искористиме разложувањето од пример 4.8 Г добиваме:

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int\frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(\frac{x^3-x^2}{x^3-x^2}+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx=\int\left(1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx=x+\int\frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$$

$$=x+\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=x-\ln|x|-\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C_1. \ \blacklozenge$$

4.14. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Ако го искористиме разложувањето од пример 4.8 В добиваме:

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln|x|-\int\frac{x}{x^2+1}dx=\left(\begin{smallmatrix}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\end{smallmatrix}\right)$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\ln x-\frac{1}{2}\ln|t|+C_1$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C_1=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_1. \ \blacklozenge$$

4.15. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{x^2}{x^4-1}dx$.

Ако го искористиме разложувањето од пример 4.8 Ѓ добиваме:

$$\int\frac{x^2}{x^4-1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C_1. \ \blacklozenge$$

5. ИНТЕГРИРАЊЕ НА БИНОМЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

5.1. Дефиниција. Интегралот од видот

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{1}$$

каде m,n и p се рационални броеви и a и b се реални броеви го нарекуваме *интеграл од биномен диференцијал* (*биномен интеграл*).

5.2. Теорема. Биномниот интеграл (1) може да го изразиме со помош на елементарните функции, ако еден од броевите p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ е цел број.

Доказ. Ако во (3) ставиме

$$x^n=t,\ \ x=t^{1/n},\ \ dx=\frac{1}{n}t^{(1-n)/n},$$

тогаш интегралот (3) го добива видот

$$I=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt\ . \tag{2}$$

а) Нека p е цел број. Ако $\frac{m+1}{n}$ е рационален број еднаков на $\frac{r}{s}$, тогаш со замената

$$t = z^s,\ \ dt = sz^{s-1}dz$$

добиваме

$$I = \tfrac{s}{n}\int z^{r-s}(a+bz^s)^p z^{s-1}dz = \int R(z)dz\ ,$$

$R(z)$ е рационална функција, па од алгоритмот 4.9 следува тврдењето.

б) Нека $\frac{m+1}{n}$ е цел број. Ако p е рационален број еднаков на $\frac{r}{s}$, тогаш $t^{\frac{m+1}{n}}$ е рационална функција помножена со $(a+bt)^{\frac{r}{s}}$, што значи дека подинтегралната функција во (2) е рационална функција од t и од $\sqrt[s]{a+bt}$ и според а) интегралот (2) е решлив.

в) Нека $\frac{m+1}{n}+p$ е цел број. Ако p е рационален број еднаков на $\frac{r}{s}$, тогаш множејќи ја и делејќи ја подинтегралната функција со t^p во (4) добиваме $I = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}(\frac{a+bt}{t})^p\,dt$.

Јасно, во последниот интеграл првиот множител е рационална функција, па затоа интегралот може да се реши со замената $\frac{a+bt}{t} = z^s$, од што добиваме $I = \int R(z)dz$, каде $R(z)$ е рационална функција. ♦

5.3. Пример. Ќе го пресметаме интегралот: $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$

Подинтегралната функција ќе ја запишеме во вид:

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^4\,dx = (*)$$

Бидејќи $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=4$, ова е биномен интеграл, и бидејќи $p = 4 \in \mathbf{Z}$, добиваме дека за да го интегрираме треба да постапиме како во случајот под а) од претходната теорема. Ја воведуваме замената $x = t^6,\ dx = 6t^5dt$ и добиваме:

$$\begin{aligned}(*) &= \int t^3(1+t^2)^4 6t^5dt = 6\int t^8(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8)dt \\ &= 6\int(t^8+4t^{10}+6t^{12}+4t^{14}+t^{16})dt = \tfrac{6}{9}t^9+\tfrac{24}{11}t^{11}+\tfrac{36}{13}t^{13}+\tfrac{24}{15}t^{15}+\tfrac{6}{17}t^{17}+C \\ &= 6\sqrt{x^3}\,(\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{11}\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{13}\sqrt[3]{x^2}+\tfrac{4}{15}x+\tfrac{1}{17}\sqrt[3]{x^4})+C.\end{aligned}$$

Значи,

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 = 6\sqrt{x^3}\,(\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{11}\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{13}\sqrt[3]{x^2}+\tfrac{4}{15}x+\tfrac{1}{17}\sqrt[3]{x^4})+C\ .\ ♦$$

5.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот: $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Подинтегралната функција ќе ја запишеме во видот:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx = (*)$$

Бидејќи $m=0,\ n=4,\ p=-\frac{1}{4}$, ова е биномен интеграл и од

$$p=-\frac{1}{4}\notin \mathbf{Z}\ ,\ \text{а}\ \frac{m+1}{n}+p=0\in \mathbf{Z}$$

добиваме дека за да го интегрираме треба да постапиме како во случајот под в) од претходната теорема. Имаме:

$$x^{-4}+1=t^4,\quad \frac{1}{x^4}=t^4-1,\quad x^4=\frac{1}{t^4-1},\quad x^3dx=-\frac{t^3dt}{(t^4-1)^2}\ ,$$

па затоа

$$\begin{aligned}(*)&=\int \frac{x^3dx}{x^4\sqrt[4]{x^{-4}+1}}dx=\int \frac{t^4-1}{t}\frac{-t^3}{(t^4-1)^2}dt=-\int \frac{t^2}{t^4-1}dt=\int \frac{t^2}{1-t^4}dt\\ &=\frac{1}{2}\int (\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2})dt=\frac{1}{2}\int (\frac{1}{2}(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t})-\frac{1}{1+t^2})dt\\ &=\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln|1-t|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}+C\ .\ \blacklozenge\end{aligned}$$

5.5. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}dx$.

Подинтегралната функција ќе ја запишеме во облик:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx=(*).$$

Бидејќи $m=-1, n=5,\ p=-\frac{1}{3}\notin \mathbf{Z}$, а $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{5}=0\in \mathbf{Z}$, заклучуваме дека овој интеграл е биномен и постапката за негово решавање е дадена во претходната теорема под б). Воведуваме замена

$$1+x^5=t^3,\quad x^5=t^3-1,\quad 5x^4dx=3t^2dt$$

и добиваме

$$\begin{aligned}(*)&=\frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{x^5\sqrt[3]{1+x^5}}dx=\frac{1}{5}\int \frac{3t^2}{(t^3-1)t}dt=\frac{3}{5}\int \frac{t}{t^3-1}dt=\frac{3}{5}\int \frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)}dt\\ &=\frac{3}{5}\int (\frac{1}{3}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\frac{t-1}{t^2+t+1})dt=\frac{1}{5}\int \frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{10}\int \frac{2t+1-3}{t^2+t+1}dt\\ &=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{10}\int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt=(**)\end{aligned}$$

Воведуваме замена $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z,\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$ и добиваме:

$$\begin{aligned}(**)&=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{10}\int \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}dz=\\ &=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{10}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dz}{z^2+1}\\ &=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}z+C\\ &=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

Останува да се вратиме на старата променлива $t = \sqrt[3]{1+x^5}$. ♦

6. ТРИГОНОМОТРЕСКИ ЗАМЕНИ

6.1. Со замената $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$ интегралите од видот

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

се сведуваат на интеграли од рационални функции. Навистина, од

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \tag{1}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} z, \qquad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

следува дека

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\Big(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\Big)\frac{2dz}{1+z^2},$$

т.е. добивме интеграл од рационална функција.

6.2. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот: $\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}dx$.

Ако ја искористиме наведената замена, добиваме

$$\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}dx = \int \frac{1}{5-\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{2t^2-8t+8}dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2-4t+4}dt = \int \frac{1}{(t-2)^2}dt = -\frac{1}{t-2} + C = C - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}.$$

Значи, $\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}dx = C - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}$.

б) Ќе го пресметаме интегралот: $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Ако ја искористиме наведената замена, добиваме

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{1}{5-3\frac{1-z^2}{1+z^2}}\frac{2}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{1+4z^2}dz = \frac{1}{2}\int \frac{d(2z)}{1+(2z)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2z + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C.$$

Значи, $\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C$. ♦

6.3. Претходно докажавме дека разгледуваните интеграли секогаш можат да се сведат на интеграли од рационални функции. Меѓутоа, понекогаш наместо замената (1) погодно е да се користат замените:

$$z=\sin x, \qquad dz=\cos x dx, \tag{2}$$
$$z=\cos x, \qquad dz=-\sin x dx, \tag{3}$$
$$z=\operatorname{tg} x, \qquad dz=\frac{dx}{\cos^2 x}. \tag{4}$$

Ќе разгледаме неколку примери.

6.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)dx$.

Прво ќе ја трансформираме подинтегралната функција. Имаме:

$$\int(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)dx=\int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)dx=\int \operatorname{tg}^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}=(*)$$

Ако ја искористиме замената (4), добиваме

$$(*)=\int z^2dz=\tfrac{1}{3}z^3+C=\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C .$$

Значи, $\int(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)dx=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. ♦

6.5. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}\sin x dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}}\sin x dx=(*)$$

Ако ја искористиме замената (3), добиваме

$$(*)=\int\frac{z^2-1}{\sqrt{z}}dz=\int(z^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{z}})dz=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2\sqrt{t}+C=\frac{2}{5}\sqrt{\cos x}(\cos^2 x-5)+C .$$

Значи, $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\frac{2}{5}\sqrt{\cos x}(\cos^2 x-5)+C$. ♦

6.6. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$.

Прво ќе ја трансформираме подинтегралната функција. Имаме

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\cos x dx=\int\frac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x}\cos x dx=(*)$$

Ако ја искористиме замената (2), добиваме

$$\begin{aligned}(*)&=\int\frac{z^3}{1-z^2}dz=\int\frac{z^3-z+z}{1-z^2}dz=\int(-z+\frac{1}{2}\frac{2z}{1-z^2})dz=-\int zdz-\frac{1}{2}\int\frac{2zdz}{z^2-1}\\&=C-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}\ln|z^2-1|=C-\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}\ln|\sin^2 x-1|\\&=C-\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}\ln|\sin^2 x-1|=C-\frac{1}{2}\sin^2 x-\ln|\cos x|.\end{aligned}$$

Значи,

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=C-\frac{1}{2}\sin^2 x-\ln|\cos x|. \ ♦$$

6.7. Коментар. Интегралот разгледан во претходниот пример е од видот

$$\int \sin^m x \cos^n x dx .$$

Нека m и n се рационални броеви. Ќе докажеме дека со замените (2) и (3) овој интеграл се сведува на биномен интеграл. Навистина, ако ја искористиме замената (2) добиваме

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad dx = \tfrac{dz}{\cos x} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz ,$$

што значи дека

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz .$$

Според тоа, дали може интегралот $\int \sin^m x \cos^n x dx$ да се изрази со помош на елементарни функции, зависи од тоа дали тоа својство го има добиениот биномен интеграл.

Јасно, ако еден од броевите m и n е позитивен непарен број, на пример $m = 2k+1$, тогаш со смената (2) разгледуваниот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција.

Ако $m = 2k+1$ и $n = 2p+1$, тогаш пожелно е да се искористи замената $z = \cos 2x$ и притоа добиваме

$$\begin{aligned}\int \sin^{2k+1} x \cos^{2p+1} x dx &= \tfrac{1}{2}\int \sin^{2k} x \cos^{2p} x \cdot 2\sin x \cos x dx \\ &= \tfrac{1}{2^2}\int (\tfrac{1-\cos 2x}{2})^k (\tfrac{1+\cos 2x}{2})^p \sin 2x d(2x) \\ &= -\tfrac{1}{2^{k+p+2}}\int (1-z)^k (1+z)^p dz,\end{aligned}$$

што значи дека повторно добиваме интеграл од рационална функција. Јасно, броевите m и n можат да бидат како позитивни така и негативни.

Ако броевите m и n се позитивни парни броеви, тогаш користејќи ги формулите

$$\sin^2 x = \tfrac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \tfrac{1+\cos 2x}{2} , \tag{5}$$

интегралот $\int \sin^m x \cos^n x dx$ го сведуваме на интеграл од истиот тип со тоа што степените m и n се намалуваат.

Ако броевите $m = -2k$ и $n = -2p$ се негативни парни броеви, тогаш користејќи ги формулите

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \tag{6}$$

добиваме

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{-2k} x \cos^{-2p} x dx = \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^{k+p-1}}{(\mathrm{tg}^2 x)^k} \frac{dx}{\cos^2 x} ,$$

што значи, со замената (4) разгледуваниот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција кој, како што гледаме, е елементарен.

6.9. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот: $\int \sin^4 x dx$.

Ако ги искористиме формулите (5) добиваме

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\tfrac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \tfrac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int dx - \tfrac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) x + \tfrac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx$$
$$= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C.$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

Ако ги искористиме формулите (6), добиваме

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} dx = \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^2}{\mathrm{tg}^4 x}(1+\mathrm{tg}^2 x)^2 \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^3}{\mathrm{tg}^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = (*) .$$

Ако ја искористиме замената (4) добиваме:

$$(*) = \int \frac{(1+z^2)^3}{z^4} dz = \int (\tfrac{1}{z^4} + \tfrac{3}{z^2} + 3 + z^2) dt$$
$$= -\frac{1}{3z^3} - \frac{3}{z} + 3z + \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{tg}^6 x - 1}{\mathrm{tg}^3 x} + 3\frac{\mathrm{tg}^2 x - 1}{\mathrm{tg}\, x} + C.$$

Значи, $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{tg}^6 x - 1}{\mathrm{tg}^3 x} + 3\frac{\mathrm{tg}^2 x - 1}{\mathrm{tg}\, x} + C$. ♦

6.10. Коментар. Интегралите

$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx,\ \int \sin \alpha x \sin \beta x dx,\ \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, каде $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

можеме да ги решиме ако ги искористиме тригонометриските формули:

$$\begin{aligned} \sin \alpha x \cos \beta x &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x] \\ \sin \alpha x \sin \beta x &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x] \\ \cos \alpha x \cos \beta x &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x] \end{aligned} \tag{7}$$

што може да се види од следниов пример.

6.11. Пример. а) Ако ја искористиме првата формула во (7) добиваме

$$\int \cos x \sin 3x dx = \tfrac{1}{2}\int [\sin 4x + \sin 2x] dx = \tfrac{1}{2}[-\tfrac{\cos 4x}{4} - \tfrac{\cos 2x}{2}] + C .$$

б) Ако ја искористиме втората формула во (7) добиваме

$$\int \sin 5x \sin 2x dx = \tfrac{1}{2}\int [\cos 3x - \cos 7x] dx = \tfrac{1}{2}[\tfrac{\sin 3x}{3} - \tfrac{\sin 7x}{7}] + C .$$

в) Ако ја искористиме третата формула во (7) добиваме

$$\int \cos 2x \cos 3x dx = \tfrac{1}{2}\int [\cos x + \cos 5x] dx = \tfrac{1}{2}[\sin x + \tfrac{\sin 5x}{5}] + C . \ ♦$$

6.12. Интегрирање на рационални функции од ирационални аргументи. На крајот од овој дел ќе покажеме дека интегралите:

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx\,, \tag{8}$$

$$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx\,, \text{ и} \tag{9}$$

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx \tag{10}$$

можат да се изразат со помош на елементарните функции. За таа цел ќе ги користиме тригонометриските замени

$$x=a\sin z,\ \ dx=a\cos z dz,\ \ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos z\,, \tag{11}$$

$$x=a\,\mathrm{tg}\,z,\ \ dx=\frac{adz}{\cos^2 z},\ \ \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos z} \ \text{ и} \tag{12}$$

$$x=\frac{a}{\cos z},\ \ dx=\frac{a\sin z dz}{\cos^2 z},\ \ \sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{tg}\,z\,, \tag{13}$$

соодветно, при што тие се сведуваат на интеграли од видот

$$\int R(\sin z,\cos z)dz$$

за кои докажавме дека можат да се изразат со помош на елементарни функции. Ќе разгледаме неколку примери.

6.13. Пример. Ќе го пресметаме интегралот: $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Подинтегралната функција е рационална функција од x и $\sqrt{4-x^2}$. Бидејќи $a=2$ ја воведуваме замената

$$x=2\sin z\ ,\ \ dx=2\cos z dz \ \text{ и } \sqrt{4-x^2}=2\cos z$$

и добиваме

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{4-x^2}dx &= 4\int 4\sin^2 z\cos z\cos z dz=4\int \sin^2 2z dz=2\int(1-\cos 4z)dz\\ &=2z-\frac{\sin 4z}{2}+C=2z-\sin 2z\cos 2z+C\\ &=2z-2\sin z\cos z(1-2\sin^2 z)\\ &=2z-2\sin z\sqrt{1-\sin^2 z}(1-2\sin^2 z)+C\\ &=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}(x^2-2)}{4}+C.\end{aligned}$$

Значи,

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}(x^2-2)}{4}+C\,. \ \blacklozenge$$

6.14. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

Ако ја искористиме замената (13) добиваме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=\int\frac{\cos^3 z}{a^3\sin^3 z}\frac{a\sin z}{\cos^2 z}dz=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos z}{\sin^2 z}dz=(*)$$

Воведуваме нова замена $\sin z = p,\ \cos z dz = dp$ при што добиваме

$$(*) = \frac{1}{a^2}\int\frac{dp}{p^2} = -\frac{1}{a^2}\frac{1}{p} + C = C - \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin p} = C - \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 z}} = C - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} = C - \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Значи, $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = C - \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. ♦

6.15. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}dx$.

Прво ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}dx = \frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{16}}4x^3dx = \frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{1+(x^4)^2}}{(x^4)^4}d(x^4) = \frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{1+z^2}}{z^4}dz = (*)$$

каде $z = x^4$. Воведуваме нова замена $z = \operatorname{tg} v,\ dz = \frac{dv}{\cos^2 v}$ и добиваме

$$(*) = \frac{1}{4}\int\frac{\cos v}{\sin^4 v}dv = \frac{1}{4}\int\frac{d(\sin v)}{\sin^4 v} = -\frac{1}{12}\frac{1}{\sin^3 v} + C = C - \frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 v)^3}}{\operatorname{tg}^3 v}$$

$$= C - \frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+z^2)^3}}{z^3} = C - \frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+x^8)^3}}{x^{12}}.$$

Значи, $\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}dx = C - \frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+x^8)^3}}{x^{12}}$. ♦

7. ИНТЕГРАЛИ КОИ НЕ МОЖАТ ДА СЕ ИЗРАЗАТ СО ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

7.1. Во параграфите од 1 до 6 ги разгледавме класите елементарни функции за кои неопределениот интеграл може да се изрази со помош на елементарни функции и кои ги нарекуваме *класи интеграбилни функции во конечен вид.* Забележавме дека секоја непрекината на $[a,b]$ функција $f(x)$ има примитивна функција $F(x)$, за која важи $F'(x) = f(x)$. Меѓутоа не секоја примитивна функција може да се изрази со конечен број елементарни функции. Така, на пример, при интегрирањето на биномниот диференцијал $I = \int x^m(a+bx^n)^p dx$ видовме дека тоа е можно само ако p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ е цел број, а во сите други случаи интегралот од биномниот диференцијал не се изразува со елементарни функции.

7.2. Ќе наведеме примери на интеграли кои не може да се изразат со помош на елементарни функции:

$\int e^{x^2}dx$ - интеграл на Поасон ,

$\int\frac{\sin x}{x}dx$ - интегрален синус,

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегрален косинус,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегрален логаритам,

$\int \cos(x^2)dx, \int \sin(x^2)dx$ - интеграли на Френел,

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$ - елиптичен интеграл од прв вид и

$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}dx$ - елиптичен интеграл од втор вид.

Да забележиме дека секој од наведените интеграли е функција која не е елементарна.

8. ПОИМ ЗА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

8.1. Во претходните параграфи од оваа глава го разгледавме неопределениот интеграл. Во следните параграфи ќе се задржиме на определениот интеграл, односно Римановиот интеграл и неговата примена.

8.2. Дефиниција. Секое конечно множество точки $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k}$ од интервалот $[a,b]$, $a,b \in \mathbf{R}$, такви што $a = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} < x_k = b$, го нарекуваме *поделба на интервалот* $[a,b]$.

Броевите x_i, $i = 0,1,...,k$ ги нарекуваме *точки на поделбата* π, а интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,...,k$ ги нарекуваме *интервали на поделбата* π и нивните должини ги означуваме со $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,...,k$. Бројот

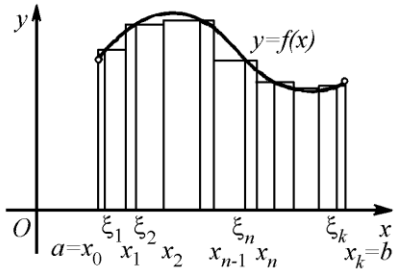
$$d(\pi) = \max_{i=1,...,k} \Delta x_i$$

го нарекуваме *дијаметар* на поделбата π.

8.3. Дефиниција. Нека функцијата f е определена на интервалот $[a,b]$, $a < b$ и $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k}$ е произволна поделба на овој интервал. Сумата од видот

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \ i = 1,2,...,k \tag{1}$$

ја нарекуваме *интегрална сума на Риман* за функцијата f (црт. 2).



Цртеж 2

Функцијата f ја нарекуваме *интеграбилна според Риман* (во натамошниот текст само *интеграбилна на* $[a,b]$), на интервалот $[a,b]$, ако постои реален број L таков што за секоја низа поделби $\pi_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{k_n}$, $n = 1,2,...$ на интервалот

$[a,b]$, за која важи $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n)=0$, низата од интегрални суми

$$\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}$$

конвергира кон L, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)} = L,$$

за секој избор на точки

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i=1,2,\dots,k_n,\ n=1,2,\dots,$$

каде $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)},\ i=1,2,\dots,k_n,\ n=1,2,\dots$

Бројот L го нарекуваме *определен интеграл од функцијата* f на интервалот $[a,b]$ и го означуваме со $\int\limits_a^b f(x)dx$.

8.4. Забелешка. Во досегашните излагања ние го дефиниравме определениот интеграл од функцијата f на интервалот $[a,b]$ кога $a<b$. Оваа дефиниција ја дополнуваме со следниве усогласувања.

Ако функцијата f е определена во точката $x=a$, тогаш по дефиниција земаме дека $\int\limits_a^a f(x)dx=0$. Ако функцијата f е интеграбилна на $[a,b]$, $a>b$ тогаш по дефиниција ставаме $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

8.5. Теорема. Ако f е интеграбилна на $[a,b]$, тогаш таа е ограничена на $[a,b]$.

Доказ. Навистина, ако функцијата f не е ограничена на $[a,b]$, тогаш за секоја поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^k$ на $[a,b]$ постои барем еден интервал $[x_{i-1},x_i]$ на кој функција не е ограничена. Од неограничеността на функцијата f на интервалот $[x_{i-1},x_i]$ следува дека може да се избере точка ξ_i таква што апсолутната вредност на производот $f(\xi_i)\Delta x_i$ е поголема од секој однапред зададен реален број. Според тоа, за секоја поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^k$ на $[a,b]$ апсолутната вредност на збирот $\sum\limits_{i=1}^k f(\xi_i)\Delta x_i$ ќе биде поголема од секој однапред зададен реален број. Значи, не постои конечна граница на интегралната сума кога дијаметарот $d(\pi)$ тежи кон нула, т.е. функцијата f не е интеграбилна на $[a,b]$. ♦

8.6. Пример. а) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=0.$.Нека $\pi=\{x_i\}_{i=0}^k$ е произволна поделба на $[a,b]$. Тогаш за секои $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ имаме $f(\xi_i)=C$, $i=1,2,...,k$, па затоа $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = C(b-a)$, од што следува дека

$$\int_a^b Cdx = C(b-a).$$

б) Да ја разгледаме *функцијата на Дирихле*

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ е рационален број}\\ 0, & x \text{ е ирационален број}\end{cases}$$

За секој интервал $[a,b]$ и секоја негова поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^k$, ако сите точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ ги избереме да се рационални, тогаш од

$$f(\xi_i)=1,\ i=1,2,...,k$$

добиваме

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = b-a\ ,$$

а ако сите точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ ги избереме да се ирационални, тогаш од $f(\xi_i)=0$, $i=1,2,...,k$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = 0\,.$$

Затоа интегралните суми на функцијата на Дирихле немаат граница кога

$$\lim_{n\to\infty} d(\pi)=0\,.$$

Функцијата на Дирихле е пример на ограничена функција на секој интервал која не е интеграбилна на тој интевал. ♦

8.7. Ќе формулираме, без доказ, доволен услов за интеграбилност по Риман.

Теорема А. Ако функцијата f е непрекината на $[a,b]$, тогаш таа е интеграбилна на $[a,b]$. ♦

Да забележиме, дека определениот интеграл постои за многу поширока класа функции отколку што е класата непрекинати функции. Тоа може да се види од следниве теореми кои исто така ќе ги дадеме без доказ.

Теорема Б. Ако функцијата f е монотона на интервалот $[a,b]$, тогаш таа е интеграбилна на $[a,b]$. ♦

Теорема В. Функцијата f интеграбилна на интервалот $[a,b]$ ако и само ако таа е ограничена на $[a,b]$ и множеството нејзини прекини е конечно или е еквивалентно се множеството природни броеви $\mathbf{N}$. ♦

8.8. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\limits_0^1 x^2 dx$.

Подинтегралната функција $f(x) = x^2$ е непрекината на $[0,1]$, па затоа интегралот $\int\limits_0^1 x^2 dx$ постои, што значи дека $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ постои и не зависи од изборот на точките ξ_i. Нека $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k}$ е поделба на $[0,1]$ таква што $x_i = i\Delta x$, $i = 1,2,...,k$, $\Delta x = \frac{1}{k}$ и да земеме $\xi_i = x_i$, $i = 1,2,...,k$. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k^2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k^3} \overset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{3},$$

па затоа $\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. ♦

9. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

9.1. Теорема. Ако функцијата f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $[c,d] \subset [a,b]$, тогаш f е интеграбилна на интервалот $[c,d]$.

Доказ. Бидејќи f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ од теорема 8.7 В следува дека таа е ограничена на интервалот следува $[a,b]$ и множеството нејзини прекини на $[a,b]$ е конечно или еквивалентно со множеството природни броеви $\mathbf{N}$. Според тоа, функцијата f е ограничена на $[c,d]$ и множеството нејзини прекини на $[c,d]$ е конечно или еквивалентно со множеството природни броеви $\mathbf{N}$. Сега повторно од теорема 8.7 В следува дека f е интеграбилна на интервалот $[c,d]$. ♦

9.2. Теорема. Ако f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $a < c < b$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1}$$

Доказ. Навистина, границата на интегралните суми не зависи од начинот на поделба на интервалот $[a,b]$ и од изборот на точките ξ_k. Затоа, при составување на интегралните суми можеме да ја вклучиме точката c меѓу точките на поделбата на интервалот $[a,b]$. Нека $c = x_m$ и поделбата на интервалот $[a,b]$ е дадена со

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = x < x_{m+1} < ... < x_n = b.$$

Тогаш

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Според теорема 9.1 од интеграбилноста на f на $[a,b]$ следува интеграбилноста на f на $[a,c]$ и $[c,b]$ и ако во последното равенство преминеме кон граница кога $d(\pi)\to 0$ добиваме

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \ \blacklozenge$$

9.3. Лема (линеарност на интегралот). Ако f и g се интеграбилни на $[a,b]$, тогаш $\lambda f+\mu g$ е интеграбилна на $[a,b]$, за секои $\lambda,\mu\in \mathbf{R}$ и притоа важи

$$\int_a^b [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx . \tag{2}$$

Доказ. За секоја поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k}$ на $[a,b]$ и за секои точки $\xi_i\in [x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,k$ важи

$$\sum_{i=1}^{k}[\lambda f(\xi_i)+\mu g(\xi_i)]\Delta x_i = \lambda\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \mu\sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\Delta x_i$$

Но, f и g се интеграбилни на $[a,b]$, па затоа постои границата на десната страна на последното равенство кога $d(\pi)\to 0$. Според тоа, постои и границата на левата страна, што значи дека $\lambda f+\mu g$ е интеграбилна на $[a,b]$. Ако во последното равенство преминеме кон граница кога $d(\pi)\to 0$ ќе ја добиеме формулата (2). ♦

9.4. Теорема. Ако f е интеграбилна на $[a,b]$ и $f(x)\ge 0$, за секој $x\in[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 . \tag{3}$$

Доказ. Ако $f(x)\ge 0$, за секој $x\in[a,b]$, тогаш за секоја поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k}$ на $[a,b]$ важи $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0, \quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. Ако во последното неравенство преминеме кон граница кога $d(\pi)\to 0$ го добиваме неравенството (3). ♦

9.5. Последица. Ако f и g се интеграбилни на $[a,b]$ и $f(x)\ge g(x)$, за секој $x\in[a,b]$, тогаш $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

Доказ. Од $f(x) \geq g(x)$, за секој $x \in [a,b]$ следува $f(x) - g(x) \geq 0$, за секој $x \in [a,b]$. Според тоа,

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \ \blacklozenge$$

9.6. Теорема. Ако f е интеграбилна на $[a,b]$, $f(x) \geq 0$, за секој $x \in [a,b]$, и ако постои точка $c \in [a,b]$, во која функцијата f е непрекината и $f(c) > 0$, тогаш $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказ. Ако функцијата f е непрекината во точката $c \in [a,b]$ и $f(c) > 0$, тогаш од теоремата за запазување на знакот следува дека постои интервал $[\alpha, \beta]$, таков што $c \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]$, $\alpha \neq \beta$ и за секоја точка $x \in [\alpha, \beta]$ е исполнето неравенството $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$. Тогаш, од својствата на определениот интеграл и од последното неравенство имаме

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \frac{f(c)}{2}\int_\alpha^\beta dx = \frac{f(c)}{2}[\beta - \alpha] > 0. \ \blacklozenge$$

10. ВРСКА МЕЃУ ОПРЕДЕЛЕН И НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

10.1 Теорема. Ако функцијата f е интеграбилна на $[a,b]$ и е непрекината во точката $x_0 \in [a,b]$, тогаш функцијата $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е диференцијабилна во таа точка и

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{1}$$

Доказ. За нараснувањето $\Delta F(x_0)$ имаме

$$\Delta F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$$

$$= \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt,$$

$x_0, x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Исто така $\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$, па затоа

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{f(x_0)}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]dt\right|. \tag{2}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од непрекинатоста на функцијата f во точката x_0 следува дека постои $\delta > 0$ таков што од $|x - x_0| < \delta,\quad x \in [a,b]$ следува $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ако Δx е таков што $|\Delta x| < \delta$, тогаш за секоја точка t која припаѓа на интервалот со крајни точки x_0 и $x_0 + \Delta x$ важи $|t - x_0| \le |\Delta x| < \delta$, па затоа $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Сега од неравенството (2) следува

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta x|} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\, dt \le \frac{\varepsilon}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt \right| = \varepsilon,$$

што значи $F'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$. ♦

10.2. Забелешка. Од доказот на претходната теорема следува дека за функцијата $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ во точката x_0 имаме $G'(x_0) = -f(x_0)$. Јасно, ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш за секоја точка x се точни формулите

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x).$$

10.3. Теорема. Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш на $[a,b]$ таа има примитивна функција и притоа ако $x_0 \in [a,b]$, тогаш со равенството

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{3}$$

се задава една од примитивните функции на функцијата f на интервалот $[a,b]$.

Доказ. Доволно е да провериме дека функцијата (3) навистина е примитивна за функцијата f. Ако $x > x_0,\ x \in [a,b]$, тогаш од равенството (3) и од теорема 10.1 следува дека $F'(x) = f(x)$, што значи дека функцијата (3) е примитивна за функцијата f.

Ако $x < x_0,\ x \in [a,b]$, тогаш

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^x f(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_x^{x_0} f(t)dt = -(-f(x)) = f(x). \ ♦$$

10.4. Теорема (Њутн-Лајбницова формула). Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш за секоја нејзина примитивна функција F на $[a,b]$ важи

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Доказ. Од теорема 10.3 следува дека $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ е примитивна за функцијата f на $[a,b]$. Ако функцијата F е произволна примитивна функција за функцијата f на $[a,b]$, тогаш за секој $x\in[a,b]$ важи

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C\,.$$

Во последното равенство ставаме $x=a$ и од $\int_a^a f(t)dt=0$ добиваме $C=-F(a)$.

Значи,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)\,,$$

и ако во ова равенство ставиме $x=b$ ја добиваме формулата (4). ♦

10.5. Пример. а) Користејќи ја Њутн-Лајбницовата формула добиваме

$$\int_1^2 (x^2+x-1)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-2-(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-1)$$

$$=\frac{8}{3}+2-2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{16-2-3+6}{6}=\frac{17}{3}.$$

б) Користејќи ја Њутн-Лајбницовата формула добиваме

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\,\Big|_0^1 = e^1-e^0 = e-1\,.$$

в) Користејќи ја Њутн-Лајбницовата формула добиваме

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\,\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\frac{0}{2}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\,.$$

г) Користејќи ја Њутн-Лајбницовата формула добиваме

$$\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx = \int_1^2 (x^2+x^{-4})dx = (\frac{x^3}{3}+\frac{x^{-3}}{-3})\Big|_1^2 = (\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3x^3})\Big|_1^2$$

$$=\frac{2^3}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^3}-(\frac{1^3}{3}-\frac{1}{3\cdot 1^3})=\frac{64-1}{24}-\frac{1-1}{3}=\frac{63}{24}=\frac{21}{8}.$$

д) Користејќи ја Њутн-Лајбницовата формула добиваме

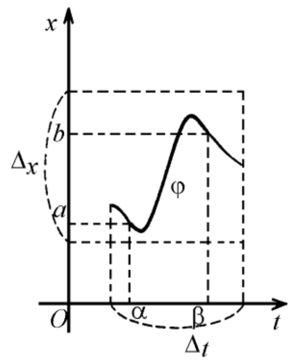
$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1-0 = 1\,.$$ ♦

11. ЗАМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ И ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА КАЈ ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

11.1. Теорема. Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот (a,b) и функцијата $\varphi(t)$ е определена и непрекината заедно со својот прв извод $\varphi'(t)$ на интервалот (α,β), при што за секој $t\in(\alpha,\beta)$ е исполнето неравенството $a<\varphi(t)<b$ (црт. 3), тогаш за $\alpha_0,\beta_0\in(\alpha,\beta)$, $a_0=\varphi(\alpha_0)$, $b_0=\varphi(\beta_0)$ важи

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx=\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Доказ. Пред се да забележиме дека според условот функцијата f е определена на множеството вредности на функцијата φ, па затоа има смисла сложената функција $f(\varphi(t))$. Бидејќи и во двете страни на равенството (1) подинтегралните функции се непрекинати заклучуваме дека постојат и двата интеграла во ова равенство.



Цртеж 3

Нека $F(x)$ е произволна примитивна функција за функцијата $f(x)$ на интервалот (a,b). Тогаш за секој $t\in(\alpha,\beta)$ има смисла сложената функција $F(\varphi(t))$ која е примитивна за функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ бидејќи

$$\tfrac{d}{dt}F(\varphi(t))=F_{\varphi}'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Сега од теоремата на Њутн-Лајбниц добиваме

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta_0))-F(\varphi(\alpha_0))=F(b_0)-F(a_0)=\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx. \ ♦$$

11.2. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

Воведуваме замена $\ln x=t$ и добиваме

$$(\ln x)'dx=dt, \text{ т.е. } \tfrac{dx}{x}=dt.$$

Понатаму, за $x=1$ имаме $t=\ln 1=0$, а за $x=e$, $t=\ln e=1$. Според тоа,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}.$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Воведуваме замена $1-x=t^2$ и добиваме

$$(1-x)'dx=(t^2)'dt\ ,$$

т.е. $dx=-2tdt$. Понатаму, $\sqrt{1-x}=t$ и за $x=-1$ имаме $t=\sqrt{1-(-1)}=\sqrt{2}$, а за $x=0$, $t=\sqrt{1-0}=1$. Според тоа,

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{2tdx}{t}=2\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dt=2t\Big|_{1}^{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)\ .$$

в) Ќе го пресметаме интегралот $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

Воведуваме замена $x=t^2$ и добиваме $dx=2tdt$. Понатаму, $t=\sqrt{x}$ и за $x=0$ имаме $t=\sqrt{0}=0$, а за $x=1$, $t=\sqrt{1}=1$. Според тоа,

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{t^2 2tdt}{t+1}=2\int\limits_{0}^{1}\frac{t^3}{t+1}dt=2\int\limits_{0}^{1}\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=2\int\limits_{0}^{1}(\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1})dt=2\int\limits_{0}^{1}(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt$$

$$=2(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|)\Big|_{0}^{1}=2(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+1-\ln|1+1|)-2(\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}+0-\ln|0+1|)$$

$$=2(\frac{5}{6}-\ln 2)=\frac{5}{3}-2\ln 2.$$

г) Ќе го пресметаме интегралот $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

Воведуваме замена $e^x=t$ и добиваме $e^x dx=dt$. Понатаму, за $x=0$ имаме $t=e^0=1$, а за $x=1$, $t=e^1=e$. Според тоа,

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\limits_{1}^{e}\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t\Big|_{1}^{e}=\operatorname{arctg}e-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}.\ \blacklozenge$$

11.3. Теорема. Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ се непрекинато диференцијабилни на интервалот $[a,b]$, тогаш

$$\int\limits_{a}^{b}udv=uv\Big|_{a}^{b}-\int\limits_{a}^{b}vdu\ . \tag{2}$$

Доказ. Имаме

$$\int\limits_{a}^{b}(uv)'dx=\int\limits_{a}^{b}(uv'+vu')dx=\int\limits_{a}^{b}udv+\int\limits_{a}^{b}vdu\ ,$$

при што постојат сите интеграли во последната низа равенства бидејќи подинтегралните функции се непрекинати. Од Њутн-Лајбницовата формула следува

$$\int\limits_{a}^{b}(uv)'dx=uv\Big|_{a}^{b}$$

и ако замениме во претходното равенство, ја добиваме формулата (2). ♦

11.4. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Користиме парцијална интеграција $dv = e^x dx$ и $u = x$, т.е. $v = \int e^x dx = e^x$ и $du = dx$, па затоа

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = (x-1)e^x\Big|_0^1 = (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = 1.$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int\limits_1^2 \ln x dx$.

Имаме,

$$\int\limits_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

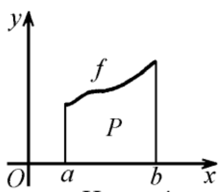
в) Ќе го пресметаме интегралот $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

За методот на парцијална интеграција имаме $u = x$ и $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$, па затоа $du = dx$ и $v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$. Според тоа,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x\operatorname{ctg} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\operatorname{ctg} x dx = -x\operatorname{ctg} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= -x\operatorname{ctg} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}. \ \blacklozenge$$

12. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКА ФИГУРА



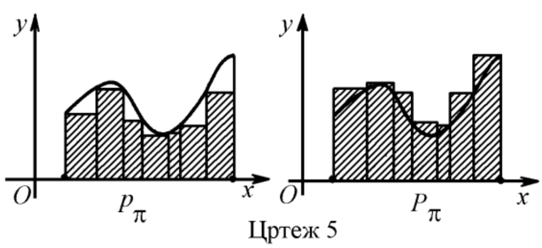
Цртеж 4

12.1. Дефиниција. Нека f е непрекината на интервалот $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Множеството

$$P = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{1}$$

го нарекуваме *криволиниски трапез* определен со графикот на функцијата f (црт. 4).

12.2. Теорема. Ако f е непрекината на интервалот $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, тогаш за плоштината $S = \mu(P)$ на криволинискиот трапез имаме



Цртеж 5

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{2}$$

Доказ. Нека $\pi = \{x_k\}_{k=0}^n$ е поделба на $[a,b]$ и да ставиме

$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]\,,\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,,$$
$$m_k = \min_{x\in\Delta_k} f(x) \text{ и } M_k = \max_{x\in\Delta_k} f(x),\ k = 1,2,...,n\,.$$

Со p_π и P_π да ги означиме фигурите составени од сите правоаголници од видот

$$p_{\pi,k} = \{(x,y)\} \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\,, 0 \le y \le m_k\} \tag{3}$$

$$P_{\pi,k} = \{(x,y)\} \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\,, 0 \le y \le M_k\} \tag{4}$$

(црт. 5), т.е.

$$p_\pi = \bigcup_{k=0}^n p_{\pi,k} \text{ и } P_\pi = \bigcup_{k=0}^n P_{\pi,k}\,. \tag{5}$$

Од дефиницијата на m_k и M_k следува дека за секоја поделба π важи $p_\pi \subseteq P \subseteq P_\pi$, па затоа

$$\mu(p_\pi) \le \mu(P) \le \mu(P_\pi)\,. \tag{6}$$

Од (3) и (4) следува дека

$$\mu(p_{\pi,k}) = m_k\Delta_k\,, \mu(P_{\pi,k}) = M_k\Delta_k$$

и бидејќи правоаголниците $p_{\pi,k}$, односно $P_{\pi,k}$, имаат заеднични точки само на страните од (5), следува

$$\mu(p_\pi) = \sum_{k=0}^n m_k\Delta x_k = s_\pi \text{ и } \mu(P_\pi) = \sum_{k=0}^n M_k\Delta x_k = S_\pi\,.$$

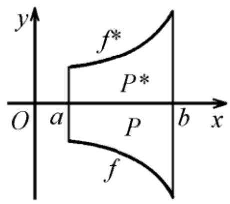
Сега, од неравенствата (6) следува

$$s_\pi \le \mu(P) \le S_\pi$$

и бидејќи

$$\lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi = \int_a^b f(x)dx$$

од последното равенство добиваме дека важи (2). ♦



Цртеж 6

12.3. Последица. Ако f е непрекината на $[a,b]$ и $f(x) \le 0$ и $x \in [a,b]$, тогаш за плоштината S на криволинискиот трапез важи

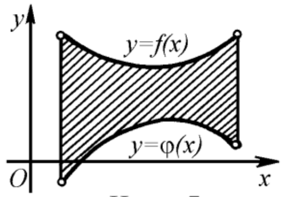
$$S = -\int_a^b f(x)dx\,. \tag{7}$$

Доказ. Нека $f^*(x) = -f(x)$ за секој $x \in [a,b]$ и P^* е множеството симетрично на P во однос на $x-$оската (црт. 6). Тогаш, од теорема 12.2 следува

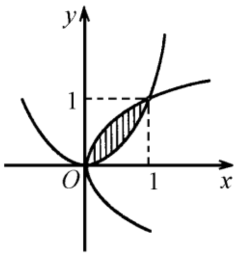
$$S = \mu(P) = \mu(P^*) = \int_a^b f^*(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,. ♦$$

12.4. Забелешка. Од досега изнесеното следува дека плоштината на фигурата определена со кривите $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ и правите $x = a,\ y = b,\ a \le b$ во случај кога $f(x) \ge \varphi(x)$ за секој $x \in [a,b]$ (црт. 7) се пресметува според формулата

$$S = \int_a^b [\,f(x) - \varphi(x)]dx\,.$$



Цртеж 7



Цртеж 8

12.5. Пример. а) Ќе ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (црт. 8). Решенијата на равенката $\sqrt{x} = x^2$ се $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, па затоа дадените криви се сечат во точките $(0,0)$ и $(1,1)$. Бидејќи на интервалот $[0,1]$ важи $\sqrt{x} \ge x^2$ од претходната забелешка имаме

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = (\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3}\,.$$

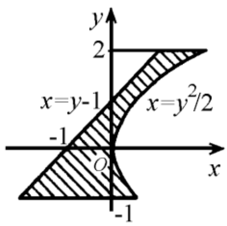
б) Да ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена со правите $y = -1$, $y = 2$, $y - x = 1$ и кривата $y^2 = 2x$ (црт. 9).

Често пати, како што е случај во овој пример, за поедноставно пресметување на плоштина на дадена фигура може да се заменат улогите на променливите x и y. Притоа, формулата од претходната забелешка го добива видот

$$S = \int_c^d [g(y) - \psi(y)]dy\,.$$

Во нашиот случај имаме

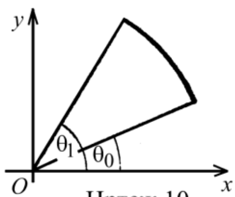
$$S = \int_{-1}^{2} (\frac{y^2}{2} - y + 1)dy = (\frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + y)\Big|_{-1}^{2} = 3\,. \ ♦$$



Цртеж 9

12.6. Плоштина на кружен исечок. За плоштината на кружниот исечок на кругот $x^2 + y^2 = r^2$ ограничен со радиусите

$$\theta = \theta_0 \text{ и } \theta = \theta_1,\ 0 \le \theta_0 \le \theta_1 < \tfrac{\pi}{2}$$

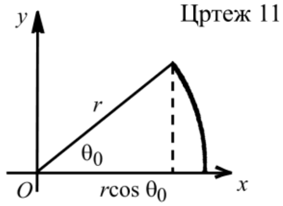


Цртеж 10

(црт. 10) имаме $S(\theta_0,\theta_1) = S(0,\theta_1) - S(0,\theta_0)$, па затоа доволно е да определиме $S(0,\theta_0)$, кога $\theta_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$, (црт. 11). Бараната плоштина ќе ја пресметаме како збир на две плоштини од кои едната е определена со

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta_0\,,\ x \in [0, r\cos\theta_0]\,,$$

а другата со $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[r\cos\theta_0, r]$, т.е.



$$S(0,\theta_0)=\int\limits_0^{r\cos\theta_0} x\,\mathrm{tg}\,\theta_0 dx+\int\limits_{r\cos\theta_0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx\,.$$

За вториот интеграл воведуваме замена

$$x=r\cos\theta\,,\ dx=-r\sin\theta\,,\ y=r\sin\theta\,,$$

при што $\theta\in[0,\theta_0]$ и добиваме

$$S(0,\theta_0)=\mathrm{tg}\,\theta_0\int\limits_0^{r\cos\theta_0} xdx-r^2\int\limits_{\theta_0}^{0}\sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{r\cos\theta_0}\mathrm{tg}\,\theta_0+r^2\int\limits_0^{\theta_0}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{r^2\cos^2\theta_0}{2}\mathrm{tg}\,\theta_0+\frac{r^2}{2}\theta_0-\frac{r^2\sin 2\theta}{4}\bigg|_0^{\theta_0}=\frac{r^2}{2}\theta_0.$$

Според тоа,

$$S(\theta_0,\theta_1)=\frac{r^2}{2}(\theta_1-\theta_0)\,. \qquad (8)$$

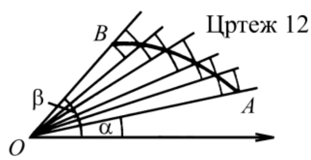
Може да се докаже дека формулата (8) е точна за секој исечок со агол $\theta_1-\theta_0\in[0,2\pi)$, од што следува дека плоштината на круг со радиус r е еднаква на πr^2. ♦

12.7. Плоштина на рамнинска фигура во поларни координати. Нека фигурата P е определена со кривата зададена во поларни координати

$$\rho=\rho(\varphi),\alpha\le\varphi\le\beta$$

и отсечките $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ кои може да дегенерираат во точки (црт. 12), т.е.

$$P=\{(\rho,\varphi)\,|\ \alpha\le\varphi\le\beta, 0\le\rho\le\rho(\varphi)\}\,.$$



Да ја определиме плоштината $S=\mu(P)$ на фигурата P.

Нека $\pi=\{\varphi_k\}_{k=0}^{k_\pi}$ е поделба на интервалот $[\alpha,\beta]$ и да ставиме

$$\Delta_k=[\varphi_{k-1},\varphi_k]\,,\ m_k=\min_{\varphi\in\Delta_k}\rho(\varphi)\,,\ M_k=\max_{\varphi\in\Delta_k}\rho(\varphi)\,,\ \Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$$

$$p_{\pi,k}=\{(\rho,\varphi)\,|\,\varphi_{k-1}\le\varphi\le\varphi_k, 0\le\rho\le m_k\}\,,\ p_\pi=\bigcup_{k=0}^{k_\pi}p_{\pi,k}\,,$$

$$P_{\pi,k}=\{(\rho,\varphi)\,|\,\varphi_{k-1}\le\varphi\le\varphi_k, 0\le\rho\le M_k\}\ \text{и}\ P_\pi=\bigcup_{k=0}^{k_\pi}P_{\pi,k}$$

Множествата $p_{\pi,k}$ и $P_{\pi,k}$ се кружни исечоци со агол $\Delta\varphi_k$ и радиуси m_k и M_k, соодветно, а множествата p_π и P_π се степенести фигури составени од споменатите исечоци и се впишани во фигурата P и опишани околу фигурата P (црт. 12), т.е. важи $p_\pi \subseteq P \subseteq P_\pi$, што значи

$$\mu(p_\pi) \le \mu(P) \le \mu(P_\pi)\,. \tag{9}$$

Од формулата (8) добиваме

$$\mu(p_{\pi,k}) = \tfrac{m_k^2 \Delta\varphi_k}{2} \text{ и } M(p_{\pi,k}) = \tfrac{M_k^2 \Delta\varphi_k}{2}\,.$$

па затоа ако ги собереме елементарните плоштини наоѓаме

$$\mu(p_\pi) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_\pi} m_k^2 \Delta\varphi_k \text{ и } \mu(P_\pi) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_\pi} M_k^2 \Delta\varphi_k\,.$$

Добиените суми соодветствуваат на горната и долната сума на Дарбу, s_π и S_π за функцијата $\tfrac{1}{2}\rho^2$. Сега, од неравенствата (9) следува

$$s_\pi \le \mu(P) \le S_\pi$$

и, бидејќи

$$\lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi\,,$$

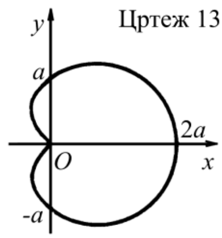
од последното неравенство добиваме дека важи

$$S = \mu(P) = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi\,. \blacklozenge \tag{10}$$

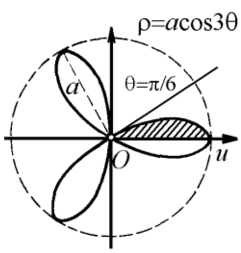
12.8. Пример. а) Ќе ја определиме плоштината на фигурата ограничена со кардиоидата $\rho = a(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi$, (црт. 13).

Со примена на формулата (10) наоѓаме

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \tfrac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi + \tfrac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi \\ &= \tfrac{3a^2}{2} \end{aligned}$$



Цртеж 13



Цртеж 14

б) Ќе ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена со кривата

$$\rho = a\cos 3\theta,\ a > 0\,,$$

чиј график е даден на црт. 14.

Плоштината на фигурата е шест пати поголема од плоштината на шрафираниот дел кој соодветствува на промената на аголот θ од 0 до $\tfrac{\pi}{6}$. Според тоа, користејќи ја формулата (10) добиваме

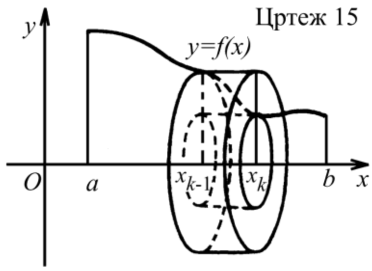
$$S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tfrac{1}{2}a^2\cos^2 3\theta d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d(3\theta)=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\tfrac{\pi a^2}{4}$$

што значи дека бараната плоштина е еднаква на четвртина од плоштината на кругот со радиус a. ♦

13. ВОЛУМЕН НА РОТАЦИОНО ТЕЛО

13.1. Теорема. Ако f е непрекината на $[a,b]$ и $f(x)\ge 0$, за $x\in[a,b]$, а Q е телото добиено со ротација на криволинискиот трапез P определен со графикот на функцијата $y=f(x)$, тогаш за волуменот V на тоа тело имаме

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx. \qquad (1)$$



Цртеж 15

Доказ. Нека q_τ и Q_τ се телата добиени со ротација околу $x-$оската на степенестите фигури p_τ и P_τ кои соодветствуваат на некоја поделба τ на интервалот $[a,b]$. Од $p_\tau\subseteq P\subseteq P_\tau$ следува $q_\tau\subseteq Q\subseteq Q_\tau$, што значи

$$\mu(q_\tau)\le\mu(Q)\le\mu(Q_\tau). \qquad (2)$$

Волумените $\mu(q_\tau)$ и $\mu(Q_\tau)$ се еднакви на сумите на волумените на цилиндрите од кои се составени и кои се добиваат со ротација на правоаголниците $p_{\tau,k}$ и $P_{\tau,k}$ (црт. 15), и

$$\mu(q_\tau)=\sum_{k=0}^{k_\tau}\pi m_k^2\Delta x_k\ ,\ \mu(Q_\tau)=\sum_{k=0}^{k_\tau}\pi M_k^2\Delta x_k\ .$$

Од последните две равенства следува дека $\mu(q_\tau)$ и $\mu(Q_\tau)$ се интегрални суми на функцијата $\pi[f(x)]^2$ и како оваа функција е интеграбилна добиваме дека

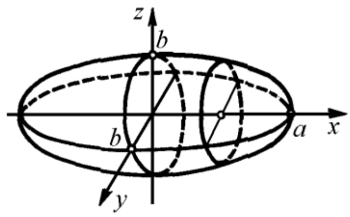
$$\lim_{d(\tau)\to 0}\mu(q_\tau)=\lim_{d(\tau)\to 0}\mu(Q_\tau)=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx\ .$$

Конечно, формулата (1) следува од последните равенства и од неравенствата (2). ♦

13.2. Пример. а) При ротација на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ околу $x-$оската (цртеж 16), согласно со формулата (1) за волуменот на ротационото тело што се добива, имаме

$$V=\pi\int_{-a}^{+a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{+a}b^2(1-\tfrac{x^2}{a^2})dx=\pi b^2(x-\tfrac{x^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{+a}=\tfrac{4}{3}\pi ba^2.$$

Лесно се гледа дека, ако ротацијата е околу $y-$ оската, тогаш волуменот на телото е $\frac{4}{3}\pi ab^2$. Во случај кога $a=b$, всушност имаме ротација на круг со радиус a и притоа се добива топка со радиус a чиј волумен е еднаков на $\frac{4}{3}\pi a^3$.

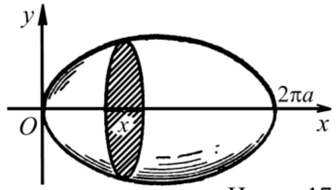


Цртеж 16

б) Ќе го пресметаме волуменот на телото кое се добива со ротација на првиот свод на циклоидата

$$x(t)=a(t-\sin t), y(t)=a(1-\cos t)$$

околу $x-$ оската (црт. 17).



Цртеж 17

Според формулата (1) имаме

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}[f(x)]^2dx\,.$$

Воведуваме смена

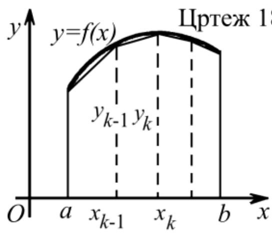
$$x(t)=a(t-\sin t)\,,\ dx=a(1-\cos t)\,,\ y=a(1-\cos t)\,,\ t\in[0,2\pi]$$

и добиваме $V=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=5\pi^2a^3$. ♦

14. ПЛОШТИНА НА РОТАЦИОНА ПОВРШИНА

14.1. Нека функцијата f е ненегативна на интервалот $[a,b]$, а $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{k_\tau}$ е поделба на $[a,b]$. Во графикот на функцијата f ќе впишеме искршена линија γ_τ која соодветствува на поделбата τ (црт. 18), т.е. искршена линија со темиња (x_k,y_k) каде

$$y_k=f(x_k), k=0,1,2,...,k_\tau\,. \tag{1}$$



Делот на оваа искршена линија со краеви во точките (x_{k-1},y_{k-1}) и (x_k,y_k), кој го нарекуваме $k-$ти дел на γ_τ, при ротација околу $x-$ оската опишува обвивка на потсечен конус (во случајот кога $y_{k-1}=y_k$ тоа е обвивка на цилиндар) чија плоштина е еднаква на

$$\pi(y_{k-1}+y_k)\Delta(\gamma_\tau)_k\,,$$

каде y_{k-1} и y_k се радиусите на основите, а $\Delta(\gamma_\tau)_k$ е должината на $k-$ти дел на γ_τ. Ако ставиме $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$, тогаш

$$\Delta(\gamma_\tau)_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}\ .$$

Според тоа, плоштината L_τ на површината добиена со ротација на искршената линија околу $x-$оската се изразува со формулата

$$L_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \pi(y_{k-1}+y_k)\Delta(\gamma_\tau)_k = \pi\sum_{k=1}^{k_\tau}(y_{k-1}+y_k)\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}\ . \tag{2}$$

Ако постои $L = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} L_\tau$, тогаш бројот L го нарекуваме *плоштина на ротационата површина* добиена со ротација на f околу $x-$оската над интервалот $[a,b]$.

Нека функцијата f е непрекинато диференцијабилна на интервалот $[a,b]$. Од теоремата на Лагранж имаме

$$\Delta y_k = f\,'(\xi_k)\Delta x_k,\quad x_{k-1}\le \xi_k \le x_k,\ k=1,2,...,k_\tau\,,$$

па затоа

$$L_\tau = \pi\sum_{k=1}^{k_\tau}(y_{k-1}+y_k)\sqrt{1+f\,'^2(\xi_k)}\Delta x_k\ .$$

Да ја споредиме сумата L_τ со сумата

$$\sigma_\tau = 2\pi\sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\sqrt{1+f\,'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

која е интегрална сума за функцијата $2\pi f(x)\sqrt{1+f\,'^2(x)}$.

Функцијата f е непрекината на $[a,b]$, па затоа таа е рамномерно непрекината на $[a,b]$, т.е. за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што за секои $x,x'\in[a,b]$ за кои $|x'-x|<\delta$ важи $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Затоа, ако поделбата τ е таква што $d(\tau)<\delta$, тогаш $|y_{k-1}-f(\xi_k)|<\varepsilon$ и $|y_k-f(\xi_k)|<\varepsilon$. Функцијата $f\,'(x)$ е ограничена на $[a,b]$, па затоа и функцијата $\sqrt{1+f\,'^2(x)}$ е ограничена на $[a,b]$, т.е. постои $C>0$ таков што $\sqrt{1+f\,'^2(x)}\le C$ за секој $x\in[a,b]$. Сега имаме

$$\begin{aligned}|L_\tau-\sigma_\tau| &\le \pi\sum_{k=1}^{k_\tau}|y_{k-1}+y_k-2f(\xi_k)|\sqrt{1+f\,'^2(\xi_k)}\Delta x_k\\ &\le \pi C\sum_{k=1}^{k_\tau}|y_{k-1}+y_k-2f(\xi_k)|\Delta x_k\\ &\le \pi C\sum_{k=1}^{k_\tau}(|y_{k-1}-f(\xi_k)|+|y_k-f(\xi_k)|)\Delta x_k\\ &\le 2\pi\varepsilon C\sum_{k=1}^{k_\tau}\Delta x_k = 2\pi\varepsilon C(b-a)\end{aligned}$$

што значи $\lim\limits_{d(\tau)\to 0}(L_\tau - \sigma_\tau) = 0$ и бидејќи $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \sigma_\tau = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ наоѓаме

$$L = \lim_{d(\tau)\to 0} L_\tau = \lim_{d(\tau)\to 0} \sigma_\tau = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\ . \ \blacklozenge \tag{3}$$

14.2. Пример. Плоштината на ротационото тело кое се добива со ротација на еден свод на функцијата $y = \sin x$ изнесува

$$L = 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt = 2\pi[\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}]\ . \ \blacklozenge$$

15. ДОЛЖИНА НА ЛАК НА РАМНИНСКА КРИВА

15.1. На изучувањето на рамнинските и просторните криви нема посебно да се задржуваме, но овде ќе се осврнеме само на примената на Римановиот интеграл за пресметување на должината на лак на рамнинска крива.

Нека функциите φ, ψ се непрекинати на интервалот $[a,b]$. Множеството точки во рамнината

$$\Gamma = \{(x,y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a,b]\}$$

го нарекуваме *непрекината рамнинска крива*.

Нека $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е поделба на интервалот $[a,b]$ и Γ_π е искршената линија која се добива со поврзување на паровите соседни точки $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ и $(\varphi(t_{i+1}), \psi(t_{i+1}))$ на Γ со отсечки. Должината на Γ_π е еднаква на

$$l(\Gamma_\pi) = \sum_{i=0}^{k_\pi - 1}\sqrt{(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1})-\psi(t_i))^2}\ .$$

Ако постои конечната граница

$$\lim_{d(\pi)\to 0} l(\Gamma_\pi) = l(\Gamma)\,, \tag{1}$$

тогаш кривата Γ ја нарекуваме *мерлива*, а границата $l(\Gamma)$ ја нарекуваме *должина на кривата* Γ.

15.2. Теорема. Ако функциите φ, ψ се такви што имаат непрекинати први изводи, тогаш

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt\ .$$

Доказ. Од теоремата на Лагранж следува дека за секој $i = 0,1,\ldots,k_\pi - 1$ постојат $\xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ такви што

$$\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\varphi'(\xi_i)\Delta t_i,\quad \psi(t_{i+1})-\psi(t_i)=\psi'(\eta_i)\Delta t_i\,,$$

каде $\Delta t_i = t_{i+1}-t_i$. Според тоа,

$$l(\Gamma_\pi)=\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i=\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i+r_\pi\,, \quad (2)$$

каде

$$r_\pi=\Big(\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\Big)\Delta t_i\,.$$

Јасно, $\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}$ е непрекината на $[a,b]$, па за тоа постои определениот интеграл

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,. \quad (3)$$

Освен тоа, ако се искористи дека за секои $u,v,w\in\mathbf{R}$ е исполнето неравенството

$$|\sqrt{u^2+v^2}-\sqrt{u^2+w^2}\,|\le|v-w|\,,$$

тогаш за r_π добиваме

$$\begin{aligned}|r_\pi|&\le\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\Big|\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\,\Big|\,\Delta t_i\\&\le\sum_{i=0}^{k_\pi-1}|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|\Delta t_i\le\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\omega_i(\psi')\Delta t_i\,,\end{aligned}$$

па затоа

$$\lim_{d(\pi)\to 0} r_\pi=0\,. \quad (4)$$

Конечно, од равенствата (2), (3) и (4) следува

$$l(\Gamma)=\lim_{d(\pi)\to 0}l(\Gamma_\pi)=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,.\ \blacklozenge$$

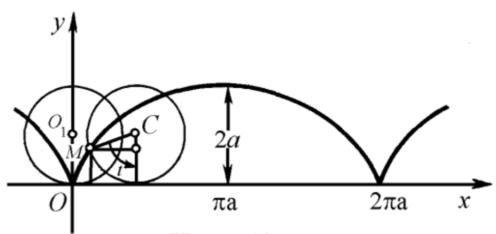
15.3. Забелешка. Може да се докажат следниве тврдења:

а) ако функцијата f има непрекинат прв извод на $[a,b]$ и

$$\Gamma=\{(x,y)\,|\,y=f(x),\,x\in[a,b]\}\,,$$

тогаш кривата Γ е мерлива и притоа важи

$$l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,;$$



Цртеж 19

б) ако ρ има непрекинат прв извод на $[\theta_1,\theta_2]$ и

$$\Gamma = \{(\theta,\rho) \mid \rho = \rho(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$$

е крива зададена во поларни координати, тогаш кривата Γ е мерлива и притоа важи

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta .$$

Доказите на последните две тврдења ги оставаме на читателот за вежба.

15.4. Пример. а) Ќе ја определиме должината на лакот на првиот свод на циклоидата $x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t)$, crt. 19. Имаме,

$$x'(t) = a(1-\cos t),\ y'(t) = a\sin t,\ t \in [0, 2\pi],$$

па од теорема 15.2 следува дека

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{t}{2}\,dt = 8a.$$

б) Ќе ја определиме вкупната должина на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} . \qquad (5)$$

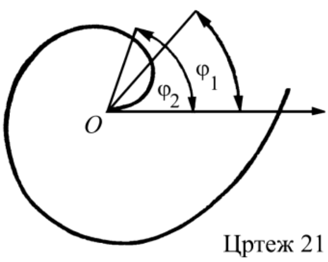
Цртеж 20

Релацијата (5) е парна и по променливата x и по променливата y, што значи дека астроидата се состои од четири лакови кои имаат еднаква должина, (црт. 20). Според тоа, доволно е да ја пресметаме должината на лакот на кривата $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ кој се наоѓа во првиот квадрант. Имаме,

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{1+y'^2} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}},\ x \in [0, a]$$

па затоа

$$l = 4L = 4\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx = 6a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a = 6a .$$



Цртеж 21

в) Ќе ја пресметаме должината на првиот завој на Архимедовата спирала $\rho = a\varphi$, црт. 21. Имаме,

$$\rho = a\varphi,\ \rho' = a,\ \varphi \in [0, 2\pi],$$

па затоа

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + a^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}}\Big)d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})]\Big|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]. \ \blacklozenge$$

16. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

16.1. Во претходните разгледувања без доказ го дадовме следниов критериум за интеграбилност на една функција.

Функцијата f *интеграбилна на интервалот* $[a,b]$ *ако и само ако таа е ограничена на* $[a,b]$ *и множеството нејзини прекини е конечно или е еквивалентно се множеството природни броеви* $\mathbf{N}$.

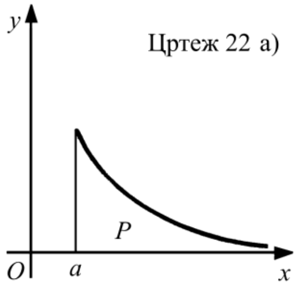
Во овој случај определениот интеграл го нарекуваме *својствен*. Ако некој од условите во теорема 8 не се исполнети, т.е. ако некоја од границите на интегрирање a или b е бесконечна или подинтегралната функција е неограничена на областа на интегрирање, тогаш велиме дека станува збор за *несвојствен интеграл*.

16.2. Дефиниција. Нека функцијата

$$f:[a,b)\to\mathbf{R},\, a\in\mathbf{R},\ -\infty<a<b\le+\infty$$

е таква што f е интеграбилна на $[a,A]$, за секој

$$A\in[a,b) \text{ и } \varphi(A)=\int_a^A f(x)dx,\ A\in[a,b).$$



Цртеж 22 а)

Несвојствен интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

од функцијата f на множеството $[a,b)$ ја нарекуваме конечната граница

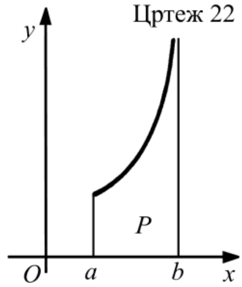
$$\lim_{A\to b}\varphi(A)=\lim_{A\to b}\int_a^A f(x)dx\,, \tag{2}$$

ако постои. Притоа ќе велиме дека несвојствениот интеграл (1) *конвергира*. Ако границата (2) не постои или е бесконечна, тогаш ќе велиме дека несвојствениот интеграл *дивергира*.

16.3. Забелешка. Геометриската смисла на несвојствениот интеграл (1) од ненегативна функција f е во тоа што тој, слично на својствениот интеграл, е еднаков на плоштината на криволинискиот трапез

$$P=\{(x,y)\,|\,a\le x<b,\,0\le y\le f(x)\}$$

определен со графикот на функцијата f (црт. 22), при што трапезот P е неограничено множество.



Цртеж 22 б)

16.4. Забелешка. Ако интегралот (1) конвергира, тогаш за секој $c>a$ конвергира несвојствениот интеграл

$$\int_c^b f(x)dx \tag{3}$$

при што

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{4}$$

Јасно, ако за некој $c > a$ интегралот (3) конвергира, тогаш конвергира и интегралот (1) и притоа важи равенството (4). И двете тврдења следуваат од равенството

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx, \quad a \le c \le A$$

и дефиницијата на несвојствен интеграл. Во натамошните разгледувања овие тврдења ќе ги користиме без тоа посебно да го нагласуваме.

16.5. Дефиниција. Нека функцијата

$$f:(a,b] \to \mathbf{R}, b \in \mathbf{R},\ -\infty \le a < b < +\infty$$

е таква што f е интеграбилна на $[A,b]$, за секој $A \in (a,b]$ и

$$\varphi(A) = \int_A^b f(x)dx,\ A \in (a,b].$$

Несвојствен интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5}$$

од функцијата f на множеството $(a,b]$ ја нарекуваме конечната граница

$$\lim_{A \to a} \varphi(A) = \lim_{A \to a} \int_A^b f(x)dx \tag{6}$$

ако постои. Притоа ќе велиме дека несвојствениот интеграл (5) *конвергира.* Ако границата (6) не постои или е бесконечна, тогаш ќе велиме дека несвојствениот интеграл *дивергира.*

И во овој случај важи тврдењето од забелешка 2. Доказот го оставаме на читателот за вежба.

16.6. Пример. а) Интегралот $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ конвергира и има вредност 1, бидејќи

$$\lim_{A \to +\infty} \varphi(A) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-x}dx = \lim_{A \to +\infty} (1 - e^{A}) = 1.$$

б) Интегралот $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ конвергира и има вредност $\frac{\pi}{2}$, бидејќи

$$\lim_{A\to+\infty}\varphi(A)=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg}A-0)=\frac{\pi}{2}.$$

в) Нека $a>0$. Несвојствениот интеграл $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^b}$ конвергира и има вредност $\frac{a^{1-b}}{b-1}$, ако $b>1$ и дивергира при $b\le 1$.

Навистина, функцијата од A

$$\varphi(A)=\int_a^A \frac{dx}{x^b}=\begin{cases}\ln A-\ln a, & b=1\\ \frac{A^{1-b}}{1-b}-\frac{a^{1-b}}{1-b}, & b\ne 1\end{cases}$$

кога $A\to+\infty$ е таква што

$$\varphi(A)\to\frac{a^{1-b}}{b-1},\ b>1 \text{ и } \varphi(A)\to+\infty,\ b\le 1.$$

г) Интегралот $\int_0^{+\infty}\sin x dx$ дивергира бидејќи функцијата

$$\varphi(A)=\int_0^A \sin x dx=1-\cos A,\ A>0$$

нема граница кога $A\to+\infty$.

д) Несвојствениот интеграл $\int_0^1 \ln x dx$ конвергира бидејќи

$$\int_A^1 \ln x dx=-1-A\ln A+A\to-1, \text{ кога } A\to 0^+. \ \blacklozenge$$

16.7. Дефиниција. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R},$, $-\infty\le a<b\le+\infty$ и $c\in(a,b)$. *Несвојствен интеграл*

$$\int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

од функцијата f на множеството (a,b) го нарекуваме парот несвојствени интеграли

$$\int_a^c f(x)dx \text{ и } \int_c^b f(x)dx.$$

Ако двата интеграла конвергираат, ќе велиме дека несвојствениот интеграл (7) *конвергира.* Ако барем еден од двата интеграла дивергира ќе велиме дека несвојствениот интеграл (7) *дивергира.* Притоа ќе пишуваме

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \tag{8}$$

16.8. Пример. Интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ конвергира и има вредност π. Навистина, од пример 16.6 а) следува дека несвојствениот интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ постои и има вредност $\frac{\pi}{2}$. Аналогно се докажува дека и несвојствениот интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$ постои и има вредност $\frac{\pi}{2}$. Сега, од (8), при $c=0$, добиваме

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi\ . \ \blacklozenge$$

16.9. Сега ќе ги разгледаме несвојствените интеграли од функции определени на интервал од обликот $[a,b)$ и интеграбилни според Риман на интервал $[a,A],\ a\le A<b$.

Тврдењата, аналогни на тврдењата што ќе ги докажеме важат и за преостанатите типови несвојствени интеграли. Нивната формулација и доказите ги оставаме на читателот за вежба.

16.10. Теорема. Ако несвојствените интеграли $\int\limits_{a}^{b} f_i(x)dx,\ i=1,2$ конвергираат, тогаш конвергира и несвојствениот интеграл

$$\int\limits_{a}^{b}(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x))dx$$

и притоа важи

$$\int\limits_{a}^{b}(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x))dx=C_1\int\limits_{a}^{b} f_1(x)dx+C_2\int\limits_{a}^{b} f_2(x)dx\ ,$$

за секои $C_1,C_2\in\mathbf{R}$.

Доказ. Од својствата на граничните вредности и Римановиот интеграл имаме:

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{b}(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x))dx &= \lim_{A\to b}\int\limits_{a}^{A}(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x))dx\\ &= \lim_{A\to\infty}(C_1\int\limits_{a}^{A} f_1(x)dx+C_2\int\limits_{a}^{A} f_2(x)dx)\\ &= C_1\lim_{A\to\infty}\int\limits_{a}^{A} f_1(x)dx+C_2\lim_{A\to\infty}\int\limits_{a}^{A} f_2(x)dx\\ &= C_1\int\limits_{a}^{b} f_1(x)dx+C_2\int\limits_{a}^{b} f_2(x)dx\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

16.11. Теорема. Ако f е непрекината на $[a,b)$ и F е примитивна функција на f, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a).$$

Доказ. Нека $A \in [a,b)$. Тогаш, согласно со Њутн-Лајбницовата формула имаме $\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a)$. Сега, од дефиниција 16.2 имаме

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to b} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to b} [F(A) - F(a)] = F(b^-) - F(a). \ ♦$$

16.12. Теорема. Нека f, g имаат непрекинати први изводи на $[a,b)$. Ако еден од несвојствените интеграли

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx, \quad \int_a^b g(x)f'(x)dx \tag{9}$$

конвергира и постои конечната граница $\lim_{A\to b} f(A)g(A)$, тогаш конвергира и вториот интеграл во (9) и важи равенството

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \lim_{A\to b} f(A)g(A) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{10}$$

Доказ. Нека претпоставиме дека постои несвојствениот интеграл

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Тогаш со примена на парцијална интеграција, добиваме

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g'(x)dx &= \lim_{A\to b} \int_a^A f(x)g'(x)dx \\
&= \lim_{A\to b} [f(A)g(A) - f(a)g(a) - \int_a^A f'(x)g(x)dx] \\
&= \lim_{A\to b} f(A)g(A) - f(a)g(a) - \lim_{A\to b} \int_a^A f'(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

што значи дека постои и другиот несвојствен интеграл и важи (10). ♦

16.13. Пример. Да го пресметаме интегралот

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \ n = 0,1,2,\ldots.$$

Од пример 16.6 а) имаме

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Со примена на теорема 16.12, при $f(x) = x^n$ и $g'(x) = e^{-x}$, добиваме

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -\lim_{A\to+\infty} A^n e^{-A} + 0\cdot e^0 + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1}. \qquad (11)$$

Со последователна примена на рекурентната формула (11) добиваме $I_n = n!I_0 = n!$. ♦

16.14. Теорема. Ако f е непрекината на $[a,b)$ и φ е непрекинато диференцијабилна на $[c,d)$, $-\infty < c < d \le +\infty$ и се исполнети условите $\varphi([c,d)) \subseteq [a,b)$, $a = \varphi(c)$ и $b = \lim_{t\to d} \varphi(t)$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (12)$$

при што од егзистенцијата на интегралот на левата страна на (12) следува егзистенцијата на интегралот на десната страна на (12).

Доказ. Непосредно следува од дефиницијата на несвојствен интеграл и теоремата за смена на променливи кај Риманов интеграл. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

16.15. Забелешка. Ако за функцијата φ од теорема 16.14 постои инверзна функција φ^{-1} за која се исполнети истите услови како и за функцијата φ, тогаш може да се воведе замената $t = \varphi^{-1}(x)$ и притоа или двата интеграла конвергираат или дивергираат истовремено.

16.16. Пример. Ако ја искористиме замената $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, имаме

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}. \ ♦$$

17. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ ОД НЕНЕГАТИВНИ ФУНКЦИИ

17.1. Теорема. Ако $f(x) \ge 0$ за секој $x \in [a,b)$, тогаш интегралот $\int_a^b f(x)dx$ конвергира ако и само ако постои константа $C > 0$ таква што за секој $A \in [a,b)$ важи

$$\varphi(A)=\int_a^A f(x)dx \le C .$$

Доказ. Ако $a \le A < A' < b$, тогаш заради ненегативноста на функцијата f имаме $\int_A^{A'} f(x)dx \ge 0$, па затоа

$$\varphi(A')=\int_a^{A'} f(x)dx=\int_a^A f(x)dx+\int_A^{A'} f(x)dx \ge \int_a^A f(x)dx=\varphi(A)$$

т.е. функцијата φ монотоно расте на $[a,b)$.

Сега од дефиниција 16.2 и својствата на граница на функција непосредно следува дека интегралот $\int_a^b f(x)dx$ постои ако и само ако монотоно растечката функција φ е ограничена од горе, т.е. ако и само ако постои константа $C>0$ таква што за секој $A\in[a,b)$ важи $\varphi(A)=\int_a^A f(x)dx \le C$. ♦

17.2. Теорема. Нека $0 \le g(x) \le f(x)$ за секој $x\in[a,b)$. Тогаш,

а) ако интегралот $\int_a^b f(x)dx$ конвергира, тогаш конвергира и интегралот $\int_a^b g(x)dx$ и

б) ако интегралот $\int_a^b g(x)dx$ дивергира, тогаш дивергира и интегралот $\int_a^b f(x)dx$.

Доказ. За секој $A\in[a,b)$ важи $\int_a^A g(x)dx \le \int_a^A f(x)dx$.

а) Од теорема 17.1 следува дека ако интегралот $\int_a^b f(x)dx$ конвергира, тогаш постои $C>0$ таков што за секој $A\in[a,b)$ важи $\int_a^A f(x)dx \le C$. Но, тоа значи дека постои $C>0$ таков што за секој $A\in[a,b)$ важи $\int_a^A g(x)dx \le C$, што според теорема 17.1 значи дека интегралот $\int_a^b g(x)dx$ конвергира.

б) Ако интегралот $\int_a^b f(x)dx$ конвергира, тогаш од а) следува дека и интегралот $\int_a^b g(x)dx$ конвергира, што е противречност. ♦

17.3. Пример. а) Ако ставиме $g(x)=\frac{\cos^2 x}{1+x^2}$ и $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ и ја примениме теорема 17.2, тогаш од пример 16.6 б) следува дека интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ конвергира.

б) Интегралот $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ конвергира. Навистина, при

$$f(x)=e^{-x} \text{ и } g(x)=e^{-x^2}, \; x\in[1,+\infty)$$

имаме $g(x)\le f(x)$ за секој $x\in[1,+\infty)$. Сега, од пример 16.6 а) и теорема 17.2 следува дека разгледуваниот интеграл конвергира.

в) Интегралот $\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ конвергира. Навистина, при

$$g(x)=e^{-x}\ln x \text{ и } f(x)=xe^{-x}, \; x\in[1,+\infty),$$

ако се искористи неравенството $\ln x<x$, за $x>1$ (зошто?), имаме $g(x)\le f(x)$ за секој $x\in[1,+\infty)$. Сега, од пример 16.13, при $n=1$, и теорема 17.2 следува дека разгледуваниот интеграл конвергира. ♦

17.4. Последица. Нека $0\le g(x), 0\le f(x)$, $g(x)\ne 0$ за секој $x\in[a,b)$ и постои конечната или бесконечната граница

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=k. \tag{1}$$

Тогаш,

а) ако интегралот $\int_a^b f(x)dx$ конвергира и $0\le k<+\infty$, тогаш конвергира и интегралот $\int_a^b g(x)dx$ и

б) ако интегралот $\int_a^b g(x)dx$ дивергира и $0<k\le+\infty$, тогаш дивергира и интегралот $\int_a^b f(x)dx$.

Доказ. а) Непосредно следува од фактот дека при $0\le k<+\infty$ од (1) следува дека постои $A\in[a,b)$ таков што за секој $x\in(A,b)$ важи

$$f(x) < (k+1)g(x).$$

Сега тврдењето следува од теорема 17.2.

Тврдењето под б) се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

17.5. Пример. а) Ќе дадеме друг доказ дека несвојствениот интеграл $\int_0^1 \ln x dx$ конвергира.

За секој $\alpha > 0$ важи $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Но, при $0 < \alpha < 1$ интегралот $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ конвергира, па од последицата следува дека и интегралот $\int_0^1 \ln x dx$ конвергира.

б) Да го разгледаме интегралот $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$. Имаме

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1} x = 1 = k.$$

Сега, од последицата и фактот дека несвојствениот интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ дивергира, заклучуваме дека и разгледуваниот интеграл дивергира. ♦

ЗАДАЧИ

1. Реши ги интегралите

   а) $\int \frac{2-x+x^2}{3x} dx,$ б) $\int (\sqrt{x}+3)(x+\sqrt{x}-1)dx,$ в) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x^3} dx,$

   г) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$, д) $\int \frac{x^2-2\sqrt{x}+3}{x^3} dx.$

2. Реши ги интегралите

   а) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$, б) $\int (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 dx$, в) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

3. Реши ги интегралите

   а) $\int (3^x - e^{3+x})dx,$ б) $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx,$ в) $\int a^x(1+\frac{a^{-x}}{1+x^2})dx.$

4. Реши ги интегралите:

   а) $\int \frac{6x+3}{x^2+x-12} dx$, б) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$ в) $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17} dx$

   г) $\int \frac{dx}{x\ln x}$, д) $\int \frac{xdx}{x^2+4}$, ѓ) $\int x(x^2+2)^{15} dx$, е) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$, ж) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-6}}$.

5. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$, б) $\int \frac{e^{2x}dx}{1-5e^{2x}}$, в) $\int xe^{-x^2} dx$.

6. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{\cos x}{1-3\sin 2x} dx$, б) $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x} dx$, в) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

7. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}$.

8. Реши ги интегралите:
а) $\int x^2 \ln x dx$, б) $\int \sqrt{x} \ln x dx$, в) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$,
г) $\int \ln^2 x dx$, д) $\int \ln(x^2+1) dx$.

9. Реши ги интегралите:
а) $\int x \cos x dx$, б) $\int x^2 \cos x dx$, в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

10. Реши ги интегралите:
а) $\int (x-1)e^x dx$, б) $\int x^2 e^x dx$, в) $\int e^x \cos x dx$.

11. Реши ги интегралите:
а) $\int \operatorname{arctg} x dx$, б) $\int \arcsin x dx$.

12. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{x^3-3x+4}{x-2} dx$, б) $\int \frac{12-x}{x^2+x-6} dx$, в) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

13. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} dx$, б) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$, в) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

14. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$, б) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$, в) $\int \frac{x^2+1dx}{x(x^2+2)}$

15. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$, б) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx$.

16. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{dx}{x^{11} \cdot \sqrt{1+x^4}}$, б) $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx$

17. Реши ги интегралите:
а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx$, б) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx$.

18. Реши ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{\sin x}$, б) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$, в) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$.

19. Реши ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$, б) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, в) $\int \frac{dx}{3+2\sin^2 x}$.

20. Реши ги интегралите:

а) $\int \sin 3x \cos 5x dx$, б) $\int \sin 7x \sin 3x dx$, в) $\int \cos 11x \cos x dx$.

21. Реши ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, б) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4} dx$, в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

22. Реши ги интегралите

а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$, б) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$, в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

23. Реши ги интегралите

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$, б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$, в) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

24. Користејќи ја граничната вредност на интегралните суми пресметај го интегралот $\int\limits_0^3 e^x dx$.

25. Користејќи ја граничната вредност на интегралните суми пресметај го интегралот $\int\limits_0^\pi \sin x dx$.

26. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int\limits_1^3 (x^3 + \frac{1}{x^3}) dx$, б) $\int\limits_1^2 (\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}) dx$, в) $\int\limits_1^2 (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^4} + 2x) dx$.

27. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int\limits_0^1 (4 - 2e^x + x) dx$, б) $\int\limits_1^e (x^3 + \ln x - 2) dx$, в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$.

28. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$, б) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$, в) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

29. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$, б) $\int\limits_e^{e^2} \frac{2\ln x+1}{x} dx$, в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

30. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$, б) $\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9dx}{(1+x^5)^3}$, в) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

31. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int\limits_0^{\pi} x\sin xdx$, б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$, в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

32. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx$, б) $\int\limits_1^{e} \ln^2 xdx$, в) $\int\limits_1^{e^2} x\ln xdx$.

33. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите:

а) $y=x^2+1, x=-1, x=3$ и $x-$оската, б) $y=-x^2+6x-5$ и $x-$оската,

в) $y=2x-x^2, y=2^x, x=0$ и $x=2$, г) $y=\cos x$, $x=0$ и $x=\pi$.

34. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите:

а) $y=x^2$ и $y=x$, б) $y=x^2$ и $y=2-x^2$,

в) $y=2x^2+5$ и $y=x^2+9$, г) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{1}{1+x^2}$.

35. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите:

а) $y^2=2x+4$ и $x=0$, б) $y^2=x$ и $y=x$.

36. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите:

а) $y=\ln x$ и $y=\ln^2 x$, б) $y=x\ln x$ и $y=\frac{\ln x}{4x}$,

в) $y=0$, $y=\frac{2}{3}\cos x$ и $y=\operatorname{tg} x$, г) $y^2=4x$ и $x^2=4y$.

37. Докажи дека плоштината на фигурата ограничена со два последователни свиока на Архимедовата спирала $\rho=a\varphi$ е еднаква на $8\pi^3a^2$.

38. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со *лемискатата на Бернули*, дефинирана со $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$.

39. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со $x-$оската и првиот свод на циклоидата

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t).$$

40. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

41. Пресметај ја плоштината и волуменот на торус, тело кое се добива со ротација на кружницата

$$x^2+(y-a)^2=R^2,\ a>R$$

околу $x-$оската.

42. Пресметај го волуменот и плоштината на телото добиено со ротација на првиот свод на циклоидата

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$

околу $x-$оската.

43. Пресметај го волуменот и плоштината на телото добиено со ротација на астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ околу $x-$оската.

44. Пресметај го волуменот и плоштината на телото добиено со ротација на кардиоидата

$$x = 2a\cos t - R\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t\ ,\ t \in [0, 2\pi]$$

околу $x-$оската.

45. Пресметај ја должината на лакот на кривата зададена со:

а) $\Gamma = \{(x, y) \mid x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y,\ y \in [1, e]\}$,

б) $\Gamma = \{\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi},\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$,

в) $\Gamma = \{\rho = \frac{a}{\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$,

г) $\Gamma = \{\rho = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$,

д) $\Gamma = \{(x, y) \mid x = a(\cos t - \sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ t \in [0, 2\pi]\}$ и

ѓ) $\Gamma = \{(x, y) \mid x = 2a\cos\frac{t}{3} + a\cos\frac{2t}{3},\ y = 2a\sin\frac{t}{3} - a\sin\frac{2t}{3}\}$.

46. Докажи дека

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

47. Испитај ја конвергентноста на несвојствениот интеграл:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ и в) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x}$.

48. Испитај ја конвергентноста на интегралот

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx\ ,\ a > 0\ .$$

49. Испитај ја конвергентноста на интегралите и ако тие конвергираат, пресметај ги нивните вредности:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2},\ a, b > 0$, б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$,

в) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$ и г) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$.

50. Докажи дека интегралот $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$ дивергира.

51. Испитај ја конвергентноста на интегралите и ако тие конвергираат, пресметај ги нивните вредности:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}$, и б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}$.

52. Испитај ја конвергентноста на интегралите и ако тие конвергираат, пресметај ги нивните вредности:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-3}}$, б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ и в) $\int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

XVI ГЛАВА
БРОЈНИ РЕДОВИ

1. ПОИМ ЗА РЕД. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1.1. Дефиниција. Нека е дадена низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Формираме нова низа $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Парот низи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ го нарекуваме *броен ред со општ член* a_n и го означуваме со

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{1}$$

Членовите на почетната низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги нарекуваме *членови на редот* (1), а членовите на низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ - *парцијални суми на редот*. Притоа a_n го нарекуваме $n-$*ти член на редот*, а конечниот збир S_n го нарекуваме $n-$*та парцијална сума на редот.*

1.2. Дефиниција. Редот чии членови се членовите на редот (1), почнувајќи од $(k+1)-$от член на редот (1), земени во истиот редослед како и во почетниот ред, го нарекуваме $k-$*ти остаток на редот* (1) и го означуваме со $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

1.3. Дефиниција. Ако низата парцијални суми на редот (1) конвергира, тогаш за редот ќе велиме дека е *конвергентен,* а ако дивергира, тогаш ќе велиме дека е *дивергентен ред.*

Ако редот (1) конвергира, тогаш границата $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ ја нарекуваме *сума на редот* и пишуваме $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.4. Забелешка. Ако редот (1) конвергира, тогаш ќе користиме еден ист симбол $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ како за означување на редот, така и за означување на неговата сума.

1.5. Пример. Да го разгледаме геометрискиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \tag{2}$$

чии членови се членовите на геометриската прогресија $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ако $q=1$, тогаш $S_n = n$, па од $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ следува дека редот (2) дивергира. Ако $q=-1$, тогаш

$$S_{2n} = 1,\ S_{2n+1} = 0,\ n = 0,1,\dots,$$

што значи дека низата парцијални суми нема граница, т.е. редот (2) дивергира. Ако $q \neq \pm 1$, тогаш

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = 0$ за $|q|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \infty$ за $q>1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q}$ не постои за $q<-1$ заклучуваме дека редот (2) конвергира за $|q|<1$, при што $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, и дивергира за $|q| \geq 1$. ♦

1.6. Ако $k-$от остаток на редот (1) конвергира, тогаш неговиот збир ќе го означиме со R_k, т.е.

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \tag{3}$$

и едноставно ќе го нарекуваме *остаток на редот.*

1.7. Теорема. Редот (1) е конвергентен ако и само ако редот $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ е конвергентен.

Доказ. Нека $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ и $T_m = \sum\limits_{n=k+1}^{m} a_n,\ m \geq k$. Тогаш важи равенството $T_m = S_m - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$. Бидејќи збирот $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ е константен, добиваме дека низата $\{T_m\}_{m=k+1}^{\infty}$ конвергира ако и само ако низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, што значи редот $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако редот (1) конвергира. ♦

1.8. Теорема. Ако редот (1) конвергира, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказ. Ако редот (1) конвергира, тогаш низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогаш, од равенствата

$$a_n = S_n - S_{n-1},\ n = 2,3,\dots$$

следува дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \text{ . } \blacklozenge$$

1.9. Забелешка. Од претходната теорема непосредно следува дека геометрискиот ред разгледан во примерот 1.5 е дивергентен за $|q| \geq 1$.

Теорема 1.8 дава потребен, но не и доволен услов за да еден ред конвергира. Имено, за хармонискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ важи $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но тој не е конвергентен, во што подоцна ќе се увериме.

1.10. Теорема. Ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергираат, при што нивните суми се еднакви на S' и S'', соодветно, тогаш за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ редот $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$, исто така, конвергира и ако S е неговата сума, тогаш $S = \alpha S' + \beta S''$.

Доказ. Нека

$$S_n^{'} = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_n^{''} = \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ и } S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ .}$$

Тогаш,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha S_n^{'} + \beta S_n^{''}$$

и бидејќи $\lim_{n\to\infty} S_n^{'}$ и $\lim_{n\to\infty} S_n^{''}$ постојат, добиваме дека и $\lim_{n\to\infty} S_n$ постои, т.е. редот $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ конвергира и притоа важи

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha S_n^{'} + \beta S_n^{''}) = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n^{'} + \beta \lim_{n\to\infty} S_n^{''} = \alpha S' + \beta S'' \text{ . } \blacklozenge$$

1.11. Пример. Да го разгледаме редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, каде

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{6^n}, \quad n \in \mathbf{N} \text{ .}$$

Редовите

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n = \frac{1}{3^n}, \quad n \in \mathbf{N} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad c_n = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

се конвергентни и притоа важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \text{ .}$$

Бидејќи

$$a_n = \frac{2^{n+1}+3^n}{6^n} = 2\cdot\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n} = 2b_n + c_n,\ \text{за секој}\quad n\in\mathbf{N},$$

од претходно изнесеното и од теорема 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\cdot\frac{3}{2}+2 = 5\ .\ ♦$$

1.12. Последица. Редот (1) дивергира ако и само ако за секој $\alpha\neq 0$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ дивергира.

Доказ. Нека претпоставиме дека редот (1) дивергира и $\alpha\neq 0$. Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ конвергира, тогаш од теоремата 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\alpha a_n$ т.е. редот (1) конвергира, што е противречност.

Обратно, нека претпоставиме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ дивергира. Ако редот (1) конвергира, тогаш од теоремата 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ конвергира, што е противречност. ♦

2. ОПШТ КОШИЕВ КРИТЕРИУМ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА БРОЕН РЕД

2.1. Теорема (општ Кошиев критериум). Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $n>n_0$ и за секој $p\in\mathbf{N}$ важи

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}|<\varepsilon\ . \tag{1}$$

Доказ. За редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ја разгледуваме низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Од Кошиевиот критериум за конвергенција на низа применет на низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ следува дека оваа низа конвергира ако и само ако за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков, што за секој $n>n_0$ и за секој $p\in\mathbf{N}$ важи $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. Но,

$$S_{n+p}-S_n = a_1+...+a_n+a_{n+1}+...+a_{n+p}-(a_1+...+a_n) = a_{n+1}+...+a_{n+p}\,,$$

па затоа низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи неравенството (1). ♦

2.2. Пример. Да го разгледаме *хармонискиот ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Нека $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Тогаш, за секој $n \in \mathbf{N}$ при $p = n$ имаме

$$|S_{n+p} - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ пати}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon,$$

т.е. неравенството (1) не е исполнето, од што следува дека хармонискиот ред е дивергентен. ♦

2.3. Пример. Да го разгледаме редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha^n}{n^2}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ќе определиме $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Имаме,

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos \alpha^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos \alpha^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\cos \alpha^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \\ &\le \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Според тоа, ако ставиме $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, тогаш $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, што според теорема 2.1 значи дека разгледуваниот ред конвергира. ♦

2.4. Забелешка. Од теорема 2.1 при $p = 1$ следува дека ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_{n+1}| < \varepsilon$, што значи $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Јасно, ова е уште еден доказ на потребниот услов за да редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, т.е. може да се каже дека теорема 1.8 е последица од теорема 2.1.

3. РЕДОВИ СО НЕНЕГАТИВНИ ЧЛЕНОВИ

3.1. Лема. Нека сите членови на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се ненегативни, т.е.

$$a_n \geq 0, \ \ n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако низата од парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи барем една конвергентна подниза.

Доказ. Од условот (1) следува дека $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$, т.е. низата парцијални суми на разгледуваниот ред монотоно расте. Сега тврдењето на лемата следува од фактот дека монотоно растечка низа е конвергентна ако и само ако содржи барем една конвергентна подниза. ♦

3.2. Пример. Да го разгледаме редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \ a > 1$. Ќе докажеме дека овој ред конвергира. За таа цел ќе ја разгледаме низата $\{S_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ која е подниза од низата парцијални суми на редот $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Имаме,

$$S_{2^k-1} = S_{2^{k-1}-1} + \frac{1}{(2^{k-1})^a} + \frac{1}{(2^{k-1}+1)^a} + \ldots + \frac{1}{(2^k-1)^a} > S_{2^{k-1}-1},$$

што значи дека низата $\{S_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ монотоно расте. Од друга страна,

$$\begin{aligned} S_{2^k-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}\right) + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{k-1})^a} + \ldots + \frac{1}{(2^k-1)^a}\right)}_{2^{k-1} \text{ собирци}} \\ &< 1 + \frac{2}{2^a} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)a}} = 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{(k-1)(a-1)}} \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{(a-1)})^{m-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} = \frac{2^{a-1}}{2^{a-1} - 1}. \end{aligned}$$

Значи, $\{S_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ е монотона и ограничена, па затоа е конвергентна.

Според тоа, низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \ \ a > 1$ кој е со ненегативни членови содржи конвергентна подниза $\{S_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Конечно, од теорема 3.1 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \ a > 1$ конвергира. ♦

3.3. Теорема. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се редови со ненегативни членови и нека

$$a_n \le b_n, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

а) Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

б) Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Доказ. Нека $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.Од $a_n \ge 0$ и $b_n \ge 0$, за $n = 1,2,...$ следува дека низите парцијални суми $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ се монотоно растечки, а од (2) следува дека $s_n \le S_n$, за $n = 1,2,...$.

а) Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена од горе, т.е. постои $M \in \mathbf{R}$ таков што $S_n < M$, за $n = 1,2,...$. Но, тоа значи дека $s_n < M$, за $n = 1,2,...$, т.е. монотоно растечката низа $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена одгоре, па затоа таа е конвергентна, што значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

б) Нека претпоставиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира. Тогаш, од а) следува дека и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, што е противречност. ♦

3.4. Пример. Да го разгледаме редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a < 1$. Бидејќи $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^a}$, за $n = 1,2,...$ и хармонискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира од претходната теорема следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a < 1$ дивергира. ♦

3.5. Последица. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ред со ненегативни членови и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена низа позитивни реални броеви, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е конвергентен.

Доказ. Ако $b_n \le M$, за $n \in \mathbf{N}$, тогаш $a_n b_n \le M a_n$, за $n \in \mathbf{N}$. Од теорема 1.10 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} M a_n$ е конвергентен. Сега тврдењето непосредно следува од теорема 3.3. ♦

3.6. Последица. Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ се редови со ненегативни членови, $b_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = t$, каде $0 < t < \infty$. Тогаш редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ истовремено се или конвергентни или дивергентни.

Доказ. Нека $\varepsilon < t$. Од условот $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = t$ следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството $|\frac{a_n}{b_n} - t| < \varepsilon$, т.е. неравенството

$$(t-\varepsilon)b_n < a_n < (t+\varepsilon)b_n, \qquad n > n_0. \tag{4}$$

Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш од теорема 1.10 следува дека конвергира и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (t+\varepsilon)b_n$. Понатаму, од десното неравенство во (4) и од теорема 3.3 следува дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ конвергира. Конечно, од теорема 1.7 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш од теорема 1.7 следува дека и редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ конвергира. Понатаму, од левото неравенство во (4) и од теорема 3.3 следува дека и редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (t-\varepsilon)b_{n_0+k}$ конвергира. Сега од теорема 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{n_0+k}$ конвергира. Конечно, од теорема 1.7 заклучуваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира.

Ако наместо теорема 1.10 се искористи последица 1.12, тогаш останатиот дел од последицата се докажува аналогно. ♦

3.7. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$. Бидејќи хармонискиот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = 1$$

од последица 3.6 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ е дивергентен. ♦

3.8. Теорема. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се редови со строго позитивни членови и нека

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Тогаш,

а) ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира,

б) ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Доказ. Ако ги помножиме неравенствата

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

го добиваме неравенството $\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$, односно неравенството $a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$. Ставаме $\frac{a_1}{b_1} = M$ и добиваме $a_n \le M b_n$, за $n = 1, 2, \ldots$. Сега тврдењето на теоремата следува од теорема 3.3 и последица 3.5. ♦

4. КРИТЕРИУМИ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА РЕД СО НЕНЕГАТИВНИ ЧЛЕНОВИ

4.1. Во оваа точка ќе разгледаме некои специјални критериуми за конвергенција на редови со ненегативни членови.

Теорема (критериум на Коши). Нека за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n \ge 0, \; n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

постои границата

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r. \tag{2}$$

Тогаш, од $r < 1$ следува дека редот (1) конвергира, од $r > 1$ следува дека редот (1) дивергира, а ако $r = 1$, тогаш не може да се тврди дали редот конвергира или дивергира.

Доказ. Нека $r < 1$ и нека q е таков, што $r < q < 1$. Тогаш, од условот (2) следува дека постои природен број n_0 таков, што за секој $n > n_0$ важи $\sqrt[n]{a_n} < q$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_n < q^n$. Бидејќи редот $\sum_{k=1}^{\infty} q^{n_0+k}$ конвергира, од теорема 3.3 следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ конвергира, па од теорема 1.7 добиваме дека редот (1) конвергира.

Ако $r > 1$, тогаш од условот (2) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\sqrt[n]{a_n} > 1$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_n > 1$. Според тоа, општиот член на редот (1) не тежи кон нула, па од теоремата 1.8 добиваме дека редот (1) дивергира.

За комплетирање на доказот доволно е да разгледаме примери на конвергентен и дивергентен ред за кој $r = 1$. Така, на пример за редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, но првиот е дивергентен, а вториот конвергентен. ♦

4.2. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$. Неговиот општ член е $a_n = (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}, \quad n \geq 2$. Имаме,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{n-1}{n+1})^{n-1} = e^{-2} < 1 .$$

Од Кошиевиот критериум следува дека разгледуваниот ред конвергира. ♦

4.3. Теорема (критериум на Даламбер). Нека за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, , \; a_n > 0, \; n = 1, 2, ... \tag{3}$$

постои границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \, . \tag{4}$$

Тогаш, од $r < 1$ следува дека редот (1) конвергира, од $r > 1$ следува дека редот (1) дивергира, а ако $r = 1$, тогаш не може да се тврди дали редот конвергира или дивергира.

Доказ. Нека $r < 1$ и нека q е таков што $r < q < 1$. Тогаш, од условот (4) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_{n+1} < qa_n$. Според тоа,

$$a_{n_0+1} < qa_{n_0}, \qquad a_{n_0+2} < qa_{n_0+1} < q^2 a_{n_0}, \quad ..., \qquad a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}, \quad ...$$

Бидејќи редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k a_{n_0}$ конвергира, од теоремата 3.3 следува дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$, па од теоремата 1.7 добиваме дека редот (3) конвергира.

Ако $r > 1$, тогаш од условот (4) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_{n+1} > a_n$. Според тоа, $a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < ... < a_{n_0+k} < ...$, па затоа општиот член на редот

(3) не тежи кон нула. Конечно, од теоремата 1.8 добиваме дека редот (4) дивергира.

За комплетирање на доказот доволно е да разгледаме примери на конвергентен и дивергентен ред за кој $r=1$. Така, на пример, за редовите $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, важи $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$, но првиот е дивергентен, а вториот конвергентен. ♦

4.4. Пример. Да го разгледаме редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)!)^2}{2^{n^2}}$. Од

$$a_{n+1}=\frac{((n+2)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \text{ и } a_n=\frac{((n+1)!)^2}{2^{n^2}}$$

следува

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}((n)!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1,$$

што според критериумот на Даламбер значи дека разгледуваниот ред конвергира. ♦

4.5. Теорема (критериум на Кумер). Редот (3) конвергира ако и само ако постои позитивна низа $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква, што

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}>t>0, \tag{5}$$

каде t не зависи од n.

Доказ. Прво ќе докажеме дека условот (5) е потребен. Нека редот (3) конвергира и нека за низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи $S=\lim_{n\to\infty}S_n$. Низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ дефинирана со $b_n=\frac{S-S_n}{a_n}$ е позитивна. Тогаш,

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}=\frac{S-S_n}{a_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{S-S_{n+1}}{a_n}=\frac{S_{n+1}-S_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}=1>0,$$

т.е. исполнет е условот (5).

Ќе докажеме дека условот (5) е доволен. Нека постои позитивна низа $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, така што условот (5) е исполнет. Ако неравенствата

$$b_1\frac{a_1}{a_2}-b_2>t,\quad b_2\frac{a_2}{a_3}-b_3>t,\quad \dots,\quad b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}>t,$$

ги помножиме со $a_2,a_3,\dots,a_{n+1}$ соодветно, ги добиваме неравенствата

$$b_1a_1-b_2a_2>ta_2,\quad b_2a_2-b_3a_3>ta_3,\quad \dots,\quad b_na_n-b_{n+1}a_{n+1}>ta_{n+1},$$

со чие собирање добиваме

$$b_1a_1-b_{n+1}a_{n+1}>t\sum_{k=2}^{n+1}a_k\ .$$

Од последното неравенство следува неравенството $b_1a_1 > t\sum_{k=2}^{n+1} a_k$, односно неравенството

$$a_1 + \frac{b_1a_1}{t} > \sum_{k=1}^{n+1} a_k .$$

Значи, низата парцијални суми на редот (3) е ограничена и бидејќи е монотона растечка заклучуваме дека е конвергентна. Според тоа, редот (3) конвергира. ♦

4.6. Теорема. Нека $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}, \;\; b_k > 0$ е дивергентен ред. Ако

$$\lim_{n\to\infty} (b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}) = r < 0 , \tag{6}$$

тогаш редот (3) дивергира.

Доказ. Ако е исполнет условот (6), тогаш постои n_0 таков што кога $n > n_0$ важи $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \le 0$. Според тоа, постои n_0 таков што кога $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}$. Сега од теорема 3.8 следува дека редот $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ дивергира, што според теорема 1.7 значи дека и редот (3) дивергира. ♦

4.7. Теорема (критериум на Рабе). Нека за редот (3) постои границата

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r . \tag{7}$$

Тогаш, од $r > 1$ следува дека редот (3) конвергира, а од $r < 1$ следува дека редот (3) дивергира.

Доказ. Нека $r > 1$ и $r = 1 + t, \; t > 0$. Тогаш, постои n_0 таков што кога $n > n_0$ важи $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1 + t$, т.е. важи $n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) > t > 0$. За низата

$$b_n = n, \;\; n = n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, ...$$

е исполнет условот од теорема 4.5, па затоа редот $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ конвергира. Сега од теорема 1.7 следува дека редот (3) конвергира.

Нека $r < 1$. Тогаш, постои n_0 таков што кога $n > n_0$ важи

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \le 1 ,$$

т.е. важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \text{ кога } n > n_0 .$$

Но, хармонискиот ред дивергира, па затоа од теорема 3.8 следува дека редот $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ дивергира, што според теорема 1.7 значи дека и редот (3) дивергира. ♦

4.8. Пример. Да го разгледаме *Гаусовиот хипергеометриски ред*

$$1+\sum \frac{a(a+1)...(a+k-1)b(b+1)...(b+k-1)}{k!c(c+1)...(c+k-1)} x^k, \qquad a,b,c,x>0. \tag{8}$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a(a+1)...(a+n-1)(a+n)b(b+1)...(b+n-1)(b+n)}{(n+1)!c(c+1)...(c+k-1)} x^{n+1}}{\dfrac{a(a+1)...(a+k-1)b(b+1)...(b+n-1)}{n!c(c+1)...(c+n-1)} x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a+n)(b+n)x}{(n+1)(c+n)} = x$$

од критериумот на Даламбер заклучуваме дека редот (8) конвергира за $x<1$, а дивергира за $x>1$.

Ако $x=1$, тогаш од критериумот на Рабе имаме

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{(n+1)(c+n)}{(a+n)(b+n)}-1) = \lim_{n\to\infty} n\frac{(c+1-a-b)n+c-ab}{(a+n)(b+n)} = 1+c-a-b$$

Значи, ако $x=1$ и $c>a+b$, тогаш редот е конвергентен, а ако $x=1$ и $c\le a+b$ Гаусовиот хипергеометриски ред е дивергентен. ♦

5. КОШИЕВ ИНТЕГРАЛЕН КРИТЕРИУМ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА РЕДОВИ СО НЕНЕГАТИВНИ ЧЛЕНОВИ

5.1. Ако за даден ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може да се избере функција $f(x)$, дефинирана за $x\ge 1$ и таква што $a_n = f(n)$, тогаш при определени услови за конвергентноста или дивергентноста на дадениот ред може да се заклучува според конвергентноста или дивергентноста на интегралот $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Така, ја имаме следнава теорема.

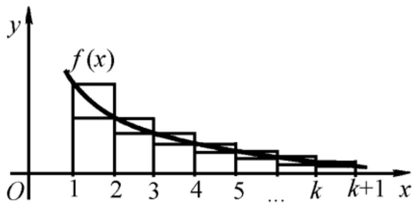
5.2. Теорема (интегрален критериум на Коши). Ако f е непрекината ненегативна монотоно опаѓачка функција за $x\ge 1$, тогаш редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1}$$

конвергира ако и само ако конвергира интегралот

$$\int_1^{\infty} f(x)dx. \tag{2}$$

Доказ. Пред се, да забележиме дека од монотоноста на функцијата f на интервалот $[1,\infty)$ следува нејзината интеграбилност на секој конечен интервал $[1,t]$, па затоа има смисла да се зборува за несвојствениот интервал (2).



Цртеж 1

Ако $k \le x \le k+1$, тогаш бидејќи функцијата монотоно опаѓа, (црт. 1), имаме

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1), \; k = 1,2,\dots,$$

па затоа ако интегрираме на интервалот $[k, k+1]$ добиваме

$$f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge f(k+1), \; k = 1,2,\dots$$

Ако ги сумираме овие неравенства од $k=1$ до $k=n$ (црт. 1) добиваме

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n} f(k+1)$$

Ако ставиме $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, добиваме

$$S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge S_{n+1} - f(1), \; n = 1,2,\dots \tag{3}$$

Ако интегралот (2) конвергира, тогаш за секој $n = 1,2,\dots$ е исполнето

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le \int_1^{\infty} f(x)dx,$$

па затоа од неравенството (3) добиваме

$$S_{n+1} \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx,$$

што значи дека низата парцијални суми на редот (1) е ограничена од горе и бидејќи е монотоно растечка, заклучуваме дека е конвергентна.

Ако редот (1) конвергира и неговата сума е еднаква на S, тогаш $S_n \le S$, $n = 1,2,\dots$ и затоа од неравенството (3) добиваме дека за секој $n = 1,2,\dots$ важи

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le S.$$

Ако $t \ge 1$, тогаш постои $n \ge t$ и бидејќи функцијата f е ненегативна добиваме

$$\int_1^t f(x)dx \le \int_1^n f(x)dx \le S\ .$$

Според тоа, за секој $t \ge 1$ интегралот $\int_1^t f(x)dx$ е ограничена одгоре, па затоа интегралот (2) конвергира. ♦

5.3. Пример. Да го разгледаме редот $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$. Лесно се гледа дека функцијата $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$, $x > 1$ е ненегативна и дека за секој p таа на интервалот (e^{-p}, ∞) монотоно опаѓа. Затоа, за испитување на конвергенцијата на дадениот ред може да се примени интегралниот критериум на Коши. Имаме

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^p x} = \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1} 2} < \infty\,,$$

ако $p > 1$ и интегралот $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$ дивергира ако $p \le 1$. Според тоа, редот $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ конвергира за $p > 1$ и дивергира за $p \le 1$. ♦

5.4. Што се однесува до критериумот на Коши, може да се каже дека важи следниов попрецизен резултат.

Теорема. Ако f е непрекината ненегативна монотоно опаѓачка функција за $x \ge 1$, тогаш граничната вредност

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \right)$$

постои и е конечна.

Доказ. Да означиме

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx\,.$$

Ако ги собереме левите неравенства во неравенствата

$$f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge f(k+1),\ \ k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

добиваме

$$\int_2^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)\,,$$

од што следува

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \geq f(n) > 0,$$

т.е. низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена оддолу.

Понатаму, за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx < 0,$$

што значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа.

Конечно, низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и е ограничена од долу, па затоа граничната вредност

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx)$$

постои и е конечна. ♦

5.5. Пример. Да ја разгледаме функција $f(x) = \frac{1}{x}$. Оваа функција ги задоволува условите од теорема 5.4, па затоа постои граничната вредност

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}) = \gamma. \tag{4}$$

Бројот $\gamma = 0,5772156649...$ е познат како *константа на Ојлер*. ♦

6. АЛТЕРНАТИВНИ РЕДОВИ

6.1. Дефиниција. Редот чии членови се наизменично позитивни и негативни (или обратно) го нарекуваме *алтернативен.*

Според тоа, редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е алтернативен ако $a_n a_{n+1} < 0, \quad n = 1,2,...$.

6.2. Теорема (критериум на Лајбниц). Ако

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1}$$

и

$$a_n \geq a_{n+1} > 0, \; n = 1,2,..., \tag{2}$$

тогаш алтернативниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{3}$$

конвергира. Притоа, ако S_n е парцијална сума на редот (3) и S е неговата сума, тогаш $|S-S_n|\le a_{n+1}$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

Доказ. Да ги разгледаме парните парцијални суми на редот (3). Имаме,

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+...+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

Од неравенствата (3) следува дека низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растечка. Од друга страна, повторно од неравенствата (3) следува

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-...(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n-1}<a_1,$$

што значи дека низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

Според тоа, низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растечка и е ограничена, па затоа е конвергентна. Нека, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$. За непарните парцијални суми имаме

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}.$$

Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=S.$$

Конечно, од

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S \text{ и } \lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$$

следува $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, што значи редот (3) е конвергентен.

Бидејќи низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте и $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$, добиваме дека

$$S_{2n}\le S,\quad n=1,2,... .$$

Од друга страна, бидејќи

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\le S_{2n-1},\ n=1,2,...$$

добиваме дека $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$, имаме

$$S\le S_{2n-1},\quad n=1,2,... .$$

Од досега изнесеното следува дека

$$S_{2n}\le S\le S_{2n-1},\ n=1,2,... \tag{4}$$

Од неравенствата (4) следуваат неравенствата

$$S-S_{2n}\le S_{2n+1}-S_{2n}\le a_{2n+1} \text{ и } S_{2n-1}-S\le S_{2n-1}-S_{2n}\le a_{2n},\ \ n=1,2,...,$$

што значи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи $|S-S_n|\le a_{n+1}$. ♦

6.3. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$. Бидејќи $\frac{\sqrt{n}}{2n-1}>0$, за секој $n\in\mathbf{N}$, добиваме $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}>0$, за секој $n\in\mathbf{N}$, што значи разгледуваниот ред е алтернативен. Од друга страна за секој $n \in \mathbf{N}$ е исполнето неравенството

$$\frac{\sqrt{n+1}}{2(n+1)-1} < \frac{\sqrt{n}}{2n-1},$$

па од монотоноста на функцијата $\operatorname{arctg} x$ добиваме

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1} > \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n+1}}{2(n+1)-1} > 0, \text{ за секој } n \in \mathbf{N},$$

што значи дека е исполнет условот (2) од теоремата 6.2. Од непрекинатоста на функцијата $\operatorname{arctg} x$ добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1} = 0,$$

што значи дека е исполнет условот (1) од теорема 6.2.

Конечно, според критериумот на Лајбниц, теорема 6.2, алтернативниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ е конвергентен. ♦

6.4. На крајот од оваа точка ќе ги разгледаме критериумите на Дирихле и Абел за редови чии членови се со произволен знак. За таа цел прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема (равенства на Абел). Нека се $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ две низи и нека

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Тогаш, за секој $n \geq 1$ важи

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + \ldots + (s_n - s_{n-1})b_n \tag{5}$$

и

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \ldots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n \tag{6}$$

Доказ. Равенството (5) непосредно следува од равенствата $s_1 = a_1$ и $a_n = s_n - s_{n-1}$, а равенството (6) се добива со прегрупирање на членовите во конечниот збир на десната страна на равенството (5). ♦

6.5. Теорема (критериум на Дирихле). Нека $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е позитивна опаѓачка низа и нека $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Ако низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ограничена, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ е конвергентен.

Доказ. Бидејќи позитивната низа $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ опаѓа и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, добиваме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков, што $b_n = |b_n| < \varepsilon$, кога $n > n_0$.

Нека $|S_n|<M, \quad n=1,2,3,\dots$. Тогаш, од равенството (5) добиваме

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k| &= |S_n(b_n-b_{n+1})+\dots+S_{n+p-1}(b_{n+p-1}-b_{n+p})+S_{n+p}b_{n+p}-S_nb_n| \\
&=|S_{n+1}(b_{n+1}-b_{n+2})+\dots+S_{n+p-1}(b_{n+p-1}-b_{n+p})-S_n(b_{n+1}-b_{n+2})-S_n(b_{n+2}-b_{n+3}) \\
&\qquad -\dots-S_n(b_{n+p-1}-b_{n+p})-S_nb_{n+p}+S_{n+p}b_{n+p}| \\
&=|(S_{n+1}-S_n)(b_{n+1}-b_{n+2})+\dots+(S_{n+p-1}-S_n)(b_{n+p-1}-b_{n+p})+(S_{n+p}-S_n)b_{n+p}| \\
&\leq |S_{n+1}-S_n|(b_{n+1}-b_{n+2})+\dots+|S_{n+p-1}-S_n|(b_{n+p-1}-b_{n+p})+|S_{n+p}-S_n|b_{n+p} \\
&\leq 2M(b_{n+1}-b_{n+2})+2M(b_{n+2}-b_{n+3})+\dots+2M(b_{n+p-1}-b_{n+p})+2Mb_{n+p}=2Mb_{n+1}<2M\varepsilon,
\end{aligned}$$

за секој $n>n_0$ и за секој природен број p. Сега, од теоремата 2.1 следува дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ е конвергентен. } \blacklozenge$$

6.6. Последица. Ако низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е негативна и монотоно расте и ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ги задоволува условите од теорема 6.5, тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е конвергентен.

Доказ. Навистина, од теорема 6.5 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-b_n)$ е конвергентен, што значи дека и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е конвергентен. ♦

6.7. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$. За низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{4}$ важи

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{n\pi}{4}|=\frac{|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{(n+1)\pi}{8}|}{\sin\frac{\pi}{8}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

т.е. таа е ограничена. Од друга страна, бидејќи за $n\geq 3$ важи

$$n^{n+1}>(n+1)^n,$$

добиваме

$$\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

што значи дека позитивната низа $b_n=\frac{\ln n}{n}$, почнувајќи од третиот член, монотоно опаѓа и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}=0.$$

Конечно, од критериумот на Дирихле следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$ е конвергентен. ♦

6.8. Теорема (критериум на Абел). Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен и низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона и ограничена, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е конвергентен.

Доказ. Нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ и $c_n = b - b_n$. Тогаш,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = S_n b - (a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n) . \tag{7}$$

Јасно, низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона, ограничена и $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Од друга страна низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, бидејќи е конвергентна, т.е. постои реален број M таков, што $|S_n| \le M, \quad n = 1, 2, 3, ...$. Од теорема 6.5 и последица 6.6 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ е конвергентен, т.е. постои $\lim_{n\to\infty} s_n$, каде

$$s_n = a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n, \qquad n = 1, 2, 3, ... \ . \tag{8}$$

Нека $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Од равенствата (7) и (8) имаме

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b - s_n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

и бидејќи $\lim_{n\to\infty} (S_n b - s_n) = Sb - s$ добиваме дека низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира, што значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е конвергентен. ♦

6.9. Пример. Да го разгледаме редот $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$. Имаме,

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n) = (-1)^n \cos \frac{\pi n}{n+1}$$

па затоа дадениот ред можеме да го запишеме во обликот $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n}{n+1}$. Од критериумот на Лајбниц следува дека редот $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ конвергира и бидејќи низата $b_n = \cos \frac{\pi n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, ...$ е монотона и ограничена од критериумот на Абел добиваме дека разгледуваниот ред конвергира. ♦

7. АПСОЛУТНО КОНВЕРГЕНТНИ РЕДОВИ

7.1. Дефиниција. За редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ќе велиме дека *апсолутно конвергира* ако редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

конвергира. Во натамошните разгледувања ако редот (1) конвергира ќе велиме дека тој *конвергира обично.*

7.2. Пример. Од критериумот на Лајбниц следува дека алтернативниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ конвергира, но тој не конвергира апсолутно, бидејќи редот чии членови се апсолутните вредности на дадениот ред, е хармонискиот ред за кој докажавме дека е дивергентен. ♦

7.3. Лема. Редот (1) апсолутно конвергира ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$.

Доказ. Непосредно следува од општиот Кошиев критериум за конвергенција на броен ред (теорема 2.1). ♦

7.4. Теорема. Ако редот (1) конвергира апсолутно, тогаш тој конвергира и обично.

Доказ. Нека редот (1) конвергира апсолутно, т.е. нека конвергира редот (2). Од лема 7.3 следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Но, тоа значи дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon .$$

Конечно, од теорема 2.1 следува дека редот (1) конвергира обично. ♦

7.5. Со

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \tag{3}$$

да го означиме редот чии членови се членовите на редот (1) земени, воопшто зборувано, во друг редослед.

Теорема. Ако редот (1) апсолутно конвергира, тогаш и редот (3) апсолутно конвергира и двата реда имаат една иста сума.

Доказ. Нека редот (1) конвергира апсолутно. Според теорема 7.4 редот (1) конвергира обично и нека неговата сума е S ,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

Нека

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k,\quad n=1,2,3,\dots,\ S_m^*=\sum_{k=1}^{m} a_k^*,\quad m=1,2,3,\dots,$$

$$\overline{S}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ и } \overline{S}_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|,\quad n=1,2,3,\dots\ .$$

Бидејќи редот (1) апсолутно конвергира, добиваме дека за секој $\varepsilon>0$ постои природен број n_0 таков што

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|=\overline{S}-\overline{S}_{n_0}<\tfrac{\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

па затоа е исполнето неравенството

$$|S-S_n|=\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n\right|\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|<\tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Понатаму, да избереме природен број m_0 таков, што парцијалната сума $S_{m_0}^*$ на редот (3) во себе ги содржи сите членови на редот (1) кои влегуваат во парцијалната сума S_{n_0} . Нека $m\ge m_0$. Ставаме $S_m^{**}=S_m^*-S_{n_0}$. Бидејќи апсолутната вредност на S_m^{**} е помала или еднаква на збирот од апсолутните вредности на собироците кои влегуваат во S_m^{**} и бидејќи сите тие имаат индекс кој е поголем од n_0 , добиваме дека сите тие се содржат во збирот $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|$. Сега, од неравенството (5) следува

$$|S_m^{**}|\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|<\tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Конечно, ако ги искористиме неравенствата (6) и (7), добиваме дека за $m\ge m_0$ важи

$$|S-S_m^*|=|S-(S_{n_0}+S_m^{**})|\le|S-S_{n_0}|+|S_m^{**}|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

што значи $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^*=S$.

Останува да докажеме дека редот (3) исто така апсолутно конвергира. Ова следува од веќе докажаното тврдење, ако го примениме на редот (2). Навистина, овој ред очигледно апсолутно конвергира и затоа редот $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_m^*|$, чии членови се апсолутните вредности на членовите на редот (3), не само што конвергира туку и неговата сума е еднаква на сумата на редот (2). ♦

7.6. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Од критериумот на Лајбниц следува дека овој ред е конвергентен, но бидејќи $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$, за $n>1$ и хармонискиот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира, заклучуваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ не е апсолутно конвергентен.

Ќе докажеме како членовите на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ може да се земат во друг редослед, така што да се добие дивергентен ред. Да го разгледаме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \equiv (1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}})+\dots+(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}})+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}})$$

кој од дадениот ред се добива така, што по три позитивни членови следува еден негативен и

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},\ n\ge 1.$$

Притоа $8n>6n-1, n\ge 1$, па затоа $\frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>0$ што значи

$$\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{6n-5}}>0,\ n\ge 1.$$

Според тоа,

$$a_n>\frac{1}{\sqrt{6n-5}}>\frac{1}{6n},\ n\ge 1$$

и бидејќи хармонискиот ред е дивергентен добиваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е дивергентен.

Овој пример покажува дека, во случај кога редот (1) не е апсолутно конвергентен, но е конвергентен обично, членовите на редот можат да се земат во друг редослед и да се добие дивергентен ред, што значи дека во општ случај не смее да се менува редоследот на членовите на даден ред. ♦

7.7. Теорема. Ако редот (1) апсолутно конвергира и $c\in\mathbf{R}$, тогаш редот и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$ апсолутно конвергира.

Доказ. Јасно, ако $c=0$, тогаш тврдењето на теоремата важи.

Нека $c \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Бидејќи редот (1) апсолутно конвергира, од лема 7.3 следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков, што за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum\limits_{k=n}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи

$$\sum_{k=n}^{n+p} |ca_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

па од лема 7.3 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ апсолутно конвергира. ♦

7.8. Теорема. Ако редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергираат, тогаш и нивниот збир $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ апсолутно конвергира.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Бидејќи редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергираат, од лема 7.3 следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum\limits_{k=n}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sum\limits_{k=n}^{n+p} |b_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи

$$\sum_{k=n}^{n+p} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |b_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

па од лема 7.3 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ апсолутно конвергира. ♦

7.9. Нека се дадени два конвергентни реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{9}$$

чии суми се A и B соодветно. Аналогно на правилото за множење на конечни суми, ќе ги разгледаме сите парови од производи на члeновите на овие редови $a_m b_n$ и од нив ќе ја составиме бесконечната матрица

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_ib_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_ib_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_ib_3 & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \dots & a_ib_k & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \end{bmatrix} \tag{10}$$

Од овие производи можеме на повеќе начини да образуваме низа реални броеви, како на пример

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_2,\ a_3b_1,\ a_1b_4,\ a_2b_3,\ a_3b_2,\ a_4b_1,\ \dots \tag{11}$$

и

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1,\ \dots \tag{12}$$

Теорема. Ако редовите (8) и (9) се апсолутно конвергентни, тогаш редот $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$ формиран од сите производи (10), земени во произволен редослед, е конвергентен и неговата сума е еднаква на AB.

Доказ. Од апсолутната конвергентност на редовите (8) и (9) следува дека редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ се конвергентни и нивните суми да ги означиме со A^* и B^*, соодветно. Ќе докажеме дека редот $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$ апсолутно конвергира. Да ја разгледаме p – та парцијална сума на редот

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{k_s}| = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + |a_{i_3} b_{k_3}| + |a_{i_4} b_{k_4}| + |a_{i_5} b_{k_5}| + \dots \tag{13}$$

и со t да го означиме најголемиот од индексите $i_1, i_2, \dots, i_p, k_1, k_2, \dots, k_p$. Тогаш, очигледно важи

$$\sum_{s=1}^{p} |a_{i_s} b_{k_s}| \le (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_t|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_t|) \le A^* B^*,$$

што значи дека редот (13) конвергира. Бидејќи редоследот на собирците е произволен, од теорема 7.4 следува дека редот $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$ формиран од сите производи (10), земени во произволен редослед, е конвергентен.

Останува да ја најдеме неговата сума. За таа цел неговите членови ќе ги запишеме во редослед како во низата (12) и ќе ги групираме во последователни групи на следниов начин

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \dots \tag{14}$$

и изразите во заградите ќе ги сметаме за членови на редот (14). Ако со A_n и B_m ги означиме парцијалните суми на редовите (8) и (9), соодветно, тогаш низата парцијални суми на редот (14) ќе биде

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3,\ A_4B_4,\ \ldots,\ A_kB_k,\ \ldots .$$

Од $\lim\limits_{n\to\infty} A_nB_n = AB$ следува дека сумата на редот (14) е еднаква на AB. ♦

7.10. Следните примери покажуваат дека ако редовите (8) и (9) се конвергентни, но ниту еден од нив не е апсолутно конвергентен, тогаш нивниот *Кошиев производ* (14) може но не мора да е конвергентен ред.

7.11. Пример. Како што знаеме, редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ е конвергентен, но не е апсолутно конвергентен. Ако го искористиме равенството (16), тогаш за $n-$от член на Кошиевиот производ на овој ред добиваме

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}}\frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n-j+1}} = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j(n-j+1)}}, \qquad n\in\mathbf{N}.$$

Од очигледното неравенство $n^2 + j^2 \geq 2nj \geq nj + j$, за секој $n\in\mathbf{N}$, $j = 1,2,\ldots,n$ следува $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{j(n-j+1)}}$, за секој $n\in\mathbf{N}$, $j=1,2,\ldots,n$ што значи дека

$$|c_n| = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j(n-j+1)}} \geq n\cdot\frac{1}{n} = 1, \text{ за секој } n\in\mathbf{N},$$

т.е. редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ дивергира. ♦

7.12. Пример. Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е конвергентен, но не е апсолутно конвергентен. Ако го искористиме равенството (16), тогаш за $n-$от член на Кошиевиот производ на овој ред добиваме

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2\cdot(n-1)} + \ldots + \frac{1}{j\cdot(n-j+1)} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 1}\right) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right), \quad n\in\mathbf{N}$$

и бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}|c_n| = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n+1} = 0$$

од критериумот на Лајбниц следува дека алтернативниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира. ♦

8. СЕМИКОНВЕРГЕНТНИ РЕДОВИ

8.1. Дефиниција. За конвергентниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ќе велиме дека е *семи-конвергентен* (*условно конвергентен*) ако не е апсолутно конвергентен.

8.2. Да го разгледаме семиконвергентниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{1}$$

Со $a_1^+, a_2^+, ..., a_n^+, ...$ да ги означиме неговите ненегативни, а со $-a_1^-, -a_2^-, ..., -a_n^-, ...$ неговите негативни членови, земени во истиот редослед као што се распоредени и во редот (1). Бидејќи редот (1) не е апсолутно конвергентен, и двете множества $\{a_n^+\}$ и $\{a_n^-\}$ се бесконечни. Да ги разгледаме редовите со ненегативни членови

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \,. \tag{3}$$

Точна е следнава лема.

Лема. За семиконвергентниот ред (1), редовите (2) и (3) се дивергентни.

Доказ. Да ставиме

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |\, a_k \,|, \qquad S_n^+ = \sum_{k=1}^{n} a_k^+, \qquad S_n^- = \sum_{k=1}^{n} a_k^- \,. \tag{4}$$

Сите собирци во последните три збирови на (4) се ненегативни, па затоа низите $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ се монотоно растечки, што значи дека тие имаат конечни или бесконечни граници. За збировите S_n и $\overline{S}_n$ имаме

$$S_n = S_m^+ - S_k^-, \qquad \overline{S}_n = S_m^+ + S_k^-, \qquad n = m + k \,, \tag{5}$$

при што, бидејќи редот (1) е семиконвергентен, добиваме дека условот $n \to \infty$ е еквивалентен на условот $m, k \to \infty$.

Бидејќи редот (1) не е апсолутно конвергентен, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = +\infty$, од што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = +\infty$. Но, тогаш од првото равенство во (5), во кое парцијалната сума S_n има конечна граница, (редот (1) конвергира), следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = +\infty$. ♦

8.3. Теорема (Риман). Нека се дадени два дивергентни реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ со позитивни членови такви, што $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Тогаш, за секој реален број A може да се конструира ред од вид

$$a_1 + \ldots + a_{k_1} - b_1 - \ldots - b_{p_1} + a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \ldots + a_{k_2} - b_{p_1+1} - b_{p_1+2} - \ldots - b_{p_2} + \ldots \quad (6)$$

чија сума е еднаква на A.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $A > 0$. Броевите $k_1 < k_2 < \ldots$ и $p_1 < p_2 < \ldots$ ги избираме како најмали природни броеви за кои последователно се исполнети неравенствата

$$A_1 = \sum_{i=1}^{k_1} a_i > A, \qquad A_2 = A_1 - \sum_{i=1}^{p_1} b_i < A,$$

$$A_3 = A_2 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_i > A, \quad A_4 = A_3 - \sum_{i=p_1+1}^{p_2} b_i < A, \ldots$$

Можноста за избор на овие броеви k_i, p_i, $i = 1, 2, \ldots$ следува од дивергентноста на позитивните редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Сега, од конструкцијата на низата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ следува дека

$$0 < A_{2t-1} - A < a_{k_t} \text{ и } 0 < A - A_{2t} < b_{p_t}, \; t = 1, 2, \ldots .$$

и бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

добиваме дека $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. ♦

8.4. Последица. Ако редот (1) е семиконвергентен, тогаш секој реален број A е сума на ред чии членови се членовите на редот (1), во општ случај земени во друг редослед.

Доказ. Нека за редот (1) ги формираме редовите (2) и (3). Согласно со лема 8.2 имаме $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^+ = +\infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$. Сега тврдењето следува од теоремата на Риман. ♦

8.5. Забелешка. Во пример 7.6 разгледавме семиконвергентен ред од кој, по пренумерирањето на членовите добивме дивергентен ред. Во општ случај може да се докаже дека членовите на редот може да се пренумерираат така, што неговата сума ќе биде $+\infty, -\infty,$ а исто така низата парцијални суми да нема ниту конечна, ниту бесконечна граница. Обидете се да ги докажете овие тврдења.

9. БЕСКОНЕЧНИ ПРОИЗВОДИ

9.1. Дефиниција. Нека е дадена низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Формираме нова низа $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, каде

$$p_n = a_1 a_2 \dots a_n,\ n = 1, 2, \dots . \tag{1}$$

Парот низи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ го нарекуваме *бесконечен производ* и го означуваме со

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n\ . \tag{2}$$

Членовите на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги нарекуваме *множители на бесконечниот производ* (2), а членовите на низата $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ -*парцијални производи* на бесконечниот производ.

9.2. Дефиниција. Нека низата $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со (1). Ако постои $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $p \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$, тогаш ќе велиме дека производот (2) *конвергира* кон p и ќе пишуваме $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = p$. Ако $p = +\infty$ или $p = -\infty$ или $p = 0$, тогаш ќе велиме дека производот (2) *определено дивергира* кон $+\infty$ или $-\infty$ или 0, соодветно. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ не постои, тогаш ќе велиме дека производот (2) *дивергира неодредено.*

9.3. Пример. а) Бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ е конвергентен бидејќи

$$p_n = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)} \cdot \frac{4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+3)}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+2)} = \frac{n+3}{3(n+1)} \text{ и } \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3} \neq 0 .$$

б) Низата

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ n = 1, 2, \ldots$$

конвергира и нејзината граница е Ојлеровата константа γ. Според тоа, постои низа $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и за секој $n = 1, 2, \ldots$ важи

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \alpha_n .$$

Да го разгледаме бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$. За овој производ низата парцијални производи е

$$p_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n+1},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Од досега изнесеното имаме

$$p_n = \frac{e^{\ln n+\gamma+\alpha_n}}{n+1} = \frac{ne^{\gamma+\alpha_n}}{n+1} \to e^{\gamma},\ n \to \infty \text{ т.е. } \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = e^{\gamma} . \ \blacklozenge$$

9.4. Нека $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Имаме

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} e^{\ln a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln a_k} .$$

Сега од непрекинатоста на функцијата $f(x) = e^x$ следува:

Теорема. а) Редот $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$ е конвергентен ако и само ако бесконечниот производ (2) е конвергентен.

б) Редот $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$ дивергира кон $+\infty$ ако и само ако бесконечниот производот (2) дивергира кон $+\infty$.

в) Редот $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$ дивергира кон $-\infty$ ако и само ако бесконечниот производот (2) дивергира кон 0. ♦

9.5. Теорема. Ако бесконечниот производ (2) конвергира, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 .$$

Доказ. Нека $p = \lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$. Од друга страна $a_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n}$, од што следува

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} p_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} p_n} = \frac{p}{p} = 1 . \ \blacklozenge$$

9.6. Забелешка. Условот $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ е потребен за да производ (2) конвергира, но не е и доволен. Имено, ако $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, тогаш $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, но $p_n = n+1$, што значи дека бесконечниот производ дивергира кон $+\infty$.

Често пати бесконечните производи се запишуваат во обликот $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, бидејќи вака запишаниот бесконечен производ полесно се доведува во врска со соодветен ред. Јасно, притоа, потребниот услов од теорема 9.5 е $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Да забележиме дека, ако бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ конвергира, тогаш конвергира и бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$, при што

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)}.$$

Навистина, ако $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа парцијални производи на конвергентниот бесконечен производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, тогаш $\{\frac{1}{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е низа парцијални производи на бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$ и притоа важи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{p}$, што значи

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{p}=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)}.$$

9.7. Теорема. Нека за низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи $0<a_n<1$, $n=1,2,\dots$.

Редот $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е конвергентен ако и само ако бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ е конвергентен, ако и само ако бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ е конвергентен.

Доказ. Од конвергентноста на редот $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ и од конвергентноста на бесконечните производи следува $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, што значи дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{-\ln(1-a_n)}{a_n}=1.$$

Понатаму, од $0<a_n<1$, $n=1,2,3,\dots$ следува дека

$$\ln(1+a_n)>0 \text{ и } -\ln(1-a_n)>0.$$

Од последица 3.6 следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е конвергентен ако и само редот $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ е конвергентен и редот $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е конвергентен ако и само ако редот $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-a_n)$ е конвергентен. Сега тврдењето следува од теоремата 9.4 а). ♦

9.8. Пример. а) Да го разгледаме производот $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^a}),\ a>0$. Според пример 3.2, редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ конвергира при $a>1$, а дивергира при $a\leq 1$. Од теорема 9.7 следува дека производот $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^a})$ конвергира за $a>1$, а дивергира за $a\leq 1$.

б) Да го разгледаме производот

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)\ ,\ 0<q<1\,.$$

Од пример 1.5 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $0<q<1$ конвергира, што повторно според теорема 9.7 значи дека разгледуваниот производ конвергира. ♦

9.9. Теорема. Ако редовите $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ се конвергентни, тогаш и бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ е конвергентен.

Доказ. Од конвергентноста на редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следува дека $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Но, $\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$, што значи дека $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2}$. Сега од последица 3.6 следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}[a_k-\ln(1+a_k)]$ е конвергентен. Понатаму, од конвергентноста на редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$, што според теорема 9.4 значи дека бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ е конвергентен. ♦

9.10. Пример. Нека $a>0$. Според теорема 6.2 алтернативниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$ конвергира. Понатаму, за $a>\frac{1}{2}$ редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2a}}$ конвергира. Сега, од теорема 9.9, при $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^a},\ n=1,2,...$ следува дека за $a>\frac{1}{2}$ бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^a})$ конвергира. ♦

9.11. Дефиниција. За бесконечниот производ

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{3}$$

ќе велиме дека е *апсолутно конвергентен* ако бесконечниот производ

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|) \tag{4}$$

е конвергентен.

9.12. Во врска со апсолутно конвергентните бесконечни производи ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. а) Бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако редот $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+|a_k|)$ е конвергентен.

б) Бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако секој од редовите $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е апсолутно конвергентен.

Доказ. а) Според дефиниција 9.11 бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако бесконечниот производ (4) е конвергентен. Сега тврдењето следува од теорема 9.7.

б) Од а) имаме дека бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако редот $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+|a_k|)$ е конвергентен, па од забелешката 9.6 имаме $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, што значи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+|a_n|)}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}=1\,.$$

Од последица 3.6 следува дека редовите

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+|a_k|)\,,\ \sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+a_k)|\ \text{ и }\ \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$$

или истовремено конвергираат или истовремено дивергираат, па затоа производот (3) апсолутно конвергира ако и само ако секој од редовите $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е апсолутно конвергентен. ♦

9.13. Последица. Ако бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен, тогаш тој е конвергентен.

Доказ. Нека бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен. Тогаш, според теорема 9.12 редот $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е апсолутно конвергентен, од што според 7.4

следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергира обично. Конечно од теорема 9.7 следува дека производот (3) конвергира. ♦

9.14. Забелешка. Обратното тврдење на последица 9.13 не важи. Навистина, во пример 9.10 докажавме дека за $\frac{1}{2} < a \le 1$ бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^a})$ конвергира. Меѓутоа, тој не конвергира апсолутно, бидејќи во спротивно од теорема 9.12 б) ќе следува дека за $\frac{1}{2} < a \le 1$ редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ конвергира, што противречи пример 3.4. и фактот дека хармонискиот ред дивергира. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е произволен ред со позитивни членови. Докажете дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ е конвергентен.

2. Нека $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ е позитивна низа реални броеви. Докажете дека ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ е конвергентен.

3. Нека низата $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ го задоволува условот $0 < a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

4. Докажи дека ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$ конвергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ конвергира.

5. Нека $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (1-\frac{k}{n+1}) a_k$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \sigma_n|^a < \infty$ за секој $a > 0$. Докажете дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

6. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

   а) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

7. Испитајте ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$.

8. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ и г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n!)}$,

9. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ и

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$.

10. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = (\frac{an}{n+1})^n$, $a \in \mathbf{R}$.

11. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1+\cos n}{2+\cos n})^{2n-\ln n}$.

12. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $(\frac{1}{2})^p + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^p + (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^p + \dots$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)})^a$, $p, q > 0$.

13. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!n^q}$ и

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)})^p \frac{1}{n^q}$.

14. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1}$.

15. Користејќи го интегралниот критериум на Коши, испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n\ln^2(\ln n)}$ и б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

16. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}dx$ и в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} e^{-x}dx$

17. Испитајте ја апсолутната и условната конвергенција на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln\sqrt{2})^n}{\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$ и ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

18. Користејќи го критериумот на Дирихле, докажи ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin na}{\ln n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$ и в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$.

19. Користејќи го критериумот на Абел, докажи ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\frac{\sqrt{n}}{n+a}$, $a>0$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ и

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{\mathrm{n}})^{\mathrm{n}}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

20. Да го земеме првиот член на хармонискиот ред со знак плус, следните два со знак минус, следните три со знак плус итн. Докажи дека вака модифицираниот хармониски ред конвергира.

21. Провери дека производот на двата дивергентни реда

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3}{2})^n \text{ и } 1+\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n+\tfrac{1}{2^{n+1}})$$

е апсолутно конвергентен ред.

22. Нека $a_n>0, b_n>0$, за $n\geq 1$. Дали од конвергенцијата на производите $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следува конвергенцијата на производите:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ и в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

23. Пресметај ги бесконечните производи:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$, б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+2^{-2^n})$,

в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$ и г) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}$.

XVII ГЛАВА
ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ

Во оваа глава ќе разгледаме редови чии членови се функции. Пред да ги разгледаме овие редови ќе ги разгледаме функционалните низи, за кои ќе ги докажеме основните својства.

1. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ

1.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ и за секој природен број n е дадена функција $f_n : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$. Тогаш, ќе велиме дека на множеството $\mathbf{D}$ е определена *функционална низа*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1}$$

1.2. Забелешка. Јасно, за фиксиран $x_0 \in \mathbf{D}$ со низата (1) е зададена бројна низа

$$\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

која може да биде конвергентна или дивергентна.

1.3. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека е *рамномерно ограничена* на множеството $\mathbf{D}$, ако постои реален број $M > 0$ таков што за секој $x \in \mathbf{D}$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $|f_n(x)| \leq M$.

1.4. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека *опаѓа (расте)* на множеството $\mathbf{D}$, ако за секој $x \in \mathbf{D}$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ се исполнети неравенствата $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, (соодветно $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$).

1.5. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека *конвергира во точката* $x_0 \in \mathbf{D}$, ако бројната низа $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

За низата (1) ќе велиме дека *конвергира на множеството* $\mathbf{D}$, ако таа конвергира во секоја точка од $\mathbf{D}$. Во овој случај дефинираме функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in \mathbf{D} \tag{3}$$

и ќе велиме дека низата (1) на множеството $\mathbf{D}$ *обично конвергира кон функцијата* $f(x)$, (*конвергира по точки*).

1.6. Забелешка. Основна задача, која се поставува во врска со воведените поими е дали при граничната операција (3) се зачувуваат најважните својства на функциите. На пример, ако функциите f_n се непрекинати, диференцијабилни или интеграбилни, дали тоа е точно и за граничната функција? Каква е, на пример, зависноста меѓу f_n' и f' или меѓу интегралите од f_n и f ?

Како што знаеме, функцијата f е непрекината во точката x_0 ако и само ако

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Според тоа, прашањето дали границата од една функционална низа од непрекинати функции е непрекината функција е еквивалентно на прашањето дали

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)\,, \tag{4}$$

т.е. дали редоследот по кој се извршуваат граничните операции во однос на прашањето за непрекинатост е небитен за крајниот резултат. Следниот пример покажува дека во општ случај редоследот по кој се извршуваат граничните операции влијае на крајниот резултат.

1.7. Пример. Да ја разгледаме низата $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in (-\infty, \infty)$. Границата на оваа низа е функцијата

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} nx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Јасно, за секој $n = 1, 2, \ldots$ функцијата $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ е непрекината на множеството $(-\infty, \infty)$. Меѓутоа, нејзината граница е прекината во точката $x_0 = 0$. ♦

2. РАМНОМЕРНА КОНВЕРГЕНТНОСТ НА ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ

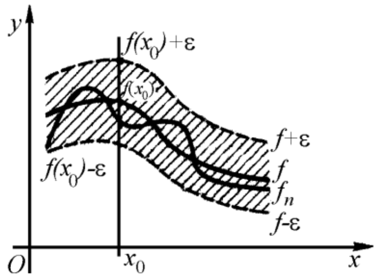
2.1. Дефиниција. Нека функцијата f и низата функции

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

се определени на множеството $\mathbf{D}$. За низата (1) ќе велиме дека *рамномерно конвергира кон функцијата* f *на множеството* $\mathbf{D}$, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таков што за секој $n > n_0$ важи

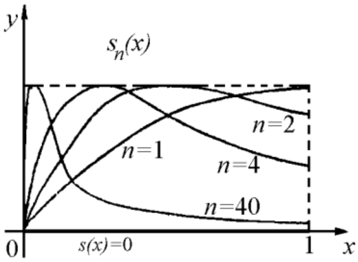
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{, за секој } x \in \mathbf{D}\,. \tag{2}$$

2.2. Коментар. Очигледно, ако низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството $\mathbf{D}$, тогаш таа конвергира и обично. Разликата меѓу обичната конвергенција дадена во дефиницијата 1.5 и рамномерната конвергенција е во следново: ако низата (1) конвергира обично кон функцијата f на множеството $\mathbf{D}$, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ и за секој фиксиран $x \in \mathbf{D}$ постои природен број n_0 кој зависи од ε и x таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството (2), а ако конвергенцијата е рамномерна, тогаш бројот n_0 зависи само од ε и неравенството (2) е исполнето за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ (црт. 1). Да разгледаме два примери.



Цртеж 1

2.3. Пример. а) Нека $\mathbf{D} = [0,1]$. Да ја разгледаме функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Лесно се гледа дека оваа низа конвергира за секој фиксиран x и дека $s(x) = 0$, за секој $x \in [0,1]$, (црт. 2). Навистина, од



Цртеж 2

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\neq 0}} s_n(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x\neq 0}} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = \frac{0}{x^2} = 0 \text{ и } s_n(0) = 0$$

добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = 0 = s(x)$, што значи дека при фиксирано $x \in [0,1]$, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 = n_0(\varepsilon; x)$ таков што за секој $n > n_0$ важи

$$\left| \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| < \varepsilon . \tag{3}$$

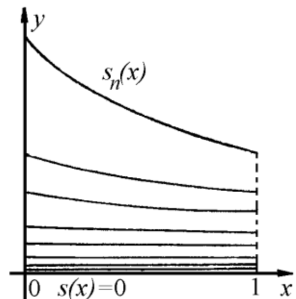
Ќе докажеме дека не можеме да избереме n_0 кој не зависи од x таков што да е исполнето неравенството (3), т.е. дека низата $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира рамномерно кон функцијата $s(x) = 0$, $x \in [0,1]$.

Нека претпоставиме дека постои таков n_0 и да фиксираме некој $n > n_0$. Тогаш од (3) следува

$$\left| \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| < \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

за секој $x \in [0,1]$. Но, при фиксирано n последното неравенство сигурно не важи за доволно мали x. На пример, за $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{n}$ добиваме $1 < \frac{1}{2}$, што е противречност.

б) Нека $\mathbf{D} = [0,1]$. Да ја разгледаме функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $s_n(x) = \frac{1}{n+x}$. Ќе докажеме дека оваа низа рамномерно конвергира кој функцијата $s(x) = 0$, $x \in [0,1]$, (црт. 3).



Цртеж 3

Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е произволен и да земеме $n_0=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. Тогаш, за секој $n>n_0$ имаме $n>[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon}$, па затоа

$$|s_n(x)-0|=|\frac{1}{n+x}-0|=\frac{1}{n+x}\le\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

што значи дека функционалната низа

$$s_n(x)=\frac{1}{n+x},\ n=1,2,...$$

рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)=0$ на интервалот $[0,1]$. ♦

2.4. Лема. Ако низите $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергираат на множеството $\mathbf{D}$ кон функциите f и g, соодветно и $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, тогаш и низата $\{\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$ кон функцијата $\lambda f+\mu g$.

Доказ. Ако $\lambda=\mu=0$, тогаш тврдењето е очигледно. Нека претпоставиме дека $|\lambda|+|\mu|>0$. Тогаш, од рамномерната конвергенција на низите $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множеството $\mathbf{D}$ следува дека за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in\mathbf{D}$ се исполнети неравенствата

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|} \text{ и } |g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|}.$$

Според тоа, за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таковшто за секој $n>n_0$ и за секој $x\in\mathbf{D}$ е исполнето неравенството

$$\begin{aligned}|\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)-(\lambda f(x)+\mu g(x))|&\le|\lambda|\cdot|f_n(x)-f(x)|+|\mu|\cdot|g_n(x)-g(x)|\\&<\frac{\varepsilon|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}+\frac{\varepsilon|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}=\varepsilon,\end{aligned}$$

што значи дека низата $\{\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$ кон функцијата $\lambda f+\mu g$. ♦

2.5. Лема. Ако низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$ кон функцијата $f(x)$, а функцијата $g(x)$ е ограничена на множеството $\mathbf{D}$, тогаш низата $\{g(x)f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$ кон функцијата $f(x)g(x)$.

Доказ. Бидејќи функцијата $g(x)$ е ограничена на множеството $\mathbf{D}$ постои реален број $M>0$ таков што $|g(x)|<M$ за секој $x\in\mathbf{D}$. Ако $\varepsilon>0$ тогаш од рамномерната конвергентност на низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множеството $\mathbf{D}$ следува дека постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in\mathbf{D}$ е исполнето неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ е исполнето неравенството

$$| g(x) f_n(x) - g(x) f(x) | = | g(x) | \cdot | f_n(x) - f(x) | < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon ,$$

што значи дека низата $\{g(x) f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$ кон функцијата $f(x)g(x)$. ♦

2.6. Пример. Нека $\mathbf{D} = [0,1]$ и $k > 0$. Ќе докажеме дека функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $f_n(x) = \frac{x^k}{n+x}$ рамномерно конвергира на $\mathbf{D}$.

Според примерот 2.2 б) функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $s_n(x) = \frac{1}{n+x}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D} = [0,1]$ кон функцијата $s(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Од друга страна, степенската функција $g(x) = x^k$ е ограничена на множеството $\mathbf{D} = [0,1]$. Сега, од лемата 2.5 следува дека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D} = [0,1]$ кон функцијата $s(x)g(x) = 0$, $x \in [0,1]$. ♦

2.7. Теорема (Кошиев критериум). Низата (1) определена на множеството $\mathbf{D}$, рамномерно конвергира на тоа множество ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секои $m, n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ важи

$$| f_m(x) - f_n(x) | < \varepsilon . \tag{4}$$

Доказ. Нека низата (1) рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$. Тогаш, постои функција f таква што за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ е исполнето неравенството $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$. Од последното неравенство имаме дека за секои $m, n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ важи

$$| f_m(x) - f_n(x) | \leq | f_m(x) - f(x) | + | f(x) - f_n(x) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

што значи дека условот (4) е исполнет.

Обратно, ако е исполнет условот (4), тогаш за секој фиксиран $x \in \mathbf{D}$ бројната низа

$$f_n(x), \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

е Кошиева, па затоа таа е конвергентна. За секој $x \in \mathbf{D}$ со $f(x)$ да ја означиме границата на низата (5). Тогаш, f е функција определена на множеството $\mathbf{D}$. Ќе докажеме дека низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството $\mathbf{D}$. Навистина, од условот (4) следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таковшто за секои $m, n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ е исполнето неравенството

$$| f_m(x) - f_n(x) | < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Но,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x),$$

и ако во последното неравенство земеме $m \to \infty$, добиваме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ важи

$$|f(x) - f_n(x)| \le \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството $\mathbf{D}$. ♦

2.8. Теорема. Низата функции (1) определени на множеството $\mathbf{D}$ рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{6}$$

Доказ. Нека е исполнет условот (6). Тогаш, од дефиницијата на граница на низа следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\sup\limits_{x\in\mathbf{D}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Според тоа, за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ важи $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, што значи дека низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството $\mathbf{D}$.

Обратно, нека низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството $\mathbf{D}$. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ е исполнето неравенството $|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$. Според тоа, за најдениот n_0, при $n > n_0$ ќе важи $\sup\limits_{x\in\mathbf{D}} |f_n(x) - f(x)| \le \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Сега равенството (6) следува од дефиницијата за граница на бројна низа. ♦

2.9. Последица. Низата функции (1) определени на множеството $\mathbf{D}$ рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f ако и само ако постои ненегативна низа реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{7}$$

и постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ важи

$$|f_n(x) - f(x)| \le a_n. \tag{8}$$

Доказ. Нека низата функции (1) определени на множеството $\mathbf{D}$, рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f. Тогаш, постои природен број n_0 таков што множеството реални броеви

$$\{\sup_{x\in\mathbf{D}} |f_n(x) - f(x)| \mid n > n_0\}$$

е ограничено. Нека земеме произволни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_{n_0}$ и да ставиме

$$a_n = \sup_{x\in\mathbf{D}} |f_n(x) - f(x)|, \ n > n_0.$$

Тогаш, за $n > n_0$ условот (8) е исполнет и од теорема 2.8 следува равенството (7).

Обратно, нека постои ненегативна низа реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што условите (7) и (8) се исполнети. Тогаш, од условот (8) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството

$$\sup_{x\in\mathbf{D}} |f_n(x) - f(x)| \le a_n .$$

Ако во последното неравенство преминеме кон граница добиваме

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0 ,$$

што според теорема 2.8 значи дека низата функции (1) определени на множеството $\mathbf{D}$, рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f . ♦

2.10. Пример. а) Да ја разгледаме функционалната низа

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n^2}}, \qquad n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R} .$$

За $n \to \infty$ добиваме $f_n(x) \to |x|$ за секој $x \in \mathbf{R}$ и притоа важи

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n^2}} - |x| \right| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{1}{n^2(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|)} = \frac{1}{n}$$

од што следува

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 ,$$

што според теоремата 2.8 значи дека разгледуваната низа рамномерно конвергира кон функцијата $f(x) = |x|$ на целата реална права.

б) Да ја разгледаме функционалната низа

$$f_n(x) = n(\sqrt{x + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{x}), \qquad n \in \mathbf{N},\quad x > 0 .$$

За $n \to \infty$ добиваме $f_n(x) \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$ за секој $x > 0$. Бидејќи

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} \frac{1}{2n\sqrt{x}(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x})^2} = +\infty ,$$

од теорема 2.8 следува дека разгледуваната низа не конвергира рамномерно кон $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на множеството $(0, +\infty)$. ♦

2.11. Во следните три теореми ќе дадеме одговор на некои од прашањата поставени во забелешка 1.6.

Теорема. Нека членовите на низата (1) се непрекинати функции на множеството $\mathbf{D}$. Ако таа на множеството $\mathbf{D}$ рамномерно конвергира кон функцијата $f(x)$, тогаш функцијата $f(x)$ е непрекината на множеството $\mathbf{D}$.

Доказ. Нека $x_0 \in \mathbf{D}$. Од рамномерната конвергентност на низата (1) на множеството $\mathbf{D}$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ е исполнето неравенството

$$| f_n(x) - f(x) | < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

па затоа за $n_0 + 1$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ важи

$$| f_{n_0+1}(x) - f(x) | < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Функцијата $f_{n_0+1}(x)$ е непрекината во точката x_0, што значи дека постои $\delta > 0$ таков што

$$| f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0) | < \tfrac{\varepsilon}{3}, \text{ кога } | x - x_0 | < \delta .$$

Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што кога $| x - x_0 | < \delta$ важи

$$| f(x) - f(x_0) | = | f(x) - f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0) + f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0) |$$

$$\leq | f(x) - f_{n_0+1}(x) | + | f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0) | + | f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0) | < 3\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

од што следува дека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката x_0. Од произволноста на точката $x_0 \in \mathbf{D}$ следува дека функцијата $f(x)$ е непрекината на множеството $\mathbf{D}$. ♦

2.12. Забелешка. Тврдењето, обратно на теоремата 2.11, не е точно. Со други зборови, една низа од непрекинати функции може да конвергира кон непрекината функција, дури и кога конвергенцијата не е рамномерна. Навистина, во пример 2.10 б) докажавме дека низата

$$f_n(x) = n(\sqrt{x + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{x}), \quad n \in \mathbf{N}, x > 0$$

конвергира кон непрекинатата функција $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$, но исто така видовме дека конвергенцијата не е рамномерна.

2.13. Теорема. Нека $a, b \in \mathbf{R}$ и членовите на низата (1) се непрекинати функции на интервалот $[a,b]$. Ако низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, тогаш функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{9}$$

Доказ. Бидејќи членовите на низата (1) се непрекинати функции на интервалот $[a,b]$, од теорема 2.11 следува дека и нејзината рамномерна граница $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, па затоа таа е интеграбилна на $[a,b]$. Според тоа, интегралот $\int_a^b f(x)dx$ постои.

Од рамномерната конвергентност на низата (1) на интервалот $[a,b]$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in [a,b]$ е исполнето неравенството

$$| f_n(x) - f(x) | < \tfrac{\varepsilon}{b-a} .$$

Значи, постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx \right| \le \int_a^b | f_n(x) - f(x) | \, dx$$

$$< \int_a^b \tfrac{\varepsilon}{b-a} dx = \tfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

од што следува равенството (9). ♦

2.14. Забелешка. Ако низата (1) не е рамномерно конвергентна на интервалот $[a,b]$, тогаш тврдењето од претходната теорема може да не е точно. Нека, на пример:

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \; n \in \mathbf{N}, \; x \in [0,1].$$

Ако одделно ги разгледаме случаите $x > 0$ и $x = 0$ добиваме

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0, \; x \in [0,1],$$

што значи дека $f(x) \equiv 0$. Меѓутоа, оваа низа не е рамномерно конвергентна бидејќи

$$\sup_{x\in[0,1]} | f_n(x) - f(0) | \ge f_n(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) = \tfrac{\sqrt{n}}{e} \to +\infty \text{ кога } n \to \infty .$$

Од друга страна, имаме

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2} dx = -\tfrac{1}{2} e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n}) \to \tfrac{1}{2}, \text{ кога } n \to \infty$$

и

$$\int_0^1 f(x)dx = 0,$$

што значи дека при граничниот премин под знакот на интегралот рамномерната конвергентност на низата (1) е задолжителен услов. ♦

2.15. Пред да ја формулираме и докажеме последната теорема во овој параграф, ќе разгледаме уште еден пример.

Пример. Нека е дадена функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $s_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in [0,\pi]$. Бидејќи

$$| s_n(x) - 0 | = \left| \tfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \tfrac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} \le \tfrac{1}{\sqrt{n}} = a_n , \; a_n > 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

од последица 2.9 следува дека оваа низа рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)=0$, $x\in[0,\pi]$. Очигледно, дадената низа е диференцијабилна и низата формирана од изводите е

$$s_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx\,,\ n=1,2,\ldots.$$

Но, низата $\{s_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не само што не е рамномерно конвергентна на интервалот $[0,\pi]$ туку не е конвергентна ниту обично. На пример, за $x=0$ ја добиваме реалната низа $s_n'(0)=\sqrt{n}$, $n=1,2,\ldots$ која е дивергентна. ♦

2.16. Теорема. Нека $a,b\in\mathbf{R}$ и низата (1) од непрекинато диференцијабилни функции на интервалот $[a,b]$ конвергира барем во една точка $x_0\in[a,b]$, а низата $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на $[a,b]$. Тогаш, низата (1) рамномерно конвергира на $[a,b]$ кон функцијата $f(x)$ која е непрекинато диференцијабилна на интервалот $[a,b]$ и притоа важи

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)\,,\tag{10}$$

за секој $x\in[a,b]$.

Доказ. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Бидејќи низата $\{f_n(x_0)\}$ конвергира, а низата $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на $[a,b]$, од Кошиевите критериуми за конвергенција на реална и функционална низа следува дека постои природен број n_0 таков што за секои $m,n>n_0$ и за секој $t\in[a,b]$ важи

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\tfrac{\varepsilon}{2}\tag{11}$$

и

$$|f_n'(t)-f_m'(t)|<\tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.\tag{12}$$

Од теоремата на Лагранж, применета на функцијата $f_n(x)-f_m(x)$ и од неравенството (12) следува дека за секои $x,t\in[a,b]$ и за секои $m,n>n_0$ важи

$$|f_n(x)-f_m(x)-f_n(t)+f_m(t)|<\tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-t|\le\tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\tfrac{\varepsilon}{2}\,.\tag{13}$$

Од досега изнесеното и од неравенствата (11) и (13) следува дека n_0 таков што за секои $m,n>n_0$ и за секој $t\in[a,b]$, важи

$$|f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

што според Кошиевиот критериум значи дека низата (1) рамномерно конвергира на $[a,b]$.

Нека $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)$, за $x\in[a,b]$ и x е произволна точка од интервалот $[a,b]$. Бидејќи низата $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на $[a,b]$, таа рамномерно конвергира и на интервалот со крајни точки x_0 и x. Од теорема 2.13 следува дека

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(x)dx = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] = f(x) - f(x_0).$$

Ако го диференцираме равенството $\int_{x_0}^{x} g(x)dx = f(x) - f(x_0)$, тогаш од својствата на определениот интеграл добиваме $g(x) = f'(x)$, за секој $x \in [a,b]$, т.е. за секој $x \in [a,b]$ равенството (10) е исполнето. ♦

3. ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

3.1. Дефиниција. Редот чии членови се елементите на функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определена на множеството $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ го нарекуваме *функционален ред* и го означуваме со

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{1}$$

Низата парцијални суми на редот (1) ја означуваме со

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad x \in \mathbf{D},\ n \geq 1.$$

За редот (1) ќе велиме дека *конвергира во точката* $x_0 \in \mathbf{D}$ ако конвергира бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. За редот (1) ќе велиме дека *конвергира на множеството* $\mathbf{D}$ ако тој конвергира во секоја точка од $\mathbf{D}$.

Множеството од сите точки $x \in \mathbf{D},$ во кои редот (1) конвергира, го нарекуваме *област на конвергенција на редот* (1).

3.2. Дефиниција. Ќе велиме дека функционалниот ред (1*) рамномерно конвергира* на множеството $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$ ако низата парцијални суми $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty},\ x \in \mathbf{A}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{A}$.

3.3.Забелешка. Рамномерната конвергентност на редот (1) означува дека постои таква функција $s(x)$ кон која низата парцијални суми $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{A}$. Од рамномерната конвергенција следува дека $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x),$ за секој $x \in \mathbf{A}$, па затоа $s(x)$ е сума на редот (1).

Да ставиме

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Тогаш, $s(x)-s_n(x)=r_n(x)$, па затоа редот (1) рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)$ ако и само ако низата $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $g(x)=0,\ \ x\in\mathbf{A}$.

3.4. Теорема. Редот (1) рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)$ на множеството $\mathbf{A}\subset\mathbf{D}$ ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{A}}|s_n(x)-s(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{A}}|r_n(x)|=0\,.$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.8. ♦

3.5. Теорема. Ако редот (1) рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{A}\subset\mathbf{D}$, тогаш низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ од неговите членови рамномерно конвергира кон нула на множеството $\mathbf{A}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{A}}|f_n(x)|=0\,.$$

Доказ. Нека редот (1) рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{A}$. Тогаш, за секој $\varepsilon>0$ постои n_0 таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in\mathbf{A}$ важи

$$|s_n(x)-s(x)|<\tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Затоа, за секој $\varepsilon>0$ постои n_0 таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in\mathbf{A}$ важи

$$|f_{n+1}(x)|=|s_{n+1}(x)-s_n(x)|\le|s_{n+1}(x)-s(x)|+|s_n(x)-s(x)|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,,$$

т.е. низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон нула на множеството $\mathbf{A}$, односно $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbf{A}}|f_n(x)|=0$. ♦

3.6. Пример. Да го разгледаме редот

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)},\qquad x\in(0,\infty)\,.$$

За $n-$та парцијална сума на редот имаме

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{(k-1)x+1}-\tfrac{1}{kx+1}\right)=1-\tfrac{1}{nx+1}\,,$$

од што добиваме дека

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{nx+1}\right)=1,\quad x\in(0,\infty)\,.$$

Понатаму, бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}|r_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}\tfrac{1}{nx+1}=1\,,$$

од теорема 3.4 следува дека овој ред конвергира, но не конвергира рамномерно. ♦

3.7. Пример. Да го разгледаме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)} \ .$$

кога

а) $x \in [0,\varepsilon], \ \varepsilon > 0$ и

б) $x \in [\varepsilon,\infty), \ \varepsilon > 0$.

Ако општиот член $f_n(x)$ на редот го запишеме во видот

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)} = \frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)} \ ,$$

тогаш за $n-$та парцијална сума на редот имаме

$$s_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)} \ .$$

Оттука следува дека

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x > 0, \\ 0 & \text{ако } x = 0. \end{cases}$$

Понатаму, во случајот под а) имаме

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\varepsilon]} | r_n(x) | = | s(0^+) - s_n(0^+) | = 1 \ ,$$

што значи дека во овој случај редот конвергира, но не конвергира рамномерно.

Во случајот под б) наоѓаме

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\varepsilon,\infty)} | r_n(x) | = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)...(1+n\varepsilon)} = 0 \ ,$$

што значи дека во овој случај редот конвергира рамномерно. ♦

3.8. Дефиниција. За редот (1) ќе велиме дека *апсолутно конвергира на множеството* $\mathbf{D}$ ако на множеството $\mathbf{D}$ конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} | f_n(x) |$.

3.9. Теорема (Ваерштрас). Нека се дадени функционалниот ред (1) чии членови се определени на множеството $\mathbf{D}$ и бројниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0, n = 1,2,3,... \ . \tag{2}$$

Ако редот (2) конвергира и се исполнети неравенствата

$$| f_n(x) | \leq a_n, \ n = 1,2,... , \text{ за секој } x \in \mathbf{D} , \tag{3}$$

тогаш редот (1) апсолутно и рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$.

Доказ. Ако редот (2) конвергира, тогаш од признакот на срамнување и од неравенствата (3) следува дека редот (1) апсолутно конвергира на множеството $\mathbf{D}$. Јасно, редот (1) конвергира.

Нека $s(x)$ е сумата на редот (1) и $s_n(x)$ е неговата парцијална сума. Од конвергентноста на редот (2) следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Но, тогаш за секој $n > n_0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ важи

$$|s_n(x) - s(x)| = |r_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon,$$

што значи дека редот (1) рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$. ♦

3.10. Пример. Да го разгледаме редот

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), \quad |x| < a. \tag{4}$$

Ако го искористиме неравенството

$$\ln(1+x) \leq x, \text{ за } x \geq 0,$$

добиваме

$$0 \leq \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \leq \frac{x^2}{n\ln^2 n} < \frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

и бидејќи бројниот ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n\ln^2 n}$ конвергира, од претходната теорема следува дека редот (4) рамномерно конвергира. ♦

3.11. Теорема (Кошиев критериум). Редот (1) рамномерно конвергира на множеството $\mathbf{D}$ ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што за секој $n > n_0$, за секој $p \geq 0$ и за секој $x \in \mathbf{D}$ е исполнето неравенството

$$|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.7. ♦

3.12. Теорема (признак на Дирихле-Харди). Ако функционалната низа $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbf{D}$ рамномерно конвергира кон нула на множеството $\mathbf{D}$ и во секоја точка $x \in \mathbf{D}$ таа е монотона, а функционалната низа $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbf{D}$ е таква што низата парцијални суми на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \tag{6}$$

е ограничена на $\mathbf{D}$, тогаш редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{7}$$

рамномерно конвергира на $\mathbf{D}$.

Доказ. Од условот на теоремата следува дека парцијалните суми

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

на редот (6) се ограничени на множеството $\mathbf{D}$, па затоа постои константа $B > 0$ таква што за секој $x \in \mathbf{D}$ и за секој $n = 1, 2, \ldots$ е исполнето неравенството $|B_n(x)| \le B$. Според тоа, за секој $x \in \mathbf{D}$, за секој $n = 2, 3, 4, \ldots$ и за секој $p = 0, 1, 2, \ldots$ важи

$$|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)| = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \le |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \le 2B. \tag{8}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Бидејќи низата $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон нула на множеството $\mathbf{D}$, добиваме дека постои n_0 таков што за секој $x \in \mathbf{D}$ и за секој $n > n_0$ важи $|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}$. Според тоа, за секој $x \in \mathbf{D}$, за секој $n > n_0$ и за секој $p = 0, 1, 2, \ldots$, согласно со равенството на Абел и монотоноста на низата $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ во секоја точка од множеството $\mathbf{D}$ добиваме

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) a_k(x)| &\le |a_{n+p}(x) B_{n+p}(x) + \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_j(x)| \\
&\le |a_{n+p}(x)| \cdot |B_{n+p}(x)| + \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| \cdot |B_j(x)| \\
&\le 2B(|a_{n+p}(x)| + \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)|) \\
&= 2B(|a_{n+p}(x)| + |\sum_{k=n}^{n+p-1} a_k(x) - a_{k+1}(x)|) \\
&= 2B(|a_{n+p}(x)| + |a_n(x) - a_{n+p}(x)|) \\
&\le 2B(2|a_{n+p}(x)| + |a_n(x)|) < 2B(\tfrac{\varepsilon}{6B} + \tfrac{2\varepsilon}{6B}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Сега тврдењето на теоремата следува од Кошиевиот критериум (теорема 3.11). ♦

3.13. Пример. Ќе ја испитаме рамномерната конвергентност на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ на множествата

а) $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \pi$ б) $[0, 2\pi]$

Решение. а) Парцијалните суми $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ се ограничени, т.е.

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| = |\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

а низата $a_n(x) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$ е монотона и таа рамномерно конвергира кон нула на целата реална права (зошто?), па затоа од теорема 3.12 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ рамномерно конвергира на множеството $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$.

б) Од признакот на Дирихле следува дека за секој фиксиран $x \in (0, 2\pi)$ редот конвергира, а за конвергентноста за $x = 0$ и $x = 2\pi$ е очигледна. Користејќи го Кошиевиот критериум, ќе докажме дека овој ред не конвергира рамномерно на множеството $[0, 2\pi]$. Нека $\varepsilon = 0{,}1$. Да ја оцениме разликата

$$|s_{2n}(x) - s_n(x)|_{x=\frac{1}{n}} = |\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + ... + \frac{\sin 2nx}{2nx}|_{x=\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{\sin(1+\frac{1}{n})}{n+1} + \frac{\sin(1+\frac{2}{n})}{n+2} + ... + \frac{\sin 2}{2n} \geq \frac{\sin 1}{2} > \varepsilon,$$

за секој природен број n, што значи дека редот не конвергира рамномерно. ♦

3.14. Теорема (признак на Абел-Харди). Ако низата функции $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена на множеството $\mathbf{D}$ и монотона во секоја точка $x \in \mathbf{D}$, а редот (6) рамномерно конвергира на $\mathbf{D}$, тогаш и редот (7) рамномерно ковергира на множеството $\mathbf{D}$.

Доказ. Бидејќи низата $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена на множеството $\mathbf{D}$ постои константа $A > 0$ таква, што за секој $x \in \mathbf{D}$ и секој $n = 1, 2, 3, ...$ е исполнето неравенството $|a_n(x)| < A$.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од рамномерната конвергенција на редот (6) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $x \in \mathbf{D}$, за секој $n > n_0$ и за секој $p = 0, 1, 2, ...$ е исполнето неравенството

$$|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)| < \varepsilon.$$

Аналогно на доказот на теорема 3.12 имаме

$$|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) a_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3A}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \frac{\varepsilon}{3A}(A + 2A) = \varepsilon.$$

Сега тврдењето на теоремата следува од Кошиевиот критериум (теорема 3.11). ♦

3.15. Пример. Редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $x > 0$ рамномерно конвергира на множеството $[a, +\infty)$, каде $a > 0$. Навистина, ако ставиме

$$a_n(x) = \frac{1}{n^{x-a/2}},\ b_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{a/2}},\ x \geq a, n \geq 1,$$

тогаш лесно се гледа дека условите од претходната теорема се исполнети, што значи дека разгледуваниот ред рамномерно конвергира. ♦

4. СВОЈСТВА НА РАМНОМЕРНО КОНВЕРГЕНТНИ РЕДОВИ

4.1.Теорема. Ако функциите $a_n(x),\ n = 1, 2, ...$ се непрекинати во точката $x_0 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ и редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

рамномерно конвергира на $\mathbf{D}$, тогаш неговата сума $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ исто така, е непрекината во точката x_0.

Доказ. Тврдењето непосредно следува од теорема 2.11 применета на низата парцијални суми $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ на редот (1). ♦

4.2. Пример. Ќе докажеме дека *Римановата ѕета функција*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{2}$$

е непрекината на множеството $(1, +\infty)$.

Нека $x \geq x_0 > 1$. Тогаш, бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ конвергира, од неравенството

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{x_0}},\ n = 1, 2, ...$$

и критериумот на Ваерштрас следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ конвергира за секој $x \geq x_0 > 1$. Бидејќи секоја од функциите $a_n(x) = n^{-x}$, $n = 1, 2, ...$ е непрекината за $x \geq x_0 > 1$, т.е. кога $x > 1$ од теорема 4.1 следува дека функцијата (2) е непрекината на $(1, +\infty)$. ♦

4.3. Теорема. Нека функциите $a_n(x),\ n=1,2,...$ се непрекинати на интервалот $[a,b]$ и редот (1) рамномерно конвергира на $[a,b]$. Тогаш, за секоја точка $c\in[a,b]$ редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x a_n(t)dt$$

рамномерно конвергира на $[a,b]$ и, ако

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\,, \tag{3}$$

тогаш

$$\int_c^x[\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)]dt=\int_c^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x a_n(t)dt, \qquad x\in[a,b]\,.$$

Доказ. Тврдењето на теоремата непосредно следува од теорема 2.13 применета на низата парцијални суми $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$ на редот (1). ♦

4.4. Теорема. Нека функциите $a_n(x),\ n=1,2,...$ се непрекинато диференцијабилни на интервалот $[a,b]$ и редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{'}(x)$$

рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$. Тогаш, ако редот (1) конвергира барем во една точка $c\in[a,b]$, тој конвергира рамномерно на целиот интервал $[a,b]$, неговата сума (3) е непрекинато диференцијабилна и притоа важи

$$[\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)]^{'}=s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{'}(x)\,.$$

Доказ. Тврдењето на теоремата непосредно следува од теорема 2.15 применета на низата парцијални суми $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$ на редот (1). ♦

4.5. Пример. Ќе докажеме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ може член по член да се диференцира.

Функциите $f_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2},\ n\in\mathbf{N}$ се непрекинато диференцијабилни за $(-\infty,+\infty)$. На овој интервал функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ конвергира, (зошто?). Освен тоа, од критериумот на Ваерштрас следува дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$$

рамномерно конвергира на интервалот $(-\infty, +\infty)$. Сега од теорема 4.4 следува дека разгледуваниот ред може член по член да се диференцира. ♦

5. ПОИМ ЗА СТЕПЕНСКИ РЕД

5.1. Во овој дел ќе ги разгледаме степенските редови кои, всушност, се функционални редови, но нив посебно ќе ги проучиме заради важноста што ја имаат во изучувањето на функциите.

Дефиниција. Функционалниот ред од видот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \;\; x, x_0 \in \mathbf{R}, \;\; a_n \in \mathbf{R}, \;\; n = 0,1,2,... \tag{1}$$

го нарекуваме *степенски ред*. Броевите $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 0,1,2,...$ ги нарекуваме *коефициенти на степенскиот ред*.

Со помош на смената $t = x - x_0$, редот (1) можеме да го запишеме во видот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;, \tag{2}$$

па затоа ќе се ограничиме само на разгледување на редот (2).

5.2. Теорема (Абел). а) Ако степенскиот ред (2) конвергира за $x = p$, $p \neq 0$, тогаш тој апсолутно конвергира за секој x таков, што $|x|<|p|$.

б) Ако степенскиот ред (2) дивергира за $x = q$, тогаш тој дивергира за секој x таков, што $|x|>|q|$.

Доказ. а) Ако $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ конвергира, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n p^n = 0$, па затоа постои константа $M > 0$ таква што $|a_n p^n| \leq M$, за секој $n = 1,2,...$. Тогаш, од $p \neq 0$ следува дека $|a_n x^n| = |a_n p^n| |\frac{x}{p}|^n \leq M |\frac{x}{p}|^n$. Ако $|x|<|p|$, тогаш геометрискиот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M |\frac{x}{p}|^n$ конвергира, па затоа и редот (2) апсолутно конвергира.

б) Нека редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k q^k$ дивергира. Ако редот (2) конвергира за некој x_0 таков, што $|x_0|>|q|$, тогаш од а) ќе следува дека тој конвергира за секој x таков што $|x|<|x_0|$, па значи и за q, што е противречност. ♦

5.3. Коментар. Да го разгледаме редот (2). Тој конвергира во точката $x=0$. Со $\mathbf{X}$ да го означиме множеството реални броеви за кои редот (2) конвергира. Од $0 \in \mathbf{X}$ следува дека $\mathbf{X} \neq \varnothing$, па затоа постои

$$R = \sup \mathbf{X}. \tag{3}$$

Јасно, $0 \leq R \leq +\infty$.

Ако $R>0$ и $x \in \mathbf{R}$ е таков што $|x|<R$, тогаш од дефиницијата на супремум следува дека постои $p \in \mathbf{X}$, таков што $|x|<p<R$ и бидејќи во секоја точка $p \in \mathbf{X}$ редот (2) конвергира, од теорема 5.2 следува дека редот (2) апсолутно конвергира во точката x.

Ако $R<+\infty$ и $x \in \mathbf{R}$ е таков што $|x|>R$, тогаш од (3) следува дека во секоја точка $p>0$ таква, што $R<p<|x|$ редот (2) дивергира.

5.4. Дефиниција. Бројот $R \geq 0$ го нарекуваме *радиус на конвергенција* на редот (2) ако за секој $x \in \mathbf{R}$ таков, што $|x|<R$ редот (2) конвергира, а за секој $x \in \mathbf{R}$ таков што $|x|>R$ редот (2) дивергира. Интервалот $(-R,R)$ го нарекуваме *област на конвергенција на редот* (2).

5.5. Теорема. За секој степенски ред (2) постои радиус на конвергенција $R,\ 0 \leq R \leq +\infty$ и, притоа, ако $|x|<R$, тогаш во точката x редот (2) апсолутно конвергира, а ако $0<r<R$, тогаш на интервалот $[-r,r]$ редот (2) конвергира рамномерно.

Доказ. Егзистенцијата на радиусот на конвергенција на редот (2) е докажана во претходниот коментар и тој се определува според формулата (3).

Ќе докажеме дека ако $0<r<R$, тогаш редот (2) рамномерно конвергира на интервалот $[-r,r]$. Навистина, од $|x| \leq r$ следува дека

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n.$$

Бидејќи $0<r<R$, од дефиницијата на радиусот на конвергенција следува дека редот (2) конвергира за $x=r$. Сега, од теорема 3.9 следува дека редот (2) рамномерно конвергира за секој $x \in [-r,r]$. ♦

5.6. Последица. Ако R е радиусот на конвергенција на редот (2), тогаш сумата на овој ред е непрекината функција на секој интервал $[-r,r]$, каде $0<r<R$.

Доказ. Непосредно следува од непрекинатоста на секој член на редот (2) и теоремите 5.5 и 4.1. ♦

5.7. Забелешка. За да го определиме радиусот на конвергенција на редот (2), можеме да ги искористиме Кошиевиот и Даламберовиот критериум.

За степенскиот ред (2) го формираме количникот

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|.$$

Според Даламберовиот критериум, редот (2) конвергира ако

$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

т.е. ако $|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, а дивергира ако $|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. Значи, ако постои

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$$

имаме $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. Притоа, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, земаме $R = +\infty$, а ако $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, земаме $R = 0$.

Слично, од Кошиевиот критериум заклучуваме дека редот (2) конвергира ако $|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, а дивергира ако $|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Значи, ако постои

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases},$$

имаме $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Притоа, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, земаме $R = +\infty$, а ако $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, земаме $R = 0$.

5.8. Примери. а) Да го разгледаме степенскиот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$. За да ја испитаме неговата апсолутна конвергентност, ќе го искористиме Даламберовиот критериум. Имаме,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \begin{cases} +\infty, & \text{ако } x \neq 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0. \end{cases}$$

Според тоа, разгледуваниот ред конвергира само за $x = 0$, па затоа $R = 0$.

б) За редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

па затоа $R = +\infty$.

в) Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{[\lg n]+1}}{n}(1-x)^n$. Имаме, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{10^{[\lg n]+1}}{n}} = 1$ конвергира за $|x-1| < 1$, т.е. за $0 < x < 2$.

Од неравенствата

$$n = 10^{\lg n} < 10^{[\lg n]+1} \leq 10^{\lg n+1} = 10n$$

заклучуваме дека во точките $x = 0$ и $x = 2$ редот дивергира, бидејќи во овие точки општиот член на редот не тежи кон нула. ♦

5.9. Теорема (Абел). Ако R е радиусот на конвергенција на степенскиот ред (2) и ако тој конвергира во точката $x = R$, тогаш тој рамномерно конвергира на интервалот $[0, R]$.

Доказ. Имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n (\tfrac{x}{R})^n .$$

Од условот на теоремата следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ конвергира, па бидејќи тој е броен ред, разгледуван како функционален ред рамномерно конвергира на интервалот $[0, R]$. Низата

$$(\tfrac{x}{R})^n, \quad n = 1, 2, ...$$

е ограничена на интервалот $[0, R]$ и е монотона за секој $x \in [0, R]$. Сега, од признакот на Абел признак за рамномерна конвергентност на функционален ред следува дека редот (2) рамномерно конвергира на интервалот $[0, R]$. ♦

5.10. Последица. Ако редот (2) конвергира за $x = R$, тогаш неговата сума е непрекината функција на $[0, R]$.

Доказ. Непосредно следува од непрекинатоста на секој член на редот (2) на интервалот $[0, R]$ и докажаната рамномерна непрекинатост на редот (2) на овој интервал. ♦

6. АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ ВО РЕАЛНА ОБЛАСТ

6.1. Во оваа точка ќе разгледаме една класа функции кои во литературата се познати како аналитички функции во реална област. Најпрво ќе ја докажеме следната лема која има важна улога во натамошните разгледувања.

6.2. Лема. Радиусите на конвергенција R, R_1 и R_2 на редовите

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{и} \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} \tag{3}$$

се еднакви.

Доказ. Од неравенството

$$\left|\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}|x|\cdot|a_n x^n| \le |x|\cdot|a_n x^n|,$$

за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека ако во точката x редот (1) апсолутно конвергира, тогаш во таа точка апсолутно конвергира и редот (2), што значи $R \le R_1$. Од неравенството

$$|a_n x^n| \le n|a_n x^n| = |x|\cdot|na_n x^{n-1}|,$$

за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека ако во точката $x \ne 0$ редот (3) апсолутно конвергира, тогаш во таа точка апсолутно конвергира и редот (1), што значи $R_2 \le R$. Според тоа

$$R_2 \le R \le R_1. \tag{4}$$

Ќе докажеме дека $R_1 \le R_2$. Нека $x_0 \ne 0$ е произволна точка во која конвергира редот (2). Бидејќи $|x_0| < R_1$, постои реален број $r > 0$ таков, што

$$|x_0| < r < R_1. \tag{5}$$

Имаме

$$|na_n x_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|x_0|^2}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\cdot\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n+1}, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Бидејќи редот (2) конвергира за $x = r$, добиваме дека низата членови на овој ред тежи кон нула, па затоа таа е ограничена, т.е. постои константа $C > 0$ таква што за секој $n = 0,1,2,...$ важи

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \le C. \tag{7}$$

Ставаме $q = \left|\frac{x_0}{r}\right|$. Од (5), (6) и (7) добиваме

$$|na_n x_0^{n-1}| \le C\frac{n(n+1)}{|x_0|^2}q^{n+1}, \quad 0 < q < 1, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Од критериумот на Даламбер следува дека редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} C\frac{n(n+1)}{|x_0|^2}q^{n+1}, \qquad 0 < q < 1$$

конвергира, па затоа и редот (3) апсолутно конвергира за $x = x_0$. Значи, $R_1 \le R_2$, што заедно со (4) дава $R = R_1 = R_2$. ♦

6.3. Коментар. Во натамошните разгледувања ќе се задржиме на редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{8}$$

Јасно, ако R е радиусот на конвергенција на редот (1), тогаш R е радиус на конвергенција и на редот (8) и овој ред конвергира ако $|x-x_0|<R$, а дивергира ако $|x-x_0|>R$. Интервалот (x_0-R, x_0+R) го нарекуваме *интервал на ковергентност на редот* (8).

6.4. Дефиниција. Функцијата $f(x)$ ја нарекуваме *аналитичка во точката* x_0 ако постои $R>0$ таков што на интервалот (x_0-R, x_0+R) таа може да се претстави во степенски ред (8), т.е. постојат реални броеви a_n, $n=0,1,2,...$ такви што

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad x\in(x_0-R, x_0+R). \tag{9}$$

6.5. Теорема. Ако функцијата f можеме да ја разложиме во околина на точката x_0 во степенски ред (9) со радиус на конвергенција R, $R>0$, тогаш:

а) во интервалот (x_0-R, x_0+R) функцијата f има изводи од произволен ред и тие се наоѓаат од редот (9) со диференцирање член по член;

б) за секој $x\in(x_0-R, x_0+R)$ важи

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

т.е. редот (9) може член по член да се интегрира на интервалот (x_0-R, x_0+R);

в) редовите добиени од редот (9) со диференцирање или интегрирање член по член имаат ист радиус на конвергенција како и редот (9).

Доказ. Од лема 6.2 следува дека радиусите на конвергенција на редовите

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

добиени со почлено диференцирање и интегрирање на редот (9), се еднакви на радиусот на конвергенција на овој ред.

Од теорема 3.5 следува дека трите реда рамномерно конвергираат на интервалот $[x_0-r, x_0+r]$, $0<r<R$, па затоа делот од тврдењето на теоремата за диференцирање и интегрирање член по член на редот (9) следува од општите теореми за диференцирање и интегрирање на функционални редови. ♦

6.6. Пример. Користејќи го диференцирањето член по член, ќе ја определиме сумата на редот

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots.$$

Лесно се гледа дека дадениот ред има радиус на конвергенција $R=1$. Според теорема 6.5, овој ред може член по член да се диференцира внатре во интервалот на конвергентност. Имаме

$$(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-...)'=1-x^2+x^4-x^6+x^8-...=\frac{1}{1+x^2}, \qquad |x|<1.$$

Оттука со интегрирање добиваме

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-...=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} x.$$

Да забележиме дека на краевите на интервалот на конвергентност овој ред конвергира. Затоа, согласно со теоремата на Абел, сумата на овој ред е непрекината функција на интервалот $[-1,1]$. Бидејќи функцијата $f(x)=\operatorname{arctg} x$, исто така, е непрекината на овој интервал, заклучуваме дека последното равенство важи за секој $x\in[-1,1]$. ♦

6.7. Пример. Општиот член на редот

$$1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+...$$

е даден со $a_n(x)=n(n+1)x^n$, па затоа неговиот радиус на конвергенција е

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)}}=1.$$

Според тоа, овој ред конвергира кон својата сума за $|x|<1$. Сумата на редот да ја означиме со $S(x)$. Ако разгледуваниот ред двапати член по член го интегрираме во интервалот $(-1,1)$ добиваме

$$\int\frac{dx}{x^2}(\int S(x)dx)=x+x^2+x^3+x^4+...-\frac{A}{x}+B=\frac{x}{1-x}-\frac{A}{x}+B, \tag{10}$$

каде A и B се интеграциони константи и $x\neq 0$.

Ако равенството (10) го диференцираме двапати и земеме предвид дека $S(0)=0$, добиваме $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$. ♦

6.8. Теорема. Ако функцијата f е аналитичка во точката x_0, т.е. може да се претстави во околина на таа точка во редот (9), тогаш

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n=0,1,2,... \tag{11}$$

т.е. точна е формулата

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{12}$$

Доказ. Ако m пати го диференцираме равенството (9), добиваме

$$f^{(m)}(x)=m(m-1)...2\cdot 1a_m+(m+1)m\cdot...\cdot 2a_{m+1}(x-x_0)+(m+2)(m+1)\cdot...\cdot 3a_{m+2}(x-x_0)^2+...$$

Во последното равенство ставаме $x=x_0$ и добиваме

$$f^{(m)}(x_0)=m!a_m,\ m=0,1,...,$$

т.е. точна е формулата (11). Единственоста на разложувањето (9) следува од фактот дека коефициентите a_n, $n=0,1,...$ се зададени со формулата (11). ♦

7. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ФУНКЦИЈА ВО СТЕПЕНСКИ РЕД

7.1. Дефиниција. Нека реалната функција f е определна во некоја околина на точката x_0 и нека во x_0 има изводи од произволен ред. Тогаш редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ . \tag{1}$$

го нарекуваме *Тејлоров ред.* Ако $x_0=0$, тогаш редот (1) го нарекуваме *Маклоренов ред.*

7.2. Забелешка. Согласно со теоремите 6.5 и 6.8 секоја аналитичка функција во точката x_0 има извод од произволен ред во околина на таа точка и во разгледуваната околина е еднаква на сумата на својот Тејлоров ред.

Меѓутоа, ако функцијата има извод од произволен ред во некоја точка x_0 може да се случи сумата на нејзиниот Тејлоров ред во ниедна околина на таа точка да не е еднаква на вредноста на функцијата. Ќе разгледаме пример на таква функција.

7.3. Пример. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Ако $x\neq 0$, тогаш $f\,'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$, $f\,''(x)=(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4})e^{-1/x^2}$ и воопшто

$$f^{(n)}(x)=P_n(\tfrac{1}{x})e^{-1/x^2} \ , \tag{2}$$

каде $P_n(t)$ е полином од t, (n е ознака, а не степенот на полиномот). Значи

$$f^{(n)}(x)=e^{-1/x^2}\sum_{k=0}^{m_n}\frac{\lambda_k}{x^k}, \qquad \lambda_k\in\mathbf{R},\ m_n\in\mathbf{N}\,.$$

Имаме,

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{m/2}}{e^t}=0\,,$$

па затоа од (2) следува дека

$$\lim_{x\to\pm 0}f^{(n)}(x)=\lim_{x\to\pm 0}P_n(\tfrac{1}{x})e^{-1/x^2}=0\,. \tag{3}$$

Од (3) за $n=0$ и $n=1$ следува $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x)=0=f(0)$ и $\lim\limits_{x\to\pm 0} f'(x)=0$, па затоа $f'(0)$ постои, $f'(0)=0$ и f' е непрекината во $x=0$. Повторувајќи ја постапката наоѓаме $f^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,2,\ldots$. Според тоа, сите членови во Тејлоровиот ред за оваа функција се еднакви на нула и бидејќи $f(x)\neq 0$, за $x\neq 0$, добиваме дека функцијата не е еднаква на сумата на Тејлоровиот ред во ниедна околина на точката $x=0$. ♦

7.4. Коментар. Нека функцијата f во точката x_0 има извод од произволен ред, со (1) е даден нејзиниот Тејлоров ред,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{4}$$

се парцијалните суми на редот (1) и

$$r_n(x)=f(x)-S_n(x) \tag{5}$$

е остаточниот член од Тејлоровата формула за функцијата f во точката x_0 (а не збирот на остатокот на редот (1)). Значи,

$$f(x)=S_n(x)+r_n(x) \tag{6}$$

е Тејлоровата формула за функцијата f.

Јасно, за да е еднаква функцијата f на збирот на нејзиниот Тејлоров ред во некоја околина на точката x_0, потребно и доволно е во таа околина да важи

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \tag{7}$$

и тогаш од (6) добиваме

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

т.е. $f(x)$ е сума на редот (1).

За да ги испитаме својствата на остатокот $r_n(x)$, да забележиме дека важи следнава теорема.

7.5. Теорема. Ако функцијата f е $n+1$ пати непрекинато диференцијабилна на интервалот $(x_0-h,x_0+h),\ h>0$, тогаш остаточниот член во Тејлоровата формула (6) за секој $x\in(x_0-h,x_0+h)$ може да се запише во еден од следниве три облици

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt, \tag{8}$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1 \tag{9}$$

и

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}, \qquad 0<\theta<1 . \ \blacklozenge \tag{10}$$

7.6. Пред да разгледаме примери за разложување на функции во Тејлоров ред, ќе дадеме еден потребен услов за разложливост на функција во степенски ред.

Теорема. Нека функцијата f има изводи од произволен ред на интервалот (x_0-h, x_0+h) и нека постои константа $C>0$ таква што за секој $x \in (x_0-h, x_0+h)$ и за секој $n=0,1,2,\dots$ важи

$$| f^{(n)}(x) | \leq C . \tag{13}$$

Тогаш, на интервалот (x_0-h, x_0+h) функцијата f може да се разложи во Тејлоров ред и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n . \tag{14}$$

Доказ. За да ја докажеме формулата (14) доволно е да докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, каде $r_n(x)$ е остаточниот член во Тејлоровата формула за функцијата f во точката x_0. Ако го земеме $r_n(x)$ во облик на Лагранж, добиваме

$$| r_n(x) | = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq C \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

каде x и ξ се такви што $|\xi - x_0| < |x-x_0| < h$, па затоа

$$\lim_{n\to\infty} | r_n(x) | \leq C \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq C \lim_{n\to\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = 0 ,$$

од што следува $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. ♦

7.7. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = e^x$.

Бидејќи $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 0,1,2,\dots$, добиваме дека за секој фиксиран $a>0$, за секој $x \in (-a,a)$ и за секој $n=0,1,2,\dots$ се исполнети неравенствата $0 < f^{(n)}(x) < e^a$. Според тоа, на интервалот $(-a,a)$ за функцијата $f(x) = e^x$, при $x_0 = 0$ се исполнети условите на теорема 7.6, па затоа оваа функција на секој конечен интервал, а со самото тоа и на целата реална права, може да се развие во Тејлоров ред. Притоа, важи

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \tag{15}$$

Ако во формулата (15) наместо x ставиме $-x$, добиваме

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} . \ \blacklozenge \tag{16}$$

7.8. Пример. Ако $f(x)=\sin x$, тогаш

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+\tfrac{n\pi}{2}), \quad n=0,1,2,\ldots,$$

па затоа $|f^{(n)}(x)|\le 1,\ n=0,1,2,\ldots,\ x\in\mathbf{R}$. Според теорема 7.6 функцијата $f(x)=\sin x$ може да се развие во степенски ред на целата реална права. Од Тејлоровата формула за оваа функција наоѓаме

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ .$$

Со аналогни размислувања добиваме

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\ .\ \blacklozenge$$

7.9. Пример. За функцијата $f(x)=\ln(1+x)$, од Тејлоровата формула, имаме

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k+r_n(x)\,,$$

Остаточниот член $r_n(x)$ го запишуваме во облик на Лагранж и добиваме

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \qquad 0<\theta<1$$

при што θ зависи од x и n. Ако $0\le x\le 1$, тогаш $0<\frac{1}{1+\theta x}\le 1$, па затоа $|r_n(x)|\le\frac{1}{n+1}$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ кога $0\le x\le 1$.

Ако $-1<x<0$, тогаш остаточниот член $r_n(x)$ го запишуваме во облик на Коши

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},$$

при што $0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1$ и $\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<\frac{1}{1-|x|}$. Затоа

$$|r_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1}\le\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

и бидејќи $|x|<1$, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ кога $-1<x<0$.

Според тоа, за секој $x\in(-1,1]$ е точно разложувањето

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\ . \tag{17}$$

За $x=-1$ редот на десната страна на (17) од хармонискиот ред се разликува само во знакот, па затоа тој дивергира. Ако $|x|>1$, тогаш општиот член на редот на десната страна на (17) не тежи кон нула, па затоа овој ред дивергира при $|x|>1$. ♦

7.10. Пример. Тејлоровата формула за функцијата

$$f(x)=(1+x)^a$$

има вид

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+r_n(x)\,. \tag{18}$$

Соодветниот ред, кој го нарекуваме биномен ред со степен a, има вид

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n\,. \tag{19}$$

Ако a е природен број, тогаш редот (19) содржи само конечен број членови различни од нула и, всушност, се добива Њутновата биномна формула

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{a}C_a^n x^n\,.$$

Нека a не е природен број и нека $x\neq 0$. Тогаш, сите членови на редот (19) се различни од нула. Од критериумот на Даламбер наоѓаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a-n}{n+1}\right||x|=|x|\,,$$

што значи дека при $|x|<1$ редот (19) конвергира, а при $|x|>1$ дивергира.

Ќе докажеме дека сумата на редот (19) на интервалот $(-1,1)$ е еднаква на вредноста на функцијата $f(x)=(1+x)^a$. За таа цел треба да докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$. Остатокот од Тејлоровата формула ќе го запишеме во вид на Коши. Имаме

$$r_n(x)=\frac{a(a-1)\ldots(a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\qquad 0<\theta<1\,.$$

Ако ставиме

$$a_n(x)=\frac{(a-1)[(a-1)-1]\ldots[(a-1)-n+1]}{n!}x^n,\qquad b_n(x)=ax(1+\theta x)^{a-1},\qquad c_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n,$$

тогаш

$$r_n(x)=a_n(x)b_n(x)c_n(x),\qquad n=1,2,3,\ldots\,.$$

Множителот $a_n(x)$ е член на биномниот ред со степен $a-1$ и бидејќи секој биномен ред конвергира на интервалот $(-1,1)$, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(x)=0$. Понатаму, од неравенствата

$$1-|x|<1-\theta|x|\le 1+\theta x\le 1+\theta|x|<1+|x|,\qquad |x|<1$$

следува дека

$$|ax|(1-|x|)^{a-1} < |b_n(x)| < |ax|(1+|x|)^{a-1},$$

т.е. низата $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена за секој $x \in (-1,1)$. Што се однесува до низата $\{c_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, таа е рамномерно ограничена на интервалот $(-1,1)$ бидејќи

$$|c_n(x)| = \left(\tfrac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n \le \left(\tfrac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right)^n < 1.$$

Конечно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, за $x \in (-1,1)$, што значи дека

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n .$$

Конвергентноста на редот (19) во точките -1 и 1 треба дополнително да се испитува. Може да се докаже дека во точката $x=1$ за $a > -1$ биномниот ред конвергира, а за $a \le -1$ дивергира. Во точката $x = -1$ за $a \ge 0$ редот (19) апсолутно конвергира, а за $a < 0$ тој дивергира.

Притоа, секогаш кога биномниот ред (19) конвергира, неговата сума е еднаква на $(1+x)^a$. ♦

7.11. Забелешка. Степенските редови можеме да ги искористиме за претставување на функции кои не можат да се запишат во конечен облик и за пресметување на некои определени интеграли кои не може да се решат во затворен вид.

На пример, познато е дека интегралот $\int_0^x e^{-t^2} dt$ не може да се реши во затворен вид. Меѓутоа, бидејќи за секој $t \in \mathbf{R}$ важи

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} ,$$

по интегрирањето го добиваме равенството

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}$$

кое важи за секој $x \in \mathbf{R}$ (зошто?).

Слично, од развојот $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ за $x \ne 0$ добиваме

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} ,$$

па затоа

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{a\to 0} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{a\to 0} \int_a^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \Big) dt$$

$$= \lim_{a\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \Bigg|_a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},$$

при што последното равенство важи за секој $x \in \mathbf{R}$ (зошто?). Функцијата $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ се нарекува *интегрален синус* и се означува со $\mathrm{Si}(x)$.

ЗАДАЧИ

1. Испитај ја рамномерната конвергентност на функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

   а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$,   б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1]$,

   в) $f(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbf{R}$ и   г) $f(x) = \sin \frac{x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Нека f е произволна функција определена на интервалот $[a,b]$ и низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ и $x \in [a,b]$. Докажи дека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата f на $[a,b]$.

3. Испитај ја рамномерната конвергентност на функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

   а) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $x \in [-1,1]$,   б) $f_n(x) = 2n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}$, $x \in [0,1]$,

   в) $f_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, $x \in \mathbf{R}$,   г) $f_n(x) = n(nx-1)e^{-n(nx-1)^2}$, $x \in [-1,0]$ и

   д) $f_n(x) = n(nx-1)e^{-n(nx-1)^2}$, $x \in [0,1]$.

4. Дали низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, дадена со $f_n(x) = n^2 \sin x \cos^{2n} x$, рамномерно конвергира на $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Нека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е дадена со $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$, $x \in [0,+\infty)$. За $x > 0$ пресметај $\int\limits_0^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^x f_n(t)dt$ и објаснете ги добиените резултати.

6. Дади пример на низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ која не конвергира рамномерно кон функција $f(x)$, на интервал $[a,b]$, но сепак важи

$$\int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t)dt$$

7. Испитај ја рамномерната конвергентност на редот во соодветниот интервал:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^n + 1}{n^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}$, $x \in [0,+\infty)$,   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{2n(x^2+1)}}$, $x \in \mathbf{R}$,

   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^3}$, $x \in \mathbf{R}$ и   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^3 \sin^2 nx}{2+n^3 x^6}$, $x \in [0,+\infty)$.

8. Испитај ја рамномерната конвергентност на редот во соодветниот интервал:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)\sin x \sin nx,\ \ x\in[0,1]$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n+x^2}},\ \ x\in\mathbf{R}$ и

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}},\ \ x\in[0,+\infty)$.

9. Испитај ја рамномерната конвергентност на редот во соодветниот интервал:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)},\ \ x\in(0,1]$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n+x}\,\ln\ln(2\sqrt{n}+1)},\ \ x\in[0,+\infty)$.

10. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{2n})$ не е рамномерно конвергентен.

11. Пресметај $\int_0^{2\pi} S(x)dx$ ако $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos nx$, $0<a<1$.

12. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2 \sin nx}{3^n+1}$ може почлено да се диференцира на интервалот $(-\infty,+\infty)$.

13. а) Докажи дека функција $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ е диференцијабилна за $x>0$.

б) Докажи дека $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}\in\mathbf{C}^{(\infty)}((-1,1))$.

14. Докажи дека функцијата $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\in\mathbf{C}((0,\infty))$ и пресметајте $\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)dx$.

15. Да се најде радиусот на конвергенција на степенскиот ред и да се испита однесувањето на редот во крајните точки на интервалот на конвергентност:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}(x+1)^2$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n^2}}{n^n}$ и

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$.

16. Да се најде радиусот на конвергенција на степенскиот ред и да се испита однесувањето на редот во крајните точки на интервалот на конвергентност:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{2n}x^n}{(2n)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{(2n)!(n+1)}x^n$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$ и г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+(-5)^n}{4n+3}x^n$.

17. Докажи дека Маклореновиот ред на бесконечно диференцијабилната функција $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$ е диверегентен.

18. Најди ги Маклореновите развои на функциите:

а) $\sin^2 x$, б) $\ln(1+3x+2x^2)$

19. Развиј ги во Тејлоров ред функциите:

а) $f(x)=\frac{1}{(x^2-2x+3)^2}$, околу точката 1 и

б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}$, околу точката 3.

20. Најди го Маклореновиот развој на функциите:

а) $f(x)=\frac{1}{(x+3)(x-1)}$ и б) $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$.

21. Развиј ја во Маклоренов ред функцијата $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

22. Користејќи го Тејлоровиот развој, најди го $n-$от извод на функцијата e^{x^2}.

23. Во точката 0 најди го $n-$от извод на функциите:

а) $f(x)=\ln^2(1-x)$, б) $f(x)=\arcsin^2 x$ и

в) $f(x)=\operatorname{arctg}^2 x$.

24. Пресметај ги збировите на следниве степенски редови:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$, б) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$,

в) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$,

д) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}$ и ѓ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

25. Пресметај ги збировите:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$, б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ и

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(3n+1)}$.

ИНДЕКС НА ПОИМИ

К

Л

М

Н

ЛИТЕРАТУРА

1. Adnadjević, S., Kadelburg, Z.: *Matematička analiza* I, II, Nauka, Beograd, 1993
2. Greenspan, H. P.; Benney, D. J.; Turner, J. E.: *Calkulus: An Introduction to Applied Mathematics*, McGraw-Hill, Toronto, 1987
3. Kurepa, S.: *Matematička analiza* II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1981
4. Malik, S. C.: *Principles of Real Analysis*, New Age International Limited, New Delhi, 1982
5. Maron, I. A.: *Problems in Calculus of One Variable*, Mir, Moscow, 1988
6. Mitrinović, D. S., Adamović, D. D.: *Nizovi i redovi*, Naučna knjiga, Beograd, 1983
7. Mitrinović, D. S.: *Predavanja o redovima*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989
8. Uščumlić, M. P.; Miličić, P. M.: *Zbirka zadataka iz više matematike* I, 1994, II, 1989, Nauka, Beograd
9. Берман, Г. Н.: *Сборник задач по курсу математического анализа,* Наука, Москва, 1969
10. Демидович, Б. П.: *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* Наука, Москва, 1984
11. Дойчинов, Д.: *Математически анализ,* Наука и изкуство, София, 1983
12. Дороговцев, А. Я.: *Математический анализ,* Вища школа, Киев, 1985
13. Ивановски, Н.; Речковски, Н.: *Математика* III, Унив. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1993
14. Илин, В. А.; Садовничи, В. А.; Сендов, Б. Х.: *Математически анализ,* II, Наука и изкуство, София, 1989
15. Каплан, И. А.: *Практические занятия по высшей математике*, I, 1970, II, 1970, III, 1965, Вища школа, Харьков, 1970
16. Карташев, А. П., Рождественский, Б. Л.: *Математический анализ,* Наука, Москва, 1984
17. Кудрявцев, Л. Д.: *Курс математического анализа,* I, II, III, Высшая школа, Москва, 1988
18. Любенова, Е., Недевски, П., Николов, К., Николова, Л., Попов, В.: *Ръководство по математически анализ,* I, II, Унив. изд. Св. Климент Охридски, София, 1991
19. Малчески, Р.; Малческа, В.: *Математика* 1 - *алгебарски структури,* ФОН универзитет, Скопје, 2011

20. Малчески, Р.; Малческа, В.: *Математика* 2 *–векторска и линеарна алгебра,* ФОН универзитет, Скопје, 2011
21. Малчески, Р.: *Математичка анализа* 1, ПМФ, Скопје, 2002
22. Малчески, Р.: *Основи на математичка анализа*, Унив. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 2001
23. Манолов, С.; Петрова-Данева, А.; Генов, А.; Шополов, Н.: *Висша математика,* II, III, Техника, София, 1977
24. Никольский, С. М.: *Курс математического анализа*, I, II, Наука, Москва, 1983
25. Смирнов, В. И.: *Курс высшей математики* I, II, III, IV, V, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961
26. Толстов, Г. П.: *Курс математического анализа*, I, II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1957
27. Фихтенгольц, Г. М.: *Курс дифференциального и интегрального исчисления,* I, II, III, Наука, Москва, 1969