Ристо Малчески

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ОД ПРИЕМНИ ИСПИТИ ПО МАТЕМАТИКА НА ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ, Скопје

Скопје, 2002 година

Содржина

НАСТАВНИ СОДРЖИНИ

НА ПРЕДМЕТИ ЗА ПОЛАГАЊЕ НА ПРИЕМНИ ИСПИТИ ЗА ЗАПИШУВАЊЕ ВО ПРВА ГОДИНА ВО УЧЕБНАТА 2002/2003 ГОДИНА

- ***СТУДИИ ПО МАТЕМАТИКА***

Прв предмет	Втор предмет
-*Математика*	-*Физика*
	-*Информатика*
	(по избор на кандидатите)

- ***СТУДИИ ПО МАТЕМАТИКА-ФИЗИКА***

Прв предмет	Втор предмет
-*Математика*	-*Физика*

М А Т Е М А Т И К А

I . Алгебра

1. ***Рационални броеви.*** Множества и пресликувања. Множество на: природните, целите и рационалните броеви, преглед на аритметичките операции: степенување. Алгебарски изрази: мономи и полономи, собирање, множење и делење. Разложување на полиномите на прости множители, НЗД и НЗС, дробно-рацинални изрази и операции со нив.
2. ***Реални броеви.*** Пресметување квадратен корен од рацинални броеви. Поим за реален број, бројна оска, подредување: интервали, апсолутна вредност. Поим за реална функција. Декартов правоаголен координатен систем: графичко претставување на функциите, линеарна функија, функција на права и обратна пропорциналност. Линеарни равенки и неравенки. Системи линеарни равенки и неравенки. Коренување, степен со дробен показател.
3. ***Комплексни броеви.*** Множество на комплексните броеви: опеарции со комплексни броеви.
4. ***Квадратни равенки.*** Квадратни равенки со една непозната и нивно решавање. Виетови правила. Квадратна функција: закон на квадтратен трином, кватратни неравенки. Графичко решавање на квадратни равенки и неравенки. Биквадратни равенки.

5. ***Логаритмирање.*** Експоненцијали функции, експоненцијални равенки ($y=a$ за a=2; 1/2; 1/10). Поим за логаритам, логаритам од: производ, количник, степен, логаритамска функија ($y=log\ a$ за a=2; 1/2; 1/10).

II. Планиметрија и Стереометрија

1. ***Воведни поими.*** Геометриски фигури, права и рамнина, полуправа. Кружница. Агол-мерење и видови. Пралени прави, агли при трансверзала на две (паралелни) прави.
2. ***Триаголник.*** Отсечка, искршена линија: триаголник - основни елементи и видови. Симетрала на отсечка и симетрала на агол. Складни триаголници. Однос на страни и агли. Значајни линии и значајни точки во триаголник.
3. ***Пропорционалност.*** Пропорционални отсечки. Слични триаголници, пропорционални отсечки и правоаголен тризголник. Евклидови теореми и Питагорова теорема.
4. ***Четириаголник.*** Поим и видови. Паралелограм, трапез и делтоид.
5. ***Кружница.*** Определеност на кружницата. Однос на кружницата со: точка, права, кружница, тетива и тангента. Агли во кружница (централен и периферен). Тетивен и тенгентен четириаголник, правилни многуаголници.
6. ***Периметар и плоштина.*** Периметар на многуаголник. Поим за плоштина. Плоштина на правоаголник, квадрат, плоштина на триаголник: основна формула, Херонова формула, радиус на впишана и радиус на опишана кружница. Плоштина на трапез и делтоид, плоштина на многуаголник. Периметар на кружница, плоштина на круг и делови на кругот.
7. ***Просторни геометриски фигури.*** Точка, права и рамнина (меѓусебни односи). Полиедри.
8. ***Призма.*** Поим, пресеци, плоштина, волумен. Потсечена пирамида. Плоштина и волумен.
9. ***Цилиндар.*** Поим за цилиндар. Плштина и волумен на прав кручен цилиндар.
10. ***Конус.*** Поим за конус. Потсечен конус, плоштина и волумен на прав кручен конус и прав потсечен кручен конус.
11. ***Топка.*** Сфера. Топка и делови од топка. Плоштина и волумен.

III. Тригонометрија

1. ***Тригонометриски функции од остар агол.*** Синус, косинус, тангенс и котангес од остар агол, вредност на тригонометриските функции кога аголот е 30^o, 45^o, 60^o. Менување на функциите кога аголот се менува од 0^o до 90^o, основни зависности (идентитети).
2. ***Тригонометриски функции на комлементни агли.*** Решавање на право-аголен триаголник и примени.
3. ***Тригонометриски функции за агли од*** **0^o- 180^o.** Сцедување на остри агли, решавање на триаголник, синусна и косинусна теорема, некои примени.

4. ***Тригонометриски функции од произволен агол.*** Сведување на остри агли
5. ***Графичко претставување на тригонометриските функции***
6. ***Адициони теореми.*** Тригонометриски функции од: збир и разлика на агли, двоен и преполовен агол. Претставување на збир (разлика) како производ.
7. ***Тригонометриски равенки***

IV. Аналитичка геометрија

1. ***Воведни поими.*** Растојание меѓу две точки. Делење на отсечка во даден однос..
2. ***Права.*** Видови равенки на права: општ сегмент, експлицитен, нормален. Равенка на права низ две дадени точки, равенка на права со даден коефициент на правец низ дадена точка, растојание од точка до права.
3. ***Однос меѓу две прави.*** Агол меѓу две прави, паралелност , нормалност , пресек на прави.
4. ***Криви од втор ред.*** Кружница, елипса, хипербола, парабола. Однос на права со конусен пресек (систем од две равенки од кои едната е линерна, а другата квадратна).

Литература

1. Учебници по математика за I, II, III и IV година од средното образование.
2. Збирки задачи по математика од I до IV година од средното образование.

Ф И З И К А

1. ***Праволиниско и криволиниско движење на материјална точка***. Механичко движење на материјална точка. Елементи на движењето. Рамномерни праволиниски движење. Рамномерно променливо движење. Криволиниско движење на материјална точка. Рамномерно движење по кружница. Елементи на движењето.
2. ***Њутнови закони и гравитација***. I Њутнов закон. II Њутнов закон. III Њутнов закон. Центрипетална сила. Еластична сила (Хуков закон). Импулс на тело. Закон за запазување на импулсот. Инерцијални сили. Центрифугална сила. Њутнов закон за гравитацијата и тежината на телото. Бестеинска состојба. Движење на вештачките сателити и пресметување на и космичка брзина.
3. ***Работа и енергија***. Механичка работа. Механичка работа под дејство на сили под агол. Моќност. Енергија (потенцијална и кинетичка). Закон за запазување на механичката енергија.
4. ***Ротационо движење на тврдо тело***. Карактеристики на ротационото движење на тело околу зацврстена оска (аголна брзина, аголно забрзување). Момент на сила. Вртлив момент. Основен закон на динамиката на ротационото движење (момент на инерција). Услов за рамнотежа на тело што ротира околу зацврстена оска. Работа, моќност и кинетичка енергија на теало

што ротира. Момент на импулс. Закон за запазување на моментот на импулсот.

5. ***Основи на механиката на флуидите***. Основни особини на течностите и гасовите - пренесување на притисок на флудите, хидростатички и аеростатички притисок, потисок (Архимедова сила), пливање на телата. Движење на флуидите. Равенка на континуитетот. Бернулиева равенка како пример на законот за запазување на енергијата.

6. ***Механички осцилации и бранови***. Осцилаторно движење. Елементи на осцилаторно движење) елонгација, амплитуда, период, фреквенција, фаза). Брзина, забрзување, сила и енергија при хармониските осцилации. Математичко нишало. Браново движење, карактеристики и видови на бранови. Равенка на бран. Хајгенс-Френелов принцип. Интерференција и дифракција на бранови. Одбивање и прекршување на брановите. Звучни бранови. Брзина на звук. Ултразвук.

7. ***Основи на молекуларно-кинетичката енергија. Термодинамика.*** Основна равенка на молекуларно-кинетичката енергија на идеален гас. Температура и мерење натемтературата. Равенка на состојбата на идеален гас. Изо-процеси во гасовите. Количество на топлина. Топлински и специфичен топлински капацитет.

8. ***Електрично поле***. Кулонов закон. Електрично поле - јачина на електрично поле. Работа на електрично поле при пренесувањер на полнеж. Електричен потенцијал и напон. Врска меѓу напонот на полето во хомогено електрично поле. Електричен капацитет. Кондензатор. Енергија на електрично поле.

9. ***Закони на постојаната струја и магнетното поле***. Електромоторна сила. Омов закон за дел од струјно коло и за целото струјно коло. Кирхофови правила. Отпорници. Сериско и паралелно врзување на отпорниците. Работа ои моќност на електричната струја. Џулов закон. Заемно дејство на струите. Магнетна индукција. Магнетен поток. Амперова сила. Лоренцова сила.

10. ***Електрична струја во разни средини***. Зависност на отпорот од температурата. Суперспроводливост. Електрична струја во течности. Електролити. Фарадееви закони за електролизата.

11. ***Електро магнетна индукција***. Појава на електромагнетна индукција. ЕМС на индукцијата. Закон за електромагнетна индукција. Самоиндукција.

12. ***Електромагнетни осцилации и електромагнетни бранови***. Наизменична струја и нејзини карактеристики. Активен, капацитивен и индуктивен отпор во коло на наизменична струја. Импеданс. Омов закон за коло на наизменична струја. Работа и моѓноcst на наизменичната струја. Трансформатори. Електрична резонанција на две осцилаторни кола. Томсонова формула. Особини на електромагнетните бранови. Спектар на електромагнетното зрачење. Поделба на радиобрановите и распространување.

13. ***Светлински појави***. Извори на светлината. Праволиниско простирање на светлината. Брзина на светлината. Одбивање на светлината. Закони на одбивање на рамно и сферно огледало. Прекршување на светлината, тотална рефлексија и примена. Прекршување низ тенки призми. Леќи. Равенка на

тенка леќа. Јачина на леќата. Кохерентност. Интерференција на светлината. Дифракција на светлината. Дисперзија на светлината. Видови спектри. Поларизација на светлината. Инфрацрвено и ултравиолетово зрачење.

14. ***Светлински кванти***. Закони за зрачење. Штефан-Болцманов закон. Винов закон. Планков закон. Рентгенски зраци и примена. Фотоелектричен ефект. Равенка на надворешниот фотоефект.

15. ***Физика на атомот и атомско јадро***. Експериментите на Радерфорд. Радерфордов модел на атомот. Борови квантни постулати. Линиски спектри на атомот на водородот по Боровата теорија. Бранови својства на честиците. Корпускуларно-бранов дуализам. Состав на атомскотоо јадро. Изотопи. Природна радиоактивност (α, β, γ - зрачење). Закон за радиоктивно распаѓање. Нуклеарни сили. Енергија на врзување на атомското јадро. Нуклеарни реакции.

Литература

1. Учебници по физика за I, II, III и IV година од средното образование.
2. Учебници по физика за I, II и III година од средно-техничкото образование.

И Н Ф О Р М А Т И К А

1. ***Информатика и компјутери.*** Информација, информатика, податок, претставување на податоци. Компјутерски генерации, видови. Машинска опрема (хардвер): централна единица, процесор, меморија, влезни единици, влезни-излезни единици. Надворешни мемории. Мерки и типови персонални компјутери. Програмска опрема (софтвер): праграмски јазици, оперативни системи, апликативни програми, услучни програми. Вируси, видови. Компјутерски мрежи: видови, архитектури, видови комуникации, технологии и сервиси.

2. ***Оперативен систем DOS***. Состав и функции на DOS, менување на дискетна единица. Организација на ДОС, датотеки, именици, наредби. Операции со именици, датотеки и дискети.

3. ***Оперативен систем WINDOWS***. Организација и опеарции на Windows, покажувачи, прозорци, икони, датотеки, именици, дискети.

4. ***Уредувач MS WORD***. Стартирање: отворање, зачувување, затворање документ. Движење низ документ. Форматирање текст. Означување, бришење, копирање, пренесување текст. Вметнување објекти во документ. Поставување параметри на страници. Печатење.

5. ***Табеларен пресметувач EXCEL***. Стартирање: отворање, зачувување, затворање документ. Движење низ документ. Форматирање текст. Означување, бришење, копирање, пренесување ќелии. Форматирање ќелии. Вметнување и бришење редици и колони. Вметнување формули и забелешки. Вметнување, бришење, преименување табели во работна книга. Изработка на графикони.

6. ***Програмски јазик PASCAL***. Знаци, имиња, резервирани зборови, константи, променливи, наредби, коментари. Прости типови податоци. Структурни типови податоци. Стандардни функции и процедури за одреден тип податоци. Структурни наредби. Контролни структури и алгоритми. Потпрограми (процедури и функции). Рекурзија. Покажувачи. Објекти.

7. ***Изработка на програма***. Се изработуваат програми за две задачи во програмски јазик по избор на кандидатот.

Литература

1. Ѓ. Јованчевски: Прирачник по информатика
2. Ѓ. Јованчевски: Турбо Паскал со збирка програми
3. Ѓ. Јованчевски: Програмирање и програмски јазик Паскал

Задачи и решенија

03.07.1995 **I група**

1. Да се упрости изразот $\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{a^2-ac+3bc-3ab}$. Колкава е неговата вредност за $a=1, b=0, c=2$?

Решение. Ако $a\neq 3b, a\neq c$**,** тогаш

$$\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{a^2-ac+3bc-3ab}=\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{a(a-3b)-c(a-3b)}$$

$$=\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{(a-3b)(a-c)}=\frac{a^2-ac-ac+3bc+ac-3ab}{(a-3b)(a-c)}=1.$$

Бидејќи за $a=1, b=0, c=2$ важи $a\neq 3b, a\neq c$ добиваме дека вредноста на изразот идентички е еднаква на 1.

2. За која вредност на *m*, равенката $x^2+mx+12=0$ има еден корен еднаков на 3? Потоа да се најде и другиот корен.

Решение. Од $x_1=3$ е корен на дадената равенка добиваме дека $9+3m+12=0$, па затоа $m=-7$. Сега од Виетовите правила имаме $x_1+x_2=-m=7$ т.е. $x_2=4$.

3. Да се реши равенката $3\sin x-2\cos^2 x=0$.

Решение. Од $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ со замена во дадената равенка добиваме $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$. Воведуваме замена $\sin x=t$ и ја добиваме квадратна равенка $2t^2+3t-2=0$, чии решенија се $t_1=\frac{1}{2}, t_2=-2$. Бидејќи $|\sin x|\leq 1$, вториот корен отпаѓа, па затоа $\sin x=\frac{1}{2}$. Конечно, решенија на почетната равенка се

$$x=2k\pi+\tfrac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z} \text{ и } x=2t\pi+\tfrac{5\pi}{6}, t\in\mathbf{Z}.$$

4. Една правилна четириаголна пирамида има плоштина $P=800cm^2$ и бочна плоштина $M=544cm^2$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

Решение. Основата на пирамидата е квадрат. Нека страната на квадратот е *a*, а висината на бочната страна е *h*. Имаме:

$$P=\tfrac{4ah}{2}+a^2=800 \text{ и } M=\tfrac{4ah}{2}=544$$

од што следува $a^2=800-544=256$, па затоа $a=16cm, h=17cm$. Понатаму, од правоаголниот триаголник $\angle SOL$ имаме

$$H^2=h^2-OL^2=17^2-(\tfrac{16}{2})^2=225 \text{ т.е. } H=15cm.$$

Конечно, за волуменот на пирамидата наоѓаме

$$V=\frac{a^2H}{2}=\frac{25615}{3}=1280cm^3.$$

5. Да се најде равенката на кружницата ако еден нејзин дијаметар е отсечката од правата $3x-4y+12=0$ зафатена меѓу координатните оски.

Решение. Имаме $y=\frac{3}{4}x+3.$ За $x=0$ добиваме $y=3$, а за $y=0$ добиваме $x=-4$. Значи кружницата минува низ точките $A(-4,0)$ и $B(0,3)$. Од условот на задачата следува дека центарот на кружницата $S(p,q)$ е на средината од отсечката AB. Имаме

$$p=\frac{-4+0}{2}=-2,\ q=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2},\ r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+9}=\frac{5}{2}.$$

Равенката на кружницата е $(x+2)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$.

6. Во круг со радиус $r=25cm$, должините на две паралелни тетиви се $a=40cm$ и $b=14cm$. Да се најде плоштината на вписаниот трапез што го формираат дадените тетиви. Колку решенија има задачата?

Решение. Плоштината на трапезот е $P=\frac{a+b}{2}h=27h$, каде h е висината на трапезот $ABCD$. Триаголниците AOB и DOC се рамнокраки и $h=h_1+h_2$ каде h_1 е висина на AOB а h_2 висината на DOC. Од правоаголните триаголници AOO_1 и DOO_2 имаме

$$h_1=\sqrt{r^2-(\frac{a}{2})^2}=\sqrt{5\cdot 45}=15cm \text{ и } h_2=\sqrt{r^2-(\frac{b}{2})^2}=\sqrt{18\cdot 32}=24cm.$$

Значи, $h=39cm$ па затоа $P=27\cdot 39cm^2=953cm^2$.

Задачата има две решенија. Во вториот случај

$$h=h_2-h_1=(24-15)cm=9cm \text{ и } P=27\cdot 9cm^2=243cm^2.$$

Забелешка. Секоја точно решена задача се оценува со 5 поени.

03.07.1995 **II група**

1. Да се упрости изразот $\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{a^2-ac+2bc-2ab}$. Колкава е неговата вредност за $a=b=1$ и $c=2$?

Решение. Ако $a\neq 2b, a\neq c$**,** тогаш

$$\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{a^2-ac+2bc-2ab}=\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{a(a-2b)-c(a-2b)}$$

$$=\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{(a-2b)(a-c)}=\frac{a^2-ac-ac+2bc+ac-2ab}{(a-2b)(a-c)}=1.$$

Бидејќи за $a=b=1,c=2$ важи $a\neq 2b, a\neq c$ добиваме дека вредноста на изразот идентички е еднаква на 1.

2. За која вредност на m корените на равенката $x^2 - 9x + m = 0$ го задоволуваат условот $x_1 - x_2 = 5$?

Решение. Од Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 x_2 = m$. Од условот $x_1 - x_2 = 5$ и $x_1 + x_2 = 9$ следува $x_1 = 7, x_2 = 2$.

Значи $m = x_1 x_2 = 14$.

3. Да се реши равенката $2\sin^2 x - 7\cos x = 5$.

Решение. Од $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ со замена во дадената равенка добиваме $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$. Воведуваме замена $\cos x = t$ и ја добиваме квадратна равенка $2t^2 - 7t + 3 = 0$, чии решенија се $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 3$. Бидејќи $|\cos x| \le 1$, вториот корен отпаѓа, па затоа $\cos x = \frac{1}{2}$. Конечно, решенија на почетната равенка се

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

4. Основата на една права призма е ромб со плоштина $6cm^2$, плоштините на дијагоналните пресеци се $Q_1 = 21cm^2$ и $Q_2 = 28cm^2$. Да се пресметаат волуменот V и плоштината P на призмата.

Решение. Основата на пирамидата нека ја означиме со a, работ со b. Волуменот на призмата е $V = BH = \frac{d_1 d_2}{2} b$ каде d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот, а плоштината е $P = B + 4ab = \frac{d_1 d_2}{2} + 4ab$. Од условот на задачата имаме $Q_1 = d_1 b = 21, Q_2 = d_2 b = 28, B = \frac{d_1 d_2}{2} = 6$ од што го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} d_1 b = 21 \\ d_2 b = 28 \\ d_1 d_2 = 12 \end{cases} \qquad (1)$$

Ако ги помножиме првите две равенки во (1) и ги поделиме со третата равенка добиваме $b^2 = 49$, од што следува $b = 7$. Сега, со замена во првите две равенки на (1) наоѓаме $d_1 = 3$ и $d_2 = 4$. Понатаму, дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол, па од Питагоровата теорема следува $a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2 = \frac{25}{4}$, што значи $a = \frac{5}{2}$. Конечно, со замена во формулите за плоштината и волуменот наоѓаме $V = 42cm^3$ и $P = 76cm^2$.

5. Равенките на два дијаметри во една кружница се $x+y=14$ и $2x-3y+12=0$. Да се најде равенката на кружницата, ако се знае дека таа минува низ координатниот почеток.

Решение. Јасно, центарот на кружницата $S(p,q)$ е пресечната точка на правите на кои лежат дијаметрите, што значи дека p и q се решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x+y=14 \\ 2x-3y+12=0. \end{cases}$$

Ако правата равенка ја помножиме со 3 и ја собереме со втората равенка наоѓаме $5x=30$ од што следува $x=6$. Со замена во правата равенка добиваме $y=8$. Значи, центарот на кружницата е $S(6,8)$ и како таа минува низ координатниот почеток за нејзиниот радиус добиваме

$$r=\overline{SO}=\sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2}=10.$$

Конечно, равенката на кружницата е $(x-6)^2+(y-8)^2=100$.

6. Во круг со радиус $r=35cm$, е впишан рамнокрак трапез чии паралелни страни се $a=48cm$ и $b=30cm$. Да се пресмета плоштината P на трапезот. Колку решенија има задачата?

Решение. Плоштината на трапезот е $P=\frac{a+b}{2}h=39h$, каде h е висината на трапезот $ABCD$. Триаголниците AOB и DOC се рамнокраки и $h=h_1+h_2$ каде h_1 е висина на AOB а h_2 висината на DOC. Од правоаголните триаголници AOO_1 и DOO_2 имаме

$$h_1=\sqrt{r^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{11\cdot 59}=\sqrt{649}cm,\ h_2=\sqrt{r^2-(\tfrac{b}{2})^2}=\sqrt{20\cdot 50}=\sqrt{1000}cm.$$

Значи, $h=(\sqrt{649}+\sqrt{1000})cm$ па затоа $P=39(\sqrt{649}+\sqrt{1000})cm^2$.

Задачата има две решенија. Во вториот случај

$$h=(\sqrt{1000}-\sqrt{649})cm \text{ и } P=39(\sqrt{1000}-\sqrt{649})cm^2.$$

07.09.1995 — I група

1. Да се упрости изразот $\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}-\frac{a+3}{9a-3a^2}$.

Решение. Од условот на задачата при $a\neq -3, a\neq 3, a\neq 0$ имаме

$$\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}-\frac{a+3}{9a-3a^2}=\frac{1}{3(a+3)}-\frac{2a}{3(a-3)(a+3)}+\frac{a+3}{3a(a-3)}=\frac{a(a-3)-2a^2+(a+3)^2}{3a(a-3)(a+3)}$$

$$=\frac{a^2-3a-2a^2+a^2+6a+9}{3a(a-3)(a+3)}=\frac{3a+9}{3a(a-3)(a+3)}=\frac{3(a+3)}{3a(a-3)(a+3)}=\frac{1}{a(a-3)}.$$

2. За која вредност на параметарот p корените x_1 и x_2 на равенката $x^2-4x+p-5=0$ го задоволуваат условот $x_1-x_2=0$? За таа вредност на p, да се најдат корените на равенката.

Решение. Од Виетовите правила имаме

$$x_1+x_2=4 \text{ и } x_1x_2=p-5.$$

Од условот на задачата имаме $x_1=x_2$ па ако замениме во $x_1+x_2=4$ наоѓаме $x_1=x_2=2$. Конечно, со замена во $x_1x_2=p-5$ добиваме $p=9$.

3. Да се пресметаат аглите на триаголникот, ако се знае дека тие се однесуваат како 1 : 2 : 6.

Решение. Нека аглите на триаголникот се α, β и γ. Збирот на аглите е: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ и како $\alpha:\beta:\gamma=1:2:6$ следува $\alpha=k, \beta=2k$ и $\gamma=6k$ следува $9k=180^\circ$ добиваме $k=20^\circ$. Според тоа,

$$\alpha=20^\circ, \beta=40^\circ \text{ и } \gamma=120^\circ.$$

4. Основата на една пирамида е правоаголник со димензии $a=5cm$ и $b=6cm$, а секој бочен раб изнесува $c=13cm$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

Решение. Волуменот на пирамидата е $V=\frac{BH}{3}=\frac{abH}{3}=10H$. Од правоаголниот триаголник AOS следува $H^2=c^2-\overline{AO}^2$. Но,

$$\overline{AO}=\frac{\overline{AC}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{61}$$

па затоа $H=\sqrt{169-\frac{61}{4}}=\frac{\sqrt{615}}{2}cm$. Конечно, $V=5\sqrt{615}cm^3$.

5. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha-2}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$ ако се знае дека $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и α е остар агол.

Решение. Бидејќи α е остар агол имаме $\sin\alpha>0$ па затоа $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$. Според тоа,

$$\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}, \quad \text{ctg}\alpha=\frac{1}{\text{tg}\alpha}=\frac{3}{4}$$

од што следува $A=\frac{\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha-2}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-2}{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}=\frac{1}{24}$.

6. Да се најде равенката на кружницата што минува низ точките $A(-1,3)$ и $B(3,-1)$, а центарот и лежи на правата $y=3x-2$.

Решение. Равенка на кружница со центар $S(p,q)$ радиус r е $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} q=3p-2 \\ (p+1)^2+(q-3)^2=r^2 \\ (p-3)^2+(q+1)^2=r^2 \end{cases}.$$

Ако од втората равенка ја извадиме третата добиваме $8p-8q=0$ т.е. $p=q$. Заменуваме во првата равенка на системот и добиваме $p=3p-2$ од каде наоѓаме $p=1, q=1$ и со замена во втората равенка добиваме $r^2=8.$ Конечно, равенката на кружницата е

$$(x-1)^2+(y-1)^2=8.$$

07.09.1995 II група

1. Да се упрости изразот $\frac{a+4}{4a^2-16a}-\frac{1}{a^2+4a}+\frac{8}{16a-a^3}$.

Решение. Од условот на задачата при $a\neq -4, a\neq 4, a\neq 0$ имаме

$$\frac{a+4}{4a^2-16a}-\frac{1}{a^2+4a}+\frac{8}{16a-a^3}=\frac{a+4}{4a(a-4)}-\frac{1}{a(a+4)}-\frac{8}{a(a-4)(a+4)}$$

$$=\frac{a^2+8a+16-4a+16-32}{4a(a-4)(a+4)}=\frac{1}{4(a-4)}.$$

2. За која вредност на параметарот m корените x_1 и x_2 на равенката $x^2-6x+m=0$ го задоволуваат условот $x_1-x_2=10$?

Решение. Од Виетовите правила имаме

$$x_1+x_2=6 \text{ и } x_1x_2=m.$$

Од условот на задачата имаме $x_1-x_2=10$ и како $x_1+x_2=6$ ако ги собереме последните две равенки наоѓаме $x_1=8$, па затоа $x_2=-2$. Конечно, од $x_1x_2=m$ имаме $m=-16$.

3. Да се пресметаат аглите на триаголникот, ако се знае дека тие се однесуваат како 1 : 3 : 5.

Решение. Нека аглите на триаголникот се α,β и γ. Збирот на аглите е: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ и како $\alpha:\beta:\gamma=1:3:5$ следува $\alpha=k, \beta=3k$ и $\gamma=5k$. Значи, $9k=180^\circ$ па затоа $k=20^\circ$. Според тоа,

$$\alpha=20^\circ, \beta=60^\circ \text{ и } \gamma=100^\circ.$$

4. Основата на една правилна пирамида е правоаголник со димензии $a=16cm$ и $b=12cm$. Ортогоналната проекција на врвот од пирамидата се совпаѓа со пресекот на дијагоналите на правоаголникот и дијагоналниот пресек има плоштина $Q = 240 cm^2$. Да се пресмета волуменот V на пирамидата.

Решение. Волуменот на пирамидата е $V = \frac{BH}{3} = \frac{16 12H}{3} = 64H$. Од триаголникот ABC имаме $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{256+144} = 20$. Понатаму, $240 = Q = \frac{dH}{2} = \frac{20H}{2} = 10H$, па затоа $H = 24cm$. Конечно,

$$V = 64H = 64 \cdot 24cm^3 = 1536cm^3.$$

5. Да се пресмета вредноста на изразот $B = \frac{\text{tg}\alpha - 6\text{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ ако се знае дека $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и α е остар агол.

Решение. Бидејќи α е остар агол имаме $\cos\alpha > 0$ па затоа $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$. Според тоа,

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}, \quad \text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{5}{12}$$

од што следува $B = \frac{\text{tg}\alpha - 6\text{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{\frac{12}{5} - \frac{5}{2}}{\frac{12}{13} - \frac{25}{13}} = \frac{1}{10}$.

6. Низ точката $M(2,3)$, паралелно со правата $x - 3y = 1$ е повлечена права која ја сече кружницата $x^2 + y^2 - 7x + 3y = 48$ во точките *A* и *B*. Да се пресмета должината на тетивата *AB*.

Решение. Од $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ добиваме дека коефициентот на правецот на паралелната права е $k = \frac{1}{3}$. Равенка на права со коефициент на правец k која минува низ точка (x_0, y_0) е $y - y_0 = k(x - x_0)$. Од условот на задачата следува дека равенката на пресечната права е $y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$ т.е. $x = 3y - 7$.

Со замена во равенката на кружницата се добива равенката

$$(3y - 7)^2 + y^2 - 7(3y - 7) + 3y = 48$$

која е еквивалентна на равенката $y^2 - 6y + 5 = 0$, чии решенија се $y_1 = 1$ и $y_2 = 5$. Со смена во $x = 3y - 7$ се добива $x_1 = -4$ и $x_2 = 8$, што значи дека точките се $A(8,5)$ и $B(-4,1)$, па затоа должината на тетивата е $\overline{AB} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$.

Јули 1996 **I група**

1. Да се реши неравенката $3^{2x} > 2 \cdot 3^x + 3$.

Решение. Со замена $3^x = t$ се добива $t^2 - 2t - 3 > 0$. Дискриминантата на равенката $t^2 - 2t - 3 = 0$ е $D = 16 > 0$, а нејзините корени се $t_1 = 3$ и $t_2 = -1$, па затоа решението на неравенка $t^2 - 2t - 3 > 0$ е $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ и како $t = 3^x > 0$ добиваме дека $3^x \in (3, \infty)$, од што следува дека $x \in (1, \infty)$.

2. За која вредност на параметарот a квадратната равенка $x^2 - ax + a - 1 = 0$ има решенија такви, што збирот на квадратите од реципрочните вредности на корените е еднаков на 5.

Решение. Нека x_1 и x_2 се решенијата на равенката. Според условот

$$5 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} \tag{1}$$

Од Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = a$ и $x_1 x_2 = a - 1$ и ако замениме во (1) ја добиваме равенката $5 = \frac{a^2 - 2(a-1)}{(a-1)^2}$ која при $a \neq 1$ е еквивалентна на равенката $4a^2 - 8a + 3 = 0$ чии решенија се $a_1 = \frac{3}{2}$ и $a_2 = \frac{1}{2}$.

3. Да се реши равенката $\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{1 + 2x} = 2x.$

Решение. Равенката има смисла за $x \geq 0,\ \ 1 - 2x \geq 0$ и $1 + 2x \geq 0$ што значи за $x \geq 0, x \leq \frac{1}{2}$ и $x \geq -\frac{1}{2}$ од што следува $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Дадената равенка ја квадрираме и последователно добиваме

$$1 - 2x + 2\sqrt{1 - 4x^2} + 1 + 2x = 4x^2$$

$$2\sqrt{1 - 4x^2} = 4x^2 - 2$$

$$(1 - 4x^2) = (2x^2 - 1)^2$$

$$1 - 4x^2 = 4x^4 - 4x^2 + 1$$

т.е. $4x^4 = 0$. Решение на последната равенка е $x = 0$, но тоа не е решение на почетната равенка бидејќи $\sqrt{1 - 2 \cdot 0} + \sqrt{1 + 2 \cdot 0} = 2 \neq 0 = 2 \cdot 0$.

4. Во прав кружен конус аголот меѓу изводницата и висината е 30°, а гадиусот на впишаната топка е $5cm$. Да се најде волуменот на конусот.

Решение. Нека r е радиусот на основата на конусот а H неговата висина. Волуменот на конусот е $V=\frac{\pi r^2 H}{3}$. Од ΔMSC имаме

$$\frac{R}{H-R}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

па затоа $H=3R=15$. Понатаму, од ΔBCN следува $\frac{r}{H}=\mathrm{tg}30^0$ т.е. $r=5\sqrt{3}$. Конечно, $V=\frac{\pi r^2 H}{3}=375\pi cm^3$.

4. Да се најде равенката на правата на која лежи дијаметарот на кружницата $x^2+y^2-6x+8y=29$ кој е нормален на правата $3x-7y+5=0$.

Решение. Равенките на кружницата и правата ги запишуваме во видот $(x-3)^2+(y+4)^2=54$ и $y=\frac{3}{7}x+\frac{5}{7}$. Според тоа, центарот на кружницата е $S(3,-4)$ и коефициентот на правецот на правата е $k=\frac{3}{7}$. Бидејќи дијаметарот лежи на права која е нормална на дадената за коефициентот на правецот на оваа права имаме $k_1=-\frac{1}{k}=-\frac{7}{3}$. Конечно, бидејќи бараната права минува низ центарот на кружницата со замена во равенката $y-y_0=k_1(x-x_0)$ добиваме $y+4=-\frac{7}{3}(x-3)$ т.е. $7x+3y=9$.

Јули 1996 II група

1. Да се реши неравенката $5^{2x}<4\cdot 5^x+5$.

Решение. Воведуваме смена $y=5^x$ и ја добиваме неравенката $y^2-4y-5<0$. Решенија на квадратната равенка $y^2-4y-5=0$ се $y_1=-1$ и $y_2=5$ па затоа решение на последната неравенка е $y\in(-1,5)$. Но, $y=5^x>0$ па затоа $5^x\in(0,5)$ од што следува дека $x\in(-\infty,1)$.

2. Да се најде параметарот a така што збирот на квадратите на решенијата на равенката $x^2-(a+1)x+2a=0$ е еднаков на 5.

Решение. Ако ги искористиме Виетовите врски добиваме

$$5=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a+1)^2-4x=a^2-2a+1$$

т.е. ја добиваме равенката $a^2-2a-4=0$ чии решенија се

$$a_1=1+\sqrt{5},\quad a_2=1-\sqrt{5}.$$

3. Да се реши неравенката $\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}=2x$.

Решение. Равенката има смисла за $1-2x\geq 0$ и $1+2x\geq 0$ што значи за $x\leq\frac{1}{2}$ и $x\geq -\frac{1}{2}$ од што следува $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Дадената равенка ја квадрираме и последователно добиваме

$$1-2x-2\sqrt{1-4x^2}+1+2x=4x^2$$

$$\sqrt{1-4x^2}=1-2x^2$$

$$(1-4x^2)=(1-2x^2)^2$$

$$1-4x^2=4x^4-4x^2+1$$

т.е. $4x^4=0$. Решение на последната равенка е $x=0$, и тоа е решение на почетната равенка. Провери!

4. Во прав кружен конус аголот меѓу изводницата и висината е 30°, а радиусот на основата е $5\sqrt{3}$. Да се најде волуменот на вписаната топка.

Решение. Волуменот на топка е $V=\frac{4}{3}R^3\pi$. Од ΔBSO имаме $\frac{r}{s}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ па затоа $s=2r=10\sqrt{3}$. Понатаму, $H=\sqrt{s^2-r^2}=15$. Сега од ΔMNS имаме $\frac{R}{H-R}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ па затоа $R=\frac{H}{3}=5$. Конечно, $V=\frac{4}{3}R^3\pi=\frac{500}{3}\pi cm^3$.

5. Да се определи равенката на кружницата чиј центар е точката $M(1,2)$ и ја допира правата $y=2x+3$. Потоа да се определат координатите на допирната точка.

Решение. Радиусот на бараната кружница е еднаков на растојанието од точката $M(1,2)$ до правата $y=2x+3$, т.е. $r=\frac{2\cdot 1-2+3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Според тоа равенката на кружницата е $(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{9}{5}$.

Допирната точка ја наоѓаме како решение на системот равенки

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{9}{5}\\ y=2x+3\end{cases}$$

Ако од втората равенка замениме во првата ја добиваме равенката $(x-1)^2+(2x+1)^2=\frac{9}{5}$ која е еквивалентна на равенката $25x^2+10x+1=0$

чие решение е $x=-\frac{1}{5}$. Сега, $y=2\cdot(-\frac{1}{5})+3=\frac{13}{5}$ што значи дека допирната точка е $N(-\frac{1}{5},\frac{13}{5})$.

12.09.1996

1. Да се најде двоцифрен број таков што: цифрата на единиците е за два поголема од цифрата на десетките, а производот на бараниот број и збирот на неговите цифри е 144.

Решение. Ако со y ја означиме цифрата на единиците, а со x цифрата на десетките, тогаш бараниот број е $10x+y$. Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} y=x+2 \\ (10x+y)(x+y)=144 \end{cases}$$

Од првата равенка заменуваме во втората и ја добиваме равенката $(11x+2)(2x+2)=144$ која е еквивалентна на равенката

$$11x^2+13x-70=0\,.$$

Решенијата на последната равенка се $x_1=-\frac{35}{11}$ и $x_2=2$. Но, x е цифра, па затоа $x=2$ и $y=4$, што значи дека бараниот број е 24.

2. Определи го x од пропорцијата

$$[\tfrac{(a+b)^3}{3ab}-a-b]:[(a-b)^2+ab]=[\tfrac{(a-b)^2}{4ab}+1]:x\,.$$

Решение. Јасно, задачата има смисол за $a\neq 0,\ b\neq 0$. Сега последователно добиваме

$$\frac{a^3+3a^2b+b^3+3ab^2-3a^2b-3ab^2}{3ab}:[a^2-ab+b^2]=[\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}+1]:x$$

$$\frac{a^3+b^3}{3ab}:[a^2-ab+b^2]=\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}:x$$

$$x=\frac{3ab}{a^3+b^3}\,\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}[a^2-ab+b^2]=\frac{3(a^2-ab+b^2)(a+b)^2}{4(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{3(a+b)}{4}\,.$$

3. Реши ја равенката $\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1$.

Решение. Дадената равенка има смисол за $4\cdot 3^x-1>0$ од што следува $3^x>\frac{1}{4}$ т.е. $x>\log_3\frac{1}{4}$. Понатаму од $\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1$ последователно добиваме

$$4\cdot 3^x-1=3^{2x+1},$$

$$4\cdot 3^x-1=3\cdot(3^x)^2\,.$$

Воведуваме смена $y=3^x$ и од последната равенка ја добиваме равенката $3y^2-4y+1=0$ чии решенија се $y_1=\frac{1}{3}$ и $y_2=1$. Според тоа, $3^x=\frac{1}{3}$ па е $x_1=-1$ и $3^x=1$ па е $x_2=0$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x_1>\log_3\frac{1}{4}$ и $x_2>\log_3\frac{1}{4}$, што значи дека најдените решенија се решенија и на почетната равенка.

4. Дадена е кружницата $x^2+y^2=16$.

а) Состави ги равенките на тангентите на кружницата во нејзините точки со апциса 2.

б) Најди ја пресечната точка на тангентите и аголот меѓу нив.

Решение. а) Од $x=2$ следува $y^2=16-2^2=12$ т.е. $y_{1/2}=\pm2\sqrt{3}$. Според тоа, допирните точки на кружницата и тангентите се $A(2,2\sqrt{3}), B(2,-2\sqrt{3})$. Ако се искористи дека равенката на тангентата на кружницата $x^2+y^2=r^2$ во точка $M(x_0,y_0)$ е $xx_0+yy_0=r^2$, тогаш за равенките на тангентите наоѓаме

$$(t_1):\quad 2x+2\sqrt{3}y=16 \text{ т.е. } y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ и}$$

$$(t_2):\quad 2x-2\sqrt{3}\cdot y=16 \text{ т.е. } y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

б) За да ја определиме равенката на пресечната точка на тангентите ќе ги собереме равенките на (t_1) и (t_2). Имаме, $2y=0$ т.е. $y=0$, па затоа $x=8$, т.е. пресечната точка е $M(8,0)$. За аголот α меѓу тангентите добиваме

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-(-\frac{1}{\sqrt{3}})}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{3}})}=\sqrt{3}, \text{ што значи } \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

5. Околу правилна четиристрана пирамида е опишана сфера. Должината на дијагоналата на основата на пирамидата е $24cm$, а радиусот на сферата е $13cm$. Да се определи волуменот на пирамидата.

Решение. Волумен на пирамидата е $V=\frac{BH}{3}$; каде што B е плоштина на основата, а H е висината на пирамидата. Од правоаголниот ΔABC добиваме $2a^2=d^2$ што значи $a=\frac{d}{\sqrt{2}}=12\sqrt{2}cm$. Понатаму, од правоаголниот ΔCLO последователно добиваме

$$(H-r)^2=r^2-(\tfrac{d}{2})^2$$

$$H^2-2Hr+(\tfrac{d}{2})^2=0$$

$$H^2-26H+144=0$$

$$H_1 = 18\,cm \text{ и } H_2 = 8\,cm.$$

Според тоа, постојат две пирамиди кои ги задоволуваат условите на задачата и нивните волумени се

$$V_1 = \frac{(12\sqrt{2})^2 \cdot 18}{3} cm^3 = 1728 cm^3 \text{ и } V_1 = \frac{(12\sqrt{2})^2 \cdot 8}{3} cm^3 = 768 cm^3.$$

04.07. 1997 **I група**

1. Да се упрости изразот: $\frac{a^n+a^{-n}-1}{a^n+a^{-2n}}-\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}+2}$, $a\neq 0$.

Решение. Последователно имаме

$$\frac{a^n+a^{-n}-1}{a^n+a^{-2n}}-\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}+2}=\frac{a^n+\frac{1}{a^n}-1}{a^n+\frac{1}{a^{2n}}}-\frac{a^n-\frac{1}{a^n}}{a^n+\frac{1}{a^n}+2}=\frac{a^{3n}+a^n-a^{2n}}{a^{3n}+1}-\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1+2a^n}$$

$$=\frac{a^n(a^{2n}-a^n+1)}{(a^n+1)(a^{2n}-a^n+1)}-\frac{(a^n-1)(a^n+1)}{(a^n+1)^2}=\frac{a^n}{a^n+1}-\frac{a^n-1}{a^n+1}=\frac{1}{a^n+1}.$$

2. Дадена е фамилијата параболи $y(x)=mx^2+2x+n,\ m,n\in\mathbf{R}$.

a) Да се определи онаа парабола која минува низ точките A и B кои лежат на правата $y=1$, симетрични се во однос на правата $x=2$ и такви, што $\overline{AB}=2$.

b) Да се најдат нулите на оваа парабола.

v) Да се скицира графикот на оваа парабола.

Решение. а) Бидејќи точките A и B лежат на правата $y=1$ добиваме $A(x_1,1)$, $B(x_2,1)$. Понатаму, од $\overline{AB}=2$ следува $2=|x_1-x_2|$ и како без ограничување на општоста можеме да земе дека $x_1>x_2$ добиваме $x_1-x_2=2$. Точките A и B лежат на парабола од дадениот вид, па затоа

$$\begin{aligned} mx_1^2+2x_1+n&=1,\\ mx_2^2+2x_2+n&=1, \end{aligned} \tag{1}$$

и ако ги одземеме последните две равенки добиваме

$$m(x_1^2-x_2^2)+2(x_1-x_2)=0$$

од што следува $m(x_1+x_2)=-2$. Но, точките A и B се симетрични во однос на правата $x=2$, па затоа $\frac{x_1+x_2}{2}=2$ т.е. $x_1+x_2=4$, што значи дека $m=-\frac{1}{2}$. Од системот равенки

$$\begin{cases} x_1+x_2=4\\ x_1-x_2=2 \end{cases}$$

наоѓаме $x_1=3, x_2=1$. Конечно, со замена во правата равенка од (1) добиваме $n=1-(-\frac{1}{2})\cdot 3^2-2\cdot 3=-\frac{1}{2}$ и бараната парабола има равенка $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$.

б) Нулите на параболата се добиваат како решенија на равенката $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}=0$. Имаме, $x_{1/2}=2\pm\sqrt{3}$.

в) Графикот на параболата е даден на цртежот десно.

3. **а)** Да се реши равенката $2^{x+2}-2^{2-x}=6$.

б) Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} 2^{x+2}-2^{y+2}=8 \\ 4^{x}+4^{y}=\frac{41}{8}. \end{cases}$$

Решение. **а)** Дадената равенка е еквивалентна на равенката $4\cdot 2^{x}-\frac{4}{2^{x}}=6$ т.е. на равенката $4\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^{x}-4=0$. Во последната равенка ведуваме смена $y=2^{x}$ и ја добиваме равенката $4y^{2}-6y-4=0$ чии решенија се $y_1=-\frac{1}{2}$ и $y_2=2$. Но, $y=2^{x}>0$ па затоа $2^{x}=2$ т.е. $x=1$ е единствено решение на почетната равенка.

б) Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 4\cdot 2^{x}-4\cdot 2^{y}=8 \\ 2^{2x}+2^{2y}=\dfrac{41}{8}. \end{cases}$$

Воведуваме смена на непознатите $u=2^{x}$ и $v=2^{y}$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} u-v=2 \\ u^{2}+v^{2}=\dfrac{41}{8}. \end{cases}$$

Од првата равенка наоѓаме $u=v+2$ и ако замениме во втората после средувањето ја добиваме равенката $16v^{2}+32v-9=0$ чии решенија се $v_1=\frac{1}{4}$ и $v_2=-\frac{9}{4}$. Меѓутоа, $v=2^{y}>0$ па затоа $v_1=\frac{1}{4}$ и притоа добиваме $u_1=\frac{9}{4}$. Конечно, ако се вратиме на старите непознати наоѓаме $2^{x}=\frac{9}{4}$ и $2^{y}=\frac{1}{4}$ што значи дека решение на дадениот систем е $x=\log_2\frac{9}{4}$ и $y=-2$.

4. **а)** Низ точката $M(4,-3)$ да се повлече права која со координатните оски зафаќа триаголник со плоштина $3cm^{2}$.

б) Да се најде центарот и радиусот на впишаниот круг во триаголникот.

Решение. **а)** Нека k е коефициентот на правецот на бараната права. Тогаш, нејзината равенка е $y+3=k(x-4)$. Пресечните точки на правата со координатните оски се $A(0,-4k-3)$ и $B(4+\frac{3}{k},0)$, па затоа плоштината на ΔABO е $P=\frac{1}{2}|(-4k-3)(4+\frac{3}{k})|=\frac{(4k+3)^2}{2|k|}$. Од условот на задачата имаме $\frac{(4k+3)^2}{2|k|}=3$ т.е. $16k^2+24k+9=6|k|$. Ќе разгледаме два случаи.

- Ако $k>0$, тогаш равенката има облик $16k^2+18k+9=0$ и таа нема реални решенија.

- Ако $k<0$, тогаш равенката има облик $16k^2+30k+9=0$ и нејзини решенија се $k_1=-\frac{3}{8}$ и $k_2=-\frac{3}{2}$. Според тоа, правите $3x+8y+12=0$ и $3x+2y-6=0$ се решение на задачата.

б) Ако $p>0$, тогаш центарот на впишаната кружница во ΔABO е $S(p,-p)$ и притоа $r=p$. Од друга страна радиусот на впишаната кружница е еднаков на растојанието од центарот до правата AB па затоа:

- во случај на правата $3x+8y+12=0$ добиваме $p=\frac{3p-8p+12}{\sqrt{3^2+8^2}}$ т.е. $p=\frac{12}{5+\sqrt{73}}$ и бараната кружница е $(x-p)^2+(y+p)^2=p^2$.

- во случај на правата $3x+2y-6=0$ добиваме $p=\frac{3p-2p-6}{-\sqrt{3^2+2^2}}$ т.е. $p=\frac{6}{1+\sqrt{13}}$ и бараната кружница е $(x-p)^2+(y+p)^2=p^2$.

5. Во полутопка, со волумен $144cm^3$, впишана е коцка така што едната страна лежи на основата на полутопката, а преостанатите четири темиња на полутопката. Пресметај го волуменот на топката впишана во коцката.

Решение. Со R и r да ги означиме радиусите на полутопката и впишаната топка, соодветно, а со a работ на коцката. Од условот на задачата имаме $a=2r$ и $144\pi=\frac{1}{2}\cdot\frac{4R^3}{3}\pi$, па затоа $R=6cm$. Понатаму, дијагоналата на страната на коцката е $d=a\sqrt{2}$, па од правоаголниот ΔSPM следува $R^2=(\frac{a}{2})^2+(\frac{d}{2})^2$ т.е. $36=\frac{3a^2}{4}$ од што добиваме $a=4\sqrt{3}cm$.

Сега $r=\frac{a}{2}=2\sqrt{3}cm$, па затоа волуменот на топката впишана во коцката е $V=\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{4}{3}(2\sqrt{3})^3\pi cm^3=32\sqrt{3}\pi cm^3$.

04.07. 1997 **II група**

1. а) Да се упрости изразот:

$$A=[\frac{y^2+xy}{2x}:(y^2-x^2)]\cdot[\frac{(x+y)^2}{4xy}-1].$$

б) Која крива во рамнината се добива за $A=1$.

в) Нацртај го нејзиниот график.

Решение. а) Јасно $x \neq 0, \quad y \neq \pm x$ и притоа

$$A = [\frac{y^2+xy}{2x} : (y^2 - x^2)] \cdot [\frac{(x+y)^2}{4xy} - 1] = \frac{y(y+x)}{2x} \cdot \frac{1}{(y-x)(y+x)} \cdot \frac{(x+y)^2 - 4xy}{4xy}$$

$$= \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{y-x} \cdot \frac{(y-x)^2}{4x} = \frac{y-x}{8x^2}.$$

б) За $A = 1$ добиваме $1 = \frac{y-x}{8x^2}$ т.е. $y = 8x^2 + x$ и тоа е равенка на парабола.

в) Нацртај го самостојно графикот на оваа парабола.

2. Да се реши равенката $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$3 \cdot (9^{\frac{1}{x}})^2 - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0.$$

Воведуваме смена $9^{\frac{1}{x}} = y$ и ја добиваме равенката $3y^2 - 10y + 3 = 0$ чии решенија се $y_1 = 3$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Според тоа, $9^{\frac{1}{x}} = 3$ па затоа $3^x = 9$ т.е. $x = 2$ и $9^{\frac{1}{x}} = 3^{-1}$ па затоа $3^{-x} = 9$ и $x = -2$.

3. Да се реши неравенката $\frac{1-\sin x}{1-2\sin x} < \frac{1+\sin x}{1-4\sin^2 x}$.

Решение. Очигледно $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Имаме

$$\frac{1-\sin x}{1-2\sin x} - \frac{1+\sin x}{1-4\sin^2 x} < 0 \iff \frac{1+2\sin x - \sin x - 2\sin^2 x - 1 - \sin x}{1-4\sin^2 x} < 0 \iff \frac{-2\sin^2 x}{1-4\sin^2 x} < 0.$$

Понатаму, од $-2\sin^2 x \leq 0$ следува $1 - 4\sin^2 x > 0$ т.е. $\frac{1}{4} > \sin^2 x$ што значи $|\sin x| < \frac{1}{2}$. Конечно, решенијата на дадената неравенка се дадени со

$$(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi) \setminus \{2k\pi\}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{и}$$

$$(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi) \setminus \{(2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник со координати на темето при еден од остриите агли $M(5,6)$ и равенката на правата $3x + 2y = 1$ на која што лежи спротивната катета.

a. Определи ги координатите на другите две темиња на триаголникот. Колку решенија има задачата?
b. Состави равенка на кружница чиј дијаметар е катетата која со крајна точка $M(5,6)$.

Решение. а) Равенката на правата (p) на која лежи втората катета ќе ја запишеме во обликот $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Низ точката M повлекуваме права (q) нормална на (p) и во пресекот на правите го наоѓаме темето A на правиот агол. Имаме, $(q): y-6=\frac{2}{3}(x-5)$ т.е. $(q): 2x-3y=-8$ и го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} 2x-3y=-8 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

чие решение е $x=-1, y=2$ што значи дека темето на правиот агол е $A(-1,2)$. За да го определиме темето B ќе искористи дека триаголникот е рамнокрак т.е. дека $\overline{AM}=\overline{AB}$ и дека $B(u,v)$ лежи на правата (p). Имаме

$$\begin{cases} (u+1)^2+(v-2)^2=(5+1)^2+(6-2)^2 \\ 3u+2v=1 \end{cases}$$

Решенијата на последниот систем равенки се $u_1=-5, v_1=8$ и $u_2=3, v_2=-4$, што значи дека задачата има две решенија.

b) Центарот $S(a,b)$ на бараната кружница е средината на отсечка AM, а нејзиниот радиус е $r=\frac{\overline{AM}}{2}$. Според тоа,

$$a=\frac{-1+5}{2}=2, b=\frac{2+6}{2}=4,\ r=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{13}$$

и равенката на кружницата е $(x-2)^2+(y-4)^2=13$.

5. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $384cm^2$ а основниот раб и висината се однесуваат како $3:2$.

а) Да се најдат рабовите и висината на пирамидата.

b) Да се најде волуменот на пирамидата.

в) Да се најде волуменот на коцката впишана во пирамидата.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $a:H=3:2$ т.е. $H=\frac{2a}{3}$. Понатаму, од правоаголниот ΔS_1SS_2 добиваме

$$h^2=H^2+(\tfrac{a}{2})^2=(\tfrac{2a}{3})^2+\frac{a^2}{4}=\frac{4a^2}{9}+\frac{a^2}{4}=\frac{25a^2}{36}$$

па затоа $h=\frac{5a}{6}$. Значи,

$$P=B+M=a^2+4\frac{ah}{2}=a^2+2ah=a^2+2a\cdot\frac{5a}{6}=\frac{8a^2}{3}$$

па затоа $384=\frac{8a^2}{3}$, од што следува $a=12cm$. Според тоа, $h=\frac{5a}{6}=10cm$ и $H=\frac{2a}{3}=8cm$. Конечно, од ΔBS_1S имаме $b=\sqrt{h^2+(\frac{a}{2})^2}=\sqrt{136}cm$.

б) За волуменот на пирамидата имаме

$$V=\frac{BH}{3}=\frac{a^2H}{3}=\frac{12^2 8}{3}cm^3=384cm^3.$$

в) Нека c е работ на коцката впишана во пирамидата. Тогаш дијагоналата на страната е $d_1 = c\sqrt{2}$, а дијагоналата на основата на пирамидата е $d = a\sqrt{2}$. Триаголниците SS_2B_2 и SS_3B се слични па затоа $(H-c):H = c\sqrt{2}:a\sqrt{2}$ од што следува дека $c = \frac{aH}{a+H} = \frac{12\cdot 8}{12+8} = \frac{24}{5} cm$. Конечно, за волуменот на впишаната коцка добиваме

$$V = c^3 = (\frac{25}{4})^3 cm^3 .$$

12.09. 1997 I група

1. а) Да се упрости изразот: $B \equiv \frac{1}{y^2+xy} + \frac{2x}{y^3-x^2y} - \frac{x+y}{y^2x-x^2y}$.

б) Која крива се добива за $B = \frac{1}{x^3}$?

Решение. Дадениот израз има смисла за $x \neq \pm y, x \neq 0, y \neq 0$ и притоа

$$B \equiv \frac{1}{y^2+xy} + \frac{2x}{y^3-x^2y} - \frac{x+y}{y^2x-x^2y} = \frac{1}{y(y+x)} - \frac{2x}{y(x-y)(x+y)} + \frac{x+y}{yx(x-y)}$$

$$= \frac{x(x-y)-2x^2+(x+y)^2}{xy(x-y)(x+y)} = \frac{x^2-xy-2x^2+x^2+y^2+2xy}{xy(x-y)(x+y)} = \frac{y^2+xy}{xy(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{y(x+y)}{xy(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x(x-y)} .$$

б) Ако $B = \frac{1}{x^3}$, тогаш $\frac{1}{x(x-y)} = \frac{1}{x^3}$ т.е. $y = -x^2 + x$ што значи дека во случајот се добива парабола.

2. Да се реши равенката $x^{\frac{1+\log x}{4}} = 10^{\log x+1}$.

Решение. Јасно $x > 0$. Ако ја логаритмираме дадената равенка последователно добиваме

$$\frac{\log x+1}{4}\log x = \log x + 1 ,$$

$$(1+\log x)(1-\tfrac{1}{4}\log x) = 0$$

од што следува $\log x + 1 = 0$ и $1 - \frac{1}{4}\log x = 0$ т.е. $x_1 = 10^{-1}$и $x_2 = 10^4$.

3. Да се реши равенката $1-\cos^2 2x = \sin 3x - \cos(\frac{\pi}{2}+x)$.

Решение. Користејќи ги равенствата:

$$1-\cos^2 2x = \sin^2 2x ,\ \cos(\tfrac{\pi}{2}+x) = -\sin x ,\ \sin 3x + \sin x = 2\sin 2x\cos x$$

дадената равенка ја трансформираме во еквивалентната равенка

$$\sin^2 2x = 2\sin 2x\cos x$$

која е еквивалентна со равенката

$$\sin 2x \cos x (\sin x - 1) = 0 .$$

Оттука ги добиваме решенијата:

$$x = \frac{k\pi}{2}, \ x = \frac{(2s+1)\pi}{2}, \ x = \frac{(4m+1)\pi}{2} \text{ за } k, s, m \in \mathbf{Z} .$$

4. Дадена е правата (p) со равенка $2x - y = 7$ и точката $A(3,4)$. Да се најде

a. Равенката на правата (q) што минува низ A и е нормална на правата (p).

b. Пресечната точка B на правите (q) и (p).

c. Растојанието од точката A до правата (p).

Решение. a) Од $y = 2x - 7$ следува дека коефициентот на правецот на правата (p) е $k = 2$ па затоа коефициентот на правецот на правата (q) е $k_1 = -\frac{1}{2}$. Според тоа, равенката на правата (q) е $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ т.е. $x + 2y = 11$.

b) Координатите на точката B се решението на системот равенки $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$. Ако втората равенка ја помножиме со 2 и собереме со првата добиваме $5x = 25$ т.е. $x = 5$ па затоа $y = 3$. Значи, $B(5,3)$.

c) Бараното растојание е $d = \frac{|Ax_0 + Bx_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 4 - 7|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$.

5. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $360cm^2$, а работ на основата е $10cm$.

a) Да се најде волуменот на пирамидата.

b) Да се најде волуменот на впишаната топка во пирамидата.

Решение. a) Волуменот на пирамида е $V = \frac{BH}{3} = \frac{a^2H}{3}$

Плоштината на пирамида е $P = B + M = a^2 + 2ah$, каде h е висината на бочната страна, па затоа $10^2 + 20h = 360$ т.е. $h = 13cm$. Од правоаголниот ΔSS_2O_1 добиваме $H = \sqrt{h^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{169 - 25} = 12cm$. Според тоа, волуменот на пирамидата е $V = \frac{a^2H}{3} = \frac{10^2 \cdot 12}{3} cm^3 = 400cm^3$.

б) Волуменот на топка е $V = \frac{4}{3}R^3\pi$. Триаголниците SS_2O_1 и SOM се слични, па затоа $(H - R) : h = R : \frac{a}{2}$ од што добиваме $R = \frac{aH}{2h+a}$, па затоа $R = \frac{10}{3}cm$. Конечно, $V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}(\frac{10}{3})^3 \pi cm^3 = \frac{4000}{81}\pi cm^3$.

12.09.1997 **II група**

1. а) Да се упрости изразот:

$$A=[(\frac{1}{a-b}+\frac{3a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}):\frac{4a+b}{a^2+2ab+b^2}]\cdot\frac{ab^2-a^2b}{a+b}.$$

Решение. Изразот има смисол за $a\neq\pm b$ и во овој случај имаме

$$A=[(\frac{1}{a-b}+\frac{3a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}):\frac{4a+b}{a^2+2ab+b^2}]\cdot\frac{ab^2-a^2b}{a+b}$$

$$=[(\frac{1}{a-b}+\frac{3a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}):\frac{4a+b}{(a+b)^2}]\cdot\frac{ab(b-a)}{a+b}$$

$$=[(\frac{1}{a-b}+\frac{3a}{(a-b)(a+b)})\cdot\frac{(a+b)^2}{4a+b}]\cdot\frac{ab(b-a)}{a+b}=\frac{4a+b}{(a-b)(a+b)}\frac{(a+b)^2}{4a+b}\cdot\frac{ab(b-a)}{a+b}=-ab.$$

2. Дадена е фамилијата параболи $y(x)=mx^2+2x+n$, $m,n\in\mathbf{R}$.

а) Да се определи онаа парабола чие теме е во точката $T(2,3)$.

b) Да се најдат нулите на оваа парабола.

v) Да се скицира графикот на оваа парабола.

Решение. а) Темето на параболата $y(x)=ax^2+bx+c$ има координати $T(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$. Во случајов $a=m, b=2, c=n$, па затоа

$$-\frac{2}{2m}=2,\quad \frac{4mn-4}{4m}=3 \text{ т.е. } \quad m=-\frac{1}{2}, n=1.$$

Според тоа бараната парабола е $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

б) Нулите на параболата се: $x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+2}}{-1}=2\pm\sqrt{6}$.

в) Гарфикот на параболата скицирај го самостојно.

3. а) Дали има решение системот равенки $\begin{cases}2^{x+y}-2^{x-y}=0\\ 2^x+2^{-y}=0\end{cases}$

б) Реши го системот равенки

$$\begin{cases}2^{x+y}-2^{x-y}=a\\ 2^x+2^{-y}=b2^y\end{cases}$$

каде $a,b\in\mathbf{R}$

Решение. а) Од $2^x+2^{-y}>0$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$ следува дека дадениот систем нема решение.

б) Бидејќи $2^x+2^{-y}>0$ и $2^y>0$ од втората равенка на системот следува дека $b>0$. Понатаму, ако втората равенка ја помножиме со 2^{-y} и ја собереме со правата добиваме $2^{x+y}+2^{-2y}=a+b$, па затоа $a+b>0$.

Воведуваме смена $2^x = u, 2^y = v$ и дадениот систем го трансформираме во системот $\begin{cases} uv - \frac{u}{v} = a \\ u + \frac{1}{v} = bv \end{cases}$ односно $\begin{cases} u = \frac{av}{v^2-1} \\ u = \frac{bv^2-1}{v} \end{cases}$. Според тоа, $\frac{av}{v^2-1} = \frac{bv^2-1}{v}$ од што ја добиваме биквадратната равенка

$$bv^4 - (a+b+1)v^2 + 1 = 0 . \qquad (1)$$

Равенката (1) има реални решенија ако $D = (a+b+1)^2 - 4b > 0$ и како $b > 0$ и $a+b+1 > 0$ добиваме $a+b+1 > 2\sqrt{b}$ и притоа

$$v^2 = \frac{a+b+1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b} \text{ или } v^2 = \frac{a+b+1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b} . \qquad (2)$$

Понатаму, $2^y = v > 0$ па од (2) следува дека

$$v_1 = \sqrt{\frac{a+b+1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}} \text{ или } v_2 = \sqrt{\frac{a+b+1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}} . \qquad (3)$$

Ако од (3) замениме во $u = \frac{bv^2-1}{v}$ добиваме дека

$$u_1 = \frac{\frac{a+b-1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2}}{\sqrt{\frac{a+b+1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}}} \text{ или } u_2 = \frac{\frac{a+b-1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2}}{\sqrt{\frac{a+b+1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}}} . \qquad (4)$$

Но, $2^x = u > 0$, па затоа од претходната дискусија и од (4) следува дека при $b > 0$, $a+b+1 > 2\sqrt{b}$, $a+b > 1, a > 0$ почетниот систем има решенија

$$(x_i, y_i) = (\ln_2 u_i, \ln_2 v_i), \; i = 1,2,$$

а при $b > 0$, $a+b+1 > 2\sqrt{b}$, $a+b < 1, a > 0$, $a+b > 0$ почетниот систем има решение

$$(x, y) = (\ln_2 u_2, \ln_2 v_2) .$$

4. а) Најди ја равенката на правата која минува низ пресекот P на правите $2x + 7y - 8 = 0$ и $3x + 2y + 5 = 0$, и е нормална на правата $2x + 3y - 7 = 0$.

б) Кое е растојанието на точката P до правата $2x + 3y = 7$

в) Ако A и B се пресеци на правите и нормалата колкава е плоштината на триаголникот ABP?

Решение. а) Пресекот на правите е решение на системот

$$\begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$$

па затоа $P(-3,2)$. Коефициентот на правецот на правата $2x+3y-7=0$ е $k=-\frac{2}{3}$, што значи дека коефициентот на правецот на бараната права е $k_1=-\frac{1}{k}=\frac{3}{2}$. Конечно, равенката на бараната права е $y-2=\frac{3}{2}(x+3)$ т.е. $3x-2y+13=0$.

б) Бараното растојание е $d=\frac{|2\cdot(-3)+3\cdot 2-7|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$.

в) Координатите на A и B се решенија на системите

$$\begin{cases}2x+7y-8=0\\3x-2y-13=0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}3x-2y-13=0\\3x+2y+5=0\end{cases}$$

и тие се $A(\frac{107}{25},\frac{-2}{25}), B(\frac{4}{3},-\frac{9}{2}), P(-3,2)$. Плоштината на триаголникот може да се најде, на пример, по Хероновата формула

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};\quad s=\frac{a+b+c}{2},\quad a=\overline{BP},\quad b=\overline{AP};\quad c=\overline{AB}.$$

5. Во прав кружен конус со основа $r=10cm$ и висина $H=12cm$ е впишана коцка, така што еден ѕид на коцката да лежи на основата на конусот. Да се пресмета волуменот на коцката.

Решение. Ако со a го означиме работ на коцката, тогаш нејзиниот волумен е $V=a^3$.

Триаголниците CLP и COB се слични па затоа $\frac{H-a}{\frac{a}{2}}=\frac{H}{r}$ т.е. $a=\frac{2Hr}{2r+H}=\frac{15}{2}cm$. Според тоа, $V=(\frac{15}{2})^3cm^3$.

02.07.1998 **I група**

1. Да се реши системот неравенки: $\begin{cases} x \geq 2 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

Решение. Од втората неравенка имаме $y \geq x - 1$ и како $x \geq 2$ добиваме дека $y \geq x - 1 \geq 2 - 1 = 1$. Од досега изнесеното и од третата неравенка имаме $3 = 1 + 2 \leq x + y \leq 3$, па затоа $x + y = 3$ т.е. $y = 3 - x$ и ако замениме во втората неравенка наоѓаме $4 - 2x \geq 0$ т.е. $x \leq 2$, па затоа $x = 2$ и сега $y = 1$. Конечно, единствено решение на дадениот систем неравенки е точката $M(2,1)$.

2. Да се реши равенката $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$.

Решение. Воведуваме смена $x^2 = t$ и ја добиваме равенката $t^2 + 6t + 25 = 0$ чии решенија се $t_1 = -3 + 4i$ и $t_1 = -3 - 4i$. Ако се вратиме на старата непозната наоѓаме $x^2 = -3 + 4i$ или $x^2 = -3 - 4i$. Земаме $x = a + ib$ и со замена во $x^2 = -3 + 4i$ добиваме

$$(a + ib)^2 = -3 + 4i \text{ т.е. } a^2 - b^2 + i2ab = -3 + 4i .$$

Од последната равенка го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

чии решенија се $a_1 = 1, b_1 = 2; a_2 = -1, b_2 = -2$ па затоа решенија на почетната равенка се $x_1 = 1 + 2i; x_2 = -1 - 2i$.

Слично, од $x^2 = -3 - 4i$ се добива $x_3 = 1 - 2i; x_4 = -1 + 2i$.

3. Да се реши равенката $\cos x - \sin^2 x = -\frac{1}{4}$.

Решение. Имаме

$$\cos x - \sin^2 x = -\tfrac{1}{4}$$

$$\cos x - (1 - \cos^2 x) = -\tfrac{1}{4}$$

$$\cos^2 x + \cos x - \tfrac{3}{4} = 0$$

Ова е квадратна равенка по $\cos x$ па затоа

$$\cos x = \tfrac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \tfrac{-1 \pm 2}{2} \text{, т.е. } \cos x = -\tfrac{3}{2} \text{ и } \cos x = \tfrac{1}{2} .$$

Но, $\cos x = -\frac{3}{2}$ не е можно, бидејќи $-1 \le \cos x \le +1$, а од $\cos x = \frac{1}{2}$ имаме: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Да се најдат равенките на тангентите повлечени од точката $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ кон кружницата $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Ќе составиме равенка на права низ точката $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и произволен коефициент на правец k:

$$y + \sqrt{2} = k(x - \sqrt{2}) \tag{1}$$

Произволниот коефициент k ќе го определиме од условот да правата (1) е тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 1$ т.е. од условот да правата (1) ја допира споменатата кружница. Тоа значи дека системот:

$$\begin{cases} y + \sqrt{2} = k(x - \sqrt{2}) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

има единствено решение по непознатите x и y. Од првата равенка во (2) го изразуваме y:

$$y = kx - k\sqrt{2} - \sqrt{2}\,, \tag{1'}$$

заменуваме во втората равенка т.е. во равенката на кружницата:

$$x^2 + (kx - k\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = 1,$$

и после степенувањето и групирањето на соодветните членови ја добиваме квадратната равенка по x:

$$(1 + k^2)x^2 - 2\sqrt{2}k(k+1)x + 2k^2 + 4k + 1 = 0 \tag{3}$$

Системот (2) ќе има единствено решение ако квадратната равенка (3) има двоен реален корен, а тоа е во случај кога дискриминантата $D = 0$. Имаме:

$$D = 8k^2(k+1)^2 - 4(1 + k^2)(2k^2 + 4k + 1) = 0$$

или, после средувањето $k^2 + 4k + 1 = 0$ па затоа

$$k_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}\,.$$

Бидејќи има две решенија за k заклучуваме дека задачата има две решенија т.е. низ дадената точка $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ можат да се повлечат две тангенти на кружницата $x^2 + y^2 = 1$. Тие се:

$$y = (-2 - \sqrt{3})x - (-2 - \sqrt{3})\sqrt{2} - \sqrt{2} \quad \text{т.е.} \quad y = (-2 - \sqrt{3})x + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

и

$$y = (-2 + \sqrt{3})x - (-2 + \sqrt{3})\sqrt{2} - \sqrt{2} \quad \text{т.е.} \quad y = (-2 + \sqrt{3})x + \sqrt{2} - \sqrt{6}\,.$$

5. Ортогоналната проекција на едно теме на тетраедарот $ABCD$ врз спротивната страна се совпаѓа со ортоцентарот на таа страна. Да се докаже дека важи равенството $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.

Решение. Согласно правилото на триаголник за собирање на вектори, имаме:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC} =$$
$$= \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$$

па затоа

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})^2 . \quad (1)$$

Понатаму:

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} . \quad (2)$$

Но, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{HD} \perp \overrightarrow{BC}$ па затоа

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$$

тоа од (2) имаме:

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2 \cdot 0 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 . \quad (3)$$

Слично,

$$(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 \quad (4)$$

Од (1), (3) и (4) следува $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2$.

Забелешка: Последната задача може да се реши на друг поедноставен начин. За таа цел види ја задачата 5 од II група од овој квалификационен испит.

02.07.1998 II група

1. Да се реши системот неравенки: $\begin{cases} y \geq x \\ x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$

Решение. Од првата и втората неравенка следува $y \geq x \geq 2$. Сега, од претходно изнесеното и од третата неравенка имаме $4 = 2 + 2 \leq x + y \leq 4$, што значи $x + y = 4$ т.е. $y = 4 - x$. Ако замениме во првата неравенка наоѓаме $4 - x \geq x$ па затоа $2 \geq x$, што заедно со втората неравенка дава $x = 2$. Конечно, $y = 4 - x = 2$ т.е. единствено решение на системот неравенки е точката $M(2,2)$.

2. Да се реши равенката: $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$.

Решение. Имаме:

$$x^4 - 6x^2 + 25 = 0$$

$$(x^2-3)^2+16=0$$
$$(x^2-3)^2-(4i)^2=0$$
$$(x^2-3-4i)(x^2-3+4i)=0$$
$$x^2=3+4i \quad \text{ili} \qquad x^2=3-4i$$

Од $x^2=3-4i$ следува $x_1=2-i$ и $x_2=-2+i$, а од $x^2=3+4i$ следува $x_3=2+i$ и $x_4=-2-i$. (види задача 2, I група).

3. Да се реши равенката $\sin x-\cos^2 x=-\frac{1}{4}$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\sin^2 x+\sin x-\frac{3}{4}=0$$

од која добиваме $\sin x=-\frac{3}{2}$ и $\sin x=\frac{1}{2}$.

Не постојат вредности на x за кои што $\sin x=-\frac{3}{2}$, бидејќи $-1\leq\sin x\leq 1$; додека од $\sin x=\frac{1}{2}$ следува

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ и } x=\frac{5\pi}{6}+2t\pi, \quad (k,t\in\mathbf{Z}).$$

4. Да се најдат равенките на тангентите повлечени од точката $A(\sqrt{2},\sqrt{2},)$ кон кружницата $x^2+y^2=1$.

Решение. Оваа задача може на потполно ист начин да се реши како задачата 4 од I група од овој испитен рок, но сега ќе ја решиме на поинаков начин. Нека со $M_0(x_0,y_0)$ ја означиме точката од кружницата $x^2+y^2=1$ низ која што минува бараната тангента (t). Значи координатите на точката $M_0(x_0,y_0)$ ја задоволуваат равенката на кружницата $x^2+y^2=1$, поради што

$$x_0^2+y_0^2=1 \tag{1}$$

Знаеме дека равенката на тангента на кружница $x^2+y^2=r^2$ повлечена во нејзина точка $M_0(x_0,y_0)$, е $xx_0+yy_0=r^2$, поради што имаме:

$(t):$ $$xx_0+yy_0=1$$

По услов на задачата, тангентата (t) минува низ точката $A(\sqrt{2},\sqrt{2},)$, поради што

$$\sqrt{2}\,x_0+\sqrt{2}\,y_0=1 \tag{2}$$

Така, за определување на точката $M_0(x_0,y_0)$ го имаме системот составен од равенките (1) и (2) т.е. системот:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x_0 + \sqrt{2}\,y_0 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Ако од првата равенка (3) најдеме

$$y_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - x_0$$

и замениме во втората равенка на (3) се добива квадратната равенка по x_0:

$$2x_0^2 - \sqrt{2}x_0 - \tfrac{1}{2} = 0$$

чии што решенија се:

$$x_0 = \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \Rightarrow y_0 = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

и

$$x_0 = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \Rightarrow y_0 = \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\,.$$

Според тоа, системот (3) има две решенија па постојат две точки $M_0(\tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4})$ и $M_1(\tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4})$ на кружницата $x^2 + y^2 = 1$ во кои што ако повлечеме тангенти тие ќе поминуваат низ точката $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Значи задачата има две решенија. Едната тангента е:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{6})x + (\sqrt{2} - \sqrt{6})y - 4 = 0$$

а другата тангента е

$$(\sqrt{2} - \sqrt{6})x + (\sqrt{2} + \sqrt{6})y - 4 = 0\,.$$

5. Ортогоналната проекција на едно теме на тетраедарот $ABCD$ врз спротивната страна се совпаѓа со ортоцентарот на таа страна. Да се покаже дека важи равенството $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AB}^2$.

Решение. Оваа задача е иста со задача 5 од I група од овој квалификационен испит. Сега ќе ја решиме на поинаков начин.

Прво забележуваме дека отсечката B_1D е апотема на бочната страна ACD од тетраедарот $ABCD$ т.е. $B_1D \perp AC$ (црт. во задача 5, I-ва група). Имаме:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB_1}^2 + \overline{B_1D}^2 \quad \text{и} \quad \overline{BC}^2 = \overline{BB_1}^2 + \overline{B_1C}^2\,,$$

од каде што:

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AB_1}^2 + \overline{B_1D}^2 + \overline{BB_1}^2 + \overline{B_1C}^2 \\ &= (\overline{AB_1}^2 + \overline{BB_1}^2) + (\overline{B_1D}^2 + \overline{B_1C}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 \end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

09.09.1998 **I група**

1. а) Упрости го изразот $y=(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}):(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}})$.

б) За $a=x, b=1$ скицирај го графикот на функцијата $y=y(x)$.

Решение. а) Со рационализација на именителите во дропките од првата заграда имаме:

$$y=(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}):(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}})=(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{a-a+b}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{a-a-b}):\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$$

$$=(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{b})\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a-b}}{b}$$

б) За $a=x, b=1$ имаме $y=\frac{\sqrt{x-1}}{1}=\sqrt{x-1}$. Графикот на оваа функција е горната половина од параболата $y^2+1=x$.

2. а) Да се реши равенката: $x^{\frac{a\lg x+1}{4}}=10^{b(\lg x+1)}$.

б) Кога равенката има реални решенија.

в) За $a=b=1$ најди ги решенијата на равенката.

Решение. Со логаритмирање на дадената равенка со основа 10 се добива: $\frac{a\lg x+1}{4}\lg x=b(\log x+1)\lg 10$ од каде после средувањето добиваме $a\lg^2 x+(1-4b)\lg x-4b=0$. Последната равенка при $a\neq 0$ е квадратна со непозната $\lg x$ и решенијата на истата се

$$\lg x=\frac{4b-1\pm\sqrt{(4b-1)^2+16ab}}{2a},$$

а ако $a=0$ е линеарна со непозната $\lg x$ и нејзиното решение е $\lg x=\frac{4b}{1-4b}$. Во првиот случај решенијата на равенката се

$$x_{1/2}=10^{\frac{4b-1\pm\sqrt{(4b-1)^2+16ab}}{2a}}$$

а во вториот случај $x=10^{\frac{4b}{1-4b}}$.

б) За да равенката има реални корени при $a\neq 0$ треба дискриминантата на квадратната равенка по $\lg x$ да е ненегативна од каде што се добива условот $(4b-1)^2+16ab\geq 0$ т.е. $16b(a+b)-8b+1\geq 0$. Во случајот кога $a=0$ равенката има решение $1-4b\neq 0$ т.е. $b\neq\frac{1}{4}$.

в) Ако $a=b=1$, тогаш $x=10^{\frac{3\pm 5}{2}}$ т.е. $x=10^{-1}$ и $x=10^4$.

3. а) Реши ја тригонометриската равенка

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=2\cos^2 x$$

b) Ако најдените позитивни решенија се внатрешни агли во еден триаголник со страна $a = 4cm$, тогаш да се најдат радиусите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот.

Решение. Од адиционите теореми:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

и

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

последователно добиваме имаме:

$$\sin x\cos\tfrac{\pi}{6} + \cos x\sin\tfrac{\pi}{6} + \cos x\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin x\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\cos^2 x$$

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 2\cos^2 x$$

$$\cos x = 2\cos^2 x$$

$$\cos x(2\cos x - 1) = 0 .$$

Според тоа

$\cos x = 0$ па затоа $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

или

$\cos x = \frac{1}{2}$ па затоа $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

б) Аглите на триаголникот се $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$ и тоа е половина од рамностран триаголник.

Ако страната $a = 4cm$ лежи наспроти аголот $\frac{\pi}{6}$, тогаш другите две страни се $c = 8cm$ и $b = 4\sqrt{3}cm$. Плоштината на триаголникот е $P = 8\sqrt{3}cm^2$, а неговиот полупериметар е $s = \frac{a+b+c}{2} = (6 + 2\sqrt{3})cm$, па затоа за радиусот на впишаната кружница имаме $r = \frac{P}{s} = \frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}cm$, а за радиусот на опишаната кружница имаме $R = \frac{abc}{4P} = \frac{4\cdot 8\cdot 4\sqrt{3}}{4\cdot 8\sqrt{3}}cm = 4cm$.

Ако страната a лежи наспроти аголот $\frac{\pi}{2}$, тогаш аналогно се добива $r = \frac{P}{s} = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}cm$ и $R = \frac{abc}{4P} = \frac{4\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}}{4\cdot 2\sqrt{3}}cm = 2cm$.

Ако страната a лежи наспроти аголот $\frac{\pi}{3}$, тогаш аналогно се добива $r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{2+\frac{6\sqrt{3}}{3}}cm = \frac{4}{3+\sqrt{3}}cm$ и $R = \frac{abc}{4P} = \frac{4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}}{4\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}}cm = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$.

4. Основа на права призма е паралелограм со страни acm, bcm и помалиот агол α меѓу нив. Да се пресмета волуменот на призмата, ако нејзината помала дијагонала е еднаква со поголемата дијагонала на основата.

Решение. Основата на призмата е паралелограм, па затоа

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \text{ т.е. } \beta = 180^\circ - \alpha$$

Од косинусната теорема следува

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

и

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\,.$$

Понатаму $D^2 = d_2^2 + H^2$, а како по услов на задача $D = d_1$ добиваме

$$H^2 = D^2 - d_2^2 = d_1^2 - d_2^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}^{\,2} - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}^{\,2}$$
$$= 4ab\cos\alpha$$

т.е. $H = 2\sqrt{ab\cos\alpha}$. Според тоа, за волуменот на призмата имаме:

$$V = BH = ab\sin\alpha \cdot 2\sqrt{ab\cos\alpha} = 2(ab)^{\frac{3}{2}} \sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}\,.$$

5. Дадени се кружниците $(k_1): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ и $(k_2): x^2 + y^2 - 13x - y + 30 = 0$ и правата $(p): 3x - 10y = 30$.

a) Најди ги пресечните точки A и B на кружниците (k_1) и (k_2).

b) Состави равенка на права што минува низ средината на отсечката AB и е нормална на неа.

c) Состави равенка на кружница што минува низ точките A и B, а центарот и лежи на правата (p).

Решение. Пресечните точки A и B на кружниците (k_1) и (k_2) се добиваат со решавање на системот:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 13x - y + 30 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

составен од равенките (k_1) и (k_2). Со одземање на равенките од системот (1) се добива $7x - y - 45 = 0$ т.е. $y = 7x - 45$ и ако замениме во правата равенка на (1) после средувањето ја добиваме квадратната равенка $x^2 - 13x + 22 = 0$ чии решенија се $x_1 = 11$ и $x_2 = 2$. Значи, $y_1 = 7 \cdot 11 - 45 = 32$, $y_2 = 7 \cdot 2 - 45 = -31$, и значи дека бараните пресечни точки се $A(11,32)$ и $B(2,-31)$.

b) Ако со x_0 и y_0 ги означиме координатите на средината S на отсечката AB имаме: $x_0 = \frac{11+2}{2} = \frac{13}{2}$, $y_0 = \frac{32+(-31)}{2} = \frac{1}{2}$ што значи $S(\frac{13}{2}, \frac{1}{2})$.

Коефициент на правецот на правата AB е $k_1 = \frac{-31-32}{2-11} = 7$, па затоа коефициентот на правецот на правата нормална на AB е $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{7}$. Конечно, равенката на правата (q) во точката $S(\frac{13}{2}, \frac{1}{2})$, нормална на што AB е $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{7}(x - \frac{13}{2})$ т.е. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$

с) Центарот $C(u,v)$ е пресечната точка на правите (p) и (q) т.е. неговите координати се решение на системот равенки

$$\begin{cases} 3x - 10y = 30 \\ x + 7y = 10 \end{cases}$$

од каде добиваме дека $C(10,0)$. Јасно, радиусот е

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(11-10)^2 + (32-0)^2} = \sqrt{1025}.$$

Конечно, равенката на бараната кружница е

$$(x-10)^2 + y^2 = 1025.$$

09.09.1998 II група

1. а) Да се упрости изразот: $y = (\frac{2+a^{\frac{1}{2}}}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1} + \frac{2-a^{\frac{1}{2}}}{a-1}) : \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}$

б) за $a-1 = x$ да се скицира графикот на функцијата $y = y(x)$

Решение. а) Имаме:

$$y = (\frac{2+a^{\frac{1}{2}}}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1} + \frac{2-a^{\frac{1}{2}}}{a-1}) : \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1} = (\frac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} + \frac{2-\sqrt{a}}{a-1}) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} =$$

$$= [\frac{2+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} + \frac{2-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}] \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)+(2-\sqrt{a})(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{a}+a-2-\sqrt{a}+2\sqrt{a}-a+2-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{a-1}.$$

б) За $a-1 = x$ ја добиваме функцијата $y = \frac{2}{x}$ и тоа е хипербола.

2. а) Во квадратната равенка $x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2 = 0$ да се определи параметарот m така што збирот од решенијата на дадената равенка да е еднаков на збирот од нивните квадрати.

б) Ако со $y(x,m)$ го означиме квадратниот трином

$$y(x,m) = x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2,$$

да се скицираат графиците на функциите $y(x,m_1)$, $y(x,m_2)$ каде m_1 и m_2 се решенијата за m од задачата под а).

Решение. Од Виетовите правила имаме поред

$$x_1 + x_2 = 2(m+1) \text{ и } x_1 x_2 = 3m+2 .$$

Понатаму, од условот на задачата имаме

$$2(m+1) = x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m+1)^2 - 2(3m+2)$$

од каде после средувањето добиваме $2m^2 - 1 = 0$. Решенијата на последната равенка се $m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Квадратните функции чии графици треба да ги скицираме се

$$y_1 = x^2 - 2(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}})x + 2 + \tfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ и } y_2 = x^2 - 2(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}})x + 2 - \tfrac{3}{\sqrt{2}} .$$

Графиците на функциите се параболи со темиња $T_1(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $T_1(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}})$, соодветно и како $a_1 = a_2 = 1 > 0$ заклучуваме дека функциите немаат нули.

3. а) По непозната x да се реши равенката

$$\sin(x+\alpha) + \cos(x+\beta) = 2\cos^2 x, \quad (\alpha+\beta = 90^\circ)$$

б) Ако α, β и најмалото позитивно решение по x на равенката различно од α и β се агли на триаголник со страна $аст$, тогаш да се определат висините и тежишните линии на триаголникот.

Решение. а) Од адиционите теореми имаме:

$$\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha + \cos x \cos\beta - \sin x \sin\beta = 2\cos^2 x$$

и го како $\beta = 90^\circ - \alpha,$ односно $\cos\beta = \sin\alpha;$ $\sin\beta = \cos\alpha$ добиваме

$$\cos x \sin\alpha = \cos^2 x,$$

од каде што следува

$$\cos x(\sin\alpha - \cos x) = 0.$$

Од последната равенка добиваме

$$\cos x = 0 \text{ т.е. } x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi\ , \ k \in \mathbf{Z}$$

или

$$\sin\alpha - \cos x = 0 \text{ т.е. } \cos x = \sin\alpha = \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\beta \text{ т.е. } x = \beta + 2k\pi\ , \ k \in \mathbf{Z} .$$

б) Најмалото позитивно решение на дадената равенка, што е различно од β, е $\frac{\pi}{2}$ што значи дека навистина станува збор за триаголник, кој е правоаголен. Јасно, висините во триаголникот се

$$h_b = a, h_a = b, h_c = a\sin\beta .$$

Понатаму, за страните на триаголникот имаме $b = a\,\mathrm{tg}\beta$ и $c = \frac{a}{\cos\beta}$, па затоа неговите тежишни линии се

$$t_c = \frac{c}{2} = \frac{a}{2\cos\beta}, \; t_a = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{4tg^2\beta+1}}{2} \text{ и } t_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{a\sqrt{tg^2\beta+4}}{2}.$$

4. Да се пресмета волуменот и плоштината на правилна пресечена четиристрана пирамида со основни рабови $a_1 = 7cm$, $a_2 = 5cm$ и дијагонала $D = 9cm$.

Решение. Ос d_1 и d_2 да ги означиме дијагоналите на основите на пресечената пирамида. Имаме $d_1 = 7\sqrt{2}cm$ и $d_2 = 5\sqrt{2}cm$. Дијагоналниот пресек на пресечената пирамида (види цртеж) е рамнокрак трапез со основи d_1 и d_2, висина H еднаква на висината на пресечената пирамида и крак s еднаков на страничниот раб на пресечената пирамида. Според тоа,

$$H = \sqrt{D^2 - (d_2 + \frac{d_1 - d_2}{2})^2} = 3cm \text{ и } s = \sqrt{H^2 + (\frac{d_1 - d_2}{2})^2} = \sqrt{11}cm.$$

Понатаму, ако со h ја означиме висината на бочната страна, тогаш

$$h = \sqrt{s^2 - (\frac{a_1 - a_2}{2})^2} = \sqrt{10}cm.$$

Конечно, за волуменот на пресечената пирамида наоѓаме

$$V = \frac{H}{3}(a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2) = 109cm^3,$$

а нејзината плоштина е

$$V = a_1^2 + a_2^2 + 4\frac{a_1 + a_2}{2}h = (74 + 24\sqrt{10})cm^2.$$

5. а) Кој дел од рамнината е ограничен со неравенствата:
$3x + 4y - 25 \le 0$, $5x - 12y - 65 \le 0$ и $8x - 15y + 85 \ge 0$.

б) Состави равенка на кружница впишана во делот од рамнината под а).

Решение. Секое од овие неравенства определува полурамнина, поради што делот од рамнината што се бара е пресек на три полурамнини. Граничните прави се сечат во точките $A(10, -\frac{5}{4})$, $B(\frac{5}{7}, \frac{40}{7})$ и $C(-95, -45)$.

Пресечните точки ги наоѓаме како решенија на следните системи равенки:

$$A: \begin{cases} 3x + 4y - 25 = 0 \\ 5x - 12y - 65 = 0 \end{cases}, \quad B: \begin{cases} 3x + 4y - 25 = 0 \\ 8x - 15y + 85 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad C: \begin{cases} 5x - 12y - 65 = 0 \\ 8x - 15y + 85 = 0 \end{cases}$$

За да определиме која фигура е ограничена со дадените неравенства треба да ја провериме дали пресечната точка меѓу две прави припаѓа на делот од рамнината определен со третото неравенство. Со непосредна проверка добиваме дека последното важи за сите три точки A, B и C, па оттука заклучуваме дека со дадените неравенства е определен ΔABC.

б) Поаѓајќи од формулата $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ за симетралите меѓу правите $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ за симетрала на внатрешниот агол кај темето A во ΔABC наоѓаме $x+8y=0$, а за симетралата на внатрешниот агол кај темето B во ΔABC добиваме $13x-y=0$. Решението на системот $\begin{cases} x+8y=0 \\ 13x-y=0 \end{cases}$ е точката $O(0,0)$ и таа е центарот на впишаната кружница во ΔABC.

Радиус r на впишаната кружница во ΔABC е еднаков на растојанието од точката $O(0,0)$ до правата $3x+4y-25=0,$ па затоа

$$r=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5\,.$$

Конечно, равенката на бараната кружница е $x^2+y^2=5^2$.

01.07.1999 **I група**

1. Дадена е функцијата $f(x)=x^2-4x+5$. Да се најдат вредностите на m за кои неравенството $f(a)+f(b)>m$ е исполнето за секои реални броеви a и b.

Решение. Од $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ следува дека

$$\min f(x)=f(2)=1,$$

па затоа $f(a)+f(b)\geq 2$ за секои реални броеви a и b. Според тоа, бараните вредности за m се $m\in(-\infty,2)$.

2. Во ΔABC тежишната линија повлечена од темето A е нормална на страната AB. Да се најде $\cos\angle CAB$ ако аглите на ΔABC формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека M е средината на AB. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните и аглите на ΔABC. Од правоаголниот ΔABM следува дека $\overline{AM}^2=\frac{a^2}{4}-c^2$, т.е. $4\overline{AM}^2=a^2-4c^2$. Од формулата за тежишната линија имаме $4\overline{AM}^2=2b^2+2c^2-a^2$. Од последните две равенства следува дека $a^2-4c^2=2b^2+2c^2-a^2$ односно

$$a^2=b^2+3c^2. \qquad (1)$$

Од косинусната теорема имаме $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ и ако замениме од (1) наоѓаме $\cos\alpha=-\frac{b}{c}$. Од $\alpha>90^\circ$ следува $a>b$ и $a>c$. Од друга страна од ΔABM и ΔAMC ($\angle AMC>90^\circ$) следува дека $c<\frac{a}{2}<b$ што заедно со претходните две неравенства дава $c<b<a$. Бидејќи спроти помала страна лежи помал агол добиваме $\gamma<\beta<\alpha$ и како аглите на триаголникот формираат аритметичка прогресија имаме $2\beta=\alpha+\gamma=180^\circ-\beta$ т.е. $\beta=60^\circ$. Тогаш, $a=4c$ и ако замениме во (1) наоѓаме $b=c\sqrt{13}$. Конечно, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{13}}$.

3. Дадена е функцијата $f(x)=(k-\alpha)x^2-(3k-2)x+3k+1$, каде α е збирот на корените на равенката $16^x-5\cdot 4^x+64=0$ и k е реален параметар.

a) Да се најде α.

b) Ако $\alpha=3$, да се најдат сите вредности на параметарот k, за кои корените на равенката $f(x)=0$ се позитивни.

Решение. а) Со смената $y=4^x$ дадената равенка се сведува на системот: $\begin{cases} y^2-20y+64=0 \\ y>0 \end{cases}$, чии решенија се $y=4$ и $y=16$. Оттука наоѓаме $x=1$ и $x=2$, па затоа $\alpha=3$.

б) Ако $k=3$, тогаш равенката $f(x)=0$ го добива обликот $-7x+10=0$ и нејзиното решение е $x_0=\frac{10}{7}>0$. Нека $k\neq 3$. Тогаш од Виетовите формули следува дека корените x_1 и x_2 на равенката $f(x)=0$ се позитивни ако и само ако

$$\begin{cases} D=-3k^2+20k+16\geq 0 \\ x_1+x_2=\frac{3k-2}{k-3}>0 \\ x_1x_2=\frac{3k+1}{k-3}>0 \end{cases}$$

Од првото неравенство имаме $k\in[\frac{10-2\sqrt{37}}{3},\frac{10+2\sqrt{37}}{3}]$, од второто добиваме $k\in(-\infty,\frac{2}{3})\cup(3,+\infty)$, а од третото $k\in(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(3,+\infty)$. Конечно, од пресекот на добиените интервали заедно со случајот $k=3$ добиваме: $k\in[\frac{10-2\sqrt{37}}{3},-\frac{1}{3})\cup[3,\frac{10+2\sqrt{37}}{3}]$.

4. Да се реши равенката $\frac{2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x}{\sqrt{\cos(x+\pi)}}=0$.

Решение. Бидејќи функцијата на левата страна на равенката е периодична со период 2π, доволно е равенката да ја решиме на интервалот $[0,2\pi]$. Равенката има смисол ако $\cos(x+\pi)>0$, т.е. $\cos x<0$, што значи $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. За овие вредности на x дадената равенка е еквивалентна на равенката $\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$. Од последната равенка имаме $\sin x=0$ и $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$. Од тука и од условот $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ наоѓаме дека во интервалот $[0,2\pi]$ решенија се $x=\pi$ и $x=\frac{4\pi}{3}$. Конечно, сите решенија на дадената равенка се

$$x=(2k+1)\pi \text{ и } x=\frac{4\pi}{3}+2t\pi, \quad (k,t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots).$$

5. Дадената дијагонала на правоаголникот $ABCD$ лежи на правата $x+2y-1=0$, едната страна на правата $x-y+5=0$, а нејзината соседна страна лежи на права која минува низ точката $M(6,3)$. Да се најдат темињата на правоаголникот и равенката на кружница опишана околу него.

Решение. Темето A го наоѓаме во пресекот на правите $x+2y-1=0$ и $x-y+5=0$ и добиваме $A(-3,2)$. Низ точката $M(6,3)$ повлекуваме права нормална на правата $x-y+5=0$. Равенката на оваа права има облик $x+y+k=0,$ при што параметарот k го определуваме со замена на координатите на точката $M(6,3)$ и добиваме $x+y-9=0.$ Темето B го добиваме во пресекот на правите $x-y+5=0$ и $x+y-9=0.$ Имаме, $B(2,7)$. Темето C го добиваме во пресекот на правите $x+y-9=0$ и $x+2y-1=0,$ при што наоѓаме $C(17,-8)$. За да го определиме темето D ја користиме векторската равенка $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ и наоѓаме $D(12,-13)$. Центарот на кружница опишана околу правоаголникот $ABCD$ е средина на отсечката AC и тоа е точката $S(\frac{17-3}{2},\frac{2-8}{2})\equiv S(7,-3),$ а нејзиниот радиус е

$$r=\overline{AS}=\sqrt{(7+3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{125}.$$

Конечно равенката на кружни-цата е:

$$(x-7)^2+(y+3)^2=125.$$

01.07.1999 **II група**

1. Дадена е равенката $\frac{x^2+2}{x^2-2x+2}=m,$ каде што m е реален параметар. За кои вредности на m равенката има точно еден реален корен?

Решение. Бидејќи $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0,$ за секој реален број x, дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$$(m-1)x^2-2mx+2m-2=0$$

Ако $m=1$, тогаш добиената линеарна равенка има единствено решение $x=0$. Ако $m\neq 1,$ тогаш квадратната равенка има единствено решение ако и само ако $D=4(-m^2+4m-2)=0,$ т.е. $m=2\pm\sqrt{2}.$ Следствено, $m\in\{1,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}\}.$

2. Во ΔABC тежишната линија повлечена од темето A е нормална на страната AB. Да се најде $\cos\angle CAB$ ако должините на страните на ΔABC формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека M е средината на AB. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните и аглите на $\Delta ABC.$ Од правоаголниот ΔABM следува дека $\overline{AM}^2=\frac{a^2}{4}-c^2$ т.е. $4\overline{AM}^2=a^2-4c^2.$ Од формулата за тежишната линија имаме $4\overline{AM}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Од последните две равенства следува дека $a^2 - 4c^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ односно

$$a^2 = b^2 + 3c^2 \qquad (1)$$

Од косинусната теорема имаме $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ и ако замениме од (1) наоѓаме $\cos\alpha = -\frac{b}{c}$. Од $\alpha > 90^0$ следува дека $a > b$ и $a > c$. Од друга страна од ΔABM и ΔAMC ($\angle AMC > 90^0$) следува дека $c < \frac{a}{2} < b$ што заедно со претходните две неравенства дава $c < b < a.$ Бидејќи страните на триаголникот формираат аритметичка прогресија имаме $2b = a + c$ т.е. $a = 2b - c.$ Ако замениме во (1) добиваме $2c^2 + 4bc - 3b^2 = 0.$ Сега, од последната равенка наоѓаме

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{10}-2}{2}, \text{ па затоа } \cos\alpha = \frac{2-\sqrt{10}}{2}.$$

3. Дадена е тригонометриската равенка $a\cos^2 x = tgx,$ каде a е реален параметар. Ако едно решение на дадената равенка е $x_0 = \frac{5\pi}{12}$, да се докаже дека $a = [2(2+\sqrt{3})]^2.$

Решение. Во дадената равенка заменуваме $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ и ја добиваме еквивалентната равенка

$$\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}x = a. \qquad (1)$$

Пресметуваме

$$\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12} = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Конечно, бидејќи $x_0 = \frac{5\pi}{12}$ е решение на дадената равенка која е еквивалентна на равенката (1) добиваме:

$$a = (2+\sqrt{3})^3 + (2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^2 + 1] = (2+\sqrt{3})(8+4\sqrt{3}) = [2(2+\sqrt{3})]^2.$$

4. Да се реши неравенката $\log_2(x^2 - 7x + 10) \le \log_2(3x - 11).$

Решение. Ако ги искористиме својствата на логаритмите добиваме дека дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0 \\ 3x - 11 > 0 \\ x^2 - 7x + 10 \le 3x - 11 \end{cases}$$

Решението на првата неравенка е $x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty),$ на втората $x \in (\frac{11}{3}, +\infty)$ и на третата $x \in [3,7].$ Конечно, наоѓаме $x \in (5,7].$

5. Едната катета на правоаголниот ΔABC лежи на правата $x-y+5=0$, хипотенузата на правата $x+2y-1=0$, а втората катета лежи на права која минува низ точката $M(6,3)$. Да се најдат темињата на триаголникот и равенката на кружницата опишана околу него.

Решение. Темето A го наоѓаме во пресекот на правите $x+2y-1=0$ и $x-y+5=0$ и добиваме $A(-3,2)$. Низ точката $M(6,3)$ повлекуваме права нормална на правата $x-y+5=0$. Равенката на оваа права има облик $x+y+k=0$, при што параметарот k го определуваме со замена на координатите на точката $M(6,3)$ и добиваме $x+y-9=0$. Темето B го добиваме во пресекот на правите $x-y+5=0$ и $x+y-9=0$. Имаме, $B(2,7)$. Темето C го добиваме во пресекот на правите $x+y-9=0$ и $x+2y-1=0$, при што наоѓаме $C(17,-8)$. Центарот на кружница опишана околу правоаголниот ΔABC е средина на отсечката AC и тоа е точката $S(\frac{17-3}{2},\frac{2-8}{2})\equiv S(7,-3)$, а нејзиниот радиус е

$$r=\overline{AS}=\sqrt{(7+3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{125}.$$

Конечно равенката на кружницата е

$$(x-7)^2+(y+3)^2=125.$$

06.09.1999 I група

1. Да се упрости изразот $C\cup[A\cap((A\cup B)\setminus C)]$.

Решение. Од Венов дијаграм лесно се уочува дека овој израз упростен е $A\cup C$.

2. Да се реши равенката $x^4-34x^2+225=0$.

Решение. Воведуваме смена $x^2=t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2-34t+225=0$,чии решенија се $t_1=9$ и $t_2=25$. Од $x^2=9$ следува $x_{1/2}=\pm 3$, а од $x^2=25$ следува $x_{3/4}=\pm 5$.

3. Низ точката (1,2) да се повлече права која со правата $2x+y-6=0$ зафаќа агол $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Согласно формулата за равенка на права низ една точка и даден коефициент на правец, бараната права е $y-2=k(x-1)$ при што k е решение на равенката $\pm\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{k-(-2)}{1+k(-2)}$, т.е. $\pm 1=\frac{k+2}{1-2k}$, од каде што се добива $k=3$ и $k=-\frac{1}{3}$. Значи задачата има две решенија и тоа $y-2=3(x-1)$ и $3y-6=-x+1$.

4. Една топка е пресечена со паралелни рамнини кои се наоѓаат на иста страна на нејзиниот центар и на растојание $3cm$ меѓу себе. Круговите добиени како пресеци на топката со рамнините имаат радиуси $9cm$ и $12cm$. Да се пресмета радиусот на топката.

Решение. Ако топката со двете пресечни паралелни рамнини ги пресечеме со рамнина што минува низ центарот на топката и стои нормално на паралелните рамнини, тогаш се добива цртежот десно.

Од правоаголните триаголници OMN и OST добиваме

$$R^2 = 12^2 + x^2 \text{ и } R^2 = 9^2 + (3+x)^2$$

од каде што се добива:

$$12^2 + x^2 = 9^2 + (3+x)^2$$

односно $x = 9$. Радиусот на топката е $R = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15cm$.

5. Нека x, y и $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ се рационални броеви. Докажи дека $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ се исто така рационални броеви.

Решение. Да ставаме $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$. Јасно е дека $a \geq 0$. Ако $a = 0$ т.е. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$ тогаш $\sqrt{x} = 0$ и $\sqrt{y} = 0$, што значи дека $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ се рационални броеви. Ако $a > 0$, тогаш последователно имаме

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$$

$$\sqrt{x} = a - \sqrt{y} \quad /^2$$

$$x = a^2 - 2a\sqrt{y} + y$$

$$\sqrt{y} = \frac{a^2+y-x}{2a} \in \mathbf{Q}$$

бидејќи $a \neq 0$. Конечно $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$ и $\sqrt{y} \in \mathbf{Q}$, па затоа

$$\sqrt{x} = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{y} \in \mathbf{Q}.$$

06.09.1999 II група

1. Да се упрости изразот $[B \cap ((B \cup C)) \setminus A)] \cup A$.

Решение. Од Венови дијаграми лесно се воочува дека

$$[B \cap ((B \cup C) \setminus A)] \cup A = A \cup B.$$

2. Да се реши равенката $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$.

Решение. Воведуваме смена $x^2 = t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2 - 41t + 400 = 0$,чии решенија се $t_1 = 16$ и $t_2 = 25$. Од $x^2 = 16$ следува $x_{1/2} = \pm 4$, а од $x^2 = 25$ следува $x_{3/4} = \pm 5$.

3. Низ точката (1,2) да се повлече права која што со правата $2x+y-6=0$ зафаќа агол $\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Согласно формулата за равенка на права низ една точка и даден коефициент на правец, бараната права е $y-2=k(x-1)$ при што k е решение на равенката $\pm\,\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}=\frac{k-(-2)}{1+k(-2)}$, т.е. $\mp 1=\frac{k+2}{1-2k}$, од каде што се добива $k=3$ и $k=-\frac{1}{3}$. Значи задачата има две решенија и тоа $y-2=3(x-1)$ и $3y-6=-x+1$.

4. Една топка е пресечена со паралелни рамнини кои се наоѓаат од иста страна на нејзиниот центар и на растојание $2cm$ една од друга. Круговите добиени како пресеци на топката со рамнините имаат радиуси $6cm$ и $8cm$. Да се пресмета радиусот на топката.

Решение. Радиусот на топката е $R=10cm$, а за постапката на решавањето на оваа задача види ја задачата 4 од првата група.

5. Нека x, y и $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ $(x\neq y)$ се рационални броеви. Докажи дека $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ се исто така рационални броеви.

Решение. Да ставаме $\sqrt{x}-\sqrt{y}=a$. Од $x\neq y$ следува $a\neq 0$. Имаме

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=a$$

$$\sqrt{x}=a+\sqrt{y}\quad /^2$$

$$x=a^2+2a\sqrt{y}+y$$

$$\sqrt{y}=\frac{x-a^2-y}{2a}\in\mathbf{Q}$$

бидејќи $a\neq 0$. Конечно $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbf{Q}$ и $\sqrt{y}\in\mathbf{Q}$, па затоа

$$\sqrt{x}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}\in\mathbf{Q}.$$

30.06.2000 **I група**

1. Да се најде параметарот k така што да важи $x_1^2 + x_2^2 = 1$, каде x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 + (k-1)x + k = 0$.

Решение. Согласно Виетовите формули имаме

$$x_1 + x_2 = -(k-1) \text{ и } x_1 \cdot x_2 = k,$$

па затоа

$$1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (k-1)^2 - 2k .$$

Значи, бараната вредност на k е решение на равенката $k^2 - 4k = 0$ од каде што добиваме $k = 0$ или $k = 4$.

2. Да се реши равенката $\cos x + \sin x = -1$.

Решение. Имаме:

$$\sin x + \cos x = -1 \quad /\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x + \tfrac{\pi}{4} = 5\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ т.е. } x = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

или

$$x + \tfrac{\pi}{4} = 7\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ т.е. } x = 3\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

3. Да се пресмета плоштината на даден паралелограм ако должините на неговите дијагонали се $26cm$ и $10cm$, а една негова страна е $12cm$. Да се пресмета и другата страна на паралелограмот.

Решение. Триаголникот ABS со страни $\frac{d_1}{2} = 13\ cm,$ $\frac{d_2}{2} = 5\ cm,$ и $a = 12cm$ е правоаголен триаголник со катети $\overline{AB} = 12\,cm$, $\overline{BS} = 5\,cm$ и хипотенуза $\overline{AS} = 13\,cm$. Неговата плоштина е: $P_\Delta = \frac{12\cdot 5}{2} = 30\,cm^2$. Плоштината на паралелограмот е: $P = 4 \cdot 30\,cm^2 = 120\,cm^2$. Другата страна е: $b = \sqrt{12^2 + 10^2}\,cm = \sqrt{244}cm = 2\sqrt{61}cm.$

4. Дадена е пирамида со висина H. Да се пресмета на кое растојание од основата треба да се пресече пирамидата со рамнина паралелна со основата, така што таа да биде поделена на два дела со еднакви волумени.

Решение. Нека пирамидата треба да се пресече со рамнина на висина x од основата. Ако плоштината на основата на пирамидата ја означиме со B, а на пресекот со B_1, тогаш $\frac{B}{B_1}=\frac{H^2}{(H-x)^2}$, од каде

$$B_1=(\tfrac{H-x}{H})^2 B \qquad (1)$$

Од условот на задачата $\frac{BH}{3}=2\frac{B_1(H-x)}{3}$ и равенството (1) имаме

$$BH=2(\tfrac{H-x}{H})^2 B(H-x)$$

т.е. $(\frac{H-x}{H})^3=\frac{1}{2}$, од каде што $\frac{H-x}{H}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ т.е. $x=(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})H\ cm.$

5. Да се најде равенката на правата што минува низ пресекот на кружниците: $x^2+y^2+2x-1=0$ и $x^2+y^2-2y-3=0$.

Решение. Секоја пресечна точка $M(x,y)$ на дадените кружници мора да ја задоволува равенката и на едната и на другата кружница, па според тоа и равенството:

$$(x^2+y^2+2x-1)-(x^2+y^2+2y-3)=0$$

т.е. $2x+2y+2=0$ т.е. $x+y+1=0$. Значи, точката $M(x,y)$ лежи на правата $x+y+1=0$. Затоа $x+y+1=0$ е равенка на бараната права.

30.06.2000 II група

1. Да се најде параметарот k така што да важи $x_1^2+x_2^2=1$, каде x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+(k+1)x+2(k+2)=0$.

Одговор. $k=4$ или $k=-2$.

2. Да се реши равенката $\cos x-\sin x=1$

Одговор. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ или $x=(2k+1)\pi \qquad (k\in\mathbf{Z})$.

3. Да се пресмета плоштината на даден паралелограм ако должините на неговите дијагонали се $20cm$ и $12cm$, а една негова страна е $8cm$. Да се пресмета и другата страна на паралелограмот.

Одговор. $P=96cm^2, \quad b=\sqrt{208}\,cm.$

4. Даден е конус со висина h. Да се пресмета на кое растојание од основата треба да се пресече конусот со рамнина паралелна со основата, така што тој да биде поделен на два дела со еднакви волумени.

Одговор. $x=(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})\,h.$

5. Да се најде равенката на правата што минува низ пресекот на кружниците: $x^2+y^2-2x-1=0$ и $x^2+y^2+2y-3=0.$

Одговор. $x+y-1=0$.

<u>**Забелешка:**</u> Бидејќи задачите од оваа група се исти со соодветните задачи од I - група, но со други параметри, нивното решавање е оставено на самите кандидати.

11.09.2000 I група

1. Ако $x+y=1$ и $x^2+y^2=2$, да се пресмета x^3+y^3.

Решение. Од $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ следува

$$xy=\tfrac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=\tfrac{1}{2}[1^2-2]=-\tfrac{1}{2},$$

па затоа

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=1\cdot(2+\tfrac{1}{2})=\tfrac{5}{2}.$$

2. Нека A,B и C се три множества такви што:
$(A\cap C)\setminus B=\varnothing,\ (A\cap B)\setminus C=\varnothing,$ и $(B\cap C)\setminus A=\varnothing.$
Ако $|A\cap B\cap C|=2,\ |A|=2,\ |B|=6$ и $|C|=7,$ да се најде

$$|A\cup B\cup C|.$$

Решение. Со примена на Венов дијаграм наоѓаме дека

$$|A\cup B\cup C|=0+4+5+2=11$$

3. Да се реши равенката $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$.

Решение. Ако дадената равенка ја помножиме со $\frac{\sqrt{2}}{2}$, добиваме $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=-1$ т.е. $\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1$ па затоа $x+\frac{\pi}{4}=3\frac{\pi}{2}+2k\pi$ или $x=5\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad (k\in\mathbf{Z})$

4. За кои вредности на a, системот равенки

$$\begin{cases}(a+1)x+2y=5\\ x+ay=-1\end{cases}$$

има единствено решение?

Решение. За да дадениот систем има единствено решение потребно и доволно е детерминантата на системот да е различна од нула т.е. $\begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$ односно $a^2 + a - 2 \neq 0$, од каде што $a \neq -2$ и $a \neq 1$. Значи, $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2,1\}$.

5. Да се пресмета плоштината на триаголникот со темиња во точките $A(-1,2), B(-2,-3), C(0,1)$.

Решение. Согласно формулата

$$P = \tfrac{1}{2} \,|\, (a_2 - b_2)c_1 + (b_2 - c_2)a_1 + (c_2 - a_2)b_1 \,|$$

за плоштината на ΔABC со темиња $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ $C(c_1, c_2)$, имаме

$$P = \tfrac{1}{2} \,|\, (2+5)\cdot 0 + (-3-1)\cdot(-1) + (1-2)\cdot(-2) \,| = 3.$$

11.09.2000 II група

1. Ако $x + y = 2$ и $x^2 + y^2 = 1$, да се пресмета $x^3 + y^3$.

Одговор. $x^3 + y^3 = -1$.

2. Нека A,B и C се три множества такви што: $|(A \cap C) \setminus B| = 1$, $|(A \cap B) \setminus C| = 1$ и $|(B \cap C) \setminus A| = 1$. Ако $|A \cap B \cap C| = 0$, $|A| = 5$, $|B| = 7$ и $|C| = 8$, да се најде $|A \cup B \cup C|$.

Одговор. $|A \cup B \cup C|$=3+5+6+1+1+1=17

3. Да се реши равенката $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$.

Одговор. $x = 7\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad (k \in \mathbf{Z})$

4. За кои вредности на a, системот равенки

$$\begin{cases} ax + y = 5 \\ 2x + (a-1)y = 2 \end{cases}$$

има единствено решение.

Одговор. $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1,2\}$.

5. Да се пресмета плоштината на триаголникот со темиња во точките $A(-2,2)$, $B(-1,-3)$ и $C(5,1)$.

Одговор. $P = \frac{1}{2} \,|\, (a_2 - b_2)c_1 + (b_2 - c_2)a_1 + (c_2 - a_2)b_1 \,| = 17$.

<u>Забелешка:</u> Бидејќи задачите од оваа група се исти со соодветните задачи од I - група, но со други параметри, нивното решавање е оставено на самите кандидати.

29.06.2001 **МАТЕМАТИКА**

I ГРУПА

1. а) Да се пресмета: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}$, за $a\neq 3,\ a\neq -3$.

Решение. Имаме

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:\frac{5-4}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{1}=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$.

б) $\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}=\frac{a-3-2a}{3(a-3)(a+3)}=\frac{-(a+3)}{3(a-3)(a+3)}=\frac{1}{3(3-a)}$.

2. Прав кружен цилиндар и прав кружен конус со еднакви радиуси на основата од 3 cm имаат еднакви плоштини. Изводницата на конусот е 5 cm. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение: Нека H е висината на цилиндарот, а s изводницата на конусот. Плоштината на цилиндарот е

$$P_{cil}=2r^2\pi+2r\pi H=18\pi+6\pi H ,$$

а плоштината на конусот е

$$P_{con}=r^2\pi+\frac{2rs\pi}{2}=9\pi+15\pi=24\pi .$$

Од условот $P_{cil}=P_{con}$ следува дека $H=1$. Висината на конусот е

$$h=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4 .$$

Тогаш, $V_{cil}=r^2\pi H=9\pi$, додека $V_{con}=\frac{r^2\pi h}{3}=\frac{36\pi}{3}=12\pi$. Нивната разлика е $3\pi cm^3$.

3. Да се реши равенката $(2x-2)\sqrt{x+10}=x^2+x-2$, во множеството реални броеви.

Решение. Имаме

$(2x-2)\sqrt{x+10}=x^2+x-2 \Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{x+10}=(x-1)(x+2) \Leftrightarrow$

$(x-1)(2\sqrt{x+10}-x-2)=0$

Едно решение на последната равенка е $x=1$, бидејќи $x+10\geq 0$. Решавајќи ја равенката $2\sqrt{x+10}-x-2=0$ се добива

$$4x+40=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2=36 .$$

За $x=-6$, левата страна на почетната равенка е −28, додека десната е 28. Вредноста $x=6$ е решение на почетната равенка. Решенија на дадената равенка се $x=1$ и $x=6$.

4. Да се реши равенката $\log_{x+3}(x^2+7x-9)^4=8$ во множеството реални броеви.

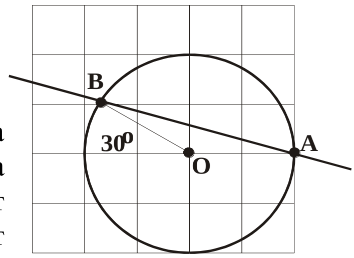
Решение. Имаме

$\log_{x+2}(x^2+5x-4)^2=4 \iff 2\log_{x+2}|x^2+5x-4|=4 \iff$.

$|x^2+5x-4|=(x+2)^2$

Од $x^2+5x-4=(x+2)^2=x^2+4x+4$ се добива едно решение на равенката $x=8$. Од $-x^2-5x+4=x^2+4x+4 \Leftrightarrow 2x^2+9x=0$ се добиваат две решенија: $x=0$ и $x=-\frac{9}{2}$. Решенија на дадената равенка се само $x=0$ и $x=8$, бидејќи за $x=-\frac{9}{2}$ имаме $x+2<0$.

5. Да се пресмета плоштината на делот од рамнината што се наоѓа во внатрешноста на кругот со центар во точката $O(3,2)$ и радиус 2 и е над правата што минува низ точките $A(5,2)$ и $B(3-\sqrt{3}, 3)$.



Решение. Равенката на кружницата е

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4.$$

Лесно се проверува дека точките A и B лежат на кружницата. Според тоа, се бара плоштината на отсечокот, прикажан на цртежот. Неговата плоштина е еднаква на плоштината на кружниот исечок AOB минус плоштината на триаголникот AOB, која е еднаква на 1. Од положбата на точката B се заклучува дека аголот AOB е 150°, односно $5\pi/6$. Според тоа, плоштината на исечокот е $r^2 5\pi/12 = 5\pi/3$, а бараната плоштина е $5\pi/3-1$.

29.06.2001 **МАТЕМАТИКА**

II ГРУПА

1. а) Да се пресмета: $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}$, за $a\neq b$, $a\neq -b$.

Решение. а) Имаме

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:\frac{3+2}{6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}.$$

б) Имаме

$$\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}=\frac{a^3-ab^2-ba^2+2ab^2-b^3}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\frac{a(a^2+b^2)-b(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{a+b}.$$

2. Прав кружен цилиндар и прав кружен конус со еднакви радиуси на основата од $6cm$ имаат еднакви плоштини. Изводницата на конусот е $10cm$. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение. Нека H е висината на цилиндарот, а s изводницата на конусот. Плоштината на цилиндарот е

$$P_{cil} = 2r^2\pi + 2r\pi H = 72\pi + 12\pi H\ ,$$

додека плоштината на конусот е

$$P_{con} = r^2\pi + \frac{2r\pi s}{2} = 36 + 60\pi = 96\pi\ .$$

Од $P_{cil} = P_{con}$ следува дека H=2. Висината на конусот е

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8\ .$$

Тогаш, $V_{cil} = r^2\pi H = 72\pi$, додека $V_{con} = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{36\pi\cdot 8}{3} = 96\pi$. Нивната разлика е $24\pi cm^3$.

3. Да се реши равенката $\left(2x+2\right)\sqrt{x+5} = x^2 + 3x + 2$, во множеството реални броеви.

Решение. Последователно добиваме

$$\left(2x+2\right)\sqrt{x+5} = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow$$
$$2(x+1)\sqrt{x+5} = (x+1)(x+2) \Leftrightarrow$$
$$(x+1)(2\sqrt{x+5} - x - 2) = 0$$

Едно решение на последната равенка е $x = 1$, бидејќи $x + 5 \geq 0$. Решавајќи ја равенката $2\sqrt{x+5} - x - 2 = 0$ се добива

$$4x + 20 = x^2 + 4x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 16.$$

За $x = -4$, левата страна на почетната равенка е еднаква на –6, додека десната е 6. Вредноста x = 4 е решение на почетната равенка. Решенија на дадената равека се x = 1 и x = 4.

4. Да се реши равенката $\log_{x+3}(x^2 + 7x - 9)^4 = 8$ во множеството реални броеви.

Решение. Имаме

$$\log_{x+3}(x^2 + 7x - 9)^4 = 8 \Leftrightarrow 4\log_{x+3}|x^2 + 7x - 9| = 8 \Leftrightarrow |x^2 + 7x - 9| = (x+3)^2.$$

Од

$$x^2 + 7x - 9 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

се добива едно решение на равенката $x = 18$. Од

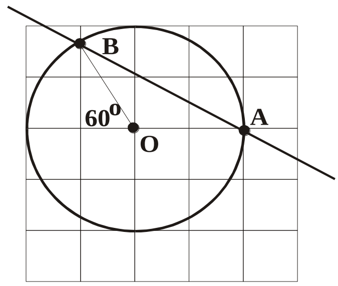
$$-x^2 - 7x + 9 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 2x^2 + 13x = 0$$

се добиваат две решенија: $x=0$ и $x=-\frac{13}{2}$. Решенија на дадената равенка се само $x=0$ и $x=18$, бидејќи за $x=-\frac{13}{2}$, $x+3<0$.

5. Да се пресмета плоштината на делот од рамнината што се наоѓа во внатрешноста на кругот со центар во точката $O(2,3)$ и радиус 2, а е над правата што минува низ точките $A(4,3)$ и $V(1, 3+\sqrt{3})$.

Решение. Равенката на кружницата е

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4.$$



Лесно се проверува дека точките A и B лежат на кружницата. Според тоа, се бара плоштината на отсечокот, прикажан на цртежот. Неговата плоштина е еднаква на плоштината на кружниот исечок AOV намалена плоштината на триаголникот AOB, која е еднаква на $\sqrt{3}$. Од положбата на точката B се заклучува дека аголот AOB е 120°, односно $2\pi/3$. Според тоа плоштината на исечокот е $r^2 2\pi/6=4\pi/3$, а бараната плоштина е $4\pi/3-\sqrt{3}$.

29.06.2001 **МАТЕМАТИКА-ФИЗИКА I ГРУПА**

1. а) Да се пресмета: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}$, за $a\neq 3$, $a\neq -3$.

Решение. Имаме

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:\frac{5-4}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{1}=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$.

б) $\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}=\frac{a-3-2a}{3(a-3)(a+3)}=\frac{-(a+3)}{3(a-3)(a+3)}=\frac{1}{3(3-a)}$.

2. Прав кружен цилиндар и прав кружен конус со еднакви радиуси на основата од 3 *cm* имаат еднакви плоштини. Изводницата на конусот е 5 *cm*. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение: Нека H е висината на цилиндарот, а s изводницата на конусот. Плоштината на цилиндарот е

$$P_{cil}=2r^2\pi+2r\pi H=18\pi+6\pi H,$$

а плоштината на конусот е

$$P_{con}=r^2\pi+\frac{2rs\pi}{2}=9\pi+15\pi=24\pi.$$

Од условот $P_{cil} = P_{con}$ следува дека $H = 1$. Висината на конусот е

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогаш, $V_{cil} = r^2 \pi H = 9\pi$, додека $V_{con} = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$. Нивната разлика е $3\pi cm^3$.

3. Да се реши равенката $(2x-2)\sqrt{x+10} = x^2 + x - 2$, во множеството реални броеви.

Решение. Имаме

$(2x-2)\sqrt{x+10} = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{x+10} = (x-1)(x+2) \Leftrightarrow$

$(x-1)(2\sqrt{x+10} - x - 2) = 0$

Едно решение на последната равенка е $x = 1$, бидејќи $x + 10 \geq 0$. Решавајќи ја равенката $2\sqrt{x+10} - x - 2 = 0$ се добива

$$4x + 40 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 = 36.$$

За $x = -6$, левата страна на почетната равенка е -28, додека десната е 28. Вредноста $x = 6$ е решение на почетната равенка. Решенија на дадената равенка се $x = 1$ и $x = 6$.

4. Да се пресмета вредноста на изразот $A = \frac{\cos\alpha + \sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{1 + tg\alpha\cdot ctg\alpha}$, ако $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Решение. Ако $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, тогаш $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$.

Според тоа,

$$A = \frac{\cos\alpha + \sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{1 + tg\alpha\cdot ctg\alpha} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+1} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$$

т.е. A прима две вредности и тоа: 1 и $-\frac{1}{2}$.

5. Плоштината на правоаголен триаголник е $24cm^2$, а неговиот периметар е $24cm$. Да се најдат страните на триаголникот .

Решение. Нека катетите на триаголникот се a, b и c е неговата хипотенуза. Тогаш,

$$ab = 48 \text{ и } a + b + c = 24$$

од што следува дека

$$c^2 = (24 - a - b)^2 = 576 + a^2 + b^2 - 48a - 48b + 2ab = 576 + c^2 - 48(a+b) + 96$$

т.е. $48(a+b) = 24\cdot(24+4) = 24\cdot 28$, од каде $a + b = 14$. Со решавање на системот

$$\begin{cases} a+b=14 \\ ab=48 \end{cases}$$

се добива квадратната равенка $b^2-14b+48=0$, чии решенија се $x_1=6$ и $x_2=8$. Според тоа, страните на триаголникот се: $a=6$, $b=8$ и $c=10$.

29.06.2001 **МАТЕМАТИКА-ФИЗИКА**
II група

1. а) Да се пресмета: $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}$, за $a\neq b$, $a\neq -b$.

Решение. а) Имаме

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:\frac{3+2}{6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}.$$

б) Имаме

$$\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}=\frac{a^3-ab^2-ba^2+2ab^2-b^3}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\frac{a(a^2+b^2)-b(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{a+b}.$$

2. Прав кружен цилиндар и прав кружен конус со еднакви радиуси на основата од $6cm$ имаат еднакви плоштини. Изводницата на конусот е $10cm$. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение. Нека H е висината на цилиндарот, а s изводницата на конусот. Плоштината на цилиндарот е

$$P_{cil}=2r^2\pi+2r\pi H=72\pi+12\pi H,$$

додека плоштината на конусот е

$$P_{con}=r^2\pi+\frac{2r\pi s}{2}=36+60\pi=96\pi.$$

Од $P_{cil}=P_{con}$ следува дека H=2. Висината на конусот е

$$h=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8.$$

Тогаш, $V_{cil}=r^2\pi H=72\pi$, додека $V_{con}=\frac{r^2\pi h}{3}=\frac{36\pi\cdot 8}{3}=96\pi$. Нивната разлика е $24\pi cm^3$.

3. Да се реши равенката $(2x+2)\sqrt{x+5}=x^2+3x+2$, во множеството реални броеви.

Решение. Последователно добиваме

$$\left(2x+2\right)\sqrt{x+5} = x^2+3x+2 \Leftrightarrow$$
$$2(x+1)\sqrt{x+5}=(x+1)(x+2) \Leftrightarrow$$
$$(x+1)(2\sqrt{x+5}-x-2)=0$$

Едно решение на последната равенка е $x=1$, бидејќи $x+5\geq 0$. Решавајќи ја равенката $2\sqrt{x+5}-x-2=0$ се добива

$$4x+20=x^2+4x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=16.$$

За $x=-4$, левата страна на почетната равенка е еднаква на −6, додека десната е 6. Вредноста $x = 4$ е решение на почетната равенка. Решенија на дадената равека се $x = 1$ и $x = 4$.

4. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+tg\alpha\cdot ctg\alpha}$ ако $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

Решение. Ако $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, тогаш $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{4}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$. Според тоа,

$$A=\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+tg\alpha\cdot ctg\alpha}=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot(\pm\frac{\sqrt{3}}{2})}{1+1}=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}}{2}\ ,$$

т.е. A прима две вредности, и тоа: 1 и $-\frac{1}{2}$.

5. Плоштината на правоаголен триаголник е $120cm^2$, а неговиот периметар е $60cm$. Да се најдат страните на триаголникот .

Решение. Нека катетите на триаголникот се a,b и c е неговата хипотенуза. Тогаш, $ab=60$ и $a+b+c=30$, од што следува дека

$$c^2=(30-a-b)^2=30^2+a^2+b^2-60a-60b+2ab=30^2+c^2-60(a+b)+120,$$

т.е. $60(a+b)=30\cdot(30+4)=30\cdot 34$. Според тоа, $a+b=17$. Со решавање на системот

$$\begin{cases} a+b=17 \\ ab=60 \end{cases}$$

се добива квадратната равенка $b^2-17b+60=0$, чии решенија се $b_1=5$ и $b_2=12$. Според тоа, страните на триагоникот се $a = 5$, $b = 12$ и $c = 13$.

03.07.2001 **ИНФОРМАТИКА**
I група

1. а) Да се пресмета: $0{,}5+0{,}4:(0{,}25-0{,}2)$.

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a(a+1)(a-1)}$ за $a\neq 1, a\neq -1, a\neq 0$.

Решение. а) Имаме

$$0{,}5+0{,}4:(0{,}25-0{,}2)=0{,}5+0{,}4:0{,}05=0{,}5+0{,}40:0{,}05=0{,}5+8=8{,}5$$

б) При $a\neq 1, a\neq -1, a\neq 0$ важи

$$\frac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^4(a-1)-a^2(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^2(a-1)(a^2-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^2(a-1)(a+1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=a(a-1)\,.$$

2. Топка и прав цилиндар со радиус на основата 6cm и висина 10cm имаат еднакви плоштини. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение. Имаме дека $V_{top}=\frac{4R^3\pi}{3}$; $V_{cil}=r^2\pi H=36\cdot 8\cdot\pi$ од каде што следува дека $R=6$. Тогаш,

$$P_{top}=4R^2\pi=144\pi\,,\ P_{cil}=2r^2\pi+2r\pi h=72\pi+96\pi=168\pi\ ,$$

а нивната разлика е $24\pi\text{cm}^2$.

3. а) За кои вредности на *m*, равенката

$$mx^2+2(m+1)x-1-m=0\,,$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на *m*, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

б) Да се реши неравенката $(x-2)(x-3)^2(x-4)^3<0$.

Решение. а) За да равенката има двоен корен треба да важи $(2(m+1))^2-4m(-1-m)=0$ односно $4m^2+8m+4+4m+4m^2=0$. Ова е квадратна равенка $2m^2+3m+1=0$ чии решенија се

$$m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 1}{4};\ m_1=-\frac{1}{2};\quad m_2=-1\,.$$

За $m_1=-\frac{1}{2}$, $x_{1,2}=1$ додека за $m_2=-1$, $x_{1,2}=0$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-2)(x-4)<0$ при услов $x\neq 3$, чие решение е унијата на интервалите (2,3) и (3,4).

4. Да се реши равенката: $\sin\frac{x}{2}\cos 2x=1$ **.**

Решение. Бидејќи $|\sin\frac{x}{2}|\leq 1$, $|\cos 2x|\leq 1$, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста од следните два системи равенки:

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\sin\frac{x}{2}=-1\\ \cos 2x=-1\end{cases}$$

Решение на првиот систем е: $x=(4k+1)\pi$ и $x=t\pi,\ t,k\in\mathbf{Z}$ односно $x=(4k+1)\pi$. Решение на вториот систем е: $x=(4m-1)\pi$ и $x=t\pi+\frac{\pi}{2}$, $t,k\in\mathbf{Z}$ а таков *x* не постои.

Според тоа, решение на дадената равенка е : $x=(4k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

5. Да се пресмета плоштината на четириаголникот чии темиња се пресечните точки $p\cap q$, $q\cap r$, $r\cap s$, $s\cap p$ на правите p, q, r, s зададени со равенките:

(p): $2x-y+1=0$; (q): $x+4y-4=0$;

(r): $3x-2y-12=0$; (s): $x+2y-12=0$.

Решение. Со решавање на соодветните системи равенки се добиваат координатите на пресечните точки $\{A\}=p\cap q$, $\{B\}=q\cap r$, $\{C\}=r\cap s$, $\{D\}=s\cap p$:

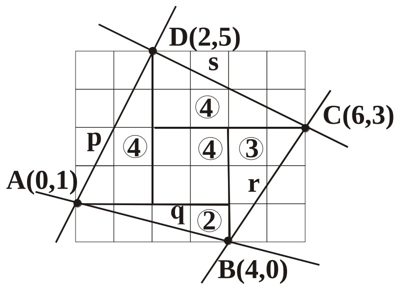
A: $2x+1=y$ и $x+4(2x+1)-4=0$; $9x=0$; $x=0$, $y=1$; $A(0,1)$

B: $x=4-4y$ и $3(4-4y)-2y-12=0$; $-16y=0$; $y=0$, $x=4$; $B(4,0)$

C: $x=12-2y$ и $3(12-2y)-2y-12=0$; $-8y+24=0$; $y=3$, $x=6$; $C(6,3)$

D: $x=12-2y$ и $2(12-2y)-y+1=0$; $-5y+25=0$; $y=5$, $x=2$; $D(2,5)$

Со нанесување на правите и точките во координатен систем (координатна мрежа) како на цртежот, четириаголникот е разделен на 4 правоаголни триаголници и еден квадрат, чии плоштини лесно се пресметуваат и се означени на цртежот. Според тоа, бараната плоштина на четириаголникот е 17.



3.07.2001 **ИНФОРМАТИКА**
II група

1. Да се пресмета: $3{,}5-0{,}9:(0{,}2+0{,}25)$

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}$ за $a\neq\pm1$.

Решение. а) Имаме

$$3{,}5-0{,}9:(0{,}2+0{,}25)=3{,}5-0{,}9:0{,}45=3{,}5-0{,}90:0{,}45=3{,}5-2=1{,}5.$$

б) При $a\neq\pm1$ добиваме

$$\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}=\frac{a^3(a+1)-a(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a^2-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a+1)(a-1)}{(a+1)(a-1)}=a(a+1).$$

2. Топка и прав цилиндар со радиус на основата $3cm$ и висина $32cm$ имаат еднакви волумени. За колку се разликуваат нивните плоштини?

Решение. За волумените на топката и цилиндарот имаме $V_{top}=\frac{4R^3\pi}{3}$; $V_{cil}=r^2\pi H=9\cdot32\cdot\pi$ од каде што следува дека $R=6$.

Тогаш, $P_{top}=4R^2\pi=144\pi$, $P_{cil}=2r^2\pi+2r\pi h=18\pi+192\pi=210\pi$, а нивната разлика е $66\pi\text{cm}^2$.

3. а) За кои вредности на m, равенката

$$mx^2+2(m-1)x+1-m=0,$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на m, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

б) Да се реши неравенката $(x+2)(x+3)^2(x+4)^3<0$.

Решение. а) За равенката да има двоен корен потребно е

$$(2(m-1))^2-4m(1-m)=0$$

односно $4m^2-8m+4-4m+4m^2=0$. Ова е квадратна равенка $2m^2-3m+1=0$ чии решенија се

$$m_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{3\pm1}{4};\ m_1=1;\quad m_2=\frac{1}{2}.$$

За $m_1=1,\quad x_{1,2}=0$, додека за $m_2=\frac{1}{2},\quad x_{1,2}=1$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x+2)(x+4)<0$ при услов $x\neq-3$, чие решение е унијата на интервалите $(-4,-3)$ и $(-3,-2)$.

4. Да се реши равенката: $\sin\frac{x}{2}\cos2x=-1$ **.**

Решение. Бидејќи $|\sin\frac{x}{2}|\le1,\ |\cos2x|\le1$, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста од следните два системи равенки:

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=1\\ \cos2x=-1\end{cases}\qquad\text{или}\qquad\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=-1\\ \cos2x=1\end{cases}$$

Решение на првиот систем е: $x=(4k+1)\pi$ и $x=t\pi+\frac{\pi}{2}$, $t,k\in\mathbf{Z}$ а таков x не постои. Решение на вториот систем е: $x=(4m-1)\pi$ и $x=t\pi$, односно $x=(4k-1)\pi$, $t,k\in\mathbf{Z}$.

Според тоа, решение на дадената равенка е $x=(4k-1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

5. Да се пресмета плоштината на четириаголникот чии темиња се пресечните точки $p\cap q$, $q\cap r$, $r\cap s$, $s\cap p$ на правите p, q, r, s зададени со равенките:

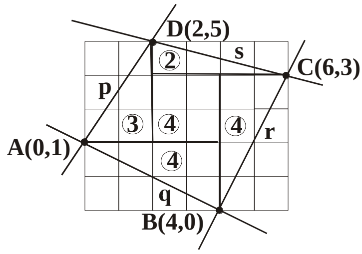
(p): $3x-2y+4=0$; (q): $x+2y-4=0$;
(r): $2x-y-8=0$; (s): $x+4y-22=0$.

Решение. Со решавање на соодветните системи равенки се добиваат координатите на пресечните точки $\{A\}=p\cap q$, $\{B\}=q\cap r$, $\{C\}=r\cap s$, $\{D\}=s\cap p$:

A: $x=4-2y$ и $3(4-2y)-2y+4=0$; $16-8y=0$; $y=2$, $x=0$; $A(0,2)$

B: $x = 4 - 2y$ и $2(4 - 2y) - y - 8 = 0$; $-5y = 0$; $y = 0$, $x = 4$; $B(4,0)$
C: $y = 2x - 8$ и $x + 4(2x - 8) - 22 = 0$; $9x - 54 = 0$; $x = 6$, $y = 4$; $C(6,4)$
D: $x = 22 - 4y$ и $3(22 - 4y) - 2y + 4 = 0$; $-14y + 70 = 0$; $y = 5$, $x = 2$; $D(2,5)$

Со нанесување на правите и точките во координатен систем (координатна мрежа) како на цртежот, четириаголникот е разделен на 4 правоаголни триаголници и еден квадрат, чии плоштини лесно се пресметуваат и се означени на цртежот. Според тоа, бараната плоштина на четириаголникот е 17.



03.07.2001 **ФИЗИКА И ХЕМИЈА**

I група

1. а) Да се пресмета: $0{,}5 + 0{,}4 : (0{,}25 - 0{,}2)$.

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^5 - a^4 - a^3 + a^2}{a(a+1)(a-1)}$ за $a \neq 1, a \neq -1, a \neq 0$.

Решение. а) Имаме

$$0{,}5 + 0{,}4 : (0{,}25 - 0{,}2) = 0{,}5 + 0{,}4 : 0{,}05 = 0{,}5 + 0{,}40 : 0{,}05 = 0{,}5 + 8 = 8{,}5$$

б) При $a \neq 1, a \neq -1, a \neq 0$ важи

$$\frac{a^5 - a^4 - a^3 + a^2}{a(a+1)(a-1)} = \frac{a^4(a-1) - a^2(a-1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{a^2(a-1)(a^2-1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{a^2(a-1)(a+1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)} = a(a-1).$$

2. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10}x - \frac{9}{10}y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Решение. Со еквивалентни трансформации на дадениот систем добиваме

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10}x - \frac{9}{10}y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{10}x + \frac{9}{10}y = \frac{3}{10} \\ \frac{7}{10}x - \frac{9}{10}y = \frac{5}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{16}{10}x = \frac{8}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{5}y = \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = -\frac{1}{10} \Rightarrow y = -\frac{1}{6} \end{matrix}$$

3. а) За кои вредности на m, равенката

$$mx^2 + 2(m+1)x - 1 - m = 0,$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на m, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

б) Да се реши неравенката $(x-2)(x-3)^2(x-4)^3 < 0$.

Решение. а) За да равенката има двоен корен треба да важи $(2(m+1))^2 - 4m(-1-m) = 0$ односно $4m^2 + 8m + 4 + 4m + 4m^2 = 0$. Ова е квадратна равенка $2m^2 + 3m + 1 = 0$ чии решенија се

$$m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm1}{4};\ m_1=-\frac{1}{2};\quad m_2=-1.$$

За $m_1=-\frac{1}{2}$, $x_{1,2}=1$ додека за $m_2=-1,\quad x_{1,2}=0$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-2)(x-4)<0$ при услов $x\neq3$, чие решение е унијата на интервалите (2,3) и (3,4).

4. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\sin\alpha-\cos2\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha}$, ако $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

Решение. Од $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ следува дека

$\cos^2\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ и $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=1/2$. Според тоа,

$$A=\frac{\sin\alpha-\cos2\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha}=0.$$

5. Во кружница со радиус 25*cm*, впишан е правоаголник чии должини на страни се во однос 3:4. Да се најдат должините на страните на правоаголникот.

Решение. Нека страните на правоаголникот се a и b. Тогаш, $a^2+b^2=50^2$. Од тоа што односот $a:b=3:4$, следува дека $a=\frac{3}{4}b$. Според тоа, од $b^2+\frac{9}{16}b^2=50^2$, следува дека $25b^2=16\cdot2500$, односно $b=40$. Тогаш $a^2=50^2-40^2=900$ односно $a=30$. Значи, страните на правоаголникот се 40*cm* и 30*cm*.

03.07.2001 ФИЗИКА И ХЕМИЈА

II група

1. а) Да се пресмета: $3{,}5-0{,}9:(0{,}2+0{,}25)$

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}$ за $a\neq\pm1$.

Решение. а) Имаме

$$3{,}5-0{,}9:(0{,}2+0{,}25)=3{,}5-0{,}9:0{,}45=3{,}5-0{,}90:0{,}45=3{,}5-2=1{,}5.$$

б) При $a\neq\pm1$ добиваме

$$\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}=\frac{a^3(a+1)-a(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a^2-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a+1)(a-1)}{(a+1)(a-1)}=a(a+1).$$

2. Да се реши системот равенки: $\begin{cases}\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=1\\ \frac{3}{5}x+\frac{9}{10}y=\frac{3}{10}\end{cases}$.

Решение. Со последователни еквивалелнтни трансформации добиваме

$$\begin{cases}\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=1\\ \frac{3}{5}x+\frac{9}{10}y=\frac{3}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{12}{10}x-\frac{9}{10}y=\frac{3}{2}\\ \frac{6}{10}x+\frac{9}{10}y=\frac{3}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\frac{18}{10}x=\frac{3}{2}+\frac{3}{10}=\frac{15}{10}+\frac{3}{10}=\frac{18}{10}\Rightarrow\ x=1;\\ \frac{3}{5}y=\frac{4}{5}-1=-\frac{5}{5}\Rightarrow y=-\frac{1}{3}\end{array}$$

3. а) За кои вредности на m, равенката

$$mx^2+2(m-1)x+1-m=0,$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на m, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

б) Да се реши неравенката $(x+2)(x+3)^2(x+4)^3<0$.

Решение. а) За равенката да има двоен корен потребно е

$$(2(m-1))^2-4m(1-m)=0$$

односно $4m^2-8m+4-4m+4m^2=0$. Ова е квадратна равенка $2m^2-3m+1=0$ чии решенија се

$$m_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 1}{4};\ m_1=1;\quad m_2=\frac{1}{2}.$$

За $m_1=1,\quad x_{1,2}=0$, додека за $m_2=\frac{1}{2},\quad x_{1,2}=1$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x+2)(x+4)<0$ при услов $x\neq -3$, чие решение е унијата на интервалите $(-4,-3)$ и $(-3,-2)$.

4. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha}$ ако $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha>0$.

Решение. Од $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha>0$, следува дека

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ и }\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Според тоа, $A=\frac{\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha}=0$.

5. Во кружница со радиус 26*cm*, впишан е правоаголник чии должини на страни се во однос 5:12. Да се најдат должините на страните на правоаголникот.

Решение. Нека страните на правоаголникот се a и b. Тогаш, $a^2+b^2=52^2$. Од тоа што односот $a:b=5:12$, следува дека $a=\frac{5}{12}b$. Според тоа, од $b^2+\frac{25}{144}b^2=52^2$, следува дека $169b^2=144\cdot 13^2 4^2$, односно $b=48$. Тогаш $a^2=52^2-48^2=40$ односно $a=20$. Значи, страните на правоаголникот се 48*cm* и 20*cm*.

10.09.2001 **I ГРУПА**

1. Да се докаже дека $3^{2001}+4^{2001}$ се дели со 13.

Решение. Од $3^3 \equiv 1(\mathrm{mod}13)$ и $4^3 \equiv -1(\mathrm{mod}13)$ следува дека
$3^{2001}+4^{2001}=(3^3)^{667}+(4^3)^{667}\equiv 1^{667}+(-1)^{667}=0(\mathrm{mod}13).$

2. Дадена е равенката $2x^2-(a+b)x+\sqrt{ab}(a+b-2x)=0$, каде a и b се реални броеви. Да се покаже дека едно решение на равенката е аритметичка, а другото геометриска средина на броевите a и b.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$2x^2-(a+b+2\sqrt{ab})x+(a+b)\sqrt{ab}=0.$$

Нејзината дискриминанта

$$D=(a+b+2\sqrt{ab})^2-8(a+b)\sqrt{ab}=(a+b-2\sqrt{ab})^2.$$

Решенијата се $x_1=\frac{a+b}{2}$ и $x_2=\sqrt{ab}.$

3. Да се реши равенката $\log_2(x^2+2x-7)\log_{x^2-6x+9}4=1.$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\log_2(x^2+2x-7)=\log_4(x^2-6x+9) \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x^2+2x-7)=\log_2\sqrt{(x-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x-7=|x-3| \Leftrightarrow x=-5.$$

4. Да се пресмета волуменот на правилна четристрана пирамида со основен раб $14cm$ и апотема $25cm$.

Решение. За висината на пирамидата имаме

$$H=\sqrt{h^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24,\ H=24cm$$

од каде што следува дека волуменот

$$V=\tfrac{1}{3}BH=\tfrac{1}{3}a^2H=\tfrac{1}{3}14^2\cdot 24=1568,\ V=1568cm^3.$$

5. Да се напише равенка на права што минува низ пресечната точка на правите $2x+7y-8=0$ и $3x+2y+5=0$ и е паралелна со правата $2x+3y-8=0.$

Решение. Од системот

$$\begin{cases}2x+7y-8=0\\3x+2y+5=0\end{cases}$$

ги добиваме координатите на пресечната точка $x=-3$ и $y=2$. Равенката на бараната права гласи $y-2=-\frac{2}{3}(x+3)$ односно $2x+3y=0.$

12.09.2001 **I ГРУПА**

1. Да се пресмета вредноста на изразот $4x^3-8x^2+2x+3$ за $x=1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Решение. $4(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})^3-8(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+2(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})+3=3.$

2. Да се докаже идентитетот $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Имаме

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

3. Да се реши равенката

$$3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}+3^{x-5}+3^{x-6}=364.$$

Решение. Имаме

$$3^5 3^{x-6}+3^4 3^{x-6}+3^3 3^{x-6}+3^2 3^{x-6}+3^1 3^{x-6}+3^{x-6}=364$$

$$\Leftrightarrow 364\cdot 3^{x-6}=364 \Leftrightarrow 3^{x-6}=3^0 \Leftrightarrow x=6.$$

4. Да се пресмета плоштина рамнокрак трапез со висина $h=20cm,$ крак $c=25cm$ и поголема основа $a=50cm.$

Решение. Од $x^2=c^2-h^2$ следува дека $x=15cm.$ За помалата основа b од $b=a-2x$ следува $b=20cm$. Бараната плоштина е $P=\frac{a+b}{2}h=700cm^2$.

5. Да се напише равенка на кружница со центар $S(1,-2)$ и радиус еднаков на радиусот на кружницата

$$x^2+y^2+6y+8=0.$$

Решение. Од $x^2+(y+3)^2=1$ следува дека равенката на бараната кружница гласи $(x-1)^2+(y+2)^2=1.$