

Ристо Малчески, Скопје  
Самоил Малчески, Скопје

## НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

Во оваа статија прво ќе ги докажеме неравенствата меѓу аритметичката, геометриската и хармониската средина, а потоа ќе го докажеме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина. Притоа ќе го користиме *принципот на регресивна индукција*, кој гласи:

Нека  $T(n)$  е тврдење кое зависи од природниот број  $n$ . Ако

i)  $T(n)$  е точен исказ за бесконечно многу природни броеви и

ii) за секој природен број  $n > 1$  исказот  $T(n) \Rightarrow T(n-1)$  е вистинит,

тогаш тврдењето  $T(n)$  важи за секој природен број  $n$ .

Понатаму, при доказот на неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина ќе ја користиме следнава теорема, која како резултат е сама за себе интересна.

**Теорема 1.** Ако  $x_i > 0$ ,  $i=1,2,\dots,n$  и  $x_1x_2\dots x_n=1$  тогаш

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n,$$

при што  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$  ако и само ако  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ .

**Доказ.** Даденото неравенство ќе го докажеме со математичка индукција по  $n$ .

i) За  $n=1$  неравенството е точно и притоа важи знак на равенство.

Ако  $n=2$  и  $x_1x_2=1$ , тогаш едниот број е поголем или еднаков на 1, а другиот е помал или еднаков на 1, на пример  $x_1 \leq 1$  и  $x_2 \geq 1$ . Според тоа,

$$x_1 + x_2 = 1 + x_1x_2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) = 2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq 2$$

и знак за равенство важи ако и само ако  $x_2 - 1 = 0$  или  $1 - x_1 = 0$ , што заедно со  $x_1x_2 = 1$  дава  $x_1 = x_2 = 1$ .

ii) Нека за  $n=k$  и произволни реални броеви  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , такви што важи  $x_1x_2\dots x_k = 1$ , точно е неравенството

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако  $x_i = 1$ ,  $i=1,2,\dots,k$ .

Нека  $n=k+1$  и  $x_1,\dots,x_{k+1}$  се позитивни реални броеви такви што важи  $x_1x_2\dots x_kx_{k+1} = 1$ . Ако сите  $x_i$  не се еднакви на 1, тогаш имаме броеви пого-

леми од 1, но и помали од 1. Без ограничување на општоста можеме да земеме  $x_1 < 1$  и  $x_2 > 1$ . Тогаш имаме  $k$  позитивни броеви  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k+1}$  чиј производ е еднаков на 1, па според индуктивната претпоставка добиваме

$$x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = \dots = x_k = x_{k+1} = 1.$$

Но, тогаш

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} &= 1 + x_1 x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_k + x_{k+1} + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ &\geq k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq k + 1, \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = \dots = x_k = x_{k+1} = 1$$

и при тоа  $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$  т.е.  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_k = x_{k+1} = 1$ . ■

**Пример 1.** Нека  $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  и  $\varphi(a_i), i = 1, 2, \dots, n$  е произволна пермутација на множеството  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Докажи дека

$$\frac{a_1}{\varphi(a_1)} + \frac{a_2}{\varphi(a_2)} + \dots + \frac{a_n}{\varphi(a_n)} \geq n. \quad (1)$$

**Решение.** Ако  $\varphi$  е пермутација на множеството  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , тогаш

$$a_1 a_2 \dots a_n = \varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_n),$$

т.е.

$$\frac{a_1}{\varphi(a_1)} \cdot \frac{a_2}{\varphi(a_2)} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{\varphi(a_n)} = 1.$$

Сега неравенството (1) непосредно следува од теоремата 1 и притоа знак за равенство важи ако и само и ако  $\frac{a_i}{\varphi(a_i)} = 1, i = 1, 2, \dots, n$ . ♦

## 1. НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ АРИТМЕТИЧКАТА, ГЕОМЕТРИСКАТА И ХАРМОНИСКАТА СРЕДИНА

**Дефиниција 1.** Нека се дадени  $n$  позитивни реални броеви  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Броевите

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}, \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска и хармониска средина* на броевите  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , соодветно.

**Теорема 2 (неравенства на Коши).** За аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви  $a_1, a_2, \dots, a_n$  важи

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Доказ.** Означуваме  $\beta_n = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}$ . Да ги разгледаме следниве  $n$  позитивни реални броеви  $y_i = \frac{a_i}{\beta_n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . За броевите  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  важи

$\prod_{i=1}^n y_i = 1$ , па од теоремата 1 следува  $y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n$ , т.е.

$$\frac{a_1}{\beta_n} + \frac{a_2}{\beta_n} + \dots + \frac{a_n}{\beta_n} \geq n.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}, \tag{2}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$  т.е. ако и само ако  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Од неравенството (2) следува:

$$\frac{1}{\left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}} = \left( \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n} \right)^{1/n} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}}$$

односно

$$\left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако  $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n}$  т.е. ако и само ако  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

*Втор начин.* На почетокот со математичка индукција по  $k$  ќе докажеме дека (2) важи за сите природни броеви од облик  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

За  $k=1$ , т.е.  $n=2$  неравенството  $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$  е еквивалентно со точното неравенство  $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ .

Нека претпоставиме дека неравенството важи за  $n=2^k$ ,  $k \geq 1$ . Тогаш од претходно докажаното и од индуктивната претпоставка следува дека

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} a_i &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} a_i \right) \geq \sqrt{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} a_i \right)} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i}, \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за природните броеви од облик  $n=2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , т.е. за бесконечно многу природни броеви.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој природен број  $n$  и да земеме  $a_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1}$ . Тогаш

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_{n-1} \frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1}},$$

од каде добиваме

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_{n-1}} \sqrt[n]{\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1}},$$

т.е.

$$\left( \frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1} \right)^{1-\frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_{n-1}}.$$

Затоа

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2\dots a_{n-1}}.$$

Конечно од принципот на регресивна индукција следува дека неравенството (2) е точно за секој природен број  $n$ . Понатаму, доказот на неравенството (3) е потполно ист како при првиот начин на докажување. ■

**Пример 2.** Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n$  се позитивни реални броеви такви да  $a_1a_2\dots a_n = 1$ . Докажи дека

$$(4+a_1)(4+a_2)\dots(4+a_n) \geq 5^n.$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$4 + x = 5 \cdot \frac{1+1+1+1+x}{5} \geq 5\sqrt[5]{x}, \text{ за секој } x > 0. \quad (3)$$

Ако ги искористиме неравенството (4) и условот  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$  добиваме

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \dots (4 + a_n) \geq 5^n \sqrt[5]{a_1 a_2 \dots a_n} = 5^n.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ . ■

**Пример 3.** Докажи дека за секои позитивни реални броеви  $a, b, c$  е точно неравенството

$$\frac{a^2 + 2b^2 + 4c^2}{bc} + \frac{b^2 + 2c^2 + 4a^2}{ca} + \frac{c^2 + 2a^2 + 4b^2}{ab} \geq 21. \quad (4)$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следуваат неравенствата

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &\geq 3abc, \\ ab^2 + bc^2 + ca^2 &\geq 3abc, \\ ac^2 + ba^2 + cb^2 &\geq 3abc. \end{aligned}$$

Ако првото неравенство го помножиме со 1, второто со 2, третото со 4 и ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$(a^3 + 2ab^2 + 4ac^2) + (b^3 + 2bc^2 + 4ba^2) + (c^3 + 2ca^2 + 4cb^2) \geq 21abc.$$

Последното неравенство го делиме со  $abc > 0$  и го добиваме неравенството (4). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако  $a = b = c$ . ■

**Пример 4.** Нека  $x, y, z$  се позитивни реални броеви такви што  $x + y + z = 1$ . Докажи дека

$$xy + yz + zx \geq 4(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) + 5xyz. \quad (5)$$

Кога важи знак за равенство?

**Решенија.** Ако искористиме дека  $x + y + z = 1$ , даденото неравенство го трансформираме во неравенството

$$(xy + yz + zx)(x + y + z)^2 \geq 4(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) + 5xyz(x + y + z),$$

т.е. во неравенството

$$x^3 y + xy^3 + y^3 z + yz^3 + z^3 x + xz^3 \geq 2(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2). \quad (6)$$

Според тоа, за да го докажеме неравенството (5) доволно е да го докажеме неравенство (6). Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за два броја следува

$$\begin{aligned}
 x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + xz^3 &= xy(x^2 + y^2) + yz(z^2 + y^2) + za(z^2 + x^2) \\
 &\geq xy \cdot 2xy + yz \cdot 2yz + zx \cdot 2zx \\
 &= 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2),
 \end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (6). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако  $x = y = z$  и како  $x + y + z = 1$ , добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако  $x = y = z = \frac{1}{3}$ . ■

**Пример 6.** Докажи го неравенството

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n > 1.$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, применето на броевите  $a_i = i, i = 1, \dots, n$ , равенството

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

и фактот дека  $a_i \neq a_k, i \neq k$  добиваме

$$n! < \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right)^n = \left[\frac{n(n+1)}{2n}\right]^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n. \blacksquare$$

**Пример 7.** Нека  $a, b, c$  се позитивни реални броеви такви што  $abc = 1$ . Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}.$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката иу геометриската средина следува  $2\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2})} \leq 1 + b + \frac{1}{a}$ , односно

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}. \quad (7)$$

Аналогно се докажуваат неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}} \quad (8)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}. \quad (9)$$

Ги собираме неравенствата (7), (8) и (9) и ако го искористиме равенството

$$\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}} + \frac{1}{1+c+\frac{1}{b}} + \frac{1}{1+a+\frac{1}{c}} = \frac{a}{a+ab+1} + \frac{ab}{ab+1+a} + \frac{1}{1+a+ab} = 1$$

кое се добива со примена на условот  $abc = 1$ , добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2} \left( \frac{1}{1+b+\frac{1}{a}} + \frac{1}{1+c+\frac{1}{b}} + \frac{1}{1+a+\frac{1}{c}} \right) = \sqrt{2}. \blacksquare$$

**Пример 8.** Докажи го неравенството

$$(x^2 + y^2 + 2)^{x^4+y^4} > (x^4 + y^4 + 2)^{x^2y^2}.$$

**Решение.** Имаме

$$(x^2 + y^2 + 2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4 > x^4 + y^4 + 2.$$

Сега од горното неравенство и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2)^{x^4+y^4} &= [(x^2 + y^2 + 2)^2]^{\frac{x^4+y^4}{2}} \geq [(x^2 + y^2 + 2)^2]^{\sqrt{x^4y^4}} \\ &= [(x^2 + y^2 + 2)^2]^{x^2y^2} > (x^4 + y^4 + 2)^{x^2y^2}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.  $\blacksquare$

**Пример 9.** Нека  $a, b, c$  се реални броеви такви што  $0 < a \leq b \leq c$ . Докажи дека важи

$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc.$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} (a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) &\geq 4(ab^3)^{\frac{1}{4}} \cdot 5(bc^4)^{\frac{1}{5}} \cdot 3(ca^2)^{\frac{1}{3}} = 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}} \\ &= 60abc \cdot a^{-\frac{1}{12}}b^{-\frac{1}{20}}c^{\frac{2}{15}} \geq 60abc, \end{aligned}$$

бидејќи од  $0 < a \leq b \leq c$  следува  $c^8 \geq a^5b^3$ , што значи

$$c^{\frac{2}{15}} \geq a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{20}}, \text{ т.е. } a^{-\frac{1}{12}}b^{-\frac{1}{20}}c^{\frac{2}{15}} \geq 1.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако  $a = b = c$ .  $\blacksquare$

**Пример 10.** Нека  $a, b, c$  се позитивни реални броеви и  $n, k$  се природни броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geq a^k + b^k + c^k.$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$kx^{n+k} + ny^{n+k} \geq (n+k)^{n+k} \sqrt[n+k]{x^{k(n+k)}y^{n(n+k)}} = (n+k)x^k y^n$$

и ако поделиме со  $y^n$  добиваме

$$k \frac{x^{n+k}}{y^n} \geq (n+k)x^k - ny^k. \quad (10)$$

Ако во неравенството (10) прво ставиме  $x=a, y=b$ , потоа  $x=b, y=c$  и на крајот  $x=c, y=a$  и ги собереме добиените неравенства го добиваме бараното неравенство. ■

**Пример 11.** Докажете дека за секој  $n \geq 2$  важи

$$\log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot \dots \cdot \log_n (2n-2) \leq 1.$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од својствата на логаритмите следува

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_n k \cdot \log_n (2n-k)} &\leq \frac{1}{2} [\log_n k + \log_n (2n-k)] \\ &= \frac{1}{2} \log_n k(2n-k) \\ &\leq \frac{1}{2} \log_n \left[ \frac{k+2n-k}{2} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \log_n n^2 = 1, \end{aligned}$$

за  $k=1, 2, \dots, n$ . Според тоа, производите на паровите кои се еднакво оддалечени од краевите на изразот  $A = \log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot \dots \cdot \log_n (2n-2)$  не надминуваат единица, па значи  $A \leq 1$ , за  $n = 2k + 1$ . Но,  $A \leq 1$  и за  $n = 2k$ , бидејќи

$$\log_n (2n-n) = \log_n n = 1. \quad \blacksquare$$

## 2. НЕРАВЕНСТВО МЕЃУ АРИТМЕТИЧКАТА И КВАДРАТНАТА СРЕДИНА

**Дефиниција 2.** Нека се дадени  $n$  позитивни реални броеви  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Бројот

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}$$

го нарекуваме *квадратна средина* на броевите  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Теорема 3 (неравенство на Коши).** За аритметичката и квадратната средина на позитивните реални  $a_1, a_2, \dots, a_n$  броеви важи

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Доказ.** За произволен пар индекси  $(i, j)$  такви што  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  и  $i < j$  важи  $2a_i a_j \leq a_i^2 + a_j^2$ . Ако сите овие  $\frac{n(n-1)}{2}$  неравенства ги собереме, добиваме

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2$$

односно

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \text{или} \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Конечно,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

со што неравенството е докажано. Притоа знак равенство важи ако и само ако за секој пар индекси  $(i, j)$  важи  $2a_i a_j = a_i^2 + a_j^2$ , т.е.  $a_i = a_j$ , за секој  $i, j$ , што значи дека  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . ■

**Пример 12.** Нека  $k$  е природен број и  $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$  се позитивни броеви помали од 1. Докажи го неравенството

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_{2k-1}^2 + (1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} \geq k\sqrt{2}$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина непосредно следува

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_{2k-1}^2 + (1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} &\geq \\ &\geq \sqrt{2} \left( \frac{a_1 + 1 - a_2}{2} + \frac{a_2 + 1 - a_3}{2} + \dots + \frac{a_{2k} + 1 - a_1}{2} \right) = \sqrt{2} \frac{2k}{2} = k\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$a_1 = a_3 = \dots = x, \quad a_2 = a_4 = \dots = y \quad \text{и} \quad x + y = 1. \quad \blacksquare$$

**Пример 13.** Нека  $a, b, c, d, e$  и  $f$  се реални броеви за кои важи

$$a + b + c + d + e + f = 10 \quad \text{и}$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 + (e-1)^2 + (f-1)^2 = 6.$$

Да се најде најголемата можна вредност за бројот  $f$ .

**Решение.** Од условот на задачата следува дека

$$a+b+c+d+e=10-f \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=20-f^2.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}},$$

т.е.  $\frac{(10-f)^2}{5} \leq 20-f^2$ . Значи,  $2f(3f-10) \leq 0$ , од каде следува  $f_{\max} = \frac{10}{3}$  и

оваа вредност се достигнува за  $a=b=c=d=e=\frac{4}{3}$ . ■

**Пример 14.** Докажи дека за секои позитивни реални броеви  $a$  и  $b$  важи неравенството

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}. \quad (11)$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Со  $K, A, G, H$  да ги означиме редоследно квадратната, аритметичката, геометриската и хармониската средина на броевите  $a$  и  $b$ . Од теоремите 2 и 3 следува  $K \geq A \geq G \geq H$ , а неравенството (11) всушност е неравенството  $K+H \geq A+G$ , односно неравенството  $K-G \geq A-H$ . Понатаму, за аритметичката и хармониската средина имаме:

$$A = \frac{a+b}{2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+ab}{2}} = \sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}} \text{ и}$$

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{G^2}{\sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}}} = \frac{2G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}},$$

што значи дека за да го докажеме неравенството  $K-G \geq A-H$ , потребно е да го докажеме неравенството

$$K-G \geq \sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}} - \frac{2G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}} = \frac{K^2-G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}.$$

Бидејќи  $K \geq G$  последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt{2(K^2+G^2)} \geq K+G,$$

кое всушност е неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина за броевите  $K$  и  $G$ , што значи дека истото е точно. Притоа знак за равенство важи ако и само ако  $K=G$ , т.е. ако и само ако  $a=b$ . ■

## ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Cîrtoaje, V., *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing house, Zalau, 2006
3. Govedarica, V., *Matematička takmičenja u Republici Srpskoj*, ZUNS, Sarajevo, 2007
4. Mitrović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
5. Малчески, Р., *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019

**Статијата прв пат е издадена на српски јазик во математичкото списание ДИОФАНТ во април 2026 година**