

STUDENTSKA RUBRIKA

Uvjetovanost linearnog sustava

JASENKA AUGUSTINOVIĆ*

Sažetak. U ovom članku analizira se uvjetovanost matrice linearnog sustava i njena povezanost sa singularnom dekompozicijom matrice. Pokazuje se da su loše uvjetovane matrice “gotovo singularne”. Singularna dekompozicija također ukazuje na tu vezu, a koristi se i za određivanje ranga i numeričkog ranga matrice. Ove povezanosti ilustrirane su na primjerima s matricama dimenzije 3×3 , za koje je korišten programski paket Mathematica.

Ključne riječi: uvjetovanost linearnog sustava, singularna matrica, singularna dekompozicija, rang, numerički rang

Condition of a linear system

Abstract. This paper provides analysis of condition of a linear system and its connection to the singular value decomposition. It can be seen that ill-conditioned matrices are “nearly singular”. The singular value decomposition (SVD) also points to that relationship. In addition, SVD can be used to determine rank and numerical rank of a matrix. These relationships are demonstrated on examples with 3×3 matrices, for which Mathematica software package is used.

Key words: condition of a linear system, singular matrix, the singular value decomposition, rank, numerical rank

1. Uvjetovanost matrice sustava

Pojam uvjetovanosti koristi se kao pokazatelj osjetljivosti rješenja nekog problema na male promjene ulaznih veličina. Ovdje promatramo osjetljivost rješenja linearnog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ na male promjene elemenata matrice \mathbf{A} ili vektora \mathbf{b} .

Neka je \mathbf{A} kvadratna regularna matrica, tako da inverz \mathbf{A}^{-1} postoji i jedinstven je. Tada linearan sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Pretpostavimo da smo promijenili desnu stranu sustava u $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$, dok je matrica \mathbf{A}

*Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, Gajev trg 6, HR - 31000 Osijek, e-mail: jaugusti@mathos.hr

ostala nepromijenjena. Neka je $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_b$ rješenje takvog sustava:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_b) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}.$$

Kako vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, slijedi da je $\mathbf{A}\delta\mathbf{x}_b = \delta\mathbf{b}$, odnosno $\delta\mathbf{x}_b = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$. Tako dobivamo ocjenu:

$$\|\delta\mathbf{x}_b\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\|, \quad (1)$$

gdje jednakost vrijedi za barem jedan vektor $\delta\mathbf{b}$. Također, iz relacije $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ slijedi:

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|, \quad (2)$$

gdje jednakost vrijedi za neke vektore \mathbf{x} i \mathbf{b} . Množenjem nejednakosti (1) i (2) i dijeljenjem obje strane s $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{b}\|$, dobivamo:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}_b\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (3)$$

Slično, možemo promijeniti matricu \mathbf{A} i vektor \mathbf{b} ostaviti nepromijenjen. Neka je $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_A$ rješenje takvog sustava:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_A) = \mathbf{b}.$$

Pri tome pretpostavimo da je $\|\delta\mathbf{A}\|$ dovoljno malen da je matrica $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ regularna. Analognim izvodom kao za (3), dobivamo:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}_A\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_A\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \quad (4)$$

Vrijednost $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|$, koja se pojavljuje u (3) i (4), zovemo uvjetovanost matrice \mathbf{A} (u odnosu na rješavanje sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) i označavamo s $\kappa(\mathbf{A})$. Ona pokazuje koliko se povećava relativna promjena u rješenju \mathbf{x} u odnosu na relativnu promjenu vektora \mathbf{b} u (3), odnosno matrice \mathbf{A} u (4). Vrijednost $\kappa(\mathbf{A})$ ovisi o normi koja se primjenjuje, ali za bilo koju normu vrijedi $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$. Naime, jedinična matrica je norme 1 za bilo koju normu, te vrijedi:

$$\|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|.$$

Za matricu \mathbf{A} kažemo da je dobro uvjetovana ako male promjene u vektoru \mathbf{b} ili matrici \mathbf{A} rezultiraju malim promjenama u rješenju \mathbf{x} . Iz (3) i (4) vidimo da će to vrijediti kada je $\kappa(\mathbf{A})$ blizu 1. Suprotno tome, matrica \mathbf{A} je loše uvjetovana ako male promjene u vektoru \mathbf{b} ili matrici \mathbf{A} vode do velikih promjena u rješenju \mathbf{x} , što će biti ispunjeno ako je $\kappa(\mathbf{A})$ mnogo veći od 1. Po konvenciji je $\kappa(\mathbf{A}) = \infty$ kada je matrica \mathbf{A} singularna.

Naravno, možemo istovremeno promijeniti i matricu \mathbf{A} i vektor \mathbf{b} . Dobivamo sustav:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}.$$

Uz pretpostavku da je $\delta\mathbf{A}$ dovoljno malen da vrijedi $\|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1$, može se pokazati sljedeća nejednakost (vidi [1]):

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \kappa(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}} \left(\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right).$$

Vrijednost

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \kappa(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}$$

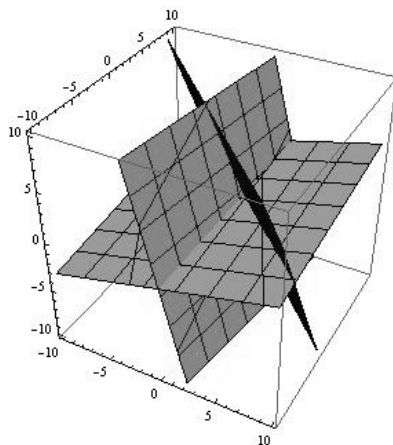
je blizu uvjetovanosti $\kappa(\mathbf{A})$ kada je $\|\delta\mathbf{A}\|$ dovoljno malen.

U sljedećim primjerima promatramo kako se ponaša rješenje \mathbf{x} pri malim promjenama vektora \mathbf{b} kada je matrica \mathbf{A} dobro, odnosno loše uvjetovana.

Primjer 1. Promotrimo linearni sustav:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 7 \\ 4x - 0.5y + z &= 4 \\ -x - 0.5y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je točka $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$. Na slici 1 prikazane su tri ravnine određene ovim jednadžbama.



Slika 1. Grafički prikaz sustava

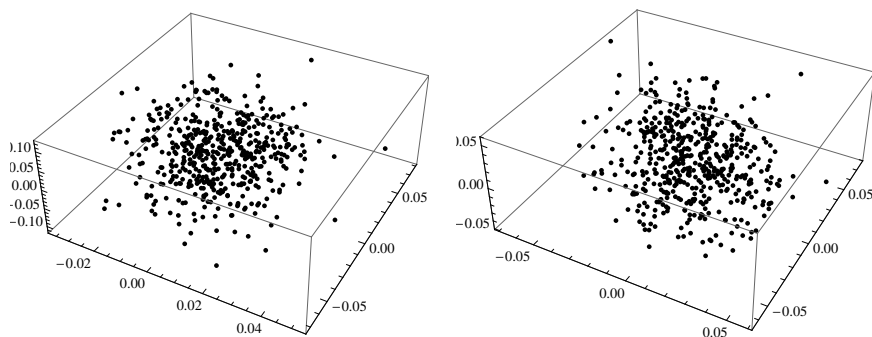
Matrica sustava je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo li uvjetovanost matrice \mathbf{A} za normu ∞ :

$$\kappa_{\infty}(\mathbf{A}) = 1.90295,$$

vidimo da je matrica \mathbf{A} dobro uvjetovana. Zbog relacije (3) očekujemo da će male relativne promjene vektora \mathbf{b} uzrokovati male relativne promjene vektora \mathbf{x} . To potvrđuje grafički prikaz na slici 2. Vektor $\mathbf{b} = [7, 4, 2]^T$ mijenjan je tako da je svakoj njegovoj komponenti dodana normalna slučajna varijabla $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Zatim je za svaki tako dobiven vektor $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ rješavan sustav $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_b) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$. Na slici 2 su s lijeve strane prikazane točke koje predstavljaju relativnu promjenu vektora \mathbf{b} , a s desne strane točke koje predstavljaju odgovarajuću relativnu promjenu vektora \mathbf{x} . Primjećujemo da su "oblaci" koji predstavljaju te relativne promjene slične veličine. To znači da su male relativne promjene vektora \mathbf{b} zaista rezultirale malim relativnim promjenama vektora \mathbf{x} .



Slika 2. Utjecaj relativne promjene vektora \mathbf{b} na relativnu promjenu rješenja \mathbf{x}

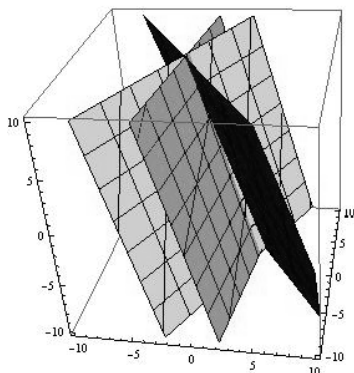
Primjer 2. Promotrimo sljedeći linearni sustav:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 8 \\ 4x - 0.5y + z &= 4 \\ x - 0.5y + 0.25z &= 0.25 \end{aligned}$$

Matrica sustava je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix},$$

a rješenje ponovno $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$. Na slici 3 primjećujemo mali kut između jedne ravnine i pravca u kojem se sijeku druge dvije ravnine.

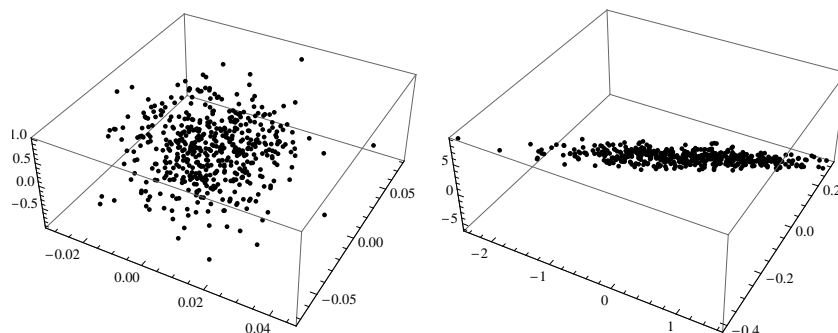


Slika 3. Grafički prikaz sustava

To znači da su retci ove matrice gotovo linearno zavisni. Zaista, ako napravimo sljedeću kombinaciju prva dva retka:

$$-\frac{3}{19} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{7}{19} \begin{bmatrix} 4 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ \frac{4}{19} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

vidimo da se rezultat malo razlikuje od zadnjeg retka matrice \mathbf{A} : $[1, -0.5, 0.25]$. Naslućujemo da je matrica sustava loše uvjetovana, što potvrđuje izračun: $\kappa_{\infty}(\mathbf{A}) = 232$. Također, na slici 4 primjećujemo da male relativne promjene vektora \mathbf{b} rezultiraju velikim relativnim promjenama rješenja \mathbf{x} .

Slika 4. Utjecaj relativne promjene vektora \mathbf{b} na relativnu promjenu rješenja \mathbf{x}

Vidjeli smo da će matrica biti loše uvjetovana ako su neki od njenih redaka gotovo linearno zavisni. Može se reći da je loše uvjetovana matrica "gotovo singularna". Zaista, vrijedi (vidi [4]):

$$\min \left\{ \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} : \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A} \text{ singularna} \right\} = \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})}$$

Dakle, relativna udaljenost matrice \mathbf{A} do najbliže singularne matrice je upravo $\frac{1}{\kappa(\mathbf{A})}$. Što je matrica lošije uvjetovana, to je bliža singularnosti.

Još neke razloge loše uvjetovanosti otkriva singularna dekompozicija matrice \mathbf{A} . O tome više u sljedećem poglavlju.

2. Singularna dekompozicija matrice

Prvi teorem govori da je za svaku matricu moguće naći singularnu dekompoziciju.

Teorem 1. ([1])

Ako je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, tada postoje unitarne matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, takve da vrijedi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \quad (5)$$

gdje je $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ dijagonalna matrica oblika $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(m,n)})$ i vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$.

Rastav (5) zovemo singularna dekompozicija matrice \mathbf{A} , a brojeve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(m,n)}$ singularne vrijednosti matrice \mathbf{A} . Stupce matrice \mathbf{U} zovemo lijevim, a stupce matrice \mathbf{V} desnim singularnim vektorima matrice \mathbf{A} .

Singularna dekompozicija daje mnogo informacija o strukturi matrice, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 2. ([7])

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrica sa singularnom dekompozicijom $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$ i singularnim vrijednostima $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$. Tada vrijedi:

i) $\text{rang}(\mathbf{A}) = r$,

ii) $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \text{Im}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$,

iii) $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$,

iv) $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$.

Dakle, broj singularnih vrijednosti različitih od nule daje rang r matrice \mathbf{A} . Prvih r stupaca matrice \mathbf{U} čini ortonormalnu bazu za $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, dok zadnjih $n - r$ stupaca matrice \mathbf{V} čini ortonormalnu bazu za $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. I konačno, 2-norma matrice \mathbf{A} jednaka je najvećoj singularnoj vrijednosti.

Primjetite da ako je matrica $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$ ranga r i označimo:

$$\mathbf{\Sigma}_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \mathbf{U}_r = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r], \quad \mathbf{V}_r = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r]$$

tada vrijedi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* = \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^* = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*.$$

Još jedno zanimljivo svojstvo singularne dekompozicije daje sljedeći teorem.

Teorem 3. ([1])

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ singularna dekompozicija matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, gdje je $m \geq n$. Neka je \mathcal{S} jedinična sfera u \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}.$$

Tada je:

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{S} = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ i } \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$$

elipsoid sa središtem u ishodištu \mathbb{R}^m i glavnim poluosima $\sigma_i \mathbf{u}_i$.

Dakle, singularne vrijednosti matrice \mathbf{A} jednake su duljinama poluosi elipsoida $\mathbf{A}\mathcal{S}$. Ispostavlja se da se djelovanje matrice $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ na jediničnu sferu može opisati kao niz od tri jednostavnije transformacije: \mathbf{V}^T rotira sferu, $\mathbf{\Sigma}$ ju zatim rasteže u elipsoid s poluosima duljine σ_i , a zatim ga matrica \mathbf{U} rotira. Naime, \mathbf{U} i \mathbf{V} su ortogonalne matrice i ne mijenjaju normu vektora na kojeg djeluju. Njihov je geometrijski smisao rotacija.

Primjer 3. Promotrimo još jednom matrice iz prva dva primjera:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

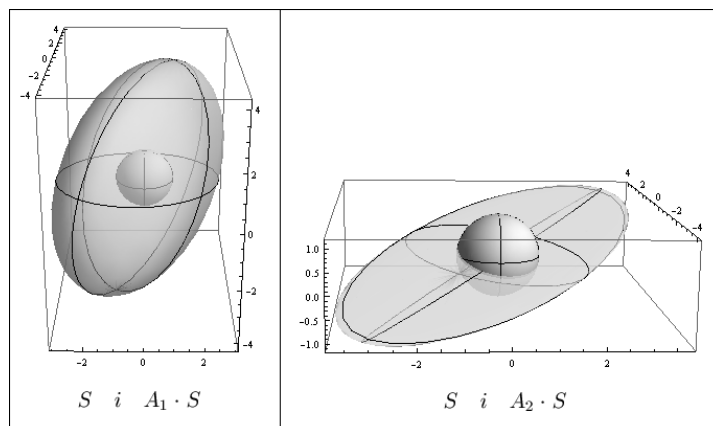
Načinimo li singularnu dekompoziciju tih matrica, dobivamo da su singularne vrijednosti matrice \mathbf{A}_1 jednake:

$$\sigma_1 = 4.71535, \quad \sigma_2 = 4.14502, \quad \sigma_3 = 2.02095$$

dok za matricu \mathbf{A}_2 iznose:

$$\sigma_1 = 5.34839, \quad \sigma_2 = 1.98897, \quad \sigma_3 = 0.0352517.$$

Elipsoidi nastali djelovanjem matrice \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 na jediničnu sferu \mathcal{S} prikazani su na slici 5. Primjetite da je σ_3 kod matrice \mathbf{A}_2 mnogo manja u odnosu na prve dvije singularne vrijednosti. Kako su singularne vrijednosti jednake duljinama poluosi elipsoida, elipsoid $\mathbf{A}_2\mathcal{S}$ je prilično plosnat.



Slika 5. Jedinična sfera \mathcal{S} i elipsoidi $\mathbf{A}_1\mathcal{S}$, $\mathbf{A}_2\mathcal{S}$.

U sljedeća dva odjeljka dana je veza između singularne dekompozicije i uvjetovanosti matrice, te važna povezanost s rangom i numeričkim rangom matrice.

2.1. SVD i uvjetovanost matrice

Prisjetimo se definicije uvjetovanosti matrice:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|.$$

Iskoristimo li svojstvo *iv*) iz teorema 2, možemo dobiti izraz za uvjetovanost u 2-normi. No, najprije je potrebno odrediti najveću singularnu vrijednost matrice \mathbf{A}^{-1} . Iz $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$ slijedi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^*.$$

Kako su \mathbf{U} i \mathbf{V} unitarne matrice i $\mathbf{\Sigma}$ dijagonalna matrica, ta relacija pokazuje da su singularne vrijednosti matrice \mathbf{A}^{-1} jednake recipročnim singularnim vrijednostima matrice \mathbf{A} . Stoga je najveća singularna vrijednost matrice \mathbf{A}^{-1} jednaka $1/\sigma_n$. Sada imamo:

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \|\mathbf{A}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Slijedi da je matrica \mathbf{A} sve lošije uvjetovana što je σ_n manji.

Primjer 4. *Promotrimo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Tim jednadžbama određena su dva pravca u ravnini. Pretpostavimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Tada je kut između tih pravaca jednak:

$$\cos \varphi = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}$$

Može se pokazati (vidi [8]) da je uvjetovanost matrice \mathbf{A} sustava (6) uz uvjete (7) jednaka:

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

pri čemu su σ_1 i σ_2 singularne vrijednosti matrice \mathbf{A} . To znači da uvjetovanost matrice ovisi o kutu između pravaca koje određuju njeni retci. Što je kut φ manji, manja je σ_2 i time uvjetovanost $\kappa_2(\mathbf{A})$ veća.

2.2. SVD i numerički rang

Rang matrice \mathbf{A} definira se kao broj linearno nezavisnih redaka (stupaca) te matrice. Međutim, zbog prisutnosti grešaka pri mjerenju, aproksimaciji i zaokruživanju, retci matrice koji su matematički gledano linearno nezavisni mogu biti gotovo linearno zavisni u praktičnom smislu. Stoga se definira numerički rang r_ε , kao broj redaka matrice \mathbf{A} koji su linearno nezavisni s obzirom na neki prag ε :

$$r_\varepsilon = r_\varepsilon(\mathbf{A}, \varepsilon) = \min_{\|\mathbf{E}\|_2 \leq \varepsilon} \text{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{E})$$

Dakle, to je broj redaka matrice \mathbf{A} koji će biti linearno nezavisni za bilo koju promjenu \mathbf{E} koja je po normi manja ili jednaka od ε .

Jedna od važnih upotreba singularne dekompozicije je upravo određivanje ranga i numeričkog ranga matrice. Naime, po teoremu 2 rang matrice je jednak broju singularnih vrijednosti različitih od nule. Slična veza, kao što ćemo vidjeti, postoji između sigularnih vrijednosti i numeričkog ranga.

Teorem 4. ([9])

Neka su $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ singularne vrijednosti matrice \mathbf{A} i $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A} + \mathbf{E}$. Tada vrijedi:

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq \|\mathbf{E}\|_2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dvije su zanimljive činjenice u ovom teoremu. Prvo, ne postoji ograničenje za matricu \mathbf{E} , tj. tvrdnja će biti istinita za bilo koju promjenu matrice \mathbf{A} . Drugo, ako su singularne vrijednosti poredane po veličini, tada će za po normi malen \mathbf{E} singularna vrijednost σ_i biti blizu τ_i . Kako je matrica \mathbf{A} ranga r ako je $\sigma_r > \sigma_{r+1} = 0$, teorem 4 povlači sljedeći teorem:

Teorem 5. ([2])

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrica ranga r sa singularnom dekompozicijom $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$. Neka je $k < r$ i:

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*.$$

Tada je:

$$\min_{\text{rang}(\mathbf{B})=k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Teorem kaže da je udaljenost matrice \mathbf{A} ranga r do najbliže matrice ranga k jednaka σ_{k+1} i da se taj minimum postiže u matrici \mathbf{A}_k . Primjetite da je:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}_k\mathbf{V}^*,$$

gdje je $\mathbf{\Sigma}_k = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$. Dakle, matrica \mathbf{A}_k se od matrice \mathbf{A} razlikuje samo po matrici $\mathbf{\Sigma}$.

Uzimajući u obzir ove činjenice, numerički rang r_ε može se definirati kao broj singularnih vrijednosti koje su veće od nekog praga ε :

$$\sigma_{r_\varepsilon} > \varepsilon \geq \sigma_{r_\varepsilon+1}$$

Određivanje numeričkog ranga je relativno lako kada postoji razmak između velikih i malih singularnih vrijednosti. Na primjer, neka su singularne vrijednosti matrice \mathbf{A} sljedeće:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0.5 \quad \sigma_3 = 0.1 \quad \sigma_4 = 10^{-4} \quad \sigma_5 = 10^{-8}$$

Uzmemo li prag $\varepsilon = 10^{-3}$, numerički rang matrice \mathbf{A} bit će 3, dok će za npr. $\varepsilon = 10^{-5}$ numerički rang biti 4. Međutim, ako su singularne vrijednosti:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 10^{-1} \quad \sigma_3 = 10^{-2} \quad \sigma_4 = 10^{-3} \quad \sigma_5 = 10^{-4}$$

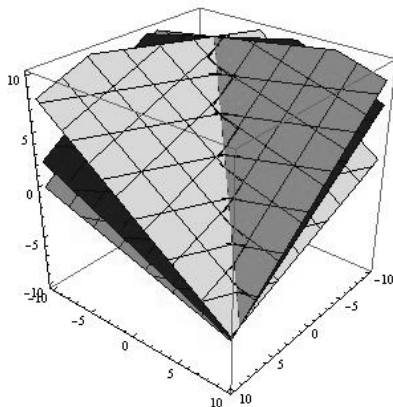
vrlo je teško odrediti prag, pa tako i numerički rang. Općenito, numerički rang matrice ima smisla određivati samo kada postoji jasan razmak između singularnih vrijednosti.

Sada možemo povezati uvjetovanosti matrice i njen numerički rang. Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $n \leq m$. Ako je matrica \mathbf{A} punog ranga, tj. $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, tada je udaljenost između matrice \mathbf{A} i najbliže matrice ranga $n - 1$ jednaka σ_n . S druge strane, $\kappa_2(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$. Proizlazi da što je σ_n manji, matrica je sve lošije uvjetovana i sve bliže matrici nižeg ranga. Također, ako je σ_n dovoljno malen, može se zanemariti uz neki prag ε . Tako bi numerički rang mogao biti $n - 1$. Dakle, loše uvjetovane matrice mogu imati numerički rang niži od stvarnog ranga.

Primjer 5. *Promotrimo jedan loše uvjetovan sustav:*

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 14 \\ 5x + 2y + 7z &= 30 \\ 6x + 4y + 9.999z &= 43.997 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je točka $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, iako se na prvi pogled čini da je rješenje pravac (vidi sliku 6).



Slika 6. Grafički prikaz sustava

Očito je da su retci ove matrice gotovo linearno zavisni:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 9.999 \end{bmatrix}$$

Zbroj prva dva retka daje vektor $[6, 4, 10]$, dok je treći redak matrice $[6, 4, 9.999]$. Ova matrica ima uvjetovanost čak $\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 59997$. Promotrimo njene singularne vrijednosti:

$$\sigma_1 = 15.5434 \quad \sigma_2 = 1.54398 \quad \sigma_3 = 0.000333352$$

Vidimo da je σ_3 reda veličine 10^{-4} i mogla bi se zanemariti uz prag npr. $\varepsilon = 10^{-3}$. Tada bi numerički rang matrice \mathbf{A} bio 2. Također, σ_3 nam pokazuje da je matrica \mathbf{A} vrlo blizu matrice ranga 2. Iako se na prvi pogled čini da je najbliža matrica ranga 2 upravo:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

ipak je $\|\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\|_2 = 0.001 > \sigma_3$.

Prema teoremu 5, najbliža matrica ranga 2 je:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{U}\Sigma_2\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 1.00011 & 2.00011 & 2.99989 \\ 5.00011 & 2.00011 & 6.99989 \\ 5.99989 & 3.99989 & 9.99911 \end{bmatrix}$$

gdje je $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0)$, jer vrijedi $\|\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}\|_2 = 0.000333352 = \sigma_3$.

Literatura

- [1] J. W. DEMMEL, *Applied numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [2] Z. DRMAČ, V. HARI, M. MARUŠIĆ, M. ROGINA, S. SINGER, *Numerička analiza, predavanja i vježbe*, Zagreb, 2003.
http://web.math.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf
- [3] P. E. GILL, W. MURRAY, M. H. WRIGHT, *Numerical Linear Algebra and Optimization, Volume 1*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1991.
- [4] G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations, Third Edition*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [5] G. GOLUB, V. KLEMA, G. W. STEWART, *Rank Degeneracy and Least Squares Problems*, Computer Science Department, Stanford University, 1976.
<http://eprints.kfupm.edu.sa/60731/1/60731.pdf>

- [6] P. C. HANSEN, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*, SIAM, 1998.
- [7] D. KINCAID, W. CHENEY, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1991.
- [8] M. MEŠTROVIĆ, K. SABO, *Grafička ilustracija pogreške u rješenju sustava linearnih jednadžbi*, Osječka matematička škola, Vol. 4 (2004) br. 2, Osijek, 2004.
- [9] G. W. STEWART, *Perturbation Theory for the Singular Value Decomposition*, Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland, 1990.
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.44.9904>