Osječki matematički list 19 (2019), 137–146

Wallace-Simsonov pravac

Mirta Alilović*, Zdenka Kolar-Begović, Ljiljana Primorac Gajčić†

Sažetak

U radu se razmatra pravac na kojem leže nožišta okomica, povučenih na stranice trokuta, iz točke koja leži na kružnici opisanoj tom trokutu. Taj pravac je u literaturi poznat pod imenom Wallace-Simsonov pravac. Navedeni su zanimljivi elementi povijesti otkrića ovog pravca. Promatrana su neka njegova zanimljiva geometrijska svojstva te veze s Eulerovom kružnicom trokuta.

Ključne riječi: *Wallace-Simsonov pravac, trokut, opisana kružnica, Eulerova kružnica*

The Wallace-Simson line

Abstract

In this paper we consider the line through the feet of the perpendiculars to the sides of a triangle from a point of its circumcircle. This line is known as the Wallace-Simson line. The interesting elements of history of its discovery are given. Some interesting properties of this line are also discussed as well as the relationships with the Euler circle of a triangle.

Keywords: *Wallace-Simson line, triangle, circumcircle, Euler circle*

*Diplomirana studentica Odjela za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: mirta.alilovic13@gmail.com

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: zkolar@mathos.hr, lprimora@mathos.hr

1 Iz povijesti Wallace-Simsonovog pravca

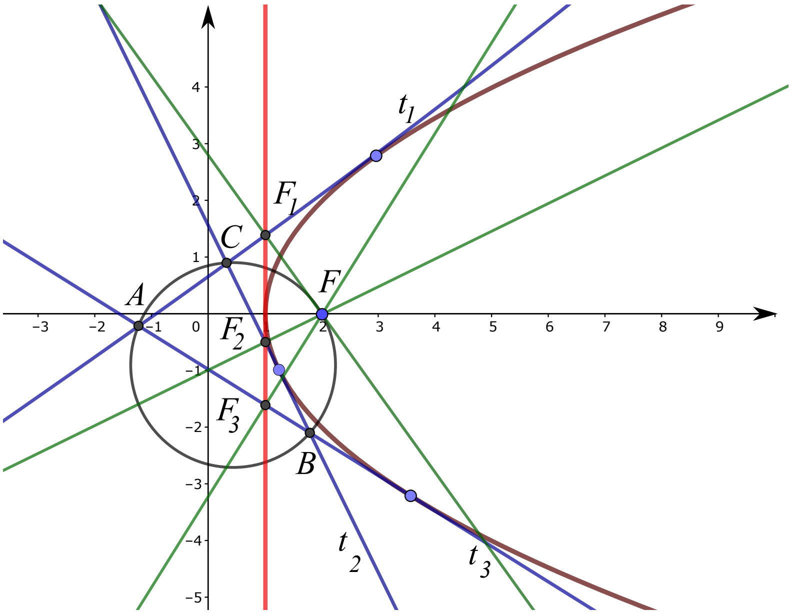
Robert Simson (1687.–1768.) škotski matematičar, profesor na Sveučilištu u Glasgowu

Geometrijska tvrdnja da su nožišta okomica iz točke ravnine na stranice trokuta kolinearna ako i samo ako ta točka leži na trokutu opisanoj kružnici poznata je u većini izvora kao Simsonov teorem iz uvjerenja da je škotski matematičar Robert Simson iz Glasgowa otkrio ovaj teorem. Mackay u [4] navodi da je to pogrešno, jer se teorem ne može naći ni u jednom Simsonovom objavljenom djelu. Vrijedi spomenuti i da nijedan autor koji je upotrijebio termin Simsonov pravac nije nikada naveo referencu ni bilo koji odlomak Simsonovih djela gdje se može naći teorem. Kako je onda nastala ta pogreška? Da se teorem pripisuje Simsonu prvi put govori F. J. Servois 1814. godine u članku u *Annales de Mathématiques*. Servois samo kaže da vjeruje da je teorem Simsonov. Jean-Victor Poncelet u djelu *Propriétés Projectives*, objavljenom 1822. godine, napominje da Servois teorem pripisuje Simsonu. Mackay napominje da je taj rezultat Poncelet pogrešno pripisao Robertu Simsonu i to je imalo za posljedicu da autori preuzmu tu činjenicu i daju ime Simsonov pravac.

Ako se zasluga otkrića ovog pravca ne može pripisati Simsonu, kome zaista pripada? U *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* Thomas Muir spominje činjenicu da se dotični teorem pojavljuje u članku koji je napisao škotski matematičar William Wallace u *Mathematical Repository*. Tom članku prethodio je jedan njegov članak u *Mathematical Repository* u kojem iznosi tvrdnju da kružnica određena sjecištima triju tangenti parabole prolazi kroz fokus parabole. U dokazu te tvrdnje Wallace promatra okomice iz fokusa na tri tangente parabole i pokazuje da nožišta okomica leže na tangenti kroz tjeme parabole (slika 1). Drugim riječima tangenta kroz tjeme parabole je takozvani Simsonov pravac fokusa s obzirom na trokut određen sjecištima te tri tangente. Ovdje je pretpostavka da trokut varira prema određenom zakonu, a da je točka iz koje su okomice povučene na njegove stranice fiksna. Promijenimo li sada pretpostavku i pretpostavimo da je trokut fiksan, a da točka iz koje konstruiramo okomice na njegove stranice varira prema određenom zakonu, pojavljuje se odjednom teorem čije podrijetlo tražimo. Uska povezanost teorema o paraboli i Simsonovog pravca i odgovarajuća objava Wallaceovih članaka u *Mathematical Repository* upućuje da se do otkrića Simsonovog pravca došlo nakon otkrića svojstava parabole. Treba navesti relevantnu činjenicu da Simson u *Sectiones Conicae* ne spominje svojstva parabole. Otkriće ovoga pravca kojeg, zbog spomenutih činjenica, zovemo Wallace-Simsonov pravac stoga treba vezati za 1799. odnosno 1800. godinu.

William Wallace (1768.–1843.) škotski matematičar i astronom

Tijekom godina, Wallace-Simsonov pravac je budio zanimanje ljubitelja geometrije te su otkrivena njegova brojna svojstva. U radu navodimo neka od njih te dajemo primjer geometrijske tvrdnje čiji se dokaz znatno pojednostavljuje primjenom Wallace-Simsonovog pravca.



Slika 1: Wallace-Simsonov pravac fokusa parabole s obzirom na trokut određen sjecištima tri tangente parabole

2 Wallace-Simsonov teorem

Trokut kojemu su vrhovi nožišta okomica povučenih iz točke T na stranice trokuta ABC, nazivamo *nožišni* ili *pedalni* trokut pola T s obzirom na dani trokut ABC. Pol nožišnog trokuta može biti bilo koja točka ravnine danog trokuta.

Promotrimo sada slučaj kada pol pripada kružnici opisanoj trokutu ABC. Vrijedi sljedeća tvrdnja

Teorem 2.1 (Wallace-Simson). *Neka je dan trokut ABC i točka T u ravnini. Nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta ABC su kolinearna ako i samo ako točka T leži na kružnici opisanoj trokutu ABC.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i točka T koja pripada kružnici opisanoj trokutu ABC. Označimo s D, E i F nožišta okomica iz točke T na pravce

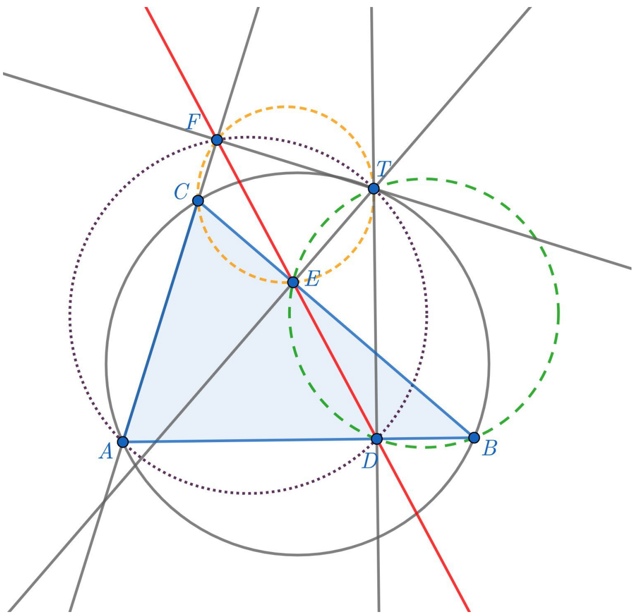
AB, BC i CA redom. Dokazat ćemo da su točke D, E i F kolinearne, tj. dokazat ćemo da vrijedi $\measuredangle BED = \measuredangle CEF$.
Kako pravokutni trokuti TEB i TDB imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{TB}$, to im se opisane kružnice podudaraju, pa zaključujemo da je četverokut $TEDB$ tetivni četverokut, slika 2. Tada su kutovi $\angle BTD$ i $\angle BED$ kutovi nad istim kružnim lukom, te vrijedi $\measuredangle BTD = \measuredangle BED$. Analogno zaključujemo da je i četverokut $TFCE$ tetivni, te da vrijedi $\measuredangle CEF = \measuredangle CTF$.
Kako je četverokut $ABTC$ tetivni (A, B, C i T leže na trokutu ABC opisanoj kružnici), za njegove kutove vrijedi

$$\measuredangle CAB + \measuredangle BTC = \measuredangle CAB + \measuredangle BTD + \measuredangle DTC = 180^\circ.$$

Kako su trokuti ADT i ATF pravokutni to je četverokut $ADTF$ tetivni pa za njegove kutove vrijedi

$$\measuredangle CAD + \measuredangle DTF = \measuredangle CAB + \measuredangle DTC + \measuredangle CTF = 180^\circ.$$

Iz navedenih jednakosti slijedi $\measuredangle BTD = \measuredangle CTF$, odnosno $\measuredangle BED = \measuredangle CEF$, što je i trebalo dokazati.



Slika 2: Nožišta okomica iz točke T određuju Wallace-Simsonov pravac

Dokažimo sada drugi smjer. Dokazat ćemo da ako su nožišta D, E i F okomica povučenih iz točke T na stranice trokuta ABC kolinearna tada je četverokut $ABTC$ tetivni, tj. vrhovi trokuta ABC i točka T leže na istoj kružnici.
Četverokuti $TEDB$ i $TFCE$ su tetivni, pa vrijedi $\measuredangle DEB = \measuredangle DTB$, odnosno $\measuredangle FTC = \measuredangle FEC$. Kako su kutovi $\measuredangle FEC$ i $\measuredangle DEB$ vršni, vrijedi $\measuredangle FEC = \measuredangle DEB$, stoga i $\measuredangle FTC = \measuredangle DTB$. Očito je $\measuredangle BAC = \measuredangle DAF$. Kako je četverokut $ADTF$ tetivni to vrijedi

$$\begin{aligned}\measuredangle CAB + \measuredangle BTC &= \measuredangle DAF + \measuredangle CTD + \measuredangle DTB \\ &= \measuredangle DAF + \measuredangle CTD + \measuredangle FTC \\ &= \measuredangle DAF + \measuredangle FTD = 180^\circ,\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je četverokut $ABTC$ tetivni. Dakle, točka T leži na trokutu ABC opisanoj kružnici. □

Pravac na kome leže nožišta okomica iz točke T kružnice opisane trokutu ABC na pravce BC, CA i AB nazivamo Wallace-Simsonov pravac točke T s obzirom na trokut ABC. Na neki način smo pomoću Wallace-Simsonovog pravca karakterizirali točke kružnice opisane trokutu.

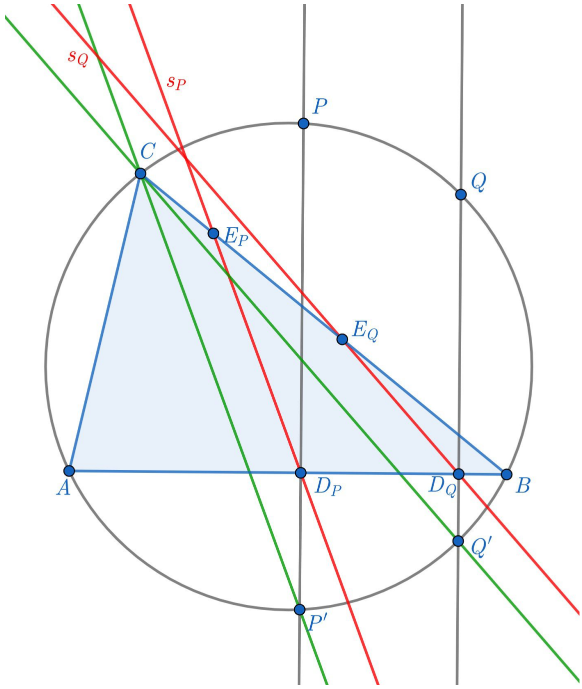
Kolinearnost promatranih nožišta može se dokazati i pomoću Menelajevog teorema, kako je prikazano u [1].

Uočimo da je Wallace-Simsonov pravac vrha trokuta pravac na kojem leži visina povučena iz tog vrha.

Pokažimo sada vezu dva Wallace-Simsonova pravca pridružena dvjema različitim točkama. Vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem 2.2. *Kut kojeg zatvaraju dva Wallace-Simsonova pravca pridružena točkama P i Q sukladan je obodnom kutu nad kružnim lukom $\widehat{PQ}$.*

Dokaz. Neka je dana točka P na kružnici k_o opisanoj trokutu ABC i označimo s D_P, odnosno E_P nožište okomice iz točke P na pravac AB, odnosno BC. Analogno označavamo nožišta okomica iz točke Q koja pripada kružnici k_o. Nadalje, označimo s P' sjecište pravca PD_P i kružnice k_o (slika 3).
Četverokuti $PCP'B$ i PE_PD_PB su tetivni, pa vrijedi $\measuredangle PP'C = \measuredangle PBC$, odnosno $\measuredangle PBE_P = \measuredangle PD_PE_P$ pa vrijedi $\measuredangle PP'C = \measuredangle PD_PE_P$ odakle slijedi da je pravac CP' paralelan s Wallace-Simsonovim pravcem s_P točke P.
Na analogan način točki Q pridružimo točku Q' i pravac CQ' koji je paralelan s Wallace-Simsonovim pravcem s_Q točke Q. Stoga je kut koji zatvaraju pravci s_P i s_Q sukladan kutu $P'CQ'$. Kako je $\widehat{PQ} \cong \widehat{P'Q'}$, tvrdnja vrijedi. □



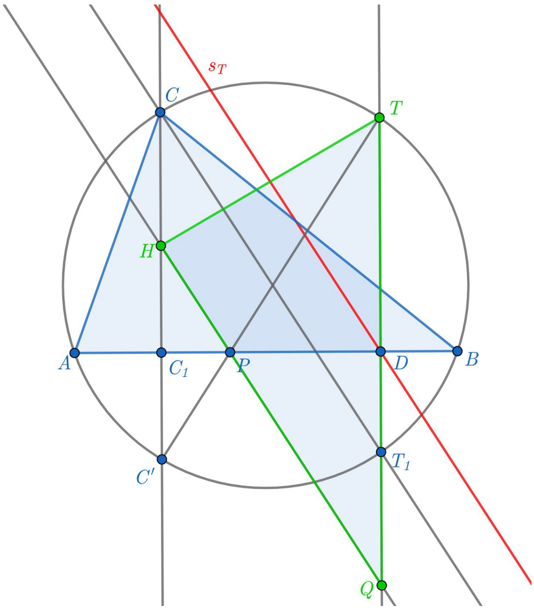
Slika 3: Wallace-Simsonovi pravci s_P i s_Q

Prema prethodno dokazanom teoremu i Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice slijedi okomitost Wallace-Simsonovih pravaca pridruženih dvjema dijametralno suprotnim točkama kružnice k_o. Zanimljiva je i veza Wallace-Simsonovog pravca i ortocentra trokuta iskazana sljedećim teoremom.

Teorem 2.3. *Wallace-Simsonov pravac točke T s obzirom na trokut ABC raspolavlja $\overline{HT}$ gdje je H ortocentar trokuta ABC.*

Dokaz. Označimo s C' sjecište pravca na kojem leži visina CC_1 i kružnice k_o. Prema svojstvima ortocentra [5, Teorem 11.1] (osnosimetrične slike ortocentra trokuta s obzirom na pravce na kojima leže stranice trokuta leže na trokutu opisanoj kružnici), tada vrijedi $|HC_1| = |C_1C'|$. Nadalje, označimo s P sjecište dužine $\overline{C'T}$ i stranice $\overline{AB}$, a s Q sjecište pravca HP i pravca TD, gdje je D nožište okomice iz T na AB (slika 4).
Trokuti $HC'P$ i QTP su slični jer imaju sukladne kutove, te su i jednakokračni budući da znamo da visina $\overline{PC_1}$ raspolavlja stranicu $\overline{HC'}$. Dakle,

vrijedi i $|TD| = |DQ|$.
Označimo s T_1 sjecište pravca TQ i kružnice k_0. Kutovi $\angle C'CT_1$ i $\angle C'TT_1$ su sukladni jer su obodni nad istim kružnim lukom, pa zbog sličnosti trokuta $HC'P$ i QTP slijedi i $\measuredangle C'HQ = \measuredangle C'CT_1$.
Stoga zaključujemo da je pravac HQ paralelan s pravcem CT_1, te stoga i s Wallace-Simsonovim pravcem s_T. Uočimo da za trokut THQ vrijedi da pravac s_T raspolavlja stranicu $\overline{TQ}$, a kako je paralelan s HQ, mora raspolavljati i stranicu $\overline{HT}$. $\square$



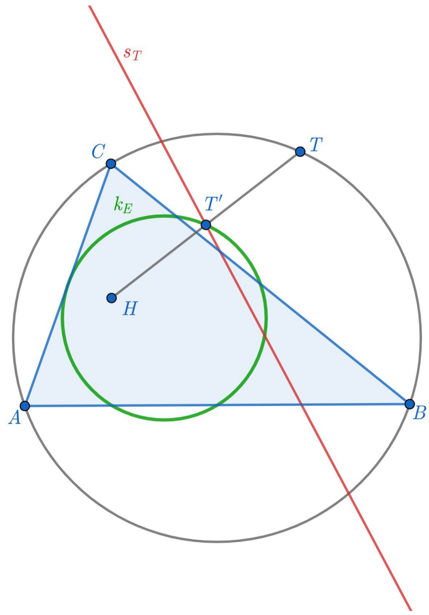
Slika 4: Wallace-Simsonov pravac točke T raspolavlja dužinu $\overline{HT}$

3 Veza Wallace-Simsonovog pravca i Eulerove kružnice

Promotrimo sada vezu Wallace-Simsonovog pravca i Eulerove kružnice koju neki autori nazivaju kružnica devet točaka. Na Eulerovoj kružnici trokuta ABC leže nožišta visina, polovišta stranica i polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$, gdje je H ortocentar trokuta ABC. Veza Wallace-Simsonovog pravca i Eulerove kružnice opisana je sljedećim teoremima.

Teorem 3.1. *Neka točka T leži na kružnici opisanoj trokutu ABC. Polovište dužine $\overline{HT}$, gdje je H ortocentar trokuta ABC, leži na Wallace-Simsonovom pravcu točke T i na Eulerovoj kružnici trokuta.*

Dokaz. Ranije smo pokazali da Wallace-Simsonov pravac točke T raspolavlja dužinu $\overline{HT}$. Nadalje, homotetija $h_H^{\frac{1}{2}}$ preslika točku T u polovište T' dužine $\overline{HT}$, tj. za svaku točku T koja leži na kružnici opisanoj trokutu ABC, polovište T' dužine $\overline{HT}$ leži na Eulerovoj kružnici k_E, slika 5. □

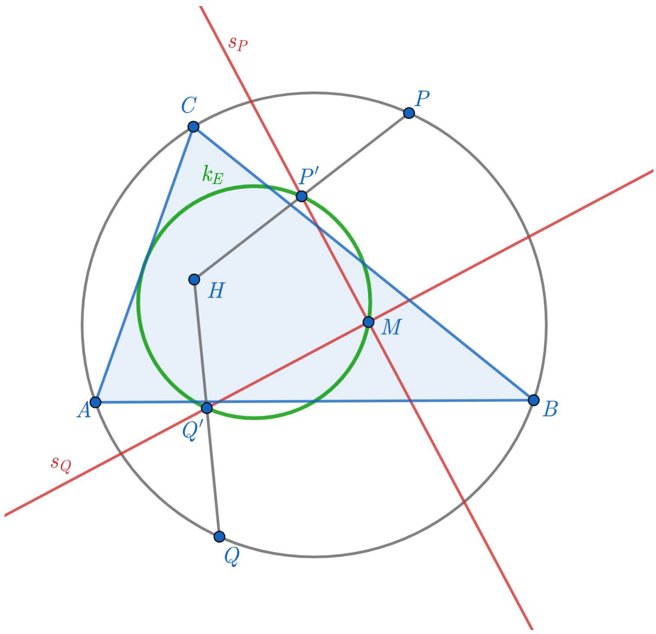


Slika 5: Wallace-Simsonov pravac točke T siječe Eulerovu kružnicu u polovištu dužine $\overline{HT}$

Drugim riječima, Wallace-Simsonov pravac točke T siječe Eulerovu kružnicu u polovištu dužine $\overline{HT}$. Promotrimo sljedeću tvrdnju o Wallace-Simsonovom pravcu i Eulerovoj kružnici.

Teorem 3.2. *Sjecište dva Wallace-Simsonova pravaca s_P i s_Q dviju dijametralno suprotnih točaka P i Q leži na kružnici k_E.*

Dokaz. Homotetija $h_H^{\frac{1}{2}}$ preslika promjer $\overline{PQ}$ kružnice k_o u promjer $\overline{P'Q'}$ kružnice k_E. Pravac s_P, odnosno s_Q prolazi točkom P', odnosno Q', a kako su međusobno okomiti, prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice slijedi da i njihovo sjecište M pripada toj kružnici, slika 6. $\square$

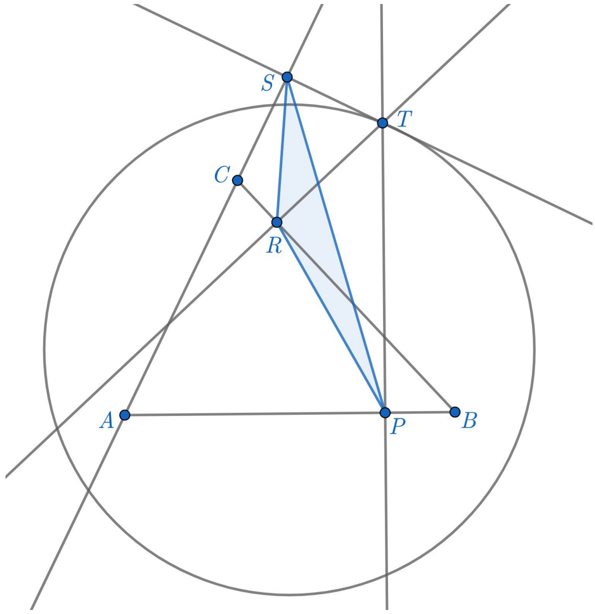


Slika 6: Sjecište Wallace-Simsonovih pravaca dijametralno suprotnih točaka kružnice k_o leži na Eulerovoj kružnici k_E

U literaturi se mogu naći brojne generalizacije Wallace-Simsonovog teorema. Jednu od najpoznatijih generalizacija dao je J. D. Gergonne na sljedeći način:

Teorem 3.3 (Gergonne). *Neka je ABC trokut, a T točka u ravnini. Nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta ABC određuju trokut konstantne površine ako i samo ako točka T leži na kružnici koncentričnoj opisanoj kružnici trokuta ABC* (slika 7).

U [6] se mogu naći i neke druge zanimljive generalizacije Wallace-Simsonovog pravca.



Slika 7: Generalizacija Wallace-Simsonovog teorema

Literatura

[1] M. Alilović, *Značajni pravci u geometriji trokuta*, Diplomski rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2018.

[2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[3] R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, Washington, 1995.

[4] J. Mackay, *The Wallace line and the Wallace point*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **9** (1890), 83–91.

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[6] P. Pech, E. Skříšovský, *On the Simson-Wallace theorem*, South Bohemia Mathematical Letters, **21** (2013), 59–66.