

V РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата

Десет години републички натпревари по математика 1976-1985

подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Од некоја сума најнапред се одбиени 5% за трошоци, 90 динари за заеднички потреби, а остатокот е поделен на три еднакви дела. Колку изнесува целата сума ако секое лице добило по 160 динари?

2. Збирот од еден двоцифрен број и бројот напишан од истите цифри, но во обратен редослед е квадрат на некој природен број. Кој е тој број? (Опреди ги сите двоцифрени броеви што ја имаат таа особина!).

3. Даден е четириаголникот $ABCD$ со дијагонали $\overline{AC} = 18$ cm и $\overline{BD} = 24$ cm, и агол меѓу нив од 30° . Опреди ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$, каде што M , N , P и Q се средини на страните AB , BC , CD и DA соодветно.

4. Конструирај го триаголникот ABC ако се дадени периметарот (обиколката) L , аголот при темето A и висината на страната AB .

29. (1980.VII.1)

I. Ако секое лице добило по 160 динари, тоа значи дека пред поделбата имало $3 \cdot 160 = 480$ динари. Ако на оваа сума ѝ се додадат 90 дин. се добива сума од 570 дин. Овие 570 динари се 95% од целата сума, бидејќи 5% се одбиени за трошоци. Значи е:

$$570 = \frac{95}{100} x \quad \Leftrightarrow \quad x = 600$$

II. (со равенка) Ако x е вкупната сума пари, тогаш од условот на задачата е:

$$\left(x - \frac{5}{100}x - 90\right) : 3 = 160,$$

од каде што се добива $x = 600$.

Одговор: 600 динари.

30. (1980.VII.2)

I. Ако x е цифрата на десетките, а y цифрата на единиците, тогаш бројот е $\overline{xy} = 10x + y$, а бројот од истите цифри, но во обратен ред е $\overline{yx} = 10y + x$. Нивниот збир е

$$10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11(x + y)$$

За да биде овој збир полн квадрат треба биномот $x + y$ да се дели со 11.

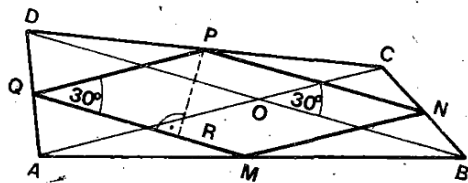
Бидејќи $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ и $x \neq 0$, следува $x + y \in \{1, 2, \dots, 18\}$ т.е. $x + y = 11$.

Оваа равенка е задоволена за следните парови природни броеви (x, y) : (2, 9) (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3) и (9, 2). Значи, бараните двоцифрени броеви се: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

Одговор: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

31. (1980.VII.3)

I. Нека е даден четириаголникот $ABCD$, а M , N , P и Q средини се на неговите страни (цртеж 19). Четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм. (види 78.VII.5). Да ја пресметаме сега неговата плоштина. Неговите страни по должина се еднакви на половина од дијагоналите на четириаголникот $ABCD$, т.е.



Црт. 19

$$\overline{QP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 9, \overline{QM} = \frac{1}{2} \overline{DB} = 12,$$

и се паралелни со нив, т.е. зафаќаат агол од 30° , $\angle PQM = 30^\circ$.

Висината PR на страната QM лежи наспроти агол од 30° , па е еднаква на половина од страната PQ , т.е. $\overline{PR} = \frac{9}{2}$. Плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е:

$$P = \overline{QM} \cdot \overline{PR} = 12 \cdot \frac{9}{2} = 54.$$

Одговор: $P = 54 \text{ cm}^2$.

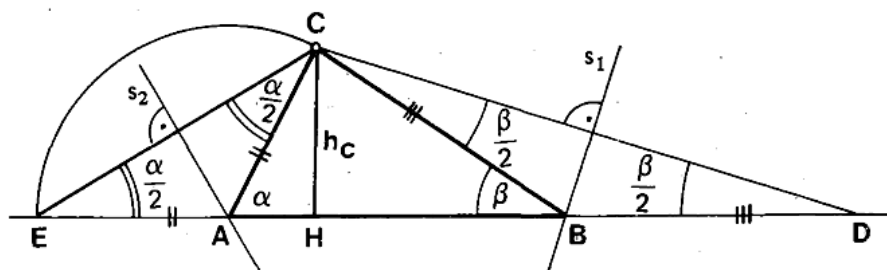
32. (1980.VII.4)

I.

1) **Анализа.** Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека $\triangle ABC$ е конструиран. На правата AB ги определуваме точките D и E од условот: $\overline{BD} = \overline{BC} = a$ и

$$\overline{AE} = \overline{AC} = b$$

(велиме дека триаголникот ABC сме го „развиеле“ во една отсечка ED). На тој начин добиваме еден помошен триаголник EDC за кој ни е познато:



Црт. 20

$$1) \overline{ED} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BD}$$

$$L = \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC}$$

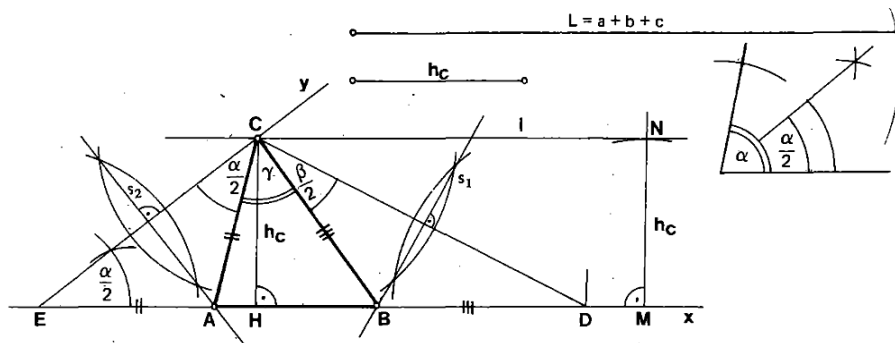
$$2) \overline{CH} = h_c$$

$$3) \angle E = \frac{\alpha}{2}, \text{ бидејќи } \triangle EAC \text{ е рамнокрак, па аглиите при основата } EC, \text{ се еднакви}$$

на половината од надворешниот агол при врвот A . (Сети се на тврдењето: „Надворешниот агол кај триаголникот е еднаков на збирот од два внатрешни со него несоседни агли“).

Значи, триаголникот EDC може да се конструира, бидејќи за него ја знаеме неговата основа, соодветната висина и еден агол на таа основа. Темењата A и B се добиваат во пресекот на симетралите s_1 и s_2 на страните CD и CE , со основата ED . (Да приметиме дека и $\triangle BCD$ е рамнокрак, со основа CD). (види црт. 20).

2) Конструкција



Црт. 21

Првин го конструираме $\triangle EDC$, со дадена основа $\overline{ED} = a + b + c$, висина h_c и агол $E = \frac{\alpha}{2}$. На полуправата EX ја нанесуваме отсечката $\overline{ED} = a + b + c$; потоа од една произволна точка M од полуправата EX ја нанесуваме нормалната отсечка $\overline{MN} = h_c$. Низ точката N ја повлекуваме правата $l \parallel EX$. Во темето E го нанесуваме аголот $\frac{\alpha}{2}$. Темето C е пресек на правата l и еден крак на аголот $\angle AEU = \frac{\alpha}{2}$. Тогаш ги повлекуваме симетралите s_1 и s_2 на CD и CE и ги добиваме темињата B и A .

3) Доказ: По конструкција $\overline{ED} = a + b + c$; $\angle E = \frac{\alpha}{2}$ и $\overline{CH} = h_c$.

Треба да се докаже дека $\angle A = \alpha$ и $\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{ED} = a + b + c$.

Бидејќи s_1 е симетрала на отсечката CD следува дека $\overline{BD} = \overline{BC}$, а бидејќи s_2 е симетрала на CE , следува дека $\overline{AE} = \overline{AC}$. Значи имаме: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AE} = \overline{ED} = L$. За рамнокракиот $\triangle AEC$ имаме $\angle BAC = \angle E + \angle C = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Значи, $\triangle ABC$ ги содржи дадените елементи.

4) Дискусија: Помошниот $\triangle EDC$ можеме секогаш да го конструираме. Задачата ќе има секогаш едно решение ако $\triangle EDC$ е тапоаголен, со тап агол кај темето C , т.е. $\angle ECD > 90^\circ$, бидејќи за аголот ECD имаме: $\angle ECD = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

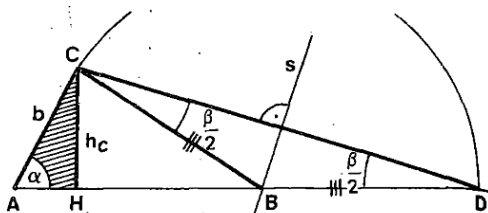
Забелешка: Со примена на тригонометријата се докажува дека задачата има решение ако е исполнет условот.

$$h_c < \frac{a+b+c}{2} \sin \alpha, \text{ а тогаш } \angle ECD > 90^\circ.$$

II.

1. Анализа:

Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека $\triangle ABC$ е конструиран. $\overline{CH} = h_c$ е висина на страната AB . Помошниот триаголник AHC можеме да го конструираме, бидејќи за него знаеме една страна $\overline{CH} = h_c$ и два агли



Црт. 22

$\angle A = \alpha$ и $\angle H = 90^\circ$. На тој начин ја определуваме и страната, b_2 т.е. $\overline{AC} = b$. Останува да го определиме уште темето B . За таа цел ја продолжуваме страната AB за $\overline{BD} = \overline{BC}$. Триаголникот BDC е рамнокрак со основа CD и со еднакви агли при основата, па затоа симетралата s на основата CD ќе минува низ врвот B . Тогаш е:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC} = c + a = (c + a + b) - b = l - b.$$

Значи, од темето A ја нанесуваме должината $\overline{AD} = l - b$ и ја добиваме точката B . Симетралата s на CD ќе ја сече страната AD во точката B .

Конструкцијата и нејзиниот доказ се јасни од анализата, а дискусијата е аналогна како при првото решение.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Еден воз тргнал од станицата А кон станицата С преку станицата В. Патот од А до В го минал со брзина од 48 km/h , а од В до С со брзина намалена за 25%. По пристигнувањето во станицата С, возот се вратил назад. Патот од С до В го минал со брзина од 48 km/h , а од В до А со брзина намалена за 25%.

Колку време патувал возот од А до С ако се знае дека патот од А до В го минал за исто време како и патот од В до С, а времето за минување на патот од А до С е $\frac{5}{12}$ часа помало од времето минато во обратна насока.

2. Триаголникот е заграден со апцисната оска и со графици на правите дадени со: $3x + 4y = 12$ и $5x + 12y = 60$. Определи ги:

- а) Плоштината и периметарот на триаголникот;
- б) Волуменот на телото добиено со ротација на тој триаголник околу x -оската.

3. Дадена е коцка со раб a . Средините на рабовите на една страна на коцката и центарот на спротивна страна се темиња на пирамида.

- а) Изрази ја како функција од a плоштината и волуменот на пирамидата.
- б) Определи го односот на плоштините и волумените на пирамидата и коцката.

4. Во круг со радиус r , од иста страна во однос на центарот се повлечени две паралелни тетиви АВ и CD, така што нивните растојанија до центарот се $\frac{3}{5}$, односно $\frac{4}{5}$ од радиусот на кругот. Определи го периметарот и аглиите на трапезот ABCD, каде што АВ е поголемата, а CD помалата тетива.

33. (1980.VIII.1)

1.

Од А до В возот се движи со 48 km/h, а од В до С со брзина намалена за 25%

т.е.: $48 - \frac{25}{100} \cdot 48 = 36 \text{ km/h}$. Патот x од А до В и y од В до С го минува за

исто време, од каде што е:

$$\frac{x}{48} = \frac{y}{36} \Leftrightarrow 3x - 4y = 0 \quad (1)$$

Од другиот услов на задачата ќе имаме:

$$\frac{x}{48} + \frac{y}{36} + \frac{5}{12} = \frac{y}{48} + \frac{x}{36}$$

По средувањето ќе добиеме

$$3x + 4y + 60 = 3y + 4x$$

$$x - y = 60. \quad (2)$$

Сега ќе го решиме системот:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x - y = 60 \end{cases}$$

Имаме

$$\begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 3x - 3y = 180 \end{cases}$$

или

$$y = 180$$

Тогаш е: $x = 60 + y = 60 + 180 = 240$

Значи патот од А до В е 240 km, а од В до С 180 km.

Времето е: $t = \frac{240}{48} + \frac{180}{36} = 5 + 5 = 10$

Одговор: 10 часа.

34. (1980.VIII.2)

I. Нулите на функциите се:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4, 0)$$

$$\begin{cases} 5x + 12y = 60 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(12, 0)$$

Темето C го добиваме во пресекот на двете прави:

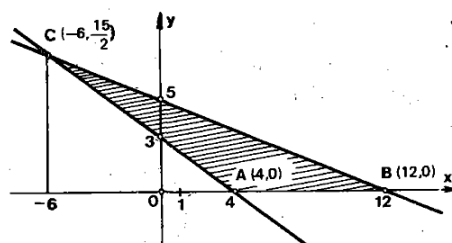
$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 5x + 12y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 12y = -36 \\ 5x + 12y = 60 \end{cases} \Rightarrow -4x = 24 \Leftrightarrow x = -6$$

Од првата равенка добиваме

$$3 \cdot (-6) + 4y = 12$$

$$4y = 12 + 18$$

$$y = \frac{15}{2} \Rightarrow C(-6, \frac{15}{2})$$



Црт. 23

а) Плоштината на $\triangle ABC$ е:

$$P = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} 8 \cdot \frac{7}{2} = 28.$$

За периметарот на $\triangle ABC$, прво ќе ги определиме страните AC и BC.

$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 7,5^2} = \sqrt{100 + 56,25} = \sqrt{156,25} = 12,5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{18^2 + 7,5^2} = \sqrt{324 + 56,25} = \sqrt{380,25} = 19,5$$

$$L = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 8 + 12,5 + 19,5 = 40.$$

б) Со ротација на $\triangle ABC$ околу x-оската се добива конус, од кој е отстранет друг конус, со иста основа а помала висина. Заедничкиот радиус е $r = 7,5$, а висините се:

$$h_1 = 18, \quad h_2 = 10$$

Тогаш, волуменот на ротационото тело е:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h_1 - \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h_2 = \frac{\pi}{3} r^2 (h_1 - h_2) = \frac{\pi}{3} \cdot 7,5^2 \cdot 8 = 150\pi.$$

Одговор: а) $P = 28$ кв. единици и 40 единици.

б) $V = 150$ кубни единици.

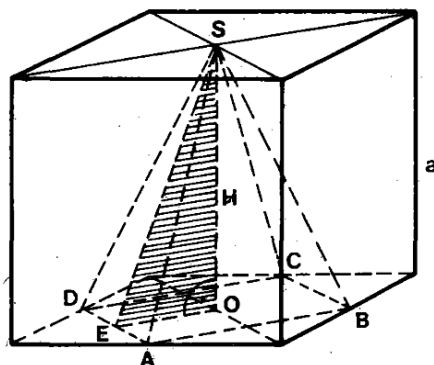
35. (1980.VIII.3)

1.

а) Очигледно, пирамидата е правилна четиристрана (цртеж бр. 24) со основен раб

$$b = \overline{AB} = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} a\sqrt{2}, \text{ висина}$$

$H = \overline{SO} = a$ и висина на бочната страна (апотема):



Црт. 24

$$h = \overline{SE} = \sqrt{H^2 + \overline{OE}^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{9a^2}{8}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Плоштината на пирамидата е:

$$P_{\Pi} = B + M = b^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{4}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} = \frac{4a^2}{2} = 2a^2$$

Волуменот на пирамидата е:

$$V_{\Pi} = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot a = \frac{1}{3} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

б) Односот на плоштините на пирамидата и коцката е:

$$\frac{P_{\Pi}}{P_K} = \frac{2a^2}{6a^2} = \frac{1}{3};$$

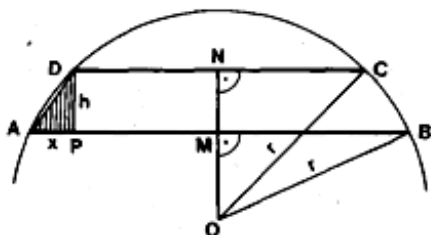
а на волумените:

$$\frac{V_{\Pi}}{V_K} = \frac{\frac{a^3}{6}}{a^3} = \frac{1}{6}.$$

Одговор: а) $P_{\Pi} = 2a^2$; $V_{\Pi} = \frac{a^3}{6}$;

б) $P_{\Pi} : P_K = 1 : 3$; $V_{\Pi} : V_K = 1 : 6$.

36. (1980.VIII.4)



Црт. 25

1. AB и CD нека се две паралелни тетиви од истата страна на центарот O од кружницата k . M и N нека се средините на AB и CD ; тогаш од условот на задачата е $\overline{OM} = \frac{3}{5} r$,

$$\overline{ON} = \frac{4}{5} \text{ г.}$$

Од правоаголниот триаголник $ОВМ$ имаме:

$$\overline{MB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OM}^2$$

$$r^2 - \left(\frac{3}{5}r\right)^2 = \frac{16r^2}{25},$$

$$\text{т.е. } \overline{MB} = \frac{4}{5} r); \quad \overline{AB} = \frac{8}{5} r.$$

Од правоаголниот триаголник OCN имаме:

$$\overline{NC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{ON}^2 = r^2 - \left(\frac{4}{5}r\right)^2 = \frac{9r^2}{25},$$

$$\text{T.e. } \overline{NC} = \frac{3r}{5}, \quad \overline{CD} = \frac{6r}{5}.$$

$\overline{DP} = h$ нека е висина на траpezот $ABCD$. Од правоаголникот $\triangle APD$ имаме:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PD}^2 = x^2 + h^2$$

$$x = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{\frac{8}{5}r - \frac{6}{5}r}{2} = \frac{1}{5}r$$

$$h = \frac{4}{5}r - \frac{3}{5}r = \frac{1}{5}r.$$

Тогда : $AD = \sqrt{\left(\frac{r}{5}\right)^2 + \left(\frac{r}{5}\right)^2} = \frac{r}{5} \sqrt{2}$.

Периметарот на рамнокракиот трапез $ABCD$ е:

$$L = \overline{AB} + \overline{CD} + 2\overline{AD} = \frac{8}{5}r + \frac{6}{5}r + 2 \cdot \frac{r\sqrt{2}}{5}$$

$$l = \frac{2r}{5} (7 + \sqrt{2}).$$

Аглите во трапезот ABCD се: $\angle A = \angle B = 45^\circ$ (бидејќи во триаголникот APD $h = x$) и $\angle C = \angle D = 135^\circ$.

Одговор: $l = \frac{2r}{5} (7 + \sqrt{2})$

$$\angle A = \angle B = 45^\circ; \quad \angle C = \angle D = 135^\circ.$$