БРАНКО ТРПЕНОВСКИ

ЕЛЕМЕНТАРЕН УВОД ВО ТЕОРИЈАТА НА ВЕРОЈАТНОСТА

III ПОПРАВЕНО ИЗДАНИЕ

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ 1994 год.

Уредник
Кирил МИЛЧЕВ

Рецензенти:
д-р **Магдалена ГЕОРГИЕВА,**
професор на Природно-математички факултет - Скопје

д-р **Наум ЦЕЛАКОСКИ,**
професор на Машинскиот факултет - Скопје

Со одлука на наставно-научниот совет на Математичкиот факултет во Скопје од 27. 09. 1982 година се одобрува употребата на оваа книга.

ОД ПРЕДГОВОРОТ КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Првото издание на книгата **ЕЛЕМЕНТАРЕН УВОД ВО ТЕОРИЈАТА НА ВЕРОЈАТНОСТА** излезе од печат во 1969 година во едицијата БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА што ја издаваше Математичкиот институт со нумерички центар при Универзитетот "Кирил и Методиј" во Скопје. Таа беше напишана откако авторот одржа еден циклус предавања по теорија на веројатноста за учениците од последните години на средните училишта, а во рамките на МАТЕМАТИЧКАТА ШКОЛА која сѐуште активно работи и има за цел, на оние ученици што покажуваат особен интерес за математиката, да им овозможи да се запознаат со одделни теми од современата математика коишто не се обработуваат низ редовната настава. Во таа смисла книгата беше наменета за учениците од завршните класови на средните училишта, како и за оние љубители на математиката чии познавања беа во рамките на средношколската математика. Тоа беше причина што, со незнатни исклучоци, во првото издание на оваа книга беше обработен само дискретниот конечен случај. Се покажа, меѓутоа, дека книгата ја користеа и студенти што оваа материја ја изучуваа во рамките на своите студии. Поради тоа, во ова второ, преработено издание се извршени редица дополнувања и значителни подобрувања што треба, обезбедувајќи ја првата намена на книгата, да обезбедат, во исто време, содржината на оваа книга да биде што е можно повеќе усогласена со соодветните програми на некои од техничките факултети на кои се изучува веројатноста (Електротехничкиот и Градежниот факултет, на пример). Во исто време неа ќе можат да ја користат и студентите од Математичкиот факултет.

Задржувајќи ја првобитната композиција, за ова издание сите делови се преработени, подобрени, некаде проширени и дополнети со поголем број вежби за кои, на крајот се дадени одговори, а за поголем број вежби се дадени и решенија или упатства.

Изразувајќи желба и надеж оваа книга да предизвика интерес кај сите љубители на математиката, а посебно да наиде на добар прием кај оние на кои им е потребна како учебно помагало, ќе бидам благодарен за сите забелешки и сугестии што можат да придонесат за подобрување на квалитетот и приодот во обработувањето на оваа материја.

Јуни, 1982 год. Авторот

Предговор кон ова издание

Ова трето издание на книгава претставува всушност стереотипно преиздавање на второто проширено и дополнето издание на оваа книга, при што се извршени корекции на воочените грешки.

Ја користам приликава да му се заблагодарам на книгоиздателството "Просветно дело" за интересот и трудот да го реализира ова издание, како и на ПП "ТОМ-ТОМ" за графичкото уредување на ова издание со што книгава доби во квалитет во споредба со поранешните изданија.

Скопје, 1993 Авторот

I. НЕКОЛКУ КОМБИНАТОРНИ ФОРМУЛИ

Овој параграф има уводен карактер. Прво ќе се потсетиме на основните поими за множествата, а потоа ќе разгледаме неколку елементарни комбинаторни задачи. Последниве ќе ни бидат нужни при примената на класичната дефиниција за пресметување веројатноста на одделни случајни настани.

1.1. Множества

Вообичаено е множествата да се означуваат со големите букви од латиницата, а нивните елементи со малите букви од истата азбука. Понекогаш при означувањето и на множествата и на нивните елементи соодветните букви ќе имаат и индекси. Изразот "a е елемент на множеството A" го означуваме со $a\in A$; спротивното тврдење, т.е. "a не е елемент на A" го означуваме со $a\notin A$.

Нека се A и B две множества. Ако сите елементи од множеството A му припаѓаат на множеството B пишуваме $A\subseteq B$ и велиме дека A е **подмножество** од B. Ако е $A\subseteq B$ и ако во B постои барем еден елемент што не му припаѓа на A велиме дека A е **вистинско** подмножество од B и пишуваме $A\subset B$. Ако е $A\subseteq B$ и

$B\subseteq A$, т.е. ако A и B се состојат од исти елементи, велиме дека A и B се **еднакви** множества и пишуваме $A=B$.

Ако елементите од едно множество можат да се "набројат", на пример, ако $x,y,\ldots$ се сите елементи на множеството A, тогаш ја користиме и следнава ознака: $A=\{x,y,\ldots\}$. Да спомениме два примера: ако A е множеството од сите природни прости броеви што не се поголеми од 10, а $\mathbb{N}$ множеството од сите природни броеви, можеме да напишеме $A=\{2,3,5,7\}$, $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

Покрај другите, се покажува дека е корисно да се разгледува и **празното** множество, т.е. "множеството" што нема ниту еден елемент; празното множество ќе го означуваме со $\emptyset$ и ќе сметаме дека :

За кое било множество A, $\emptyset\subseteq A$; $\emptyset\subset A$ ако и само ако A не е празно множество. ■

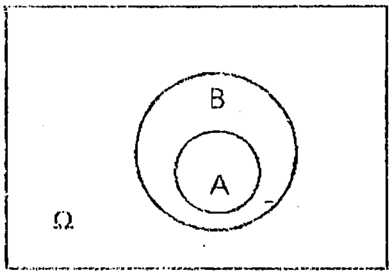
Од дефиницијата за подмножество директно следува дека:

За кое било множество A, $A\subseteq A$. Ако A и B се две множества такви што $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, тогаш $A=B$.

Да забележиме дека последната особина многу често се користи за докажување на разни идентитети што важат меѓу множествата. По воведувањето на основните операции меѓу множествата, ќе ја илустрираме примената на споменатата особина за да докажеме некои од законите што важат за тие операции.

Негациите на : $A=B$, $A\subseteq B$ и $A\subset B$ ќе ги означуваме, соодветно со: $A\neq B$, $A\nsubseteq B$ и $A\not\subset B$.

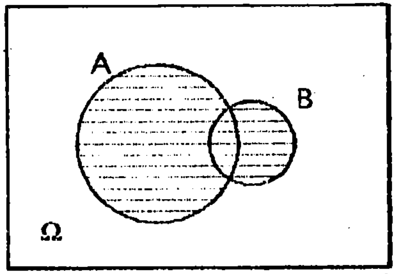
Погоре изнесовме само два примера за множества со желба да ја илустрираме ознаката со помош на големи загради. Читателот може сам да наведе многу други примери за множества. Тој тогаш ќе забележи дека природата на елементите на множествата може да биде најразлична. Теоријата на множествата, меѓутоа, не се интересира за природата на елементите на множествата, таа се апстрахира во однос на природата на елементите. Поради таа апстрактност, а за да можат полесно да се одбележат разните односи меѓу множествата и особините на поимите што се во врска со множествата, се користат разни нагледни претставувања на множествата. Едно убаво нагледно средство, во таа смисла, претставуваат дијаграмите на Вен. Натаму ќе претпоставуваме дека сите множества што ги разгледуваме во даден момент се подмножества од едно **универзално** множество. Ваквата претпоставка не претставува некое суштинско ограничување. Универзалното множество насекаде натаму ќе го означуваме со Ω и нагледно ќе го претставиме со правоаголник или со некоја друга рамнинска фигура. Секое подмножество од Ω тогаш ќе биде претставено со некоја фигура што лежи во правоаголникот односно во фигурата со која е претставено Ω. Според тоа, елементите на Ω и на секое негово подмножество ќе бидат претставени со точките од соодветната фигура. На пример, на сл.1 имаме дијаграм на Вен за множествата A и B такви што $A \subset B$.



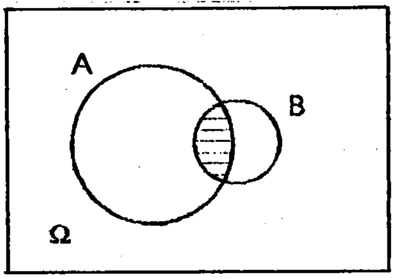
сл.1

Множеството Ω и секое негово подмножество во соодветниот дијаграм на Ван се состојат од бесконечно многу елементи - точки. Во многу случаи, меѓутоа, ние ќе разгледуваме конечни множества, т.е. множества со конечен број елементи. Ако во дадена задача не нé интересира бројот на елементите на разгледуваните множества, тогаш решавањето на задачата може да биде проследено со соодветните дијаграми на Вен, без оглед на тоа дали дадените множества се конечни или бесконечни. Ако, пак, имаме работа со конечни множества и ако, при тоа, се интересираме и за бројот на елементите на различните множества во задачата, тогаш пак можат корисно да се употребат соодветните дијаграми на Вен, со тоа што за бројот на елементите ќе биде потребно да се даде посебна информација.

Да го отпочнеме, сега, прегледот на основните операции со множествата. Нека се A и B две дадени множества. Множеството што се состои од сите елементи на множеството A и сите елементи на множеството B се вика **унија** на множествата A и B и се означува со $A \cup B$. На сл.2 е даден дијаграмот на Вен за унијата на A и B. Множеството, пак, што се состои од заедничките елементи на A и B се вика **пресек** на множествата A и B и се означува со $A \cap B$; дијаграмот на Вен за пресекот е даден на сл.3. Ако пресекот на множествата A и B не содржи ниту еден елемент, т.е. ако е $A \cap B = \emptyset$, тогаш за A и B велиме дека се **дисјунктни** множества.



сл.2



сл.3

Да разгледаме еден пример.

Пример 1.1.1. Ако:

$A=\{a,b,x,y,\}$, $B=\{x,y,k,p\}$ и $C=\{a,b,c\}$, тогаш:

$A \cup B=\{a,b,x,y,k,p\}$, $A \cap B=\{x,y\}$,

$A \cup C=\{a,b,c,x,y\}$, $A \cap C=\{a,b\}$,

$B \cup C=\{a,b,c,x,y,k,p\}$, $B \cap C=\emptyset$.

Дефинициите на унијата и пресекот на две множества можат да се искажат и на следниов начин:

$x \in A \cup B$ ако и само ако $x \in A$ или $x \in B$ (т.е. x припаѓа на барем едно од множествата A и B);

$x \in A \cap B$ ако и само ако $x \in A$ и $x \in B$.■

Да ги изнесеме основните особини за унијата и пресекот на две множества. Дел од нив направо следуваат од дефинициите, односно може лесно да се проверат. Поради тоа, ние ќе докажеме само две од тие особини.

Теорема 1.1.2.

За кои било множества A, B и C точни се следниве својства:

(*ј*) *идемпотентен закон*: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(*јј*) *комутативен закон*: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(*јјј*) *асоцијативен закон*:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(*јv*) *дистрибутивни закони*

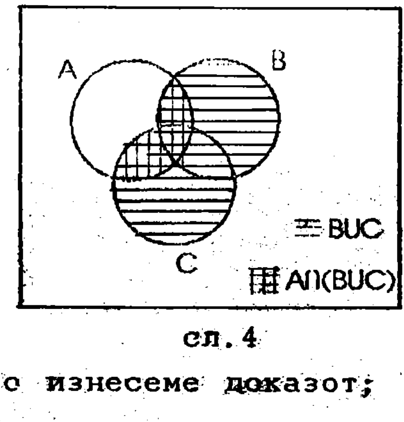
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(*v*) *закони на апсорпција*: $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(*vј*) $A\subseteq A\cup B$, $A\cap B\subseteq A$;

(*vјј*) *особините*: $A\subseteq B$, $A\cup B=B$ *и* $A\cap B=A$ *се меѓу себе еквивалентни.*

Доказ: ќе го докажеме првиот од дистрибутивните закони. Да ја провериме, претходно, точноста на тој закон со помош на дијаграмите на Вен; споредувајќи ги множествата што се на левата страна (сл.4), односно на десната страна (сл.5) од првиот од дистрибутивните закони, забележуваме дека тие множества се меѓу себе еднакви, т.е. дека овој закон е точен. Се разбира, ваквата проверка не може да се смета за доказ. И покрај тоа, на читателот би му препорачале, барем во прво време, што почесто да ги користи дијаграмите на Вен, зашто на тој начин, психолошки, ќе биде спремен полесно да ги усвои својствата за кои станува збор.



сл.4

сл.5

Да го изнесеме доказот; ќе го користиме својството за подмножества за кое порано забележавме дека често се применува во вакви случаи. Да ставиме $X=A\cap(B\cup C)$ и $Y=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ и да покажеме дека $X\subseteq Y$ и $Y\subseteq X$ зашто оттука ќе следува дека $X=Y$.

Нека $x\in X$; тоа значи дека $x\in A$ и $x\in B\cup C$. Од $x\in B\cup C$ следува дека x се содржи во барем едно од множествата B и C. Ако $x\in B$, тогаш се добива дека $x\in A\cap B$ и слично, ако $x\in C$, тогаш мора $x\in A\cap C$. Така, значи, x се содржи во барем едно од множествата $A\cap B$ и $A\cap C$, а тоа значи дека $x\in Y$. Со тоа покажавме дека $X\subseteq Y$.

Обратно, нека $y\in Y$, т.е. y припаѓа барем на едно од множествата $A\cap B$ и $A\cap C$. Тоа значи дека $y\in A$ и, во исто време y се содржи како елемент во барем едно од множествата B и C. Последното значи дека $y\in B\cup C$, што заедно со $y\in A$ повлекува $y\in X$, а со тоа е докажано дека $y\subseteq X$.

Ќе ја докажеме уште особината (*vjj*). За таа цел ќе докажеме дека се, по парови, еквивалентни тврдењата: $A\subseteq B$ и $A\cup B=B$ односно $A\subseteq B$ и $A\cap B=A$. Поради сличност на доказите, ќе ја докажеме само еквивалентноста на првиот пар тврдења.

Прво ќе претпоставиме дека $A\subseteq B$. Од особината (*vj*) од оваа теорема следува дека $B\subseteq A\cup B$. Натаму, ако $x\in A\cup B$ тогаш x му припаѓа на барем едно од множествата A и B. Ако $x\in A$, поради тоа што $A\subseteq B$ се добива дека $x\in B$. Во секој случај, значи, $x\in B$, така што $A\cup B\subseteq B$. Последново, заедно со веќе забележаното својство $B\subseteq A\cup B$ повлекува $A\cup B=B$. Така, ако е точно $A\subseteq B$ тогаш е точно и $A\cup B=B$. Обратно, нека $A\cup B=B$. Тогаш поради тоа што $A\subseteq A\cup B=B$, добиваме дека и од $A\cup B=B$ следува $A\subseteq B$.■

Операциите унија и пресек сврзуваат по две множества. Ако сакаме да формираме ново множество со помош на која било од овие операции, сега земајќи три наместо две множества, формално можеме да добиеме две такви множества. На пример, ако работиме со унијата (со пресекот ситуацијата е иста), ќе ги добиеме множествата $A\cup(B\cup C)$ и $(A\cup B)\cup C$, при што редот по кој се наредени множествата го задржуваме да биде ист. Асоцијативниот закон покажува дека овие две множества се исти, така што унијата од три множества е еднозначно определена од множествата (не зависи од заградите) па можеме да ја означуваме со $A\cup B\cup C$. Наполно иста е ситуацијата со унијата (пресекот) од било кој конечен број множества. Притоа, ако се има предвид и комутативниот закон за секоја од овие операции, ќе добиеме дека унијата односно пресекот на било кој конечен број множества не зависи ниту од распоредот на множествата, ниту, пак, од распоредот на заградите меѓу нив. Унијата B односно, пресекот C од множествата $A_1, A_2, \dots, A_k$ ќе ги означуваме, соодветно, со $B=\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j$, $C=\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_j$.

Нека M е дадено множество и $A_1, A_2, \dots, A_k$ нека се подмножества од M. Ако секои две од дадените подмножества од M се меѓу себе дисјунктни и ако $M=\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j$, тогаш за M велиме дека е **дисјунктна** унија од подмножествата $A_1, A_2, \dots, A_k$ и пишуваме $M=\sum\limits_{j=1}^{k} A_j$. Да земеме еден пример за дисјунктна унија.

Пример 1.1.3. Нека $\mathbb{N}$ е множеството од природните броеви, а A_1- множеството од природните броеви што се делат без остаток со 3, A_2- множеството од природните броеви кои при делењето со 3 даваат остаток 1 и A_3- множеството од природните броеви кои при делењето со 3 даваат остаток 2. Тогаш: $A_1=\{3,6,\dots,3k,\dots\}$, $A_2=\{1,4,\dots,3k-2,\dots,\}$ $A_3=\{2,5,\dots,3k-1,\dots\}$, при што, во трите подмножества, k ги зема вредностите $1,2,3,\dots$. Јасно е дека $\mathbb{N}=\sum\limits_{j=1}^{3} A_j$.

За множествата A и B ја определуваме **разликата** како множество што ги содржи елементите од A што не му припаѓаат на множеството B; оваа разлика ја означуваме со $A\setminus B$. Според тоа,

$x\in A\setminus B$ ако и само ако $x\in A$ и $x\notin B$. ■

Пример 1.1.4. Ако $A=\{a,b,x,y\}$, $B=\{x,y,c\}$, тогаш $A\setminus B=\{a,b\}$, $B\setminus A=\{c\}$, така што за разликата од две множества не мора да важи комутативноста.

Како и порано, нека Ω е универзалното множество и нека A е едно негово подмножество. Тогаш разликата $\Omega\setminus A$ ќе ја викаме **комплемент** на A во Ω (или само комплемент на A претпоставувајќи дека Ω е универзалното множество) и ќе ја означуваме со $\overline{A}_{\Omega}$ или просто со $\overline{A}$; значи $\overline{A}=\Omega\setminus A$. За комплементот, во однос и на порано воведените операции, ќе наведеме неколку својства.

Теорема 1.1.5.

За кои било подмножества A *и* B *од* Ω, *точни се следниве особини:*

(j) $\Omega=\emptyset$, $\emptyset=\Omega$;

(jj) $A\cup\overline{A}=\Omega$, $A\cap\overline{A}=\emptyset$;

(jjj) *Де Морганови закони:*

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

Доказ. Ќе го докажеме само првиот од Де Моргановите закони.

Нека $x\in\overline{A\cup B}$. Тоа значи дека $x\in\Omega$ и $x\notin A\cup B$, т.е. x не му припаѓа ни на едно од множествата A и B. Според тоа, $x\in\Omega\setminus A=\overline{A}$ и $x\in\Omega\setminus B=\overline{B}$, па $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Со тоа покажавме дека $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A\cap B}$. Обратно, ако $y\in\overline{A}\cap\overline{B}$ добиваме дека $y\notin A$ и $y\notin B$ така што $y\notin A\cup B$. Така, $y\in\Omega\setminus(A\cup B)=\overline{A\cup B}$, па се добива и $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.■

Ќе разгледаме еден пример со цел да ја илустрираме примената на Де Моргановите закони.

Пример 1.1.6. Да се докаже дека

За кое било подмножество A од Ω важи $\overline{\overline{A}}=A$, а потоа со негова помош и со помош на Де Моргановите закони да се докаже и вториот дистрибутивен закон.

Бидејќи по дефиниција $\overline{\overline{A}}=\Omega\setminus\overline{A}$, од $x\in\overline{\overline{A}}$ следува дека $x\in\Omega$ и $x\notin\overline{A}$, а од последното добиваме дека $x\in A$, што покажува дека $\overline{\overline{A}}\subseteq A$. Обратно, слично се покажува дека $A\subseteq\overline{\overline{A}}$.

Да го докажеме сега вториот од дистрибутивните закони:

$$A\cup(B\cap C) = \overline{\overline{A\cup(B\cap C)}} = \overline{\overline{A}\cap(\overline{B\cap C})} =$$

$$= \overline{\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C})} = \overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C})} =$$

$$= \overline{(\overline{A\cup B})\cup(\overline{A\cup C})} = \overline{\overline{(A\cup B)\cap(A\cup C)}} =$$
$$= (A\cup B)\cap(A\cup C)\ .$$

На крајот ќе спомENEME уште една операција со множества. Ако се A и B две множества, тогаш со $A\times B$ ќе го означиме множеството што се состои од сите подредени парови (a,b) каде што $a\in A$, $b\in B$. За $A\times B$ велиме дека е **директен производ** од множествата A и B. Ако некое од множествата A и B е празно, тогаш ќе сметаме дека и директниот производ од тие множества е празно множество. Натаму, елементите (a_1,b_1) и (a_2,b_2) ги сметаме за исти ако и само ако $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. На пример,

Пример 1.1.7. Ако $A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,x,y\}$, тогаш $A\times B=\{(a,b),(a,x),(a,y),(b,b),(b,x),(b,y),(c,b),(c,x),(c,y)\}$.

Поимот за директен производ може на очевиден начин да се обопшти на случај од произволен конечен број множества. Имено, под **директен производ** на множествата $A_1,A_2,\dots,A_k$ ќе го подразбираме множеството од сите подредени к-тки $(a_1,a_2,\dots,a_k)$, каде што $a_j\in A_j$, $j=1,2,\dots,k$. И овде, ако едно од множествата A_j е празно, ќе земеме и директниот производ, што ќе го означуваме со $A_1\times A_2\dots\times A_k$ да биде празно множество; натаму, $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ и $(b_1,b_2,\dots,b_k)$ ги сметаме за еднакви ако и само ако $a_j=b_j$ за секој $j=1,2,\dots,k$.

Од особините за директниот производ, во однос на порано воведените опреации со множествата, ќе докажеме само една што натаму ќе ни биде потребна:

Теорема 1.1.8.

За кои било три множества A, B и C точна е особината: $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

Доказ. Ако $x\in A\times(B\cup C)$, тогаш $x=(a,b)$, каде што $a\in A$ и b му припаѓа барем на едно од множествата B и C. Ако $b\in B$, тогаш $x=(a,b)\in A\times B$, а ако $b\in C$, тогаш $x\in A\times C$. Значи, $x=(a,b)$ му припаѓа барем на едно од множествата $A\times B$ и $A\times C$ па x се содржи и во нивната унија. Тоа покажува дека $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$. Со слично расудување, но во обратна насока, ќе дојдеме до заклучокот дека е точен и односот $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$.■

1.2. Математичка индукција

За докажување на одделни својства што на некој начин се поврзани со природните броеви, често се користи математичката индукција што се ослонува на следниве две својства: ако $\mathbb{N}$ е множеството од природните броеви и ако M е подмножество од $\mathbb{N}$ такво што:

a) $1\in M$,

b) ако $k\in M$, тогаш и $k+1\in M$,

тогаш, $2=1+1\in M$, $3=2+1\in M$ итн., така што интуитивно можеме да заклучиме дека $M=\mathbb{N}$. Кога природните броеви се изградуваат аксиоматски, една од аксиомите е аксиомата за индукција чија содржина е: ако M е некое подмножество од природните броеви што ги задоволува особините a) и b), тогаш M совпаѓа со множеството од природните броеви. Од аксиомата за индукција, пак, следува следниов

Принцип на математичка индукција.

За да се докаже дека една особина P ја поседува секој природен број, доволно е да се докаже дека: a') особината P ја поседува природниот број 1 и b') ако особината P ја поседува природниот број k, тогаш P ја поседува и природниот број $k+1$.

Доказ. Да го означиме со M множеството од сите природни броеви што ја поседуваат особината P. M е подмножество од $\mathbb{N}$.

за кое се задоволени својствата а) (зошто 1 ја поседува P) и b) (зошто од тоа што k ја поседува P следува дека и $k+1$ ја поседува P), па според аксиомата за индукција, $M=\mathbb{N}$, т.е. секој природен број ја поседува особината P.■

Принципот на математичката индукција ќе го примениме во доказот на следнава особина на која подоцна ќе се повикаме:

Теорема 1.2.1.

Нека се $A,B_1,B_2,\dots,B_k$ *произволни множества. Точни се следниве обопштени дистрибутивни закони:*

$$A\cup(\bigcap_{j=1}^{k} B_j) = \bigcap_{j=1}^{k}(A\cup B_j), \qquad A\cap(\bigcup_{j=1}^{k} B_j) = \bigcup_{j=1}^{k}(A\cap B_j)$$

Доказ. Поради сличност во доказите, ќе го докажеме само првиот од дистрибутивните закони. Го докажуваме, според тоа, равенството (напишано во развиен вид):

$$A\cup(B_1\cap B_2\cap\dots\cap B_k)=(A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap\dots\cap(A\cup B_k) \qquad (1)$$

За $k=1$, *(1)* претставува тривијално точно равенство: $A\cup B_1=A\cup B_1$. За $k=2$, *(1)* е точно според теоремата 1.1.2. (*jv*). Да претпоставиме дека *(1)* е точно кога имаме k множества B_j и да докажеме, тогаш, дека *(1)* е точно и за $k+1$ такви множества, зошто од тоа, според принципот на математичката индукција (или кратко: индуктивно) ќе следува дека *(1)* е точно за секој природен број k. Покрај претпоставката дека *(1)* е точно за k, во доказот ќе го искористиме и дистрибутивниот закон на унијата спрема пресекот, како и асоцијативниот закон за пресекот:

$$\begin{aligned}
&A\cup(B_1\cap B_2\cap\dots\cap B_k\cap B_{k+1}) =\\
&= A\cup((B_1\cap B_2\cap\dots\cap B_k)\cap B_{k+1}) =\\
&= (A\cup(B_1\cap B_2\cap\dots\cap B_k))\cap(A\cup B_{k+1}) =\\
&= ((A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap\dots\cap(A\cup B_k))\cap(A\cup B_{k+1}) =\\
&= (A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap\dots\cap(A\cup B_k)\cap(A\cup B_{k+1}).■
\end{aligned}$$

Да докажеме уште едне особина што овде ќе ни користи:

Теорема 1.2.2.

Нека се $A_1,A_2,\dots,A_k$ *конечни множества со по* $p_1,p_2,\dots,p_k$ *(различни) елементи. Тогаш директниот производ* $A_1\times A_2\times\dots\times A_k$ *има* $p_1\cdot p_2\cdots p_k$ *различни елементи*

Доказ. Овде на двапати ќе го примениме принципот на математичката индукција. Прво ќе земеме $k=2$, т.е. теоремата ќе ја докажеме за директен производ од две множества. Така, го разгледуваме директниот производ $A\mathrm{x}B$ при претпоставка дека A има a, а B има b елементи. Ке го примениме принципот на индукцијата по бројот на елементите од B. Ако B има 1 елемент, т.е. $B=\{y\}$, а ако A има a елементи, $A=\{x_1,x_2,\dots,x_a\}$, ќе добиеме дека $A\mathrm{x}B=\{(x_1,y),(x_2,y),\dots,(x_a,y)\}$, така што и $A\mathrm{x}B$ има $a=a\cdot 1$ елементи. Претпоставуваме дека теоремата е точна кога A има a елементи и кога B има b елементи, а ќе земеме множество B_1 кое го содржи цело B и има точно еден елемент повеќе. Ако A е како и погоре, $B=\{y_1,y_2,\dots y_b\}$, ќе земеме $B_1=B\cup\{y_{b+1}\}$. Според теоремата 1.1.8. имаме дека

$$A\mathrm{x}B_1 = A\mathrm{x}B\cup A\mathrm{x}\{y_{b+1}\}.$$

Множествата $A\mathrm{x}B$ и $A\mathrm{x}\{y_{b+1}\}$ се дисјунктни, така што бројот на елементите од нивната унија е еднаков на збирот од елементите на тие две множества. По претпоставка $A\mathrm{x}B$ има $a\cdot b$ елементи, а погоре видовме дека $A\mathrm{x}\{y_{b+1}\}$ има a елементи, така што $A\mathrm{x}B_1$ ќе има $a\cdot b+a=a(b+1)$ елементи, со што за овој случај доказот е комплетиран.

Да претпоставиме, сега, дека $B=A_1\mathrm{x}A_2\mathrm{x}\dots\mathrm{x}A_k$ има $p_1\cdot p_2\cdots p_k$ елементи и да го разгледаме директниот производ $A_1\mathrm{x}A_2\mathrm{x}\dots\mathrm{x}A_k\mathrm{x}A_{k+1}$, при што A_{k+1} има p_{k+1} елементи. Лесно може да се види дека множествата $B\mathrm{x}A_{k+1}$ и $A_1\mathrm{x}A_2\mathrm{x}\dots\mathrm{x}A_k\mathrm{x}A_{k+1}$ имаат ист број елементи. Бидејќи по претпоставка B има $p_1\cdot p_2\cdots p_k$ елементи, според оваа теорема применета на случај од директен производ од две множества, ќе добиеме дека директниот производ од $k+1$ множество има $(p_1\cdot p_2\cdots p_k)\cdot p_{k+1}=$ $=p_1\cdot p_2\cdots p_k\cdot p_{k+1}$ елементи.■

1.3. Варијации

Нека A е множество со p различни елементи. Секој елемент на директниот производ AxAx...xA (A земено k пати како фактор) го викаме **варијација** со повторување од класа k од p-те елементи на A. Да го означиме со $\overline{V}_p^k$ бројот на сите варијации со повторување од класа k од едно множество со p елементи. Според теоремата 1.2.2. имаме:

Теорема 1.3.1.

$$\overline{V}_p^k = p^k. \blacksquare$$

За означувањето на варијациите, обично, не се користи ознаката за елементи на директниот производ; варијацијата $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, на пример, се означува просто со $a_1a_2\ldots a_p$.

Пример 1.3.2. Да ги најдеме сите варијации од класа 3 од елементите на множеството $A=\{a,b,c,x\}$:

aaa aab aac aax
aba abb abc abx
aca acb acc acx
axa axb axc axx
baa bab bac bax
bba bbb bbc bbx
bca bcb bcc bcx
bxa bxb bxc bxx
caa cab cac cax
cba cbb cbc cbx
cca ccb ccc ccx
cxa cxb cxc cxx
xaa xab xac xax
xba xbb xbc xbx
xca xcb xcc xcx
xxa xxb xxc xxx.

Начинот на кој во горниот пример се запишани варијациите со повторување овозможува да се види начинот на кој тие можат да се образуваат. Имено, во првите четири реда се зема на прво место првиот елемент од првата од редиците на приложената шема, а во одделните редици од оваа четворка се земаат на второ место елементите од втората редица од шемата (на пример, во втората од првите четири редици насекаде на второ место е елементот b). На трето место во варијациите во секоја од редиците наизменично се земаат елементите од третата редица од шемата. Втората четворка редици на прво место го имаат вториот елемент од првата редица од шемата итн.

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & x\\ a & b & c & x\\ a\ldots & b\ldots & c\ldots & x\\ a & b & c & x \end{array}$$

Секоја варијација од класа k и p елементи, во која сите елементи се различни, се вика **варијација** без повторување од класа k и p елементи.

Пример 1.3.3. Сите варијации без повторување од класа 3 од елементите на множеството $A=\{a,b,c,x\}$ се дадени со:

$$\begin{array}{cccccc} abc & abx & acb & acx & axb & axc\\ bac & bax & bca & bcx & bxa & bxc\\ cab & cax & cba & cbx & cxa & cxb\\ xab & xac & xba & xbc & xca & xcb. \end{array}$$

Ако со V_p^k го означиме бројот на сите варијации без повторување од класа k и p елементи (овде мора $k\le p$), тогаш:

Теорема 1.3.4.

$$V_p^k = p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1).$$

Доказ. Една варијација без повторување од класа k од p-те елементи на множеството A можеме да ја сметаме како елемент од директниот производ $A \times A \times \ldots \times A$ (A земено k пати) при кој сите компоненти се различни. Таквите елементи можат да се добијат на тој начин што на прво место може да сеземе кој било од елементите на A; откако првата компонента е избрана, на второ место може да се земе кој било од останатите $p-1$ елементи на A итн. Според тоа, бројот на сите варијации без повторување од класа k од p елементи е еднаков со бројот на елементите од директниот производ од k множества $B_1, B_2, \ldots, B_k$ каде што B_1 има p елементи, B_2 има $p-1$ елементи итн. B_k има $p-k+1$ елементи. Оттука, точноста на оваа теорема следува од теоремата 1.2.2.■

1.4. Пермутации

Секоја варијација без повторување од класа k од k елементи се вика **пермутација** без повторување од k елементи.

Пример 1.4.1. Сите пермутации без повторување од елементите на множеството $A=\{a,b,c,x\}$ се:

$$
\begin{array}{cccccc}
abcx & abxc & acbx & acxb & axbc & axcb \\
bacx & baxc & bcax & bcxa & bxac & bxca \\
cabx & caxb & cbax & cbxa & cxab & cxba \\
xabc & xacb & xbac & xbca & xcab & xcba.
\end{array}
$$

Да го означиме со P_k бројот од сите пермутации без повторување од k елементи. Од теоремата 1.3.4 следува дека:

Теорема 1.4.2.

$$P_k = k(k-1)(k-2)\ldots2.1=k!.\blacksquare$$

Овде производот од првите k природни броеви го означивме со $k!$ (читаме "ка факториел"). По дефиниција ќе земеме да е $0!=1$.

Нека A е множество што има k елементи. Да ги разделиме овие елементи во p групи, т.е. да го претставиме A како дисјунктна унија од p подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Нека k_j е бројот на елементите на подмножеството A_j, $j=1,2,\ldots,p$. Мора да биде $k_1+k_2+ +\ldots+k_p=k$. Да ги замениме сите елементи од подмножеството A_j со еден ист елемент a_j, сметајќи и натаму дека ова множество има k_j елементи. Во секоја пермутација од множеството A, по ваквата замена, ќе има и исти елементи. На тој начин се добиваат **пермутациите** со повторување. Бројот на сите различни пермутации од ред k со повторување, каде што a_j-тиот елемент се повторува k_j пати, $j=1,2,\ldots,p$, ќе го означуваме со $P_k(k_1,k_2,\ldots,k_p)$. Ќе докажеме дека:

Теорема 1.4.3.

$$P_k(k_1,k_2,\ldots,k_p) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_p!} .$$

Доказ. Да избереме една од пермутациите со повторување. Ако во неа ги менуваме местата на истите меѓу себе елементи, нема да добиеме нова пермутација со повторување. Да замислиме дека елементите што ги заменивме со a_1 се различни; од нив можат да се образуваат $k_1!$ премутации без повторување. Значи на една пермутација со повторување и одговараат $k_1!$ пермутации без повторување што се добиваат од менувањето на местата на елементите заменети со a_1. Слична постапка можеме да спроведеме за секој од елементите $a_2,\ldots,a_p$. На тој начин, со секоја пермутација со повторување можеме да добиеме $k_1!k_2!\ldots k_p!$ пермутации без повторување од k елменти. Така ќе ги добиеме сите пермутации без повторување од k елементи, а нив ги има $k!$. Според тоа, $k_1!k_2!\ldots k_p!.P_k(k_1,k_2,\ldots k_p)=k!$, од каде и следува доказот.∎

1.5. Комбинации

Ако A е конечно множество со p елементи, тогаш секое негово подмножество што се состои од k елементи го викаме **комбинација** без повторување од класа k од дадените p елементи. Бројот на сите комбинации без повторување од класа k од p елементи ќе ги означиме со C_p^k и ќе докажеме дека:

Теорема 1.5.1.

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Доказ. Нека е $A=\{a_1,a_2,...,a_p\}$ и нека $\{a_1,a_2,...a_k\}$ е една комбинација без повторување од класа k од елементите на A. Јасно е дека $k\le p$. Бројот на сите пермутации од елементите на избраната комбинација е еднаков на $k!$. Секоја од овие пермутации претставува варијација без повторување од класа k од p-те елементи на A. Од друга страна, со помош на сите комбинации од класа k од p-те елементи на A можат на опишаниот начин да се добијат сите варијации без повторување од класа k од тие p елементи. Така добиваме дека $k!.C_p^k=V_p^k$, а оттука и

$$C_p^k = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ---\cdot(p-k)}{(p-k)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

За да го завршиме доказот, десната страна од горната формула ќе ја трансформираме така што и броителот и именителот ќе ги помножиме со $(p-k)!$.∎

Ако во една комбинација без повторување од класа k од p елементи земеме некои од елементите да бидат меѓу себе еднакви, ќе добиеме **комбинација** со повторување.

Пример 1.5.2. Да ги најдеме сите комбинации со повторување од класа 2 од елементите од множеството $A=\{a,b,c,x\}$:

$$\{a,a\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,x\},\ \{b,b\},$$
$$\{b,c\},\ \{b,x\},\ \{c,c\},\ \{c,x\},\ \{x,x\}.$$

За пресметување на сите комбинации со повторување од класа k од p елементи (овде може $k>p$), точна е следната формула:

Теорема 1.5.3.

$\overline{C}^{k}_{p}=C^{k}_{p+k-1}$, каде со $\overline{C}^{k}_{p}$ е означен бројот на сите комбинации со повторување од класа k од p елементи.

Доказ. И за овој доказ ќе користиме индукцијата. Индуктивната постапка ќе ја спроведеме по бројот k што ја означува класата на комбинацијата. За $k=1$ комбинациите со повторување се во исто време и комбинации без повторување, така што и едните и другите ги има ист број, еднаков на бројот p од елементите на даденото множество. За $k=1$ горната формула е точна, зошто со замена добиваме $\overline{C}^{k}_{p}=C^{k}_{p}$, т.е. $\overline{C}^{1}_{p}=C^{1}_{p}$. Да претпоставиме дека таа формула е точна за комбинациите од класа k и да докажеме дека ќе биде точна и за комбинациите со повторување од класа $k+1$. Комбинациите од класа $k+1$ ќе ги формираме на следниов начин: кон дадена комбинација со повторување од класа k од p елементи прво ќе ги додадеме, поединечно, сите елементи што веќе се содржат во таа комбинација; на тој начин ќе добиеме k комбинации со повторување од класа $k+1$. Натаму, со избраната комбинација од класа k ќе образуваме уште p комбинации со повторување додавајќи ги сите елементи од даденото множество. Така, со секоја комбинација со повторување од класа k ќе добиеме $k+p$ комбинации со повторување од класа $k+1$. Меѓутоа, ако на овој начин ги формираме комбинациите од класа $k+1$, тогаш во неа се содржани елементите $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}$ по $p_1, p_2, \ldots, p_t$ пати, така што мора $p_1+p_2+\ldots+p_t=k+1$, а таа комбинација е добиена p_1 пати со додавање на a_{j_1} кон некоја, соодветна комбинација со повторување од класа k, p_2 пати е добиена со додавање на a_{j_2} итн. p_t пати е добиена со додавање на a_j итн. p_t пати е добиена со додавање на a_{j_t} Според тоа, заклучуваме дека

$$\frac{p+k}{k+1}\cdot\overline{C}^{k}_{p} = \overline{C}^{k+1}_{p},$$

а оттука, земајќи ја предвид и индуктивната претпоставка следува дека $\overline{C}_p^{k+1}=C_{p+k}^{k+1}$, со што е теоремата е докажана.■

1.6. Биномна формула

Броевите C_p^k често се среќаваат под името **биномни** коефициенти, зошто тие навистина се јавуваат како коефициенти во разложувањето на биномот $a+b$ степенуван на p-ти степен. Пред да ја изнесеме формулата за определување на $(a+b)^p$, ќе одбележиме една особина на биномните коефициенти.

Теорема 1.6.1.

$$C_p^k+C_p^{k+1} = C_{p+1}^{k+1}.$$

Доказ. Земајќи ја предвид дефиницијата на биномните коефициенти (т.е. теоремата 1.5.1.), директно добиваме:

$$\begin{aligned} C_p^k+C_p^{k+1} &= \frac{p!}{k!(p-k)!}+\frac{p!}{(k+1)!(p-k-1)!} = \\ &= \frac{p!}{k!(p-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{p-k}+\frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \frac{p!}{k!(p-k-1)!}\cdot\frac{p+1}{(p-k)(k+1)} = \\ &= \frac{p!(p+1)}{k!(k+1).(p-k-1)!(p-k)} = \\ &= \frac{(p+1)!}{(k+1)!(p-k)!} = C_{p+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

Следната особина е позната под името **биномна** формула, при што, по дефиниција, земаме да биде $C_p^0=1$, за кој било природен број p.

Теорема 1.6.2.

За кои било два реални броја a и b и кој било природен број p точна е формулата:

$$(a+b)^p=C_p^0\cdot a^p + C_p^1\cdot a^{p-1}\cdot b + C_p^2\cdot a^{p-2}\cdot b^2 +\ldots+ C_p^{p-2}\cdot a^2\cdot b^{p-2} + C_p^{p-1}\cdot a\cdot b^{p-1} + C_p^p\cdot b^p.$$

Доказ. И оваа теорема ќе ја докажеме со методот на математичката индукција. За $p=1$ го имаме тривијалниот идентитет $(a+b)^1=a+b$. Нам ни е познато дури и дека биномната формула е точна и за $p=2$, зошто поради $C_2^0=C_2^2=1$ и $C_2^1=2$ го добиваме познатото равенство $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Да претпоставиме дека биномната формула е точна кога степеновиот показател е еднаков на p. Земајќи ја предвид и теоремата 1.6.1, ќе добиеме:

$$(a+b)^{p+1}=(a+b)^p\cdot(a+b)=$$

$$=(C_p^0\cdot a^p + C_p^1\cdot a^{p-1}b +\ldots+ C_p^{p-1}\cdot a\cdot b^{p-1} + C_p^p\cdot b^p)\cdot(a+b) =$$

$$= C_p^0\cdot a^{p+1} + C_p^1\cdot a^p\cdot b + C_p^2\cdot a^{p-1}b^2 +\ldots+ C_p^{p-1}\cdot a^2\cdot b^{p-1} +$$

$$= + C_p^p\cdot a\cdot b^p + C_p^0\cdot a^p\cdot b + C_p^1\cdot a^{p-1}b^2 +\ldots+ C_p^{p-2}\cdot a^2\cdot b^{p-1} +$$

$$= + C_p^{p-1}\cdot a\cdot b^p + C_p^p\cdot b^{p+1} = C_{p+1}^0\cdot a^{p+1} + C_{p+1}^1\cdot a^p\cdot b +\ldots+$$

$$= + C_{p+1}^p\cdot a\cdot b^p + C_{p+1}^{p+1}\cdot b^{p+1},$$

каде што C_p^0 и C_p^p се заменети со C_{p+1}^0 и C_{p+1}^{p+1}, соодветно, зошто секој од овие коефициенти е еднаков на 1.■

Пример 1.6.3. Да го извршиме степенувањето во $(x-y)^4$. Најнапред ги пресметуваме биномните коефициенти: $C_4^0=C_4^4=1$, $C_4^1=C_4^3=\frac{4!}{1!.3!}=4$ и $C_4^2=\frac{4!}{2!.2!}=6$. Заменувајќи во биномната формула x наместо a и $-y$ наместо b, ќе добиеме:

$$(x-y)^4 = x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4.$$

1.7. Вежби

1.7.1. Еден телевизиски режисер треба да состави 25-минутна програма во која, по ред, треба да бидат застапени емисии од хумор, музика и соопштенија со време, за секоја од нив, кратно со 5 минути (на пример, хумор 10 минути, музика 5 минути и соопштенија 10 минути). Да се опишат:

а) множеството од сите можни распределби на времето по одделни емисии при што сите три вида емисии мора да бидат застапени;

б) множеството од сите можни програми при кои на хумор е дадено повеќе време одошто на соопштенија;

в) множеството од сите програми при кои за музика е одделено повеќе време одошто за хумор или соопштенија;

г) множеството од сите програми при кои на соопштенија им е дадено точно 5 минути.

Каков однос постои помеѓу множествата од а), б), в) и г) ?

1.7.2. Две девојки, X и Y, и три момчиња, A, B и C, сакале да направат заедничка фотографија така што сите да стојат во еден ред и наизменично да бидат наредени девојчињата и момчињата. Да се најде множеството на сите можни распореди, а потоа да се опишат и:

а) множеството на сите распореди при кои Y и B ќе стојат еден до друг;

б) множеството на сите распоери при кои X е меѓу A и C;

в) множеството на сите распореди при кои B е во центарот;

г) множеството на сите распореди при кои момчиња се на краевите.

Да се најде каков однос постои меѓу множествата од оваа задача.

1.7.3. Да се конструираат дијаграми на Вен за секое од множествата: $A\setminus B$, $\overline{A}$, $A\cup\overline{B}$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$.

1.7.4. Да се конструира дијаграм на Вен со помош на три множества што имаат заеднички елементи така што, областа (правоаголникот) што го претставува универзалното множество ја делат на 8 подобласти, а потоа секоја од тие подобласти да се опише со помош на дадените три множества.

1.7.5. На прва година студии на Математичкиот факултет се запишани 60 студенти од кои, 21 девојки и 39 момчиња. Од сите 60 студенти предавањата редовно ги следат 48, додека 6 девојки не се многу заинтересирани за студирање, па нередовно ги следат предавањата. Колку студенти-момчиња нередовно ги следат предавањата? Решението да се проследи со соодветните дијаграми на Вен.

1.7.6. Во една населба живеат 50 семејства. 35 семејства имаат телевизиски приемници, 20 семејства радиоприемници, а 15 семејства транзисторски приемници. 15 семејства имаат и телевизиски и радио приемници, а 12 семејства имаат радио и транзисторски приемници. Натаму, 8 семејства имаат и телевизиски и радио и транзисторски приемници. Колку семејства немаат ни телевизиски, ни радио, ни транзисторски приемник? Решението да се проследи со Венови дијаграми.

1.7.7. Да се најде секое од множествата: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\times A$, $A\times B$, $B\times A$, $B\times B$, ако:

а) $A=\{c,k,p\}$, $B=\{x,y,k\}$;

б) $A=\emptyset$, $B=\{x,y,k\}$.

1.7.8. Дадено е множеството $A=\{a,b,c,x,y,o,p,k,t\}$. Кои од следниве фамилии подмножества од M образуваат дисјунктна поделба на M? Да се образложи тврдењето во секој од дадените случаи.

а) $A_1=\{k,t\}$, $A_2=\{o,p\}$, $A_3=\{a,b,c,x,y\}$;

б) $A_1=\{a,c,y,p,t\}$, $A_2=\{b,x,o,k\}$, $A_3=\{p,k,t\}$;

в) $A_1=\{a\}$, $A_2=\{b,c\}$, $A_3=\{x,y,o\}$, $A_4=\{p,k,t\}$.

1.7.9. Една монета (1 динар) се фрла три пати во воздух и по редот на фрлањето се регистрираат резултатите (на пример, ако првиот и третиот пат пднала глева, а вториот пат писмо, тогаш исходот на трите фрлања го регистрираме со ГПГ). да се најде множеството М на сите можни исходи од трите фрлања на монетата, а потоа да се изврши дисјунктна поделба на М според:

а) позицијата на првото појавување на глава;

б) според честотата (фреквенцијата) на паѓањето глава во трите фрлања на монетата.

1.7.10. Да се докаже:

а) ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, тогаш $A\subseteq C$;

б) ако $A\subseteq B$ и $B\subset C$, тогаш $A\subset C$;

в) ако $A\subset B$ и $B\subseteq C$, тогаш $A\subset C$;

г) ако $A\subseteq C$ и $B\subseteq C$, тогаш $A\cup B\subseteq C$;

д) ако $A\subseteq B$ и $A\subseteq C$, тогаш $A\subseteq B\cap C$.

1.7.11. Да се покаже дека $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

1.7.12. Да се докаже дека, ако $A\cup B=C\cup B$ и $A\cap B=C\cap B$, тогаш е $A=C$. Да се дадат примери каде, една од горните претпоставки е задоволена, но сепак да биде $A\neq C$.

1.7.13. Да се проверат следниве особини:

а) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$;

б) $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$;

в) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;

г) $A\subseteq B$ ако и само ако $\overline{B}\subseteq\overline{A}$;

д) $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$.

1.7.15. Со помош на методот на математичката индукција да се докажат следниве идентитети:

а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

в) $A_1\cup(A_2\cup(A_3\cup\ldots\cup(A_{k-1}\cup A_k)\ldots)) = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, каде што на десната страна стои унијата на множествата $A_1, A_2, \ldots, A_k$ земени во дадениот распоред но со произволно разместени загради;

г) исто како в) за операцијата пресек на множества;

д) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_k}$, каде $j_1, j_2, \dots, j_k$ е произволна пермутација на броевите $1, 2, \dots, k$ (при запишување на горното равенство е земено предвид дека е точно равенството од вежбата в));

е) исто како д) за пресекот на множества.

1.7.16. Да се напишат сите варијации со и без повторување од класа 3 од елементите на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.7.17. Колку троцифрени броеви можат да се образуваат од цифрите 1, 2, ..., 9 ако:

а) во секој од броевите цифрите се различни;

б) броевите можат да имаат и еднакви цифри.

1.7.18. На одделни картички се запишани цифрите од 1 до 9, одделно. Од сите картички произволно се извлечени 4 и наредени, од лево во десно, по редот на извлекувањето. На тој начин ќе се добие четвороцифрен број. На колку начини може да се изврши извлекувањето за да се добие парен четвороцифрен број?

1.7.19. На еден фудбалски тим од првата лига му останале да одигра уште 6 натпревари до крајот на првенството. За да не испадне од лигата, тимот требал да освои барем 5 бода. На колку начини може тимот да се спаси од испаѓање од лигата?

1.7.20. Колку пермутации можат да се образуваат од зборот АВНОЈ? Дали некоја од нив има некакво значење?

1.7.21. Колку петоцифрени броеви можат да се образуваат од цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 така што секогаш да бидат употребени сите цифри, а во ниеден од броевите првата цифра да не биде 3 или 5?

1.7.22. 8 знаменца се наредени на еден јарбол. Секој распоред на знаменцата претставува определен сигнал. Колку сигнали можат да бидат предадени со знаменцата ако меѓу нив има 4 бели, 3 црвени и 1 сино знаме?

1.7.23. На колку начини може да се напише изразот $a^3 \cdot b^2 \cdot c^3$ како производ од реалните броеви a,a,a,b,b,c,c,c?

1.7.24. На колку начини можат да се распоредат на кружна маса k луѓе? Во задачата не е важно кој на кое седиште е поставен, туку само редот по кој луѓето се распоредени.

1.7.25. Од 8 дадени броеви треба да се состават задачи при што, меѓу секои два од дадените броеви треба да се стави еден од знаците "+" или "-". Колку задачи можат да се состават ако сите 8 броеви се различни и ако се употребат 4 знаци "+" и 3 знаци "-"?

1.7.26. Една градина, во облик на правоаголник, е засадена со јаболки при што меѓу засадените дрва се направени 13 патеки паралелни со едниот пар страни на правоаголникот и 12 патеки паралелни со другиот пар страни. Во еден агол е влезната врата, а во спротивниот агол од градината, влезната врата во куќичката изградена надвор од градината. На колку начини може да се дојде од влезната врата во градината до куќичката ако се оди само по патеките?

1.7.27. Да се напишат сите комбинации од класа 3, со и без повторување, од елементите на множеството {1,2,3,4}.

1.7.28. На еден турнир се одиграни 45 партии шах. Според правилата на турнирот секој учесник одиграл по една партија со секој од другите учесници. Колку учесници имало на турнирот?

1.7.29. Колку дијагонали вкупно можат да се повлечат во еден десетоаголник?

1.7.30. Избрани се k+2 точки во една рамнина, од кои што никои три точки не лежат на една права. Со спојување на по k точки се добиени 10 k-аголници. Колку точки се избрани во рамнината?

1.7.31. За избор на делегација во една организација на здружен труд се предложени 18 кандидати, од кои 7 се жени. Потребно е да се изврши избор на 9 од предложените кандидати.

а) На колку начини може да се изврши изборот?

б) На колку начини може да се изврши таков избор што во избраните кандидати да има точно 3 жени?

в) На колку начини може да се изврши избор така што во избраните да има барем 3 жени?

1.7.32. На еден саем е организирана лотарија во која добитникот на премијата може да избере колку што сака од изложените во една витрина 6 предмети. Претпоставувајќи дека добитникот мора да избере барем 1 предмет, да се пресмета на колку начини може да се изврши изборот?

1.7.33. Во еден шпил од 52 карти за играње има по 4 еднакви по вредност, но различни по боја карти (различни по боја се сметаат и две црвени, или две црни карти што се означени со различни фигури, на пример "каро" и "херц"). Од овие 52 карти треба да се изберат 3. На колку начини може да се изврши изборот така што:

а) сите три карти да имаат иста вредност (на пример сите три да се "асови");

б) сите три карти да бидат од иста боја;

в) две карти да бидат исти по вредност, а третата да биде ас и да се разликува по вредност од другите две.

1.7.34. Во еден тест од 10 прашања одговорот на секое прашање се дава само со "да" или "не". Точниот одговор на 7 од прашањата е "да", а на 3 - "не". Еден учесник во тестирањето дочул од страна дека 7 пати требал да одговори со "да" а 3 пати со "не", меѓутоа тој одговорите ги давал сосема случајно зашто не ја познавал материјата за која се спроведува тестирањето. По предавањето на пополнетиот лист за тестирање, доколку во одговорите имало неточен одговор на барем едно од прашањата, учесникот морал повторно да одговара на истиот тест. Ова враќање продолжило се додека учесникот не дал точни одговори на сите прашања. Се покажало дека учесникот дошолдо точните одговори дури кога ја зел предвид последната можност. Колку пати учесникот го пополнувал листот со кој се вршело тестирањето?

1.7.35. Да се изврши степенувањето: $(a+b)^5$, $(a-b)^6$.

II. ВЕРОЈАТНОСТ НА СЛУЧАЈНИТЕ НАСТАНИ

Откако ќе појасниме што е случаен настан, ќе се задржиме на проблемот за определување и оценување на можностите за настапување на случајните настани. Во таа смисла, покрај статистичката и класичната дефиниција за пресметување на веројатности, ќе ја изнесеме и геометриската веројатност, а ќе ја појасниме и идејата за аксиоматско изградување на теоријата на веројатноста.

2.1. Случајни настани

Често во теоријата на веројатноста и, особено, во нејзината примена се среќава терминот **случаен експеримент.** За да појасниме што ќе подразбираме под овој термин, ќе изнесеме неколку примери:

Пример 2.1.1. Ако фрлиме една монета во воздух, по нејзиното паѓање на некоја рамнина, на горната страна ќе се појави или "грб" или "писмо". Со фрлање на монетата и нејзиното дочекување на рамнина сме извршиле еден "експеримент" чиј што резултат може да биде еден од "настаните": а) на горната страна од монетата се појавил "грб", б) на горната страна од монетата се појавило "писмо".

Пример 2.1.2. Определено количество вода се загрева на температура од 100°C при атмосферски притисок од 760mm, а како резултат на тоа водата почнува да врие. И овде е реализиран еден "експеримент" чиј што резултат е "водата врие".

Пример 2.1.3. За успешно полетување на авионите, покрај исправноста на техничките уреди на аеродромот, битни се и временските прилики. Да претпоставиме дека сите технички уреди се исправни. Одлука за полетување на авионот, според тоа, ќе донесеме по едно "набљудување" чиј резултат ќе биде да се определиме авионот или "да полета", или "да не полета".

Пример 2.1.4. Да земеме "експериментот" да се состои во фрлање на рамнина (маса) две коцки за играње. Како можеме да го опишеме резултатот од овој експеримент? Еден од начините, за кој покасно ќе видиме дека е погоден, би бил; одбележувајќи ги коцките така што едната ќе ја сметаме за прва (обоена на пример во црвена боја), а другата за втора (обоена бело), ќе го забележиме бројот на точките на секоја од нив. Во таа смисла, секој исход односно резултат може да се претстави како подреден пар (x,y) каде x е бројот на точките што се појавиле на првата, а y бројот на точките на втората коцка. Така, сите можни исходи на овој експеримент можат да се опишат со множеството

$$\Omega=\{(x,y)\}|x,y=1,2,3,4,5,6\}.$$

Од изнесените примери може да се претпостави дека ние под терминот **експеримент** ќе подразбираме, просто, реализација на определено множество, комплекс од услови. Така, терминот експеримент го сфаќаме во многу широка смисла; тој ги вклучува во себе и експериментите што се организираат и реализираат во лабораторија, но ги вклучува, исто така, и разните набљудувања при кои експериментаторот има пасивна улога. Друга особеност што може да се забележи е таа што резултатите на експериментите не се еднозначно определени. Теоријата на веројатноста ги изучува математичките модели на ваквите експерименти. Меѓутоа, не сите експерименти со нееднозначно определени исходи се погодни за математичка анализа. Да појасниме, тогаш кои експерименти ќе претставуваат интерес за математичко изучување.

Нека E е некој експеримент и нека A е произволен исход за експериментот E. Натаму, за секој од исходите на даден експеримент E ќе речеме дека е **настан** што е во врска со E. Да претпоставиме дека

1) експериментот E може (во принцип) неограничен број пати да се повтори при еднакви услови.

Натаму, да го повториме експериментот E p пати. Настанот A што е во врска со експериментот E нека настапил k пати во серијата од p експерименти E. Односот $\frac{k}{p}$ ќе го наречеме **релативна честота** за настанот A и ќе пишуваме $W(A)=\frac{k}{p}$. Да претпоставиме дека:

2) при кои било две серии од по p_1 односно p_2 експерименти E, при доволно големи вредности на p_1 и p_2, релативните честоти $W_1(A)=\frac{k_1}{p_1}$ и $W_2(A)=\frac{k_2}{p_2}$ незначително се разликуваат една од друга.

За експериментот E за кој се задоволени својствата 1) и 2) ќе велиме дека е **случаен** експеримент. За настанот A за кој е задоволено својството 2), кое ја изразува статистичката стабилност на експериментот E, ќе велиме, исто така, дека е **случаен настан**. За нас натаму ќе бидат од интерес само случајните експерименти. Тргнувајќи од релативната честота, на секој случаен настан ќе му придружиме еден реален број (што се наоѓа меѓу 0 и 1) со кој ќе ги изразуваме шансите за настапувањена соодветниот случаен настан при реализацијата на експериментот со кој тој е во врска.

Пред да преминеме на воведувањето на поимот за веројатност на случајните настани, ќе се задржиме на операциите со случајни настани. Сите настани што во даден момент ги разгледуваме заедно, ќе сметаме дека се во врска со ист експеримент, без посебно да го споменуваме тоа.

Нека се A и B два случајни настани. Велиме дека настанот A го **повлекува** настанот B, или дека B **следува** од A, ако секогаш кога ќе настапи настанот A настапува и настанот B; во овој случај пишуваме $A \subseteq B$. Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, велиме дека настаните A и B се **еквивалентни** и пишуваме $A=B$.

Пример 2.1.5. Во експериментот од примерот 2.1.4. да ги разгледаме следниве два настани: A - збирот на точките што се појавиле на двете коцки е парен, B - на двете коцки се појавиле по еднаков број точки. Овде имаме дека $B \subseteq A$ зошто ако настапи настанот B, т.е. ако на двете коцки се појавиле по ист број точки, тогаш нивниот збир сигурно е парен па, значи, тогаш ќе мора да настапи и настанот A. Да го означиме со C настанот што ќе настапи ако на секоја од двете коцки се појавил непарен број точки. Тогаш, пак, имаме дека $C \subseteq A$ зошто збир од два непарни броја е парен број.

Да го дефинираме збирот од два случајни настани A и B. Имено, настанот C што настапува тогаш и само тогаш кога ќе настапи барем еден од настаните A и B го викаме **збир** или **сума** од настаните A и B и го означуваме со $C=A \cup B$.

Пример 2.1.6. Нека се A, B и C настаните од примерот 2.1.5. Забележуваме дека $A \neq B \cup C$ зошто, ако настапил A тогаш може да настапи B, може да настапи C, но може да настапи и настанот K - на секоја од двете коцки се појавил парен број точки. Сега можеме да тврдиме дека $A=C \cup K$. Имено, ако настапи кој било од настаните C и K тогаш мора да настапи и A. Обратно, ако настапи A тогаш мора да настапи барем еден од настаните C и K зошто парен збир се добива само кога и двата собирци се парни или и двата се непарни.

Нека се, пак, A и B два дадени случајни настани. Случајниот настан M што настапува тогаш и само тогаш кога едновремено ќе настапат A и B го викаме **производ** од настаните A и B; пишуваме $M=AB$ (понекогаш производот наместо AB се означува како $A\cap B$). Може да се случи настаните A и B да не можат заеднички да настапат; во тој случај за A и B велиме дека се **дисјунктни** настани.

На ова место ќе издвоиме два посебно интересни случајни настани. При дефиницијата на производ дојдовме до ситуација производот некогаш да не постои - имено, кога настаните-множители се заемно дисјунктни. Ќе ја елиминираме оваа незгода со воведување на **невозможниот** настан кој го сваќаме како случаен настан што никогаш не може да настапи. Натаму овој настан ќе го означуваме со $\emptyset$. Дуално, случајниот настан што настапува секогаш кога ќе се реализира даден експеримент го викаме **сигурен** настан. Сигурниот настан ќе го означуваме со Ω. При експериментот од примерот 2.1.2, настанот што настапува кога водата ќе проврие е сигурен настан што е во врска со тој експеримент.

Имајќи го предвид погоре кажаното, **за настаните A и B** имаме дека се дисјунктни ако и само ако $AB=\emptyset$. Ако C е збир од случајните настани A и B и ако A и B се дисјунктни настани, тогаш ќе пишуваме $C=A+B$. Во примерот 2.1.6. имаме, всушност, $A=C+K$.

Под **разлика** од случајните настани A и B, земени во дадениот ред, ќе го подразбираме случајниот настан H што ќе настапи тогаш и само тогаш кога ќе настапи A и нема да настапи B, во овој случај пишуваме $H=A\setminus B$. Специјално, разликата на сигурниот настан Ω и случајниот настан A ќе ја означуваме со $\overline{A}$ и ќе ја викаме случаен настан што е **спротивен** на настанот A; $\overline{A}=\Omega\setminus A$. Бидејќи сигурниот настан настапува секогаш, спротивниот настан $\overline{A}$ ќе настапи тогаш и само тогаш кога настанот A нема да настапи. Спротивниот настан може да се окарактеризира и на следниов начин:

$$A\bar{A}=\emptyset,\quad A+\bar{A}=\Omega.$$

Да забележиме, на крајот, дека разликата може да се определи со помош на производот од едниот и настанот што е спротивен на другиот случаен настан: $A\backslash B=A\bar{B}$.

2.2. Статистичка веројатност

Да се вратиме на честотата на случајните настани. Ако A е случаен настан, од дефиницијата за случајни настани следува дека релативните честоти на A при доволно големи серии од експерименти незначително се менуваат од една до друга серија. Релативната честота на A значи зависи не само од A, туку и од серијата експерименти. Според тоа, релативната честота не е еднозначно определена од настанот A иако таа може да служи како "мера" за можностите за настапување на A. Имено, ако се A и B два случајни настани и ако релативните честоти на A се поголеми од релативните честоти на B тогаш при реализирањето на експериментот со кој тие се во врска, почесто ќе настапува A одошто B. Во ова размислување како да постои мала незгода. Имено, споредувајќи ги релативните честоти на A и B ние ја исклучуваме можноста еднаш на A да и одговара поголема релативна честота, а друг пат, при друга серија експерименти, поголема честота да има B. Оваа незгода практично не пости ако ја земеме предвид особината 2) од претходната точка што ја поседуваат релативните честоти. Поради случајноста на настаните A и B, релативните честоти на секој од нив, само незначително се разликуваат. Другата незгода со релативните честоти, нивната еднозначност за даден настан, можеме да ја елиминираме, пак благодарејќи на својството 2), така што како "мера" на можностите за настапување на даден случаен настан ќе земеме еден број околу кој осцилираат неговите релативни честоти.

Тој број, за настанот A, ќе го означуваме со $P(A)$ и ќе го викаме **веројатност** (или, статистичка веројатност) на случајниот настан A. Да земеме еден едноставен пример:

Пример 2.2.1. (според [12], стр.91) во 10 серии од по 1000 експерименти секоја, при што експериментот се состои во фрлање метална монета во воздух и се следи паѓањето на "грб", добиени се следниве резултати: во првата серија грб паднал 502 пати, во втората - 511, во третата - 497, во четвртата - 529, во петтата - 504, во шестата - 476, во седмата - 507 , во осмата - 528, во деветтата - 504 и во десеттата - 529. Може лесно да се забележи дека за секоја од овие серии е $W(\text{грб})\approx 1/2$, така што можеме да земеме дека $P(\text{грб})=1/2$.

Ќе одбележиме неколку својства за веројатноста воведена преку релативните честоти, за кои подоцна ќе видиме дека се основни, т.е. од нив ќе следуваат другите својства на веројатноста. Поради очигледното својство $W(A)\geq 0$, природно е да земеме:

$P.1$. За кој било случаен настан A: $P(A)\geq 0$.

Натаму, исто така е очигледно дека $W(\Omega)=1$, зошто ако серијата експерименти се состои од k експерименти, тогаш Ω ќе настапи k пати. Така, природно е дека

$P.2$. $P(\Omega)=1$.

Да одбележиме уште едно природно својство на веројатноста: $P(\emptyset)=0$. Последново својство, меѓутоа, не мора да се извлече од соодветното својство на релативните честоти, зошто подоцна ќе видиме дека тоа следува од другите својства на веројатноста.

На крајот, нека се A и B два дисјунктни случајни настани. Да го повториме експериментот E со кој тие се во врска p пати. Ако во серијата од p експерименти A настапи k_1 пати, а B настапи k_2 пати, тогаш поради нивната дисјунктност, $A+B$ ќе настапи k_1+k_2 пати, така што ќе имаме:

$$W(A+B) = (k_1+k_2)/p = k_1/p + k_2/p = W(A) + W(B).$$

Поради тоа можеме да земеме:

$P.3.\ P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Да одбележиме неколку својства за веројатноста што можат да се докажат со помош на својствата $P.1$ – $P.3$:

Теорема 2.2.2.

(j) $P(\emptyset)=0$;

(jj) $P(A)=1-P(\overline{A})$, *за кој било случаен настан* A;

(jjj) *ако* $A\subseteq B$ *тогаш* $P(A)\leq P(B)$;

(jv) *за кој било случаен настан* A: $0\leq P(A)\leq 1$;

(v) *за кои било два случајни настани* A *и* B

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказ. Јасно е дека $\emptyset$ и Ω се дисјунктни. Од $\Omega=\Omega+\emptyset$, со примена на $P.2$ и $P.3$ добиваме дека $1=P(\Omega)=P(\Omega+\emptyset)=P(\Omega)+P(\emptyset)= =1+P(\emptyset)$ а оттука следува дека $P(\emptyset)=0$. Тоа го докажува (j).

Веќе забележуваме дека за кој било случаен настан A, A и $\overline{A}$ се дисјунктни и дека $A+\overline{A}=\Omega$. Оттука, пак со примена на $P.2$ и $P.3$, ќе добиеме $1=P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$ од каде што и следува (jj).

Нека $A\subseteq B$. Лесно се проверува дека A и $\overline{A}B$ се дисјунктни и дека $B=A+\overline{A}B$. Применувајќи ги својствата $P.1$ и $P.3$ добиваме дека

$$P(B)=P(A+\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A}B)\geq P(A),$$

што го докажува својствот (jjj).

Да го докажеме својството (jv). Можеме да сметаме дека за кој било случаен настан A е $\emptyset\subseteq A$; мотивот за ова се состои во следново размислување: својството $\emptyset\subseteq A$ не би било точно ако може $\emptyset$ да настапи а во исто време да не настапи A – тоа, меѓутоа не може да се случи зошто $\emptyset$ никогаш не може да настапи. Натаму, од слични мотиви можеме да земеме $A\subseteq\Omega$, применувајќи го веќе докажаното својство (jjj), ќе добиеме дека $0\leq P(A)\leq 1$.

На крајот, нека се A и B произволни случајни настани. Лесно се уверуваме дека:

$$A\cup B = A+(B\setminus A) \text{ и } B = AB+(B\setminus A),$$

а оттука добиваме: $P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A)$, $P(B)=P(AB)+P(B\setminus A)$ од каде конечно следува точноста на (v).■

2.3. Простор од елементарни настани

Ќе го разгледаме прашањето за опишување на случајните експерименти и на настаните што се во врска со нив. Ќе го анализираме примерот 2.1.4. Видовме дека сите можни исходи на експериментот што се состоеше во фрлање на две коцки за играње можеа да се опишат со множеството $\Omega=\{(x,y)|x,y=1,2,3,4,5,6\}$. Можеме да забележиме дека:

а) при секоја реализација на експериментот мора да настапи некој од настаните (x,y) што се како елементи содржани во множеството Ω; овде настанот "на првата коцка се појавиле x точки, а на втората y точки" го идентификуваме со елементот (x,y) на множеството Ω.

б) никои два од настаните од Ω не можат едновремено да настапат.

Секое множество Ω што опишува даден експеримент и ги поседува особините а) и б) го викаме **простор од елементарни настани** што му одговара на експериментот, а секој елемент од Ω тогаш се вика **елементарен настан.** Да одбележиме дека за даден експеримент E соодветниот простор од елементарни настани не мора да биде еднозначно определен, т.е. на еден експеримент може да му одговараат повеќе простори од елементарни настани. На пример, за експериментот разгледан во примерот 2.1.4, покрај Ω, и следново множество претставува простор од елементарни настани:

$$\Omega_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\},$$

при што со $j(=2,3,\ldots,12)$ е означен настанот што настапува кога збирот на точките на двете коцки е еднаков на j. Како ќе го определиме најпогодниот простор од елементарни настани за даден експеримент, ќе зависи од задачата што сакаме да ја решиме. На ова место можеме да забележиме само дека Ω е поинформативен од Ω_1, зошто, на пример, секој елементарен настан од Ω_1 може да се опише со помош на елементарните настани од Ω (како подмножество од Ω), што не е случај во обратната насока; за елементарниот настан $4\in\Omega_1$, имаме дека $4=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, но $(5,4)$ не може да се опише во Ω_1.

Да одбележиме уште едно својство на просторот од елементарни настани што ќе ни овозможи елементите од партитивното множество (т.е. подмножествата) од Ω да ги идентификуваме со случајните настани што се во врска со дадениот експеримент, и, на тој начин операциите меѓу случајните настани да ги интерпретираме како операции со множествата.

Нека Ω е простор од елементарни настани за експериментот E. Елементарните настани не ги исцрпуваат сите случајни настани што се во врска со експериментот E. Да го илустрираме ова со примерот 2.1.4. Надоврзувајќи се на овој пример, во примерот 2.1.5 ги воведуваме случајните настани A, B и C, а во примерот 2.1.6. и случајниот настан K, сите во врска со истиот експеримент. Меѓутоа, ниеден од овие настани не е елементарен. Тие можат да се опишат со помош на елементарните настани на следниов начин: Ако A е случаен настан што е во врска со експериментот E за кого Ω е еден простор од елементарни настани, тогаш на A му коренспондираме едно подмножество од Ω што ги содржи тие и само тие елементарни настани што го повлекуваат настанот A. Ова подмножество ќе го означуваме, исто така, со A со соодветното подмножество од просторот од елементарни настани. За погоре споменатите случајни настани од примерите 2.1.4, 2.1.5 и 2.1.6 имаме:

Пример 2.3.1. $A=\{(x,y)\,|\,x+y=2k,\ x,y=1,2,3,4,5,6\}$;

$B=\{(x,x)\,|\,x=1,2,3,4,5,6\}$;

$C=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),$

$,(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$;

$K=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),$

$,(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$.

Според горните разгледувања, илустрирани и со примерот 2.3.1, доаѓаме до заклучокот дека секој случаен настан што е во врска со даден експеримент E може да се опише со едно еднозначно определено подмножество од даден простор од елементарни настани што му одговара на експериментот E. Да видиме каков однос постои меѓу операциите меѓу случајните настани и операциите со множества.

Нека A и B се два случајни настани и нека A_c и B_c се кореспондентните подмножества на A и B во некој простор од елементарните настани. Ако $A \subseteq B$ тогаш за секој $x \in A_c$ добиваме дека $x \subseteq B_c$ зошто, ако $x \in A_c$ значи дека x го повлекува настапувањето на A, а поради $A \subseteq B$ се добива дека x го повлекува и настапувањето на B бидејќи секогаш кога ќе настапи A настапува и B. Според тоа, $A \subseteq B$ повлекува $A_c \subseteq B_c$. Обратно, нека е $A_c \subseteq B_c$ и нека настапил настанот A. Тоа значи дека настапил некој од елементарните настани x што го повлекува A, т.е. $x \in A_c$. Поради $A_c \subseteq B_c$ имаме дека $x \in B_c$, а тогаш мора да настапи и настанот B. Значи и $A_c \subseteq B_c$ го повлекува $A \subseteq B$. Од горните разгледувања заклучуваме дека $A \subseteq B$ ако и само ако $A_c \subseteq B_c$.

Да го разгледаме истото прашање за збирот од два случајни настани A и B. Пак нека се A_c и B_c определени како и во претходното разгледување. Нека $A \cup B = C$ и $A_c \cup B_c = C_c$, каде во првиот случај имаме збир од случајни настани, а во вториот унија од множества. Нека настапил настанот C; тоа значи дека настапил барем еден од настаните A и B. Настанот C настапил како последица од настапувањето на некој елементарен настан x, па како последица на x настапил барем еден од настаните A и B, т.е. x му припаѓа барем на едно од множествата A_c и B_c а како последица на тоа настапил барем еден од настаните A и B, што значи дека настапил и настанот C. Тоа покажува дека C_c е коренспондентно подмножество од просторот на елементарните настани што му одговара на настанот C. Значи, на збир од случајни настани му кореспондира унија на соодветните подмножества од просторот на елементарни настани.

На сличен начин се покажува дека: на производ од случајни настани и кореспондира пресек од соодветните подмножества, на разлика од случајни настани и кореспондира разлика од соодветните подмножества, а на спротивниот настан му кореспондира комплементот на соодветното подмножество. Ова ни дава за право, по идентификувањето на случајните настани со соодветните подмножества од дадениот простор од елементарни настани, операциите: збир, производ, разлика, спротивен настан и операцијата "повлекува" при случајните настани да ги интерпретираме како: унија, пресек, разлика, комплемент и подмножество од, соодветно.

2.4. Дискретен простор на веројатност

Врз основа на досегашните разгледувања, сега можеме да дадеме и формални дефиниции на помите што се среќаваат во теоријата на веројатноста, а и самата теорија да ја изградиме аксиоматски. Овде нема да го разгледаме најопштиот случај; него подоцна во необврзна форма, ќе го споменеме. Сепак, на случајот на дискретниот простор на веројатност ќе ја изнесеме суштината на аксиоматското изградување на теоријата на веројатноста.

Нека е Ω конечно или пребоиво множество (едно множество се вика пребоиво ако неговите елементи можат да се наредат во една бесконечна низа). Елементите од Ω ќе ги викаме **елементарни** настани, а самото Ω - **простор** од елементарни настани. Нека е Φ фамилијата од сите подмножества од Ω, вклучувајќи ги и празното множество $\emptyset$ и самото Ω. Елементите од Φ ќе ги викаме **случајни настани**; за Ω велиме дека е **сигурен**, а за $\emptyset$ - **невозможен** настан. Нека P е едно пресликување од Φ во множеството од реалните броеви R, $P:\Phi\to R$. Ако за P се задоволени следниве аксиоми:

P.1. За кој било $A\in\Phi$, $P(A)\geq 0$,

P.2. $P(\Omega)=1$,

P.3. $P(A+B) = P(A)+P(B)$, $A,B\in\Phi$,

тогаш за P велиме дека е **веројатност** дефинирана на Φ. Да забележиме дека во P.3, како и порано, $A+B$ означува унија од дисјунктни множества.

Подредената тројка (Ω,Φ,P) ја викаме **дискретен простор на веројатност.** Својствата што се докажани во теоремата 2.2.2 важат во секој дискретен простор на веројатност зошто тие беа добиени како последица од аксиомите $P.1$-$P.3$. Нив натаму слободно ќе ги користиме.

Покрај погоре споменатите особини, натаму ќе ни биде потребна и следнава особина:

Теорема 2.4.1.

За кои било $A_1,A_2,\dots,A_k\in\Phi$, *такви што по парови се заемно дисјунктни, точно е равенството:*

$$P(A_1+A_2+\dots+A_k) = P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_k).$$

Доказ. И овде, како и многупати досега, ја користиме индукцијата. За $k=2$ равенството ја претставува аксиомата $P.3$. Да претпоставиме дека тоа равенство е точно за k собирци. Тогаш,

$$\begin{aligned} &P(A_1+A_2+\dots+A_k+A_{k+1}) =\\ &= P((A_1+A_2+\dots+A_k)+A_{k+1}) =\\ &= P(A_1+A_2+\dots+A_k)+P(A_{k+1}) =\\ &= P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_k)+P(A_{k+1}).\blacksquare \end{aligned}$$

Ќе се задржиме, сега, на можноста за дефинирање на пресликувањето $P:\Phi\to R$ такво што да бидат задоволени аксиомите $P.1$-$P.3$, а воедно да најдеме и начин за практично пресметување веројатности на одделни случајни настани.

Ќе земеме $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$ да биде конечно множество. Нека се $p_1,p_2,\dots,p_n$ природни броеви такви какви што $p_j\geq 0$ за секој $j=1,2,\dots,n$ и $\sum_{j=1}^{n} p_j=1$. На секој ω_j му одговара едноелементно подмножество $\{\omega_j\}$ од Ω што е случаен настан; ќе ставиме $P(\omega_j)=p_j$ (покоректно би било да се напише $P(\{\omega_j\})=p_j$, но заради едноставност ние ќе ја користиме првата ознака). Натаму, нека е $A=\{\omega_{j_1},\omega_{j_2}, ,\dots,\omega_{j_s}\}$ произволно подмножество од Ω. Ставаме $P(A)=\sum_{k=1}^{s} p_{j_k}$. Лесно се проверува дека вака дефинираното пресликување P ги задоволува аксиомите $P.1$-$P.3$, така што P навистина претставува веројатност дефинирана на фамилијата Φ од сите подмножества од Ω.

Пример 2.4.2. Една нехомогена коцка за играње е изработена така што честотата да се појави одреден број точки на горната страна, по нејзиното произволно фрлање на рамнина, е пропорционална со бројот на точките. Да се одреди веројатноста на случајниот настан A што настапува ако бројот на точките е парен.

За простор од елементарни настани можеме да го избереме множеството $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_6\}$, при што ω_j е настанот што означува дека на коцката се појавиле j точки. Ако ставиме $p_1=P(\omega_1)=x$, според условите на задачата можеме да земеме дека $p_j=P(\omega_j)=jx$, $j=1,2,\dots,6$. Од условот $\sum_{j=1}^{6} p_j=1$ ја добиваме равенката $x(1+2+\dots+6) = 1$, а оттука $x=1/21$. Бидејќи $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, имаме дека $P(A) = (2+4+6)/21 = 12/21 = 4/7$.

Погоре изнесовме можност за дефинирање на веројатноста за случај кога множеството Ω е конечно. Истата идеја, се разбира со нужни адаптирања, може да се примени и кога Ω е бесконечно, но преброиво множество, што се гледа од следнава

Забелешка 2.4.3.*

Нека $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n,\dots\}$ е преброиво множество. Постојат реални броеви $p_1,p_2,\dots,p_n,\dots$ такви што сите да бидат ненегативни а сумата на редот чии членови се овие броеви да биде еднаква на 1; $\sum_{j=1}^{\infty} p_j=1$. Пресликувањето P натаму се дефинира како и во конечниот случај со таа разлика што, за бесконечно подмножество A од Ω, $P(A)$ ќе претставува сума од еден конвергентен ред, наместо обичен збир.

2.5. Класична дефиниција на веројатноста

Нека (Ω,Φ,P) е дискретен простор на веројатност, каде што $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ е конечно множество. Ќе го дефинираме пресликувањето P на начин изнесен во претходната точка, земајќи $p_j=P(\omega_j)=P(\omega_k)=p_k$ за секои j, $k=1,2,\ldots,n$. Поради $\sum_{j=1}^{n} p_j=1$, добиваме дека $p_j=1/n$ за секој $j=1,2,\ldots n$. Според тоа, ако подмножеството A од Ω содржи m елементи, $A=\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},\ldots,\omega_{j_m}\}$, тогаш за веројатноста на A добиваме:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} p_j = m\cdot\frac{1}{n} = \frac{m}{n} .$$

Значи, покрај претпоставката Ω да биде конечно, за примена на класичната дефиниција се претпоставува уште и еднаква веројатност на елементарни настани. Тогаш за пресметување на веројатноста на кој било случаен настан A доволно ќе биде да се знае само бројот на елементарните настани содржани во A. За бројот n на елементите на Ω обично се вели дека е "број на сите можни случаи", додека за бројот m на елементарни настани содржани во A се вели дека е "број на сите поволни случаи за A".

Да разгледаме неколку примери.

Пример 2.5.1. Да ги определиме веројатностите на случајните настани A,B,C и K од примерите 2.1.4, 2.1.5 и 2.1.6. Ќе земеме просторот од елементарни настани да биде множеството $\Omega=\{(x,y)\,|\,x,y=1,2,3,4,5,6\}$. Покрај тоа што е конечно ова множество, ако претпоставиме дека двете коцки се хомогени, можеме да сметаме дека елементарните настани се еднакво веројатни, така што можеме да ја примениме класичната дефиниција. За бројот на сите елементарни настани имаме дека е $n=36$, а ако со m_1,m_2,m_3,m_4 ги означиме броевите на елементарните настани содржани во A,B,C и K соодветно, имаме дека $m_1=18$, $m_2=6$, $m_3=9$ и $m_4=9$. Така: $P(A)=1/2$, $P(B)=1/6$, $P(C)=1/4$ и $P(K)=1/4$.

За експериментот од овој пример, покрај, Ω, го споменавме и множеството $\Omega_1=\{2,3,4,\dots,12\}$ како можен простор од елементарни настани. Сега сме во прилика да одбележиме уште една предност на Ω над Ω_1; имено земајќи го Ω_1 како простор од елементарни настани, не можеме да ја примениме класичната дефиниција за пресметување на веројатностите дури ни на оние случајни настани што можат да се опишат со подмножество од Ω_1 зошто, на пример, настаните 2 и 3 не се еднакво веројатни - на 3 му припаѓа двапати поголема веројатност одошто на 2 поради $2=\{(1,1)\}$, $3=\{(1,2),(2,1)\}$.

Пример 2.5.2. Од еден шпил од 52 карти произволно се извлекуваат три карти. Да се најде веројатноста:

а) во извлечените три карти да има точно еден ас;

б) во извлечените три карти да има барем еден ас;

Овде се наметнува идејата за елементарни настани да се земат комбинациите од класа 3 од 52 елементи. Тогаш Ω ќе биде конечен и секои два елементарни настани ќе бидат еднакволиковеројатни. Сите можни случаи се $n=C^3_{52}$.

а) ако го означиме со A_1 случајниот настан што настапува кога во извлечените три карти има точно еден ас, тогаш бројот на поволните случаи за A_1 ќе биде $m_1=C^1_4.C^2_{48}$, па

$$P(A_1) = \frac{C^1_4.C^2_{48}}{C^3_{52}} = 0,204.$$

б) Да го означиме со B настанот, во извлечените три карти да има барем еден ас. Тогаш $B=A_1+A_2+A_3$ каде A_1 е настанот од а), а A_2 и A_3 се настаните во извлечените три карти да има точно два, односно три аса. Пресметувајќи ги веројатностите на A_2 и A_3 како и за A_1 и применувајќи ја формулата од теоремата 2.4.1, ќе добиеме:

$$P(B) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) = \frac{C^1_4.C^2_{48} + C^2_4\cdot C^1_{48} + C^3_4}{C^3_{52}} = 0,218.$$

Забележуваме дека со примена на формулата (jj) од теоремата 2.2.2 полесно може да се најде веројатноста на B. Случајниот настан $\overline{B}$ означува дека во избраните три карти нема ниту еден ас и неговата веројатност е $P(\overline{B}) = C^3_{48}/C^3_{52} = 0{,}782$. Сега добиваме $P(B) = 1-P(\overline{B}) = 1-0{,}782 = 0{,}218$.

Применета на класичната дефиниција овде ќе ја илустрираме со уште три интересни примери.

Пример 2.5.3. Група од n учесници на некој семинар водат разговор на кружна маса. Меѓу сите нив само двајца се познаваат од порано. Ако на произволен начин се распоредат учесниците на кружната маса, тогаш каква е веројатноста познаниците да седат еден до друг?

Ќе земеме n да е поголемо од 2. Секој елементарен настан претставува кружен распоред од n елементи. Нивниот број (види вежба 1.7.24.) изнесува $(n-1)!$. Ако двата познаника ги сметаме за еден елемент (не ги раздвојуваме), тогаш бројот на елементарните настани поволни за настанот, да го означиме со A, за кој ја пресметуваме веројатноста, може да се пресмета така што ќе се земат сите кружни распореди од $n-1$ елемент и тој број ќе се удвои (имено, за двата познаника можни се два распореди на едниот во однос на другиот: првиот да седи лево од вториот и обратно). Така, поволни случаи за A има $2(n-2)!$, па за веројатноста на A добиваме:

$$P(A) = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}\ .$$

Пример 2.5.4. (Задачата за роденденот) Да ја најдеме веројатноста во едно множество од k луѓе барем двајца да имаат ист роденден.

Ќе сметаме дека годината има 365 дена, а ќе земеме k да не е поголем од 365, зашто во спротивниот случај настанот, барем двајца да имаат ист роденден, ќе биде сигурен. Ако го означиме со A случајниот настан за кој ја определуваме веројатноста, тогаш $\overline{A}$ ќе го означува настанот дека сите k луѓе имаат различни родендени. За елементарни настани ќе ги земеме варијациите со повторување од класа k од 365 елементи. Сите тие се еднакво веројатни и нивниот број е $n=365^k$. Поволни случаи за $\overline{A}$ ќе претставуваат варијациите без повторување од класа k од 365 елементи, па нивниот број ќе изнесува $m=365(365-1)\ldots(365-k+1)=365!/(365-k)!$. Така,

$$P(\overline{A}) = \frac{365!}{(365-k)!365^k}, \quad P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-k)!365^k}$$

Да забележиме дека за k=23, 30, 40, 50 веројатностите на A приближно изнесуваат : 0,51, 0,7, 0,89, 0,97. На прв поглед се чини како да не се согласуваат овие резултати со интуитивното очекување овие веројатности да бидат далеку помали. Причината за тоа е што наместо A, ние "потсвесно" го имаме предвид случајниот настан, точно двајцата имаат ист роденден.

Пример 2.5.5. (Нестручен жири) На еден натпревар учествуваат k натпреварувачи, а резултатите ги оценуваат 3 судии. Секој од судиите прави своја ранг-листа на натпреварувачите, а ќе се смета дека е прогласен добитник, ако ист натпреварувач е ставен на прво место од барем двајца од судиите. Судиите не ја познаваат дисциплината во која се натпреваруваат k-те учесници, така што ранг-листите ги прават сосема случајно. Каква е веројатноста да се прогласи победник во натпреварот?

Да го означиме со A настанот на натпреварот да биде прогласен победник. Тогаш $\overline{A}$ ќе значи дека ниеден од натпреварувачите не е повеќе од еднаш ставен на прво место на ранг-листите. Да видиме како можат да се определат елементарните настани. Секој од судиите може да состави $k!$ ранг-листи. Нас не интересираат тројките (a,b,c) од листи, каде a е листа на првиот, b - на вториот и c - на третиот судија. Така, земајќи ги подредените тројки на елементарни настани, можеме да сметаме дека тие се елементи на директниот производ од три множества, при што секое од нив има $k!$ елементи, така што бројот на сите можни случаи е

$n=(k!)^3$. Да видиме колкав е бројот на поволните случаи за $\overline{A}$. Од првиот судија можеме да ги земеме предвид сите $k!$ листи. Со секоја листа од првиот судија можеме да ги земеме предвид само оние листи од вториот судија при кои на прво место не се најдува натпреварувачот што е на прво место во листата од првиот судија. Вториот судија, значи, при избрана листа од првиот судија има $k-1$ можности за првото место во своите листи, а останатите $k-1$ места може да ги пополни на $(k-1)!$ начини. Така ќе добиеме $k!\cdot(k-1)\cdot(k-1)!$ парови од ранг-листи такви што во ниеден пар на прво место не е ставен ист натпреварувач. Размислувајќи на сличен начин, по однос на третиот судија, ќе дојдеме до заклучокот дека за случајниот настан $\overline{A}$ бројот на поволните случаи изнесува $m=k!(k-1)!(k-2)!\cdot$ $\cdot(k-1)(k-2)$. Според тоа,

$$P(\overline{A}) = \frac{k!(k-1)!(k-2)!(k-1)(k-2)}{(k!)^3} = \frac{(k-1)(k-2)}{k^2},$$

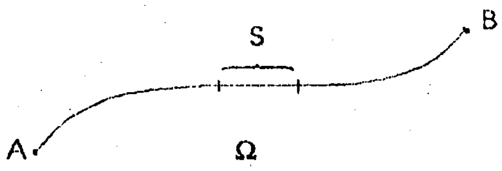
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{3k-2}{k^2}.$$

2.6. Геометриска веројатност

Ќе разгледаме една "модификација" на класичната дефиниција. Имено, ќе се откажеме од претпоставката за конечност на просторот од елементарни настани, но на соодветен начин ќе ја задржиме претпоставката за еднаква веројатност на "елементарните" настани.

Нека просторот Ω од елементарни настани е бесконечен, но нека Ω може да се претстави со некоја геометриска фигура, на пример, со лак од некоја крива (постои, значи биекција меѓу точките од лакот AB и множеството Ω). Да ја означиме должината на лакот AB со $M(\Omega)$. Ако S е некој случаен настан (подмножество од Ω) што може да се претстави со дел од лакот AB, со $M(S)$ ќе ја означиме должината на тој дел од лакот. Претпоставувајќи дека на настани што се претставени со подлаци од лакот AB со исти должини им одговараат исти веројатности, веројатноста на S ќе ја пресметаме по формулата

$$P(S) = \frac{M(S)}{M(\Omega)} .$$



сл.1

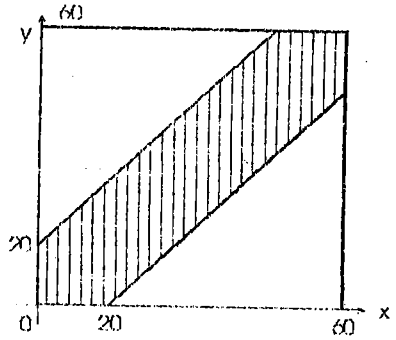
Оваа формула ќе ја користиме и кога Ω може да се претстави со некоја затворена рамнинска фигура или со некое просторно тело; во овие случаи $M(\Omega)$ и $M(S)$ ќе означуваат плоштини, односно волумени на соодветни фигури. За вака определената веројатност велиме дека е **геометриска**.

Да разгледаме два примера:

Пример 2.6.1. (Средба) Двајца пријатели се договориле да се сретнат на определено место во времето од 8 до 9 часот. Секој од нив, откако ќе дојде на договореното место, треба да го чека пријателот точно 20 минути, а ако не дојде до средба, по 20 минути треба да си оди. Каква е веројатноста да дојде до средба, ако времето на пристигнување на договореното место на секој од пријателите е случајно?

Да го означиме со x времето на пристигнување на едниот, а со y времето на пристигнување на другиот од пријателите. Тогаш елементарните настани можеме да ги опишеме со паровите (x,y), а ако за единица мерка земеме 1 секунда, просторот на елементарни настани ќе биде множеството

$$\Omega = \{(x,y) | x,y \in [0,60]\} .$$



сл.2

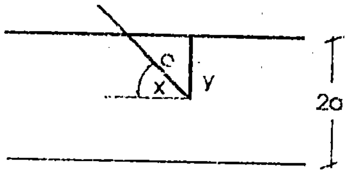
Во однос на еден избран правоаголен декартов координантен систем, Ω може да се претстави со квадрат (види сл.2). Да го означиме со A настанот да дојде до средба. Тогаш A ќе настапи ако е задоволено равенството.

$$|x - y| \le 20.$$

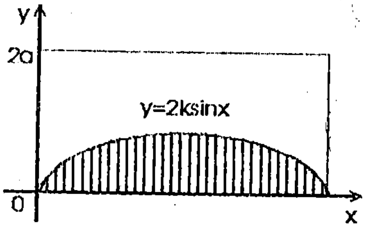
Последново неравенство ќе биде задоволено ако едновремено сезадоволени неравенките $y \le x-20$ и $y \ge x-20$ а ним им одговара исцртаниот дел на сликата 2. Така, со примена на формулата за геометриска веројатност, ќе добиеме:

$$P(A) = \frac{P_{\text{кв}} - P_{\text{тр}}}{P_{\text{кв}}} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

* **Пример 2.6.2.** Една рамнина е исцртана со паралелни прави што се на растојание $2a$ една од друга. На рамнината произволно се испушта игла со должина $2k$ ($k \le a$). Да се најде веројатноста иглата да пресече некоја од паралелните прави.



сл.3.



сл.4.

Да го означиме со x аголот што го заградува иглата со паралелните прави, а со y растојанието од долниот крај на иглата до првата од паралелните прави што е над тој крај (сл.3). Елементарните настани и овде можеме да ги опишеме со подредените парови (x,y) а целиот простор од елементарни настани ќе биде множеството $\Omega=\{(x,y)\mid x\in[0,\pi], y\in[0,2a]\}$. Геометриски Ω е претставено со правоаголникот на сл.4. Да го означиме со A настанот иглата да пресече некоја од паралелните прави. Тогаш A ќе настапи ако е $c\leq 2k$, а поради $y=c\sin x$, A ќе настапи кога $y\leq 2k\sin x$ (исцртаниот дел на сл.4) Така,

$$M(\Omega) = 2a\pi,\ M(A) = \int_0^\pi 2k\sin x dx = 4k \text{ и } P(A) = 2k/a\pi. \quad *$$

2.7. Вежби

2.7.1. Нека се A,B и C три случајни настани. Да се опишат следниве настани:

а) од трите настани настапил само настанот A;

б) од трите настани настапил барем еден;

в) настапил еден и само еден од трите настани;

г) не настапил ниту еден од трите настани;

д) не настапиле повеќе од два од трите настани.

2.7.2 Нека се A, B и C три случајни настани. Да се објасни смислата на следниве равенства:

а) $A\cup B\cup C=A$;

б) $ABC=A$.

2.7.3. Една машина за тестирање на исправноста на определен вид предмети е направена така што, ако предметот што се тестира е исправен, тогаш ќе засветли зелена сијалица, а ако е неисправен, ќе засветли црвена сијалица. Се тестираат 3 предмети. Да се определи еден простор од елементарни настани, а потоа да се опишат следниве настани:

а) A - точно еден предмет е исправен;

б) B - точно два предмети се исправни;

в) C - барем еден предмет е исправен;

г) E - барем два предмети се исправни.

Каков однос постои меѓу настаните A,B,C и E?

2.7.4. Еден четиритомен роман е поставен на полица во случаен распоред. Каква е веројатноста томовите да бидат ставени по ред одејќи одлево надесно, или обратно?

2.7.5. На полица, случајно распоредени, се поставени 40 книги меѓу кои се најдува тритомен роман од еден писател. Да се пресмета веројатноста трите тома да бидат поставени по ред на растење (првиот, вториот и најпосле третиот том), при што не е неопходно тие да бидат поставени еден до друг.

2.7.6. Една монета од 1 динар, една од 2 динари и една монета од 5 динари се фрлаат произволно во воздух и се дочекуваат на рамнина. Да се пресметаат веројатностите на следниве случајни настани:

а) на монетата од 1 динар се појавил "грб";

б) се појавиле точно два "грба";

в) се појавиле не повеќе од два "грба".

2.7.7. Во еден завележан телефонски број 315-... последните три цифри се избришале. На нивно место може да биде која било цифра со иста веројатност како другите. Да се пресметаат веројатностите на случајните настани:

а) A - избришани биле различни меѓу себе и различни од 1,3 и 5 цифри;

б) B - избришани биле еднакви меѓу себе цифри;

в) C - две од избришаните цифри совпаднувале.

2.7.8. На одделни картички се напишани цифрите од 1 до 9 заклучно. Од деветте картички, откако добро се измешани, случајно се извлечени 4 картички и наредени, одлево надесно по редот на извлекувањето. Да се пресмета веројатноста, на тој начин, да се добие:

а) парен број;

б) бројот 1234.

2.7.9. За безбедно прелетување над некоја територија, радистот на еден авион треба по радио да испрати една порака со морзеовата азбука (користејќи два знака: точка и цртичка). Радистот ја заборавил пораката, така што случајно ги предава двата знака во случаен редослед. Да се најде веројатноста да биде предадена точната порака ако таа се состоела од а) 5 знаци, б) 7 знаци.

2.7.10 Да се најде веројатноста, во произволно избраниот телефонски број што се состои од 6 цифри, сите цифри да се различни.

2.7.11. Една монета се фрла во воздух к пати. Да се најде веројатноста парен број пати да се појави "грб".

2.7.12. Каква е веројатноста во јануари од една произволно избрана година да има точно 4 недели?

2.7.13. Произволно се запишува еден двоцифрен број. Да се најде веројатноста запишаниот број да биде делив барем со еден од броевите 2 и 5.

2.7.14 Во една локална лотарија со вкупно 100 лозови застапени се следниве згодитоци: 1 од 1000 динари, 3 по 500 динари, 6 по 250 динари и 15 по 100 динари. Да се пресметаат веројатностите:

а) на три купени лозови да се добие барем еден згодиток;

б) на еден купен лоз да се добијат најмалку 500 динари;

в) на еден купен лоз да се добијат точно 500 динари.

2.7.15. Во главната трка во некој натпревар со коњи учествувале коњите А, В и С. Коњите А и В се оценети како еднакво добри, а С бил двапати послаб од А. Еден од гледачите се кладел на победа на коњот А и на коњот С. Да се пресмета веројатноста гледачот да добие барем еден од облозите.

2.7.16 Нека се $A_1, A_2, \dots, A_k$ произволни случајни настани. Со помош на индукција да се докаже дека:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = T_1 - T_2 + T_3 - \dots + (-1)^{k+1} \cdot T_k$$

каде што

$$T_1 = \sum_{j=1}^{k} P(A_j), \quad T_2 = \sum_{j\neq k} P(A_jA_k), \quad T_3 = \sum_{i\neq j\neq k\neq i} P(A_iA_jA_k), \quad \dots$$

$$\dots \quad T_k = P(A_1A_2\dots A_k).$$

2.7.17. На една театарска претстава k луѓе дошле со шешири кои морале да ги оставаат во гардеробата на театарот. Гардероберката ги разместувала шеширите произволно, независно од тоа каков бил бројот на билетот што им го дапала на сопствениците на шеширите. По завршената претстава секој од сопствениците на шеширите го добил шеширот што стоел на местото одбележано на неговиот гардеробен лист. Да се пресметаат веројатностите на следниве случајни настани:

а) барем еден од k-те луѓе да го добие својот шешир;

б) ниеден да него добие својот шешир.

2.7.18. Произволно се избрани два негативни реални броја. Секој од овие два броја не е поголем од 2. Каква е веројатноста производот од избраните два броја да не е поголем од 1, а нивниот количник да не е поголем од 2?

2.7.19. Една рамнина е исцртана со паралелни прави што се на растојание $2a$ една од друга. На рамнината се фрла монета со радиус $r<a$. Да се најде веројатноста монетата да не пресече ниедна од паралелните прави.

2.7.20. Во еден сигнализатор, во временски интервал со должина T, пристигнуваат сигнали од два извора. Пристигнувањето на секој од сигналите е случајно и еднаквоверојатно за секој момент од интервалот T. Сигнализаторот ќе проработи ако разликата во времето на пристигнувањето на сигнал од едниот извор и сигнал од другиот извор не е поголема од t. Да се најде веројатноста сигнализаторот да проработи, ако во временскиот интервал T од секој од изворите е испратен само по еден сигнал.

2.7.21. Една шипка со должина k е скршена на 3 дела при што точките во кои е извршено кршењето се случајно избрани. Да се најде веројатноста дека од добиените три дела може да се направи триаголник.

III. УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ

Во овој параграф ќе го воведеме поимот за условна веројатност, со нејзина помош ќе го дефинираме важниот поим, како за теоријата, така и за примената, за независност на случајните настани и, најпосле, ќе ја докажеме формулата за тотална веројатност и формулите на Бејес.

3.1. Условна веројатност

При анализата на случајните експерименти често се јавува потребата да се изучуваат односите меѓу разните случајни настани што се во врска со дадениот експеримент. Една од задачите што природно се наложува е задачата за определување веројатноста на еден случаен настан ако е познато дека некој друг случаен настан веќе настапил. На пример, ако случајниот настан *A* го повлекува случајниот настан *B* тогаш е јасно дека, ако се претпостави дека настапил случајниот настан *A*, веројатноста за настапување на случајниот настан B Ќе биде еднаква на 1. Не секогаш, меѓутоа, ќе се среќаваме со ваков екстремен случај. Може настапувањето на даден случаен настан A да не го повлекува, нужно настапувањето на друг настан B, но сепак да укажува влијание на можностите за настапување на B. Веројатноста на случајниот настан B, при претпоставка дека настапил случајниот настан A ќе ја означуваме со $P(B/A)$ и ќе ја викаме **условна.**

Тргнувајќи од еден простор на веројатност (Ω,Φ,P) и избирајќи еден случаен настан $A\in\Phi$ таков што $P(A)>0$, условната веројатност на случајниот настан B при претпоставка дека настапил A ја определуваме со формулата

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \,. \qquad (3.1.1.)$$

Мотивот, вака да се дефинира условната веројатност, можеме да го побараме во релативните честоти. Имено, ако при n-кратна реализација на експериментот E, случајниот настан A настапил m пати тогаш последниве m експерименти можеме да ги сметаме за нов експеримент E_1 при кој, покрај множеството услови што го определуваат E исполнет е уште еден услов - да настапил случајниот настан A. Ако во новата серија од m експерименти E_1, случајниот настан B настапик k пати, тоа значи дека во серијата од n експерименти E k пати настапил случајниот настан AB. Да ја означиме релативната честота на B во серијата од m експерименти E_1 со $W(B/A)$. За неа добиваме:

$$W(B/A)= \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} \,,$$

и, бидејќи во однос на n-те експерименти E е $k/n=W(AB)$ и $m/n=W(A)$, се добива дека $W(B/A) = W(AB)/W(A)$.

Сега ќе докажеме дека со формулата *(3.1.1)* навистина е дефинирана веројатност на Φ, т.е. дека пресликувањето $P_1:\Phi\to R$, определено со $P_1(B) = P(B/A)$ ги задоволува аксиомите $P.1$-$P.3$.

Теорема 3.1.1.

Нека (Ω,Φ,P) *е даден простор на веројатност и нека* $A\in\Phi$ *има веројатност различна од* 0, $P(A)>0$. *Тогаш пресликувањето* $P_1:\Phi\to R$ *определено со* $P_1(B)=P(B/A)$, *за секој* $B\in\Phi$, *каде* $P(B/A)$ *е определено со (3.1.1), претставува веројатност на* Φ *таква што* $P_1(A)=1$.

Доказ. Поради $P(AB)\geq 0$ и $P(A)>0$, имаме дека

$$P_1(B) = P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \geq 0$$

за кој било случаен настан $B\in\Phi$, што ја докажува точноста на $P.1$.

Од $A\subseteq\Omega$ следува дека $A\Omega=A$ така што :

$$P_1(\Omega) = \frac{P(A\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 ,$$

со што е проверена и точноста на $P.2$.

Нека се B_1 и B_2 два дисјунктни случајни настани. Тогаш и AB_1 и AB_2 ќе бидат дисјунктни и $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$, така што

$$\begin{aligned} P_1(B_1+B_2) &= \frac{P(A(B_1+B_2))}{P(A)} = \frac{P(AB_1+AB_2)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(AB_1)}{P(A)} + \frac{P(AB_2)}{P(A)} = P_1(B_1) + P_2(B_2). \end{aligned}$$

Со тоа е покажано дека е точна и $P.3$.

На крајот, поради $AA=A$ се добива:

$$P_1(A) = \frac{P(AA)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1. \blacksquare$$

Забелешка 3.1.2. Во даден простор на веројатност (Ω,Φ,P) за Ω велиме дека е сигурен настан. За сигурниот настан имаме дека неговата веројатност е еднаква на 1, но тој се дефинира независно од веројатноста, т.е. како сигурен не се дефинира настанот чија веројатност е еднаква на 1. Со горната теорема покажавме дека, во еден простор на веројатност, веројатноста може така да се дефинира што, покрај сигурниот настан, може да постојат и други случајни настани чија веројатност е еднаква на 1. Дуално, покрај невозможниот настан $\emptyset$, чија веројатност е еднаква на 0, можат да постојат и други случајни настани со веројатност 0.

Да разгледаме еден пример:

Пример 3.1.3. При пописот на населението во Англија и Велс, спроведен во 1891 година, покрај другите добиени се и следниве податоци:

а) татковци со темни очи и синови со темни очи имало 5%;

б) татковци со темни очи, а синови со светли очи имало 7,9%;

в) татковци со светли очи, а синови со темни очи имало 8,9%;

г) татковци со светли очи и синови со светли очи имало 78,2%.

Сметајќи дека постои статистичка стабилност по однос на врската меѓу бојата на очите на татковците и нивните синови, да се пресметаат веројатностите: (*ј*) при случаен избор на еден од синовите, избраниот да има темни очи ако таткото има темни очи и (*јј*) при случаен избор на еден од синовите, избраниот да има темни очи ако таткото има светли очи.

Да го означиме со A случајниот настан таткото да има темни очи, а со B настанот синот да има темни очи. Тогаш $\overline{A}$ ќе биде настанот таткото да има светли очи, а $\overline{B}$ настанот синот да има светли очи. Во задачава е потребно да ги пресметаме следниве условни веројатности: (*ј*) $P(B/A)$, (*јј*) $P(B/\overline{A})$. Од податоците од пописот имаме дека: $P(AB)=0,05$, $P(A\overline{B})=0,079$, $P(\overline{A}B)=0,089$ и $P(\overline{A}\overline{B})=0,782$. Од $A\subseteq\Omega$ следува $A=A\Omega$, а од друга страна $\Omega=B+\overline{B}$. Така, $A=AB+A\overline{B}$ а оттука следува дека $P(A)=0,05+0,079=0,129$. Натаму, $P(\overline{A})=1-0,129=$ $=0,871$, така што:

$$(j) \qquad P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,05}{0.129} = 0,39 \ ,$$

$$(jj) \qquad P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,089}{0.871} = 0,10 \ .$$

3.2. Независност

Формулата за пресметување на условната веројатност има еден "недостаток". Имено, за да се пресмета условната веројатност $P(B/A)$ потребно е да се знае веројатноста на производот $P(AB)$. Во многу случаи, меѓутоа, полесно се пресметува условната веројатност одошто директно е можно да се пресмета веројатноста на производот. Поради тоа, формулата за условна веројатност често се користи за пресметување веројатноста на производот од два случајни настани. Од формулата за условна веројатност непосредно следува дека:

Теорема 3.2.1.

(j) $\quad P(AB) = P(A)\cdot P(B/A),\ P(A)>0,$

(jj) $\quad P(AB) = P(B)\cdot P(A/B),\ P(B)>0.$ ∎

Формулата за веројатност на производот на два случајни настани добива мошне едноставен вид во еден специјален случај. За да го издвоиме тој случај потребно е да воведеме еден нов поим, за кој во уводот на овој параграф рековме дека е многу важен. Нека се A и B два случајни настани такви што $P(A)>0$ и $P(B)>0$. Велиме дека случајниот настан B е **независен** од A ако $P(B/A)=P(B)$.

Нека е случајниот настан B независен од A. Од теоремата 3.2.1 добиваме дека

$$P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B)$$

од каде, поради претпоставената независност на B од A се добива:

$$P(A)\cdot P(B) = P(B)\cdot P(A/B).$$

Од последното равенство, ако скратиме со $P(B)>0$, ќе добиеме дека и $P(A/B)=P(A)$, што значи дека и настанот A е независен од B. Поради тоа натаму ќе зборуваме за заемно независни случајни настани.

Теорема 3.2.2

Случајните настани A и B, за кои $P(A)>0$ и $P(B)>0$, се независни ако и само ако

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Доказ. Ако се A и B независни, т.е. $P(B/A)=P(B)$, тогаш од (j) од теоремата 3.2.1 се добива дека $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$. Обратно, нека $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$. Од теоремата 3.2.1 имаме дека $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$, така што $P(A)\cdot P(B)=P(A)\cdot P(B/A)$ а оттука се добива $P(B/A)=P(B)$, па навистина A и B се независни.■

Теорема 3.2.3

Ако се A и B заемно независни случајни настани, тогаш заемно независни ќе бидат и следниве парови случајни настани: $(\overline{A},B)$, $(A,\overline{B})$ *и* $(\overline{A},\overline{B})$.

Доказ. Од $\Omega=A+\overline{A}$ и $B\Omega=B$ се добива дека $B=AB+\overline{A}B$, а оттука, $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$, т.е. $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$. Натаму,

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B)-P(AB)}{P(B)}$$

Ако се има предвид претпоставената независност на A и B, според теоремата 3.2.2 имаме дека $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, така што;

$$P(\overline{A}/B) = 1 - \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\overline{A})$$

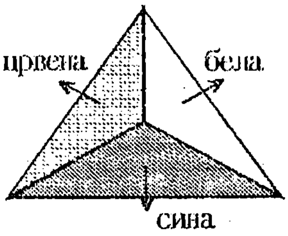
Со тоа е докажана независноста на парот $(\overline{A},B)$. Доказот за парот $(A,\overline{B})$ следува од причини на симетрија од веќе докажаниот случај, додека независноста на парот $(\overline{A},\overline{B})$ следува од веќе докажаните два случаи. ■

Да го обопштиме поимот на независност од два на произволен конечен број случајни настани. За основа на дефиницијата за независност, во овој случај, ќе ја земеме теоремата 3.2.2. Основната идеја се состои во тоа што сакаме да обезбедиме, производот од било кој број случајни настани од даденото множество настани за кои ја дефинираме независноста, да има веројатност што ќе биде еднаква на производот од веројатностите на одделните настани. Имено, за случајните настани $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ велиме дека се **независни** во целина, ако и само ако се задоволени следниве услови:

$$A_i \neq A_j \quad \text{за } i \neq j,$$
$$P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, k\},$$
$$P(A_i A_j A_s) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_s), \quad i \neq j \neq s \neq i, \quad i, j, s \in \{1, 2, \dots, k\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k).$$

При обопштувањето на поимот за независност се поставува едно природно прашање: дали не е можно независноста на било кој конечен број случајни настани да се дефинира така што ќе се претпостави независноста на сите можни парови од дадените случајни настани? Ако едно конечно множество од нееквивалентни случајни настани е независно, според погоре изнесената дефиниција, тогаш тие настани ќе бидат и по парови независни. Тоа непосредно следува од дефиницијата. Обратно, меѓутоа, случајните настани од едно конечно множество можат да бидат по парови независни, а сепак да не бидат независни во целина. Ова ќе го илустрираме со следниов пример:

Пример 3.2.4. Страните на еден правилен и хомоген тетраедар се обоени на следниов начин: едната страна е бела, другата црвена, третата сина, додека четвртата страна ги содржи сите три бои. Тетраедарот се фрла на рамнина и се забележува каква боја содржи страната што лежи на рамнината. Ако таа страна содржи бела боја, ќе сметаме дека настапил настанот A, ако содржи црвена боја ќе сметаме дека настапил настанот B, а ако содржи сина боја - настапил настанот C. Лесно се пресметуваат следниве веро- јатности според класичната дефиниција, која овде е применлива поради хомогеноста на тетраедарот:



сл.1

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2,$$
$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/4,$$
$$P(ABC)=1/4.$$

Забележуваме дека $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$, $P(AC) = P(A)\cdot P(C)$, $P(BC) = P(B)\cdot P(C)$, така што по парови овие три случајни настани се независни. Тие, меѓутоа, не се независни во целина, зашто имаме дека $P(ABC) = 1/4 \neq 1/8 = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$.

3.3. Тотална веројатност. Формули на Бејес

Ќе разгледаме еден пример од кој ќе се види задачата што се решава со формулата за тотална веројатност.

Пример 3.3.1. Во една кутија има 4 бели и 2 црни топчиња, а во друга кутија 2 бели и 4 црни топчиња. Топчињата од двета кутии се исти во сè, освен во бојата, така што на допир со рака не се разликуваат. Од првата кутија случајно се бираат 2 топчиња и без да се погледаат се префрлуваат во втората кутија. Потоа од втората кутија случајно се бира едно топче. Каква е веројатноста последното извлечено топче да биде бело?

Да го означиме со B случајниот настан, последното извлечено топче да биде бело. Треба, значи, да ја пресметаме веројатноста $P(B)$. Таа не може директно да се пресмета. Проблемот е во тоа што по префрлувањето на две топчиња од првата во втората кутија, составот на втората кутија не ни е познат. Можеме само да направиме три претпоставки за тоа, какви две топчиња се префрлени од првата во втората кутија: A_1 - двете префрлрни топчиња се бели, A_2 - едното топче е бело а другото црно и A_3 - двете топчиња се црни. Овие три претпоставки ги исцрпуваат сите можности а меѓусебе се дисјунктни. Можеме лесно да ги пресметаме веројатностите за секој од случајните настани A_1, A_2 и A_3. Можеме, исто така, да ги пресметаме и веројатностите на B при секоја од овие претпоставки, т.е. веројатностите $P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$ и $P(B/A_3)$. Се поставува прашањето: дали со помош на овие веројатности може да се пресмета веројатноста $P(B)$? Решението на задачата ќе го завршиме по докажувањето на формулата за тотална веројатност на која сега ќе преминеме.

Следнава теорема, како што веќе забележавме, заедно со претпоставките што во неа ќе ги направиме, ја сугерира погоре разгледаниот пример. Тој пример е, навистина конструиран, но како модел се среќава во многу поинтересни задачи. Поради тоа и примената на оваа теорија е доста распространета.

Теорема 3.3.2.

(Формула за тотална веројатност). Нека $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *се такви случајни настани што* $A_iA_j=\emptyset$ *за* $i\neq j$ *и* $\Omega=A_1+A_2+\ldots A_k$. *Тогаш за произволен случаен настан* $B\subseteq\Omega$ *точна е формулата:*

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_k)\cdot P(B/A_k).$$

Доказ. Од дисјунктноста на A_i и A_j за $i\neq j$ следува дека се дисјунктни и A_iB и A_jB. Натаму, од $B\subseteq\Omega$ следува $B=B\Omega$, па земајќи предвид дека $\Omega = A_1+A_2+\ldots+A_k$, добиваме дека

$$B = A_1B+A_2B+\ldots+A_kB.$$

Од последново равенство, ако се земат предвид теоремите 2.4.1 и 3.2.1 се добива:

$$P(B) = P(A_1B)+P(A_2B)+\ldots+P(A_kB) =$$

$$= P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_k)\cdot P(B/A_k).\blacksquare$$

Да се вратиме на примерот 3.3.1. Да ги пресметаме веројатностите што таму ги најавивме:

$$P(A_1)=C_4^2/C_6^2=2/5,\ P(A_2)=C_4^1.C_4^1/C_6^2=8/15,\ P(A_3)=C_2^2/C_6^2=1/15,$$

$$P(B/A_1)=1/2,\ P(B/A_2)=3/8,\ P(A_3)=1/4.$$

Со примена на формулата за тотална веројатност сега добиваме:

$$P(B) = 2/5\cdot 1/2 + 8/15\cdot 3/8 + 1/15\cdot 1/4 = 5/12.$$

Да разгледаме уште еден, малку поинтерсен пример., иако и неговата содржина е малку "несериозна":

Пример 3.3.3. Двајца пријатели играат "фанта", т.е. додека едниот фрла монета во воздух, другиот, пред да падне монетата на земја, го избира едниот од двата настана - "грб" или "писмо". Ако настапи настанот што го прогнозирал вториот играч, тогаш тој добива еден динар, додека во спротивниот случај 1 динар добива првиот играч. Играта се повторува се дотогаш додека вториот играч, или ги изгуби сите свои пари (во почетокот на играта имал x динари), или додека добие толку пари што заедно со парите што ги имал во почетокот да собере a динари, каде $a\geq x$. Да се најде веројатноста вториот играч да ги изгуби сите свои пари.

Ги разгледуваме следниве случајни настани: A - вториот играч ги изгубил сите свои пари, B_1 - при дадено фрлање на монетата 1 динар добил вториот играч, B_2 - при дадено фрлање на монетата 1 динар добил првиот играч. Поради $B_1B_2=\emptyset$ и $\Omega=B_1+B_2$ имаме

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2).$$

Од јасни причини земаме дека $P(B_1)=P(B_2)=1/2$. Ако со $p(x)$ ја означиме веројатноста $P(A)$ во моментот кога вториот играч има x динари, тогаш горното равенство можеме да го запишеме на следниов начин:

$$p(x) = \frac{1}{2}\cdot(p(x+1)+p(x-1)),$$

зошто $P(A/B_1)=p(x+1)$ и $P(A/B_2)=p(x-1)$. Според тоа, добиваме дека $p(x)-p(x-1)=p(x+1)-p(x)$ што значи дека $p(x)$ е општ член на една аритметичка прогресија. Да го означиме со d првиот член на таа прогресија, а со k нејзината разлика. Земајќи предвид дека $p(x)$ е x+1-от член на прогресијата, добиваме дека

$$p(x) = d + kx.$$

Наведените параметри d и k ги определуваме од природните "почетни" услови: $p(0)=1$ и $p(a)=0$; така ќе добиеме дека $d=1$ и $k=1/a$. Конечно, бараната веројатност е

$$p(x) = 1 - \frac{x}{a}.$$

Случајните настани A_1, A_2,...A_k во формулата за тотална веројатност се викаат уште и хипотези. Нивните веројатности директно се пресметуваат. Понекогаш, по спроведувањето на соодветниот експеримент во кој настапил случајниот настан B, може да се укаже потреба за преоценување на веројатностите на хипотезите, т.е. да се пресметаат веројатностите $P(A_j/B)$ за секој $j=1,2,...,k$, кои во општ случај се разликуваат од веројатностите $P(A_j)$. За пресметување на веројатностите на хипотезите по настапувањето на настанот B се користат следниве формули на Бејес:

Теорема 3.3.4.

Нека се A_1, A_2,...,A_k *случајни настани што се по парови дисјунктни и за кои* $\Omega = A_1+A_2+...+A_k$. *Нека е* B *произволен случаен настан што има позитивна веројатност. Тогаш:*

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)\cdot P(B/A_j)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+...+P(A_k)\cdot P(B/A_k)}$$

Доказ. Доказот направо следува од равенството

$$P(A_j)\cdot P(B/A_j) = P(B)\cdot P(A_j/B)$$

при кое и двете страни се еднакви на веројатноста $P(A_jB)$, како и од теоремата 3.3.2.■

Да ја илустрираме примената на формулите на Бејес не еден пример.

Пример 3.3.5. Една артилериска батерија ја сочинуваат 4 топа. Првиот од топовите, со еден истрел, погодова определена цел со веројатност 0,3, додека секој од останатите 3 топа истата цел со еден истрел ја погодува со веројатност 0,2. За да биде целта уништена доволен е еден погодок.

а) Два топа стрелале едновремено и целта била уништена. Каква е веројатноста дека првиот од топовите стрелал?

б) еден топ стрелал двапати и целта била уништена. Каква е веројатноста дека првиот топ стрелал двапати?

Ќе ги разгледаме следниве случајни настани: A - целта е уништена, B - првиот од топовите стрелал. За да ја определиме веројатноста на задачата а) потребно е да пресметаме колку изнесува $P(B/A)$. Според формулите на Бејес:

$$P(A/B) = \frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(B)\cdot P(A/B)+P(\overline{B})\cdot P(A/\overline{B})}$$

Поради $P(B) = C_1^1.C_3^1/C_4^2 = 1/2$ имаме и $P(\overline{B}) = 1/2$. Нека C_j го означува настанот дека целта е погодена од j-тиот топ, j=1,2,3,4. Тогаш

$$P(A/B) = P(C_1C_j) + P(C_1\overline{C}_j) + P(\overline{C}_1C_j),\ j\neq 1$$

зошто $P(C_j)=0,2$ за $j=2,3,4$. Поради тоа што топовите стрелаат независно еден од друг, имаме:

$$P(A/B) = P(C_1)\cdot P(C_j) + P(C_1)\cdot P(\overline{C}_j) + P(\overline{C}_1)\cdot P(C_j),$$

$$= 0,3\cdot 0,2 + 0,3\cdot 0,8 + 0,7\cdot 0,2 = 0,44.$$

На сличен начин добиваме и

$$P(A/\overline{B}) = P(C_jC_k) + P(C_j\overline{C}_k) + P(\overline{C}_jC_k),\ j\neq k,\ j,k=2,3,4,$$

т.е. $P(A/\overline{B})=0,36$. Конечно:

$$P(B/A) = \frac{0,5\cdot 0,44}{0,5\cdot 0,44 + 0,5\cdot 0,36} = 0,55.$$

Да ја решиме и задачата под б). Овде ги разгледуваме следниве случајни настани: A_1 - првиот топ стрелал два пати, A_2 - некој од другите три топа стрелал два пати, B - целта е уништена, C_1 - целта е погодена два пати од првиот топ, C_2 - целта е погодена еднаш од првиот топ, K_1 - целта е погодена два пати од некој од другите три топа и K_2 - целта е погодена еднаш од другите три топа. Тогаш ќе имаме:

$$P(A_1) = 1/4,\ P(A_2) = 3/4,$$

$$P(B/A_1) = P(C_1) + 2P(C_2) = 0,51,$$

$$P(B/A_2) = P(K_1) + 2P(K_2) = 0,36$$

конечно,

$$P(A_1/B) = \frac{0,25\cdot 0,51}{0,25\cdot 0,51 + 0,75\cdot 0,36} = 0,32.$$

3.4. Вежби

3.4.1. При изработката на еден вид предмети учествуваат 4 машини, така што секој од предметите поминува низ 4 фази. Дефектот што може да се појави при изработката на предметот во која било фаза не зависи од тоа дали во другите фази на обработка се појавил дефект или не. Да се пресмета веројатноста еден предмет да биде изработен без дефекти ако веројатностите за дефектна обработка на секоја од машините се, соодветно, 0,02, 0,01, 0,02 и 0,03.

3.4.2 Во една работилница, независно една од друга, работат две машини. Нив ги послужува само еден работник. Веројатноста, во тек од еден час, да биде потребна интервенција на работникот за да не престане да работи првата машина изнесува 0,9, додека за втората машина соодветната веројатност е 0,85. Да се најде веројатноста дека во тек од 1 час и двете машини ќе работат без интервенција на работникот.

3.4.3. Во една библиотека имало 6 учебници по теорија на веројатноста, половината од нив со обични корици, а другата половина подврзани во платно. Библиотекарот случајно избрал два учебника. Да се пресмета веројатноста едниот од нив да биде со обични корици, а другиот подврзан во платно.

3.4.4. Од еден шпил од 52 карти на произволен начин се извлечени две карти, една по друга. Да се пресмета веројатноста и двете карти да бидат асови.

3.4.5. На рамнина се фрлени две коцки за играње. Да ги определиме следниве случајни настани : A - на првата коцка се појавиле непарен број точки, B - на втората коцка паднале непарен број точки и C - збирот на точките што се појавиле на двете коцки е непарен. Дали A, B и C се независни во целина односно дали се независни по парови случајни настани?

3.4.6. Да се покаже дека, ако P(A/B)>P(A), тогаш е точно и P(B/A)>P(B).

3.4.7. Со помош на математичката индукција да се докаже следнава формула:

$$P(A_1A_2,\ldots A_k)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_k/A_1A_2\ldots A_{k-1})$$

3.4.8. Во едно одделение работат 7 мажи и 3 жени. Од нив произволно се избрани три лица како делегати во советот на работната организација. Да се пресмета веројатноста сите избрани да бидат мажи.

3.4.9. Веројатноста за изработка на стандарден предмет во еден процес на работа изнесува 0,96. Еден упростен систем на контрола на квалитетот дава позитивни резултати со веројатност 0,98 за предметите што одговараат на стандардните и исто така позитивни резултати со веројатност 0,05 за предметите што не одговараат на стандардите. Каква е веројатноста дека, предметот што при ваквата контрола ќе биде прогласен за стандарден и навистина да е стандарден?

3.4.10. Во една кутија има 3 бели и 4 црни топчиња, а во другата кутија 5 бели и 3 црни топчиња. Топчињата се разликуваат само по боја. Од првата кутија случајно се извлекуваат 2, а од втората 1 топче и, без гледање, сите тие се пренесуваат во трета кутија. На крајот, од третата кутија случајно се избира едно топче. Каква е веројатноста последното избрано топче да биде бело?

3.4.11. На три машини се изработуваат еднакви по вид и облик предмети. Во производството на тие предмети машината А учествува со 25%, машината В со 35% и машината С со 40%. Од предметите што ги изработува машината А 5% се неисправни, од предметите изработени од машината В 4% се неисправни, а од машината С само 2% се неисправни. Предметите изработени од сите три машини се собираат во еден склад од каде, потоа, случајно се избира еден предмет. Избраниот предмет бил неисправен. Каква е веројатноста тој предмет да е изработен на машината А?

3.4.12. Седум еднакви кутии ги имаат следните состави: 2 кутии содржат по 3 бели и 2 црни топчиња, 3 кутии содржат по 3 бели и 3 црни топчиња, 1 кутија содржи 2 бели и 4 црни топчиња и 1 кутија содржи 2 бели и 2 црни топчиња. Случајно се бира една кутија и од неа се извлекува едно топче. Каква е веројатноста извлеченото топче да биде бело?

3.4.13. Во локалните избори во еден град од западните земји (на пример САД), имало два кандидата за градоначалници, едниот од нив припадник на една странка - демократ, а другиот припадник на друга - републиканец. Од гласачите 55 % биле републиканци и 45 % демократи. Во изборите 80 % од републиканците и 10 % од демократите гласале за републиканскиот кандидат, додека 20 % од републиканците и 90 % од демократите гласале за демократскиот кандидат. Каква е веројатноста дека случајно интервјуираното лице гласало за демократски кандидат?

3.4.14. Веројатноста за успешно лансирање на еден земјин сателит, при идеални услови, изнесува 0.95. Ако условите се добри, но не и идеални, лансирањето е успешно со веројатност 0,8. Неколку часови пред лансирањето на сателитот е добиен метереолошки извештај дека веројатноста условите да бидат идеални е 0,25 односно добри 0,75. Каква е веројатноста за успешно лансирање на сателитот?

3.4.15. Еден ловец се загубил во непозната шума. Од шумата до првото населено место воделе 6 патеки. Веројатноста да се стигне за 1 час до населеното место, за секоја од патеките, изнесува 0,6; 0,3; 0,2; 0,2; 0,1 и 0,1 соодветно. Каква е веројатноста ловецот да тргнал по втората патека ако во населеното место стигнал за 1 час.

3.4.16. Два стрелци, независно еден од друг, стрелаат во определена цел. Веројатноста целта да биде погодена од првиот стрелец изнесува 0,8, додека соодветната веројатност за вториот стрелец е 0,4. И двата стрелци едновремено стрелале по еднаш во целта, при што таа била еднаш погодена. Каква е веројатноста целта да ја погодил првиот стрелец?

3.4.17. (најдобар избор) Една убава девојка имала k обожаватели кои не ги познавала, но само чула дека такви и толку постојат. Кога девојката решила да се "омажи" и тоа на некој начин го разгласила, обожавателите почнале да пристигнуваат во нејзиниот дом да ја просат. Редот по кој пристигнувале обожавателите бил случаен и на секој од нив, при пристигнувањето во домот на девојката, таа веднаш му ја соопштувала својата одлука. Девојката, природно, сакала да направи најдобар избор така што, ако некој од обожавателите бил одбиен, тогаш таа го одбивала и секој нареден што бил "полош" од порано одбиените. Од друга страна, пак, ако некој од обожавателите еднаш бил одбиен, тој не се усудувал повторно да ја "проси" девојката. Ако девојката била многу избирлива, сосема е можно да останала немажена. Но, да претпоставиме дека таа извршила избор. Каква е веројатноста избраниот да биде најдобар меѓу сите кандидати?

3.4.18. Во $k+1$ кутии има по k еднакви по големина топчиња. Кутиите се означени со броеви од 1 до $k+1$. Кутијата означена со број j содржи j бели и $k-j$ црни топчиња, $j=1,2,...,k$. Произволно се бира една кутија, а од неа p пати се извлекува по едно топче така што по секое извлекување топчето се враќа назад во кутијата. Каква е веројатноста дека сите пати е извлечено бело топче?

3.4.19. Три противавионски топа извршиле по една стрелба против непријателски авион. Првиот го погодува авионот со веројатност 0,4, вториот со веројатност 0,5 и третиот со веројатност 0,8. Со три погодоци авионот ќе биде сигурно соборен, додека со еден погодок да биде соборен веројатноста е 0,2, а за два погодоци таа веројатност е 0,6. Да се најде веројатноста авионот да биде соборен.

3.4.20. Во една специјализирана болница се лекуваат 50% болесници што болуваат од болеста А, 30% што боледуваат од болеста В и 20% што боледуваат од болеста С. Веројатностите за наполно излекување од болестите А, В и С се соодветно: 0,7; 0,8; 0,9. Еден од болните ја напушта болницата наполно излекуван. Каква е веројатноста тој да бил излекуван од болеста А?

*IV. АКСИОМАТИКАТА НА КОЛМОГОРОВ

Во овој параграф ќе се задржиме на прашањето, во општ вид, за аксиоматското изградување на теоријата на веројатноста. Оваа материја може да де пропушти при читањето, зашто останатиот текст ќе може да се следи и без неа. Целта ни е, на читателот што за тоа се интересира, во куси црти да му ја изложиме идејата за споменатото аксиоматско устројување на веројатноста.

При конструкцијата на дискретниот простор на веројатност претпоставивме просторот од елементарни настани Ω да биде конечен или пребројв. Тогаш Φ се состоеше од сите подмножества од Ω. Да земеме, сега, Ω да биде произволно непразно множество. Можеме да ја повториме истата конструкција на (Ω, Φ, P) како и во 2.4 со таа разлика што сега Φ не мора да биде фамилијата од сите подмножества од Ω. Се што треба да се претпостави е во Φ да можат да се реализираат операциите со множества (случајни настани), т.е. ќе претпоставиме Φ да ги задоволува следниве барања:

Φ.1. $\Omega\in\Phi$,

Φ.2. ако $A\in\Phi$, тогаш и $\overline{A}\in\Phi$, Ф.3. ако A, $B \notin \Phi$, тогаш и $A \cup B \in \Phi$.

Од Ф.1 - Ф.3. следува дека (j) $\emptyset \in \Phi$ како комплемент на Ω: (jj) ако $A, B \in \Phi$ тогаш и $A \cap B \in \Phi$ зошто, земајќи ги предвид Де Моргановите закони, како и особините Ф.2 и Ф.3, добиваме дека $A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in \Phi$, ($jjj$) ако $A, B \in \Phi$ тогаш и $A \setminus B \in \Phi$ поради тоа што $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Фамилијата Ф од подмножествота од Ω, за која се задоволени горните својства се вика **поле** од настани. Како и порано, секој нејзин елемент се вика **случаен настан.** Дефинирајќи го сега пресликувањето $P:\Phi \rightarrow R$ така да бидат задоволени аксиомите P.1 до P.3 ќе добиеме поопшт простор на веројатност (Ω, Φ, P) одошто беше дискретниот простор разгледан во 2.4. И овој простор, меѓутоа, не е најопштиот. Погоре изнесената постапка ја сугерира следнава природна генерализација, предложена со Советскиот математичар Колмогоров.

Нека е дадено едно непразно произволно множество Ω и нека Ф е фамилија од множествата од Ω што ги задоволува следниве аксиоми:

σ.1. $\Omega \in \Phi$,

σ.2. ако $A \in \Phi$ тогаш $\bar{A} \in \Phi$,

σ.3. ако $A_j \in \Phi$, $j=1,2,3,\ldots$ тогаш $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \Phi$,

при што, во последната аксиома, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ се определува како множество што ги содржи елементите од сите од множествата A_j, $j=1,2,3,\ldots$, т.е. $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ ако и само ако за некој $j=1,2,3,\ldots$, $x \in A_j$.

За фамилијата Ф за која се задоволени аксиомите σ.1 - σ.3 велиме дека е σ - **алгебра** а секое подмножество од Ω што и припаѓа на Ф тогаш се вика **случаен настан.** Секој елемент $\omega \in \Omega$ се вика **елементарен настан**; тогаш Ω се вика **простор од елементарни настани.**

И овде како и погоре, со соодветната модификација за пресекот од бесконечна низа подмножества од Ω, се покажува дека (j) $\emptyset\in\Phi$, (jj) ако $A_j\in\Phi$, $j=1,2,3,\ldots$ тогаш и $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\in\Phi$ каде $x\in\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ ако и само ако $x\in A_j$ за секој $j=1,2,3,\ldots$ и (jjj) ако $A,B\in\Phi$ тогаш и $A\setminus B\in\Phi$.

Да ја означиме со $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ унијата $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ во случај кога по парови множествата A_j, $j=1,2,3,\ldots$ се дисјунктни, а наместо $A\cap B$, како и порано, ќе пишуваме AB. Нека $P:\Phi\to R$ е пресликување такво што да бидат задоволени следниви аксиоми:

$P.1.$ за секој $A\in\Phi$, $P(A)\geq 0$,

$P.2.$ $P(\Omega)=1$,

$P.3.$ ако $A_j\in\Phi$, $j=1,2,3,\ldots$ и ако $A_jA_k=\emptyset$ за $j\neq k$, тогаш $P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, каде на десната страна во последново равенство стои сума на конвергентен бесконечен ред.

За пресликувањето P тогаш велиме дека е **веројатност** дефинирана на Φ, а подредената тројка $(\Omega,\ \Phi,P)$ ја викаме **простор на веројатност.** За Ω велиме дека е **сигурен, а за $\emptyset$ – невозможен** случаен настан.

Да докажеме неколку својства за веројатноста за кој било простор на веројатност (Ω,Φ,P).

Теорема 4.1.

(j) $P(\emptyset) = 0$,

(jj) $P\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$,

(jjj) ако $A,B\in\Phi$ и $A\subseteq B$, тогаш $P(A)\leq P(B)$,

(jv) за кој било случаен настан $A\in\Phi$, $0\leq P(A)\leq 1$,

(v) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Доказ. Особината (j) следува од $P.2$, $P.3$, и $\Omega = \Omega+\emptyset+\ldots+\emptyset+\ldots$. Доказот на (jj) следува од (j) и $P.3$. ако $\sum_{j=1}^{n} A_j$ се претстави во вид $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ каде за $j>n$ е $A_j=\emptyset$. Докажите, пак, за (jjj), (jv) и (v) се исти како доказите на тие својства изнесени во теоремата 2.2.2.■

Теорема 4.2.

За кои било случајни настани $A_j\in\Phi$, $j=1,2,3,\ldots$ *точно е својството* $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$.

Доказ. Сумата $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ќе ја претставиме во вид на дисјунктна сума на следниов начин:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{j-1}A_j).$$

Поради $\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{j-1}A_j\subseteq A_j$, со примена на (*јјј*) од теоремата 4.1 и соодветното својство за конвергентните редови со позитивни членови, се добива дека:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le P(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).\blacksquare$$

Теорема 4.3.

(*Непрекинатост на* P) *Нека* $A_j\in\Phi$, $j=1,2,3,\ldots$.

(*ј*) *ако* $A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n\subseteq\ldots$, *тогаш* $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$;

(*јј*) *ако* $A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots\supseteq A_n\supseteq\ldots$, *тогаш* $P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Доказ. Како и во доказот на претходната теорема имаме:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{j-1}A_j),$$

така што

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= P(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{j-1}A_j) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(P(A_1) + \sum_{j=2}^{n} P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{j-1}A_j)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_1 + \sum_{j=2}^{n} P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{j-1}A_j)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n), \end{aligned}$$

зашто $A_1 + \sum_{j=2}^{n} (\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{j-1}A_j) = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, а поради $A_{j-1}\subseteq A_j$, $j=2,3,\ldots$ имаме дека $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_n$.

(jj) Овој дел од теоремата ќе го докажеме со веќе докажаниот дел (j) и обопштените Де Морганови закони кои за бесконечни унии и пресеци гласат: $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{A}_j$, $\overline{\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A}_j$. Да забележиме најнапред дека од $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_n \supseteq \ldots$ следува $\overline{A}_1 \subseteq \overline{A}_2 \subseteq \ldots \overline{A}_n \subseteq \ldots$. Сега:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A}_j\right) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(\overline{A}_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \blacksquare$$

Условната веројатност и овде се дефинира на ист начин како и кај дискретниот простор, а во сила остануваат и формулата за тотална веројатност и формулите на Бејес.*

V. СЕРИИ ОД НЕЗАВИСНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Ќе разгледаме една задача што е од посебен интерес за примената на теоријата на веројатноста. Таа и теориски е значајна и доведува до една од најприменливите случајни величини (случајните величини ќе ги разгледаме во следниот и другите параграфи). Откако ќе ја изнесеме шемата на Бернули, ќе разгледаме и две нејзини обопштувања.

5.1. Шема на Бернули

Нека *E* е даден експеримент и *A* еден случаен настан што е во врска со *E*. Ќе го повториме *E* *n* пати при сосема исти услови и така што, резултатот при која било негова реализација да не зависи од резултатите во другите реализации на *E*. Тогаш велиме дека сме спровеле една серија од *n* независни експерименти. При секоја реализација на *E* ќе се интересираме само за прашањето: дали настапил случајниот настан *A* или не?

Да претпоставиме дека при секоја реализација на E случајниот настан A настапува со иста веројатност p (ова, впрочем го гарантираат неизменетите услови при повторувањето на E). Натаму, да ја означиме со q веројатноста на спротивниот настан на A, значи $q = P(\overline{A})$. Задачата на која сега ќе се ограничиме е: да се најде веројатноста, во целата серија од n независни експерименти случајниот настан A да настапи j пати. Решението на оваа задача е дадено со следнава

Теорема 5.1.1.

$P_n(j) = C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j}$, $q=1-p$, при што $P_n(j)$ е веројатноста A да настапи j пати во серијата од n експерименти.

Доказ. Да го означиме со B случајниот настан: во серијата од n независни експерименти A настапил j пати. Натаму, да фиксираме j од n-те експерименти и да го означиме со B_1 настанот што настапува кога во фиксираните j експерименти настапил A а во останатите n-1 експерименти A не настапил. Поради претпоставената независност за серијата од n експерименти, веројатноста на B_1 ќе биде производ од веројатностите, j пати на A и $n-j$ пати на $\overline{A}$, т.е. $P(B_1) = p^j \cdot q^{n-j}$. Настани од обликот B_1 можат да се образуваат колку што можат да се направат комбинации од класа j од n елементи, а случајниот настан B тогаш може да се претстави како (дисјунктна) сума од сите можни настани од облик B_1. Според тоа добиваме дека $P(B) = C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j}$.∎

Пример 5.1.2. Да ја пресметаме веројатноста, при 4 фрлања на монетата во воздух, 2 пати да се појави грб. Имаме дека p=1/2, така што $P_4(2)=C_4^2\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)^2=0,375$.

Пример 5.1.3. Извршени се 4 независни стрелби од еден авион во друг. Веројатноста за погодок при секоја од стрелбите е 0,3. Доволни се два погодоци за да се собори непријателскиот авион. Веројатноста авионот да биде соборен со еден погодок изнесува 0,6. Да се пресмета веројатноста авионот да биде соборен.

Да го означиме со A случајниот настан авионот да биде соборен. Пресметувањето на веројатноста на A станува со помош на формулата за тотална веројатност. Полесно е, меѓутоа, да се пресмета веројатноста на $\bar{A}$ па со нејзина помош да ја пресметаме и бараната веројатност. Ќе ги разгледаме следниве два случајни настани: C_1 - авионот не е погоден и C_2 - авионот е еднаш погоден. Земајќи p=0,3, со примена на теоремата 5.1.1. ќе добиеме: $P(C_1)=P_4(0)=$ $= C_4^0\cdot 0,3^0\cdot 0,7^4=0,7^4 = 0,240$, $P(C_2) = C_4^1\cdot 0,3^1\cdot 0,7^3 = 0,412$. Бидејќи $P(\bar{A}/C_1)=1$ и $P(\bar{A}/C_2) = 1-0,6 = 0,4$, имаме дека

$P(A) = P(C_1)P(\bar{A}/C_1)+P(C_2)P(\bar{A}/C_2) = 0,240+0,412.0,4=0,405$,

и, конечно, $P(A) = 1-P(\bar{A}) = 0,595$.

Во некои задачи што се поврзани со шемата на Бернули може да послужи следнава формула, која е последица на очигледниот факт дека, во една серија од n независни експерименти даден настан A може да настапи 0 пати, 1 пат, 2 пати, итн. n пати. Според тоа,

Теорема 5.1.4.

$$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+...+P_n(n) = 1.$$

Ако го земеме развојот на биномот $(px+q)^n$, каде $q=1-p$, ќе добиеме дека

$$(px+q)^n = (q+px)^n =$$
$$= C_n^0\cdot p^0\cdot q^n\cdot x^0 + C_n^1\cdot p\cdot q^{n-1}\cdot x + C_n^2\cdot p^2\cdot q^{n-2}\cdot x^2 +...$$
$$...+ C_{n-1}^{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q\cdot x^{n-1} + C_n^n\cdot p^n\cdot q^0\cdot x^n.$$

Тоа доведува до следнава интерпретација на веројатностите определени во теоремата 5.1.1: $P_n(j)$ е коефициентот што му одговара на членот при кој x е на степен j. Значи,

$$(px+q)^n = P_n(0)x^0 + P_n(1)x + P_n(2)x^2 +...+ P_n(n)x^n,$$

па ако во последнава формула замениме x=1 и земеме предвид дека $p+q$=1, ќе го добиеме равенството од теоремата 5.1.4.■

5.2. Најверојатен број (мода)

Да ја изучиме зависноста на $P_n(j)$ од j, посебно, да ја одредиме најголемата од веројатностите $P_n(j)$ земајќи n да е фиксно. Доколку постои таков j што $P_n(j)$ да биде најголема меѓу сите веројатности од тој вид, тогаш j ќе го викаме **најверојатен број** или **мода.**

Од $P_n(k+1)=C_n^{k+1}\cdot p^{k+1}\cdot q^{n-k-1}$ и $P_n(k)=C_n^{k}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}$ го образуваме односот:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}\,. \qquad (1)$$

Можни се следниве три случаи:

а) ако $np-q>k$, тогаш, поради $p+q=1$, имаме $(n-k)p>(k+1)q$, а тоа значи дека $P_n(k+1)>P_n(k)$;

б) ако $np-q=k$, тогаш $P_n(k+1)=P_n(k)$;

в) ако $np-q<k$, тогаш $P_n(k+1)<P_n(k)$.

Во барањето на најверојатниот број ќе ги разликуваме следниве два случаја:

(j) Нека $np-q=k_0$ е цел број; k_0 всушност е природен број. Нека $k<k_0$; да земеме $k=k_0-t, t>0$. Тогаш од $k<k+1<k+2<...<k+t-1<k+t = k_0 = np-q$, според а) следува дека $P_n(k)<P_n(k+1)<P_n(k+2)<...<P_n(k+t-1)<P_n(k_0)$, така што за $k<k_0$ имаме дека е $P_n(k)<P_n(k_0)$. Натаму, според б) имаме и $P_n(k_0)=$ $=P_n(k_0+1)$. Нека е, сега, $k>k_0+1$, т.е. $k-j=k_0$, $j>1$. Тогаш од $k-1>k-2>...>k-j+1>k-j=k_0 = np-q$, според в) следува дека $P_n(k)<P_n(k-1)<P_n(k-j+2)<P_n(k-j+1)=P_n(k_0+1)=P(k_0)$. Можеме да заклучиме, значи, ако $np-q=k_0$ е цел број, тогаш $P_n(k_0)=$ $=P_n(k_0+1)$ се најголеми меѓу сите веројатности $P_n(j)$, т.е. k_0 и k_0+1 се два најверојатни броја.

(jj) Да претпоставиме дека $np-q$ не е цел број и да земеме k_0 да биде најмалиот природен број што е поголем од $np-q$. Работејќи како и во (j) можеме да дојдеме до следниве заклучоци: ако $k<k_0$, според изборот на k_0 тогаш ќе биде $k<np-q$, па со повеќекратна примена на а) ќе добиеме

$P_n(k)<P_n(k+1)<\ldots<P_n(k_0)$. Ако е $k>k_0$, тогаш $k>np-q$, па со повеќекратна примена на в) се добива $P_n(k)<P_n(k-1)<\ldots<P_n(k_0)$. Така, во овој случај, k_0 е најверојатен број.

Со погоре спроведената анализа ја докажавме следнава **Теорема 5.2.1.**

Нека p е веројатноста на случајниот настан A во шемата на Бернули со n независни експерименти и нека $q=1-p$. Тогаш:

а) ако $np-q=k_0$ е цел број, k_0 и k_0+1 ќе бидат најверојатни броеви (моди) за настапување на настанот A во целата серија од n експерименти;

б) ако $np-q$ не е цел број, најверојатен број за настапување на настанот A во серијата од n независни експерименти ќе биде најмалиот природен број k_0 што е поголем од $np-q$. ■

Пример 5.2.2. Во една фабрика се изработуваат еден вид предмети така што технолошкиот процес обезбедува 30% од изработените предмети да бидат со подобар квалитет од стандардниот. Да се најде најверојатниот број на предмети со подобар квалитет во една случајно избрана партија од 75 изработени предмети.

Веројатноста, при изработката на секој предмет, тој да биде со подобар квалитет е $p=0,3$. Јасно е дека се работи за шемата на Бернули со $n=75$. Бидејќи $q=1-p=0,7$ и дека $np-q=21,8$, според теоремата 5.2.1 имаме $k_0=22$, т.е. најверојатно е дека меѓу случајно избраните 75 предмети 22 ќе бидат со повисок квалитет од стандардниот.

Пример 5.2.3. Колку фрлања на коцка на рамнина се потребни за да најверојатниот број на појавување на "шестки" е 10?

Овде имаме $p=1/6$, $q=5/6$ и $k_0=10$. Потребно е да го најдеме n така што да бидат задоволени неравенките $np-q\le k_0\le np-q+1$. Тоа доведува до барање заедничко решение на неравенките $n/6-5/6\le 10$ и $n/6+1/6\ge 10$. Решението на овие неравенки (како системи) е $59\le n\le 65$.

5.3. Теореми на Лаплас

При пресметување на веројатностите $P_n(k)$ како и при пресметување на збирови од такви веројатности од облик $P_n(j)+P_n(j+1)+\ldots+P_n(j+k)$ често настапуваат технички тешкотии. Да го илустрираме ова со еден пример:

Пример 5.3.1. Веројатноста за изработка на висококвалитетни предмети на една машина е 0,4. Каква е веројатноста дека, меѓу случајно избрани 26 предмети половината ќе бидат висококвалитетни?

Решението на задачата е $P_{26}(13) = C_{26}^{13}.0,4^{13}.0,6^{13}$. Не постојат никакви принципиелни тешкотии за пресметување на оваа веројатност, но очигледно е дека постојат технички тешкотии поради нужноста да се извршуваат "долги" пресметувања. Решението на оваа задача ќе го дадеме подоцна.

Поради споменатите тешкотии би било згодно да се најде можност барем за приближно пресметување на веројатностите што се појавуваат во шемата на Бернули. Такви приближни формули постојат и ние ќе ги добиеме како последици од овие две теореми на Лаплас чија содржина и, особено докази, читателот може да ги пропушти ако има потешкотии во нивното разбирање.

Теорема 5.3.2. *

(Локална теорема на Лаплас) Нека е $p\neq 0,1$ во шемата на Бернули со n независни експерименти. Да ставиме

$$x = \frac{j-np}{\sqrt{npq}} .$$

Тогаш раввномерно по x во секој конечен интервал, при $n\to\infty$, имаме

$$P_n(j) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{npq}}\cdot e^{-x^2/2} \to 1.$$

Доказ.* Во доказот ќе ја користиме Стирлинговата формула според која $k! \sim \sqrt{2\pi k}\cdot k^k\cdot e^{-k}$ кога $k\to\infty$, каде $a\sim b$ кога $k\to\infty$ значи дека $\lim\limits_{k\to\infty} a/b = 1$.

Кога $n\to\infty$ тогаш рамномерно по x во секој конечен интервал $[x_1,x_2]$ е $j=np+x\sqrt{npq}\to\infty$ и $n-j=nq-x\sqrt{npq}\to\infty$, па со примена на Стирлинговата формула се добива:

$$P_n(j)\sim\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot p^j\cdot q^{n-j}}{\sqrt{2\pi j}\cdot j^j\cdot e^{-j}\cdot\sqrt{2\pi(n-j)}\cdot(n-j)^{n-j}\cdot e^{-(n-j)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n}{j(n-j)}}\cdot\left(\frac{np}{j}\right)^j\cdot\left(\frac{nq}{n-j}\right)^{n-j}$$

Поради $\frac{j(n-j)}{n}=n\left(p+x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\cdot\left(q-x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\sim npq$,
сега се добива дека

$$P_n(j)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\left(\frac{np}{j}\right)^j\cdot\left(\frac{nq}{n-j}\right)^{n-j}.$$

Од друга страна, од $\frac{j}{np}=1+x\sqrt{\frac{q}{np}}$, $\frac{n-j}{nq}=1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}$, земајќи предвид дека $ln(1+t)\sim t-\frac{1}{2}t^2$ кога $t\to0$, се добива дека

$$ln\left(\frac{np}{j}\right)^j=-ln\left(\frac{j}{np}\right)^j=-j\cdot ln\frac{j}{np}=-(np+x\sqrt{npq})\cdot ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$$

$$\sim(np+x\sqrt{npq})\cdot\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{np}\cdot x^2\right).$$

Слично : $ln\left(\frac{nq}{n-j}\right)^{n-j}\sim-(np-x\sqrt{npq})\cdot\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{nq}\cdot x^2\right).$

Со оглед на погоре добиеното, ако ставиме $A=\left(\frac{np}{j}\right)^j\cdot\left(\frac{nq}{n-j}\right)^{n-j}$, ќе имаме

$$P_n(j)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot A,$$

при што

$$lnA=ln\left(\frac{np}{j}\right)^j+ln\left(\frac{nq}{n-j}\right)^{n-j}\sim$$

$$\sim\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\left(q\cdot\sqrt{\frac{q}{p}}-p\cdot\sqrt{\frac{p}{q}}\right)x^3\sim-\frac{x^2}{2}$$

што покажува дека $\lim\limits_{n\to\infty}A=e^{-x^2/2}$, каде конвергенцијата е рамномерна по x во секој конечен интервал $[x_1,x_2]$. За да се заврши доказот останува уште последната граница да се замени во

$$P_n(j) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot A. \ \blacksquare^*$$

Како последица од штотуку докажаната теорема се добива:

Теорема 5.3.3

Ако веројатноста p за настапување на случајниот настан A во секој од n-те независни експерименти е различна од 0 и 1, тогаш за доволно големи вредности на n е точно приближно равенство $P_n(j)\approx\phi(x)/\sqrt{npq}$, каде што

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}, \quad x=\frac{j-np}{\sqrt{npq}} \ .\blacksquare$$

Да забележиме дека, природно е да се очекува изнесената приближна формула да дава подобри резултати (подобри приближувања) за веројатностите $P_n(j)$ при поголеми вредности на n. Тоа навистина е случај. Меѓутоа, дали приближните вредности во таа формула ќе бидат подобри или не, зависи и од веројатноста p, а не само од n; приближувањата се во толку подобри во колку p е поблиску до 1/2. За случаите кога p е блиску до 0 (односно до 1) подоцна ќе изнесеме друга приближна формула. Што се однесува, пак, до пресметувањата на вредностите на изразот од десната страна на приближната формула, на прв поглед се чини дека тие не се олеснети поради сложеноста на функцијата $\phi(x)$. Ситуацијата, практично, е поинаква зашто за пресметување на вредностите на оваа функција се изработени таблици (во прилозите е дадена една куса таблица од тој вид) кои ја олеснуваат пресметувачката.

Да го завршиме сега решавањето на примерот 5.3.1. Имавме дека $p=0,4$, $q=0,6$, $n=26$. Пресметуваме, по ред: $npq=6,24$, $\sqrt{npq}=2,50$, $j-np=2,6$, $x=1,04$ и, според таблицата, $\phi(1,04)=0,232$ така што, конечно, добиваме дека $P_{26}(13)\approx0,093$.

Теорема 5.3.4.*

(интегрална теорема на Лаплас) Нека е $p\neq0,1$ во шемата на Бернули со n независни експерименти. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{j-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

Доказ. * Да ставиме $x_j = \frac{j-np}{\sqrt{npq}}$. Според локалната теорема на Лаплас добиваме дека

$$P\left(a \le \frac{j-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \sum_{j:\, a \le x_j \le b} P_n(j) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{j:\, a \le x_j \le b} e^{-x_j^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} .$$

Поради $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ имаме дека

$$P\left(a \le \frac{j-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{j:\, a \le x_j \le b} e^{-x_j^2/2} \cdot \Delta x_j,$$

при што на десната страна имаме интегрална сума за функцијата $e^{-x^2/2}$ на сегментот $[a,b]$ поради што конечно и се добива дека

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{j-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-x^2/2} dx. \ \blacksquare^*$$

И од последната теорема може да се добие едно приближно равенство:

Теорема 5.3.5.

Ако е $p \ne 0,1$ *во шемата на Бернули со* n *независни експерименти и ако* $k_1 = np + a \cdot \sqrt{npq}$, $k_2 = np + b \cdot \sqrt{npq}$, $a < b$, *тогаш за доволно големи вредности на* n *е*

$$P(k_1 < j < k_2) \approx [\Phi(b) - \Phi(a)]/2,$$

каде $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$ ■

За успешно користење на приближната формула од теоремата 5.3.5 изработени се таблици за пресметување вредностите на функцијата $\Phi(x)$. Една таква таблица е дадена во прилозите.

Пример 5.3.6. Од сите студенти на Универзитетот во Скопје, што живеат во студентските домови, 70% редовно ги следат предавањата. Каква е веројатноста дека меѓу 1000 случајно избрани и анкетирани студенти во студентските домови, бројот на студентите што редовно ги следат предавањата е меѓу 652 и 740?

Треба да пресметаме $P_{1000}(652<j<740)$. Поради тоа што бројот на анкетираните е 1000, т.е. доволно голем, можеме да ја користиме приближната формула од теоремата 5.3.5. Имаме: $n=1000$, $p=0,7$, $q=0,3$, $k_1=652$, $k_2=740$. Пресметуваме: $npq=210$, $\sqrt{npq}=14,491$, $a=-3,31$ и $b=2,76$. Од таблицата за функцијата $\Phi(x)$ ги читаме следниве вредности: $\Phi(-3,31)=-\Phi(3,31)=-0,99907$ и $\Phi(2,76)=0,99422$, така што:

$$P_{1000}(652<j<740) \approx 0,99665.$$

5.4. Теорема на Пуасон

Порано споменавме дека за вредности на p блиски уé&0 ќе најдеме друга приближна формула за пресметување на веројатностите $P_n(j)$ што се појавуваат во шемата на Бернули. Оваа приближна формула следува од теоремата на Пуасон што подолу ќе ја докажеме. Да го разгледаме најнапред следново обопштување на шемата на Бернули: разгледуваме една низа од серии од независни експерименти таква што j-тиот член од низата се состои од j независни експерименти, $j=1,2,3,...$ Шематски оваа низа можеме да ја претставиме на следниов начин:

$$\begin{array}{l}
E_{11} \\
E_{21},\ E_{22} \\
E_{31}, E_{32},\ E_{33} \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
E_{n1},\ E_{n2},\ E_{n3}, \dots, E_{nn} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Во секој од експериментите E_{jk} го следиме настапувањето на ист случаен настан A, при што ќе претпоставиме дека веројатноста на A зависи од бројот на експериментите во соодветната серија, т.е. во j-тата низа од независни експерименти, $j=1,2,3,\dots$, веројатноста на A е $p_j=P(A)$ при што за $j\neq k$, во општ случај, $p_j\neq p_k$. Да ја означиме со $P_n(k)$ веројатноста случајниот настан A да настапи k пати во серијата од n независни експерименти, т.е. $P_n(k)=C_n^k\cdot p_n^k\cdot q_n^{n-k}$, каде $q_n=1-p_n$, $n=1,2,3,\dots$. При овие ознаки, да докажеме сега дека е точна следнава теорема:

Теорема 5.4.1.*

(Теорема на Пуасон) Ако $np_n\to a$ *кога* $n\to\infty$ *во шемата на Пуасон, тогаш* $P_n(k)\to(a^k/k!)\cdot e^{-a}$ *кога* $n\to\infty$.

Доказ.* $P_n(k) = C_n^k\cdot p_n^k\cdot q_n^{n-k}\sim$

$$\sim\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{a^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\longrightarrow\frac{a^k}{k!}\cdot e^{-a},\ \text{кога } n\to\infty.\ \blacksquare^*$$

Да ја изнесеме и последицата од теоремата на Пуасон со која се дава приближна формула за пресметување на веројатностите $P_n(k)$ во шемата на Бернули:

Теорема 5.4.2.

Нека p е веројатноста на случајниот настан A во шемата на Бернули, т.е. p е веројатноста со која A настапува во секој од експериментите од една серија од n независни експерименти. Ако p има вредност блиска до 0, тогаш за доволно големи вредности на n е точна приближната формула:

$$P_n(k) = C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\approx\frac{a^k}{k!}\cdot e^{-a},\ \text{каде } a=np.\blacksquare$$

Да ја илустрираме примената на горната приближна формула на еден пример:

Пример 5.4.3. Од едно оружје целта може да се погоди со веројатност 0,001. При една серија од 5000 независни стрелања од оружјето во дадената цел да се најде: а) целта да биде 2 пати погодена и б) целта да биде барем 2 пати погодена.

Поради $p=0,001$ и $n=5000$ имаме дека $a=np=5$. Претпоставките за примена на приближната формула од теоремата 5.4.2 се задоволени и по однос на n. Така ќе добиеме:

а) $P_{5000}(2) \approx \frac{5^2}{2!}\cdot e^{-5} \approx 0,0085$;

б) бидејќи треба да се пресмета вредноста на сумата $P_{5000}(2)+P_{5000}(3)+\ldots+P_{5000}(5000)$, ќе тргнеме од тоа што $P_{5000}(0)+P_{5000}(1)+P_{5000}(2)+\ldots+P_{5000}(5000)=1$. Така ќе се добие: $P_{5000}(2)+\ldots+P_{5000}(5000) = 1-P_{5000}(0)-P_{5000}(1) \approx \approx 1-6e^{-5} \approx 0,9596$.

Приближната формула во теоремата 5.4.2 се применува во случаите кога веројатноста p на случајниот настан A е блиска до 0. Да забележиме дека таа може да се користи и за случаите кога p е блиска до 1. Имено, ако со $P'_n(k)$ ја означиме веројатноста, во серијата од n независни експерименти, случајниот настан $\overline{A}$ да настапи k пати, тогаш ќе биде $P_n(k) = P'_n(n-k)$. За последнава веројатност, при доволно големи вредности на n, формулата од теоремата 5.4.2 е применлива зашто веројатноста $P'=P(\overline{A})$ ќе биде блиска до 0.

5.5. Обопштена шема

Шемата на Пуасон, разгледана во претходната точка, претставуваше едно обопштување на шемата на Бернули. Овде ќе разгледаме, сосема кусо, уште едно обопштување на шемата на Бернули. Да реализираме една серија од n независни експерименти. Во секој од овие експерименти го следиме настапувањето на ист случаен настан A. Претпоставувајќи ја независноста, т.е. дека резултатот во кој било од експериментите, по однос на настапувањето на A, не зависи од тоа дали A настапил во другите експерименти, сега ќе допуштиме дека A во разните реализации на експериментот може да настапи со различни веројатности. Последново значи дека условите во кои се реализира експериментот можат да се менуваат од експеримент до експеримент, т.е. всушност имаме работа не со n-кратно реализирање на еден ист експеримент, туку со една низа од n различни, но независно реализирани експерименти. Нека се $p_1,p_2,\ldots,p_n$ веројатностите со кои случајниот настан A настапува во првиот, вториот,...,n-тиот експеримент, соодветно, и нека е $q_j=1-p_j$, $j=1,2,\ldots,n$. Задачата што во оваа шема не интересира е слична со задачата во шемата на Бернули: сакаме да ја определиме веројатноста $P_n(k)$ случајниот настан A да настапи k пати во целата серија од n независни експерименти. Работејќи на ист начин како и при определувањето на оваа веројатност во шемата на Бернули, ќе дојдеме до заклучок дека $P_n(k)$ е еднаква на збир од C_n^k собирци, секој од кои е производ од n реални броеви од кои k ги претставуваат веројатностите на настанот A во k различни експерименти, т.е. k множители се од облик p_{j_1}, p_{j_2},...p_{j_k}, при што $j_1,j_2\ldots j_k$ е една варијација без повторување од ред k од елементите $1,2,3,\ldots,n$, додека $n-k$ множители од облик $q_{i_1},q_{i_2},\ldots q_{i_{n-k}}$, при што сега $i_1,i_2\ldots i_{n-k}$ претставува варијација без повторување од класа $n-k$ од елементите $1,2,3,\ldots,n$ и во еден ист производ $j_s\neq i_r$ за кои било $s=1,2,3,\ldots,k$ и $r=1,2,3,\ldots,n-k$. Според тоа, за да се пресмета $P_n(k)$ потребно е да се определат сите можни производи од погоре опишаниот вид. За полесно пресметување на овие веројатности, тргнувајќи од интерпретацијата на $P_n(k)$ при шемата на Бернули, каде тие се јавуваа како коефициенти при развојот на еден бином, ќе изнесеме и овде, без доказ, една аналогна интерпретација за $P_n(k)$:

Теорема 5.5.1.

Нека се $p_1, p_2, \ldots, p_n$ веројатностоте со кои настапува случајниот настан A во серијата од n независни експерименти и нека $q_j=1-p_j$, $j=1,2,\ldots,n$. Тогаш веројатноста $P_n(k)$, случајниот настан A да настапи k пати во целата серија експерименти, е еднаква на коефициентот пред x^k во развојот по степените од x на производот:

$$\Pi(x) = (p_1x+q_1)\cdot(p_2x+q_2)\ldots(p_nx+q_n).\blacksquare$$

Ќе разгледаме еден пример:

Пример 5.5.2. Од едно оружје се извршени 4 стрелања по цел што е во движење, при што веројатностите целта да биде погодена, по редот на стрелањата, се $p_1=0,1$, $p_2=0,2$, $p_3=0,3$ и $p_4=0,4$. Да ги пресметаме веројатностите на секој од следниве случајни настани: целта е погодена k пати за $k=0,1,2,3,4$.

Потребно е да ги пресметаме веројатностите $P_4(k)$ за вредностите на k укажани погоре. Според теоремата 5.5.1. го уредуваме по степените од x следниов производ:

$$\Pi(x)=(0,1x+0,9)(0,2x+0,8)(0,3x+0,7)(0,4x+0,6)=$$
$$= 0,302+0,440x+0,215x^2+0,040x^3+0,002x^4,$$

така добиваме: $P_4(0)=0,302$, $P_4(1)=0,440$, $P_4(2)=0,215$, $P_4(3)=0,040$ и $P_4(4)=0,002$.

5.6. Вежби

5.6.1. Веројатноста за раѓање на девојче или машко дете е еднаква на 0,5. Да се најде веројатноста дека во едно семејство од 10 деца имало:

а) 5 девојчиња;

б) не помалку од 3 и не повеќе од 8 девојчиња.

5.6.2. При пренесувања на информација по дадена линија на врска, секој од знаците што учествуваат во пренесувањето на информацијата може погрешно да биде пренесен со веројатност 0,1. Каква е веројатноста дека во една информација што се предава со 10 знаци:

а) ниеден од знаците нема да биде погрешно пренесен;

б) погрешно ќе бидат пресени точно 3 знака;

в) погрешно ќе бидат пренесени не повеќе од 3 знака?

5.6.3. Еден прибор за работа се состои од 8 еднообразни елементи. Приборот може да се користи за работа ако барем 6 од елементите се исправни. Веројатноста, во тек од еден час работа, да се расипе секој од елементите е 0,2. Да се одреди веројатноста дека во тек од еден час приборот ќе постане неупотреблив за работа.

5.6.4. Веројатноста дека случајниот настан A ќе настапи барем еднаш во една серија од 4 независни експерименти изнесува 0,59. Веројатноста за настапување на A во секој од експериментите е еднаква. Да се најде таа веројатност.

5.6.5 Секоја секунда со веројатност p независно од другите моменти на времето, по една улица поминува моторно возило. Еден пешак сака да ја помине улицата. За да ја помине улицата, на пешакот му се потребни 3 секунди. Каква е веројатноста дека пешакот ќе чека на можноста да ја премине улицата: а) 3 секунди, б) 4 секунди, в) 5 секунди?

5.6.6. Веројатноста еден кошаркар при слободно фрлање да постигне погодок изнесува 0,4 за секое негово уфрлување на топката. Да се најде најверојатниот број на погодоци, како и неговата веројатност ако во текот на едно полувреме кошаркарот 10 пати ја уфрлувал топката во кошот.

5.6.7. Да се најдат најверојатните броеви на негативни и позитивни грешки и нивните веројатности, при 4 независни мерења, ако при секое мерење веројатноста да се направи позитивна грешка изнесува 2/3, а веројатноста да се направи негативна грешка само 1/3.

5.6.8. Во една градина биле посадени 28 садници со иста веројатност за успешно развивање на секоја од нив. Каква е таа веројатност ако 17 и 18 се најверојатни броеви на успешно развиени садници?

5.6.9. Во еден меч за светско првенство во шах партиите што завршуваат реми не се сметаат, а играта се продолжува се додека еден од учесниците во мечот не собере 6 поени, (по 1 поен се добива за секоја добиена партија, додека изгубените партии и партиите што завршуваат реми не донесуваат поени). Сметајќи дека учесниците во мечот се подеднакво силни, а резултатите од одделните партии независни, да се најде веројатноста дека, во моментот на завршување на мечот, победениот играч освоил k поени, k=0,1,2,3,4,5.

5.6.10. Веројатноста за изработка на висококвалитетни предмети при определен технолошки процес изнесува 0,64. Колку предмети треба да се изработаат така што најверојатниот број на висококвалитетни предмети да биде 51?

5.6.11. Колку пати со веројатност 0.0484 може да се очекува настапувањето на еден случаен настан A во една серија од 100 независни експерименти, ако веројатноста за настапувањето на A во секој од експериментите е 0,5?

5.6.12. Колку, приближно, независни експерименти треба да се реализираат за да веројатноста случајниот настан A да настапи повеќе од 5 пати, изнесува 0,8 ако веројатноста за настапување на A во секој од експериментите е еднаква на 0,05?

5.6.13. Веројатноста дека еден нов телевизор ќе биде произведен со дефект изнесува 0,002. Каква е веројатноста дека во едно произволно избрано множество од 500 телевизори:

а) 2 телевизори се произведени со дефект;

б) барем 1 телевизор е произведен со дефект?

5.6.14. По една линија на врска се пренесуваат 1000 знаци. Секој од знаците може неправилно да биде пренесен, независно од останатите со веројатност 0,005. Да се најде приближната вредност на веројатноста дека неправилно ќе бидат пренесени не повеќе од 3 знаци.

5.6.15. Да се најде приближната вредност на веројатноста дека, бројот на "деветки" меѓу 10000 случајни броеви ќе се најде меѓу броевите 940 и 1060. При тоа под случајни броеви се подразбираат реализации на низи од независни избори на цифрите 0,1,...,9 при што секоја од нив при секој избор може да биде избрана со една иста веројатност и за сите нив веројатностите се еднакви.

5.6.16. Веројатностите, првите три дена од август да бидат сончеви, изнесуваат: за 1 август 0,4, за 2 август 0,5 и за 3 август 0,3. Каква е веројатноста дека барем еден од првите три дена на август ќе биде сончев?

5.6.17. Пет стрелци, независно еден од друг, стрелаат во иста цел. Првиот од стрелците ја погодува целта со веројатност 0,3, вториот со веројатност 0,6, третиот со веројатност 0,4, четвртиот со веројатност 0,8 и петтиот со веројатност 0,5. Стрелците по еднаш истрелале во целта. Да се најде веројатноста:

а) целта да биде погодена 3 пати;

б) целта да биде погодена барем 3 пати.

5.6.18. На три машини се изработуваат ист вид предмети. На првата машина 5% од изработените предмети не одговараат на стандардите, на втората машина 10% се нестандардни предмети, додека на третата машина 20% од предметите се нестандардни. Произволно се избираат 5 предмети: еден од првата машина и по два од втората и третата машина. Да се најде веројатноста:

а) ниеден од избраните предмети да не биде стандарден;

б) 2 од избраните предмети да не бидат стандардни;

в) барем 2 од предметите да бидат нестандардни.

5.6.19. Во една маратонска трка учествуваат 8 натпреварувачи. Два натпреварувачи можат да ја претрчаат целата патека со веројатност 0,7, додека по три натпреварувачи ја претрчуваат патеката со веројатност 0,8, односно 0,9.

Да се најде веројатноста дека:

а) сите натпреварувачи ќе ја претрчаат патеката;

б) само 5 натпреварувачи ќе ја претрчаат патеката;

в) барем 2 натпреварувачи ќе ја претрчаат патеката.

5.6.20. Еден уред е составен од 6 елементи. Уредот може да работи ако барем половината од елементите се исправни. Трите елементи во тек на период од време еднаков на T се расипуваат со веројатност 0,3, два од елементите се расипуваат за времето T со веројатност 0,2, додека за еден од елементите да се расипе за периодот T веројатноста изнесува 0,1. Да се најде веројатноста дека во период од време T уредот ќе може да работи.

5.6.21. Една порака се предава преку линија на врска со два вида сигнали. Еден од сигналите може погрешно да биде пренесен со веројатност 0,4, а другиот со веројатност 0,5. Предадена е порака што се состои од 5 сигнали од кои 3 од првиот, а 2 од вториот вид. Да се пресмета веројатноста:

а) пораката да биде правилно пренесена;

б) еден од сигналите да биде еднаш погрешно пренесен;

в) барем во два случаи од петте пренесени сигнали да се појави неправилност.

VI. СЛУЧАЈНИ ВЕЛИЧИНИ

Во овој параграф ќе го воведеме поимот за случајна величина, ќе се задржиме на можностите на определувањето на случајните величини и сосема кусо, ќе се задржиме на случајните вектори и функциите од случајни величини. Во основа, нашето внимание ќе биде насочено кон дискретните случајни величини; во необврзниот дел, меѓутоа, ќе ги разгледаме и непрекинатите случајни величини.

6.1. Функција на распределба

За да го појасниме подобро основниот поим што овде ќе го изучуваме, ќе изнесеме неколку примери.

Пример 6.1.1. Се извршува стрелба од 4 оружја на една иста цел. Првото оружје ја погодува целта со веројатност 0,4, второто со веројатност 0,5, третото со веројатност 0,4 и четвртото со веројатност 0,3. Да го означиме со X бројот колку пати е погодена целта. Тогаш X ќе биде променлива величина што може да прими една од вредностите: 0, 1, 2, 3, 4. Забележуваме дека X не ги прима овие вредности подеднакво често, т.е. не се сите веројатности со кои X ги прима овие вредности меѓу себе еднакви. Да ги пресметаме тие веројатности:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}126;\\
P(X=1) &= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7 +\\
&+ 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 = 0{,}348;\\
P(X=2) &= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 +\\
&+ 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 +\\
&+ 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}350;\\
P(X=3) &= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 +\\
&+ 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}152;\\
P(X=4) &= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}024.
\end{aligned}$$

Забележуваме дека $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$.

Пример 6.1.2. Да го означиме со X бројот што го претставува збирот на точките што се појавуваат при фрлањето на рамнина на две коцки за играње. Тогаш X ќе биде променлива величина што ги прима вредностите : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Веројатностите со кои X ги прима овие вредности ќе бидат, по ред: 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36, 1/36. И овде забележуваме дека збирот на веројатностите што одговараат на сите вредности што ги прима X изнесува 1.

Следниов пример е малку поопшт отколку првите два и игра посебна улога, како во теоријата на веројатноста, исто така и во нејзината примена.

Пример 6.1.3. Да ја разгледаме шемата на Бернули, т.е. да реализираме една серија од n независни експерименти во кои случајниот настан A настапува со иста веројатност p. Да го означиме со X бројот на настапите на настанот A во целата серија од n независни експерименти. Тогаш X ги прима вредностите 0, 1, 2, ..., n со веројатности

$P(X=k)=p_k=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$. Од теоремата 5.1.4 следи дека и овде збирот на веројатностите што одговараат на сите значења што ги прима X е еднаков на 1.

Да одбележиме нешто што е заедничко за сите примери што погоре ги разгледавме. Во секој од горните примери среќаваме по една величина X која може да прима вредности од некое (во нашите примери конечно) подмножество од множеството на реалните броеви. Натаму, бидејќи X не ги прима сите вредности еднакво често, за нејзино подобро опишување беше потребна дополнителната информација за веројатностите со кои таа ги прима одделните вредности. Во таа смисла, настанот X да ја прими вредноста x, $X=x$, е случаен настан, па заради тоа за X велиме дека е **случајна величина**. Значи, имајќи ги предвид изнесените примери, можеме да сметаме дека една случајна величина X е зададена добро, ако се познати вредностите што таа може да ги прими, како и веројатностите со кои ги прима одделните вредности; збирот на сите веројатности со кои која било случајна величина X ги прима сите можни вредности, мора да биде еднаков на 1.

***Забелешка 6.1.4.** Погоре изнесената дефиниција за случајна величина е описна, недоволно прецизна и се ослонуваше на три посебни примери. За случаите кога случајната величина X прима вредности од едно конечно подмножество од множеството на реалните броеви таа дефиниција е задоволувачка, како што ќе видиме подоцна. Меѓутоа, со таквите случаи не се исцрпуваат сите (барем оние што најчесто се среќаваат во практиката) случајни величини. Од тие причини овде ќе изнесеме и една формална дефиниција.

Нека е (Ω,Φ,P) даден простор на веројатност а $f:\Omega\to\mathbb{R}$ пресликување од просторот од елементарни настани Ω во множеството од реалните броеви $\mathbb{R}$. Нека е $A'\subseteq\mathbb{R}$; со $A=f^{-1}(A')$ ќе го означиме подмножеството од Ω што ги содржи сите $\omega\in\Omega$ за кои $f(\omega)\in A$, т.е.

$$A=f^{-1}(A') = \{\omega\in\Omega \mid f(\omega)\in A\}.$$

Натаму, да ја означиме со Φ' фамилијата од сите подмножества A' од $\mathbb{R}$ такви што $f^{-1}(A')\in\Phi$. Конечно, ќе дефинираме пресликување P' од Φ' во $\mathbb{R}$ со $P'(A')=P(A)$ каде $A=f^{-1}(A')$. Се покажува дека е точна следнава теорема:

Теорема 6.1.5.

$(\mathbb{R},\Phi',P')$ *е простор на веројатност.* ■

За веројатноста P' дефинирана на Φ' на погоре опишаниот начин, се вели дека е **индуцирана** од P; натаму P' ќе ја означуваме со P уверени дека со тоа нема да дојде до недоразбирање.

Да ја изнесеме, сега, дефиницијата за **случајна** величина. Нека е (Ω,Φ,P) даден простор на веројатност **и нека** $(\mathbb{R},\Phi',P)$ е индуцираниот простор на веројатност од дадениот со пресликувањето $f:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$. Ако за секој $x\in\mathbb{R}$, $A_x=(-\infty,x)\in\Phi'$, т.е. $f^{-1}[(-\infty,x)]\in\Phi$, тогаш за $X=f(\omega)\in\mathbb{R}$ велиме дека е **случајна величина**. За случајната величина X може да се дефинира функцијата

$$F(x) = P(A_x) = P(X<x),$$

чија дефинициона област е целото множество од реалните броеви $\mathbb{R}$. За $F(x)$ велиме дека е **функција на распределба** на случајната величина X. Секој начин на задавање на една случајна величина X што овозможува да се определи функцијата на распределба на X се вика **закон на распределба** на X.*

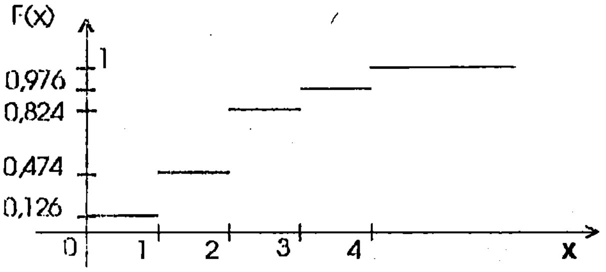
Во горната забелешка спомнавме дека задавањето на една случајна величина X што прима вредности од едно конечно подмножество од $\mathbb{R}$ со укажувањето на веројатностите со кои ги прима одделните вредности, е доволно за да случајната величина биде добро зададена. Тоа значи дека веројатностите претставуваат еден закон на распределбата на случајната величина. Да го разгледаме ова тврдење на трите примери што ги разгледавме во почетокот:

Пример 6.1.6. Ке ги определиме функциите на распределба на случајните величини од примерите 6.1.1.-6.1.3.

а) Нека X е случајната величина од примерот 6.1.1. На експериментот од овој пример можеме да му го придружиме како простор од елементарни настани следново множество

$$\Omega = \{(а,б,в,г) \;|а,б,в,г \in \{0,1\}\},$$

каде ќе земеме, на пример, а да прими вредност 0 ако првото од оружјата не ја погоди целта и вредност 1 ако ја погоди целта; слично за другите оружја. Веројатноста на секој од елементарните настани тогаш се пресметува како веројатност на производ од 4 независни случајни настани, а преку овие веројатности се определува веројатноста за секој случаен настан што е во врска со овој експеримент на начинот покажан при дефиницијата на дискретниот простор на веројатност. Пресликувањето $f:\Omega\to\mathbb{R}$ можеме да го дефинираме со $f(\omega)=X$ каде X го означува бројот на единици што се појавуваат во $\omega=(а,б,в,г)$. На тој начин ја добиваме случајната величина X во согласност со дефиницијата изнесена во забелешката 6.1.4, зошто за кој било реален број x, комплетната инверзна слика $f^{-1}[(\infty,x)]$ ќе биде содржана во Φ која овде се состои од сите подмножества од Ω. Да ја најдеме сега функцијата на распределба на X:



сл.1

$$F(x) = \begin{cases} 0, & за\ x\le 0 \\ 0,126 & за\ 0<x\le 1 \\ 0,474 & за\ 1<x\le 2 \\ 0,824 & за\ 2<x\le 3 \\ 0,976 & за\ 3<x\le 4 \\ 1, & за\ x>4 \end{cases}$$

каде, на пример, случајниот настан $X<x$, за $0<x\le 1$ може да се добие како слика од случајниот настан што ги содржи како елементарни следниве случајни настани: (0,0,0,0),

(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) и (0,0,0,1), така што веројатноста на настанот $X<x$ ќе биде еднаква на збирот од веројатностите на горните 5 елементарни настани, па $F(x)=0,126$ за $0<x\leq 1$. На сл.1 е дадена скица на функцијата на распределба $F(x)$ на случајната величина X.

б) Работејќи како во претходниот случај, ќе добиеме дека функцијата на распределба на случајната величина X во овој случај е определена со: $F(x)=0$ за $x\leq 2$, $F(x)=1/36$ за $2<x\leq 3$, $F(x)=3/36$ за $3<x\leq 4$, $F(x)=6/36$ за $6<x\leq 7$, $F(x)=21/36$ за $7<x\leq 8$, $F(x)=26/36$ за $8<x\leq 9$, $F(x)=30/36$ за $9<x\leq 10$, $F(x)=33/36$ за $10<x\leq 11$, $F(x)=35/36$ за $11<x\leq 12$ и $F(x)=1$ за $x>12$.

в) За случајната величина X од примерот 6.1.3. ќе велиме дека е распределена по **биномниот закон** и ќе пишуваме $X:\mathbb{B}(n,p)$. Нејзината функција на распределба е определена на следниов начин:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ за } x\leq 0 \\ \sum\limits_{k<x} P(k), \text{ за } 0<x\leq n \\ 1, \text{ за } x>n\ . \end{cases}$$

Ќе изнесеме неколку основни својства за функцијата на распределба на која било случајна величина. Од погоре изнесените примери можеме да забележиме дека (тоа особено може да се види од графикот на случајната величина од примерот а)): функцијата на распределба е ограничена (меѓу 0 и 1), дека опаѓа, дека е непрекината од лево во секоја точка и дека таа се стреми кон 0 кога x се стреми кон $-\infty$, а се стреми кон 1 кога $x\to+\infty$. Пред да поминеме на докажување на наведените својства, во општ случај, ќе ја докажеме следнава интересна особина:

Теорема 6.1.7.

Нека $F(x)$ е функција на распределба на произволна случајна величина X и нека $x_1<x_2$ се два реални броја. Нека $x_1\leq X<x_2$ е случајниот настан X да прими вредност од

интервалит $[x_1,x_2)$. *Тогаш веројатноста на последниот случаен настан се пресметува по формулата:*

$$P(x_1\le X<x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Доказ. Ги разгледуваме следниве случајни настани: A:$X<x_2$, B:$X<x_1$ и C:$x_1\le X<x_2$. Јасно е дека A=B+C, од каде следува дека $P(A)=P(B)+P(C)$, т.е. $P(C)=P(A)-P(B)$. Бидејќи $P(A)=P(X<x_2)=F(x_2)$ и $P(B)=P(X<x_1)=F(x_1)$, добиваме дека $P(x_1\le X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$. ■

Да ги изнесеме **карактеристичните** својства на функцијата на распределба.

Теорема 6.1.8.

Нека X е произволна случајна величина и F(x) нејзина функција на распределба. Тогаш точни се следниве својства:

- *а)* $F(x)$ *е ограничена; попрецизно, за секој* $x\in\mathbb{R}$, $0\le F(x)\le 1$;
- ***б)*** $F(x)$ ***е монотона функција што не опаѓа;***
- ***в)*** $F(x)$ ***е непрекината одлево во секоја точка;***
- *г)* $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$ ***каде*** $F(-\infty)$ ***ја означува границата*** $\lim_{x\to-\infty} F(x)$, ***а*** $F(+\infty)$ ***границата*** $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Доказ. а) Од **дефиницијата** на $F(x)$ **имаме** дека $F(x)=P(X<x)$, а веројатноста на било **кој случаен** настан е меѓу 0 и 1. Оттука следува дека за било кој $x\in\mathbb{R}$ е $0\le F(x)\le 1$.

б) Нека $x_1<x_2$. Од теоремата 6.1.7 имаме

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1\le X<x_2) \ge 0,$$

зошто веројатноста на кој било случаен настан е ненегативна. Така добиваме дека $F(x_1)\le F(x_2)$, што покажува дека $F(x)$ не расте.

*в) За да го докажеме овој дел ќе ја користиме следнава особина од виша математика која и ќе ја докажеме, зошто таа понекогаш не се докажува во стандардните курсеви (на пример на Техничките факултети):

Теорема 6.1.9.

Ако функцијата $f(x)$ е мајорирана и не опаѓа во интервалот (a,b) (при што може да биде и $b=+\infty$), тогаш постои левата граница во точката b. Дуално, ако функцијата $f(x)$ е минорирана и не опаѓа во интервалот (a,b) (при што може да биде и $a=-\infty$), тогаш постои десната граница $\lim_{x\to a^+} f(x)$ во точката a.

Доказ на теоремата 6.1.9. Поради симетрија ќе го докажеме само првиот дел од оваа теорема. Да земеме b да биде некој реален број. Секоја мајорирана функција на дадено множество од реални броеви има супремум на тоа множество. Да земеме M да биде супремумот на $f(x)$ на (a,b). Нека е $\varepsilon>0$ произволен реален број. Од својството M да е супремум на $f(x)$ на (a,b) следува дека постои $x^*\in(a,b)$ таков што $f(x^*)>M-\varepsilon$. Да земеме $b-x^*=\delta_\varepsilon$. Нека $|x-b|<\delta_\varepsilon$, $x<b$. Тогаш $b-x<\delta_\varepsilon=b-x^*$ од каде следува дека $x^*<x$, а поради претпоставената монотоност, последново повлекува дека $f(x^*)\le f(x)$. Од последново неравенство и од $f(x^*)>M-\varepsilon$ следува дека $M-f(x)<\varepsilon$. Од друга страна пак, поради тоа што M е мајорант, добиваме и $M-f(x)\ge 0>-\varepsilon$, па $|f(x)-M|<\varepsilon$ што значи дека $\lim_{x\to b^-} f(x)=M$. Да земеме, сега, $b=+\infty$. За произволно избраниот $\varepsilon>0$ го бираме x^* на ист начин како и погоре и ставаме $H_\varepsilon=|x^*|$. Повторувајќи го соодветниот дел од горниот доказ, од $x>H_\varepsilon\ge x^*$ ќе добиеме дека следува $|f(x)-M|<\varepsilon$, со што би добиле дека $\lim_{x\to+\infty} f(x)=M$. ■

Да се вратиме на доказот на својството в). Нека е x_0 произволен реален број. Ќе ја разгледаме функцијата на распределба $F(x)$ на интервалот (a,x_0) каде $a<x_0$. Според теоремата 6.1.9, имајќи ги предвид веќе докажаните својства а) и б) од оваа теорема, следува дека постои границата $\lim_{x\to x_0^-} F(x)$. Тоа значи дека, за било која низа

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

таква што $x_n<x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_o$, кореспондентната низа

$$F(x_1),\ F(x_2),\ F(x_3),\ \dots,\ F(x_n),\ \dots$$

е конвергентна; нејзината граница е имено $\lim\limits_{x\to x_0^-}F(x)$. Треба да покажеме дека последната граница е еднаква со $F(x_0)$. Ќе ја избереме првата низа да биде монотоно растечка и ќе ги разгледаме следните случајни настани:

$$A_1\colon\ X<x_1,\ A_2\colon\ x_1\le X<x_2,\ \dots,\ A\colon\ x_{n-1}\le X<x_n,\ \dots$$

Поради $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=x_0$ и $A_jA_k=\emptyset$ за $j\ne k$, случајниот настан A: $X<x_0$ е дисјунктна сума од случајните настани од претходната низа. Така, имајќи ја предвид аксиомата Р.3 од аксиоматиката на Колмогоров, ќе добиеме:

$$\begin{aligned}P(A) &= P\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}P(A_n) =\\ &= P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty}P(x_{n-1}\le X<x_n) =\\ &= F(x_1) + \sum_{n=2}^{\infty}[F(x_n)-F(x_{n-1})].\end{aligned}$$

Забележуваме дека овде е користена и теоремата 6.1.7. Бидејќи

$$P(A) = F(x_0) \text{ и}$$

$$F(x_1) + \sum_{n=2}^{\infty}[F(x_n)-F(x_{n-1})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}[F(x_1)+F(x_2)-F(x_1)+\dots+F(x_n)-F(x_{n-1})] = \lim_{n\to\infty}F(x_n),$$

имаме дека

$$\lim_{x\to x_0^-}F(x) = \lim_{n\to\infty}F(x_n) = F(x_0).$$

*г) Ќе го докажеме само својството $F(+\infty)=1$, оставајќи читателот, аналогно, да го докаже другото својство. И овде ќе ја користиме теоремата 6.1.9. Според неа постои $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, така што можеме да избереме монотоно растечка низа

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ за да добиеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(+\infty)$ каде $F(x_n)$ е општиот член на низата

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots,\ F(x_n),\ \ldots$$

Овде ќе ги разгледаме следниве случајни настани:

$$A_n:\ X<x_n,\ n=1,2,\ldots$$

Јасно е дека $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, а поради $A_1 \subseteq A_2 \subset \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$, според теоремата 4.3 (ј) се добива, конечно,

$$1 = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} F(x)^{*}. \ \blacksquare$$

Во теоремата 6.1.8 изнесовме неколку свијства што ги поседува функцијата на распределба на секоја случајна величина X. Тие својства се карактеристични за функциите на распределба зошто, може да се покаже дека, секоја функција од една независнопроменлива што е дефинирана на целото множество од реалните броеви и ги поседува својствата од теоремата 6.1.8 може да се смета за функција на распределба на некоја случајна величина.

6.2 Дискретни случајни величини

Случајната величина X ја викаме дискретна ако прима вредности од некое конечно множество или преброиво множество (т.е. такво множество чии елементи можат да се наредат во една низа). Закон за распределба на дискретните случајни величини чинат веројатностите со кои тие ги примаат одделните вредности, зошто , слично на порано разгледаните примери, и во општиот случај преку овие веројатности може да се определи функцијата на распределба. Пред тоа да го покажеме, да се договориме дека, ако на пример, случајната величина X ги прима вредностите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ со веројатности $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ќе пишуваме

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{pmatrix}.$$

Ако во овој запис на случајната величина X, вредностите што ги прима се подредени во ред на растење, тогаш нејзината функција на распределба ќе биде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ за } x \le x_1 \\ \sum\limits_{j:x_j<x} p_j, \text{ за } x_1 < x \le x_k \\ 1, \text{ за } x > x_k \end{cases}$$

Обратно, сега ќе покажеме дека, ако за дискретната случајна величина е зададена функцијата на распределба, тогаш од неа можат да се добијат вредностите што ги прима таа величина и соодветните им веројатности. За таа цел ќе ни биде корисна следнава теорема:

Теорема 6.2.1.*

Нека $F(x)$ е функција на распределба на случајната величина X. Ако $F(x)$ има прекин во точката x_0, тогаш $P(X=x_0)$ е еднаква на скокот на $F(x)$ во x_0, а ако пак $F(x)$ е непрекината во x_0, тогаш $P(X=x_0)=0$.

Доказ. Од теоремата 6.1.9 следува дека во било која точка x_0 од $\mathbb{R}$ постои десната граница $F(x_0+0)=\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x)$. Да земеме

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

да биде монотоно опаднувачка низа таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n > x_0$ и да ги разгледаме следниве случајни настани:

$$A_n: x_0 \le X < x, \; n=1,2,3,\ldots$$

Поради $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A = (X=x_0)$, според теоремата 4.3 (јј) добиваме дека

$$P(X=x_0) = P(A) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

од каде, применувајќи ја и теоремата 6.1.7, ќе добиеме

$$P(X=x_0) = \lim_{n\to\infty}[F(x_n)-F(x_0)] = \lim_{n\to\infty}F(x_n)-F(x_0),$$

т.е.

$$P(X=x_0) = F(x_0+0) - F(x_0).$$

Од последново равенство следува дека: (ј) ако $F(x)$ има прекин во x_0 тогаш $F(x_0+0)-F(x_0)$, а според тоа и $P(X=x_0)$ ќе го претставува скокот на $F(x)$ во x_0, (јј) ако $F(x)$ е непрекината во x_0, тогаш $F(x_0+0)=F(x_0)$ така што $P(X=x_0)=0$. *■

Нека, сега, X е дискретна случајна величина чија функција на распределба има прекини, на пример, во точките $x_1,x_2,\ldots x_k$. Од последната теорема тогаш направо следува дека

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{pmatrix}$$

каде $p_j=F(x_j+0)-F(x_j)=P(X=x_j)$. Да разгледаме еден пример:

Пример 6.2.2. Ако функцијата на распределба на случајната величина X е

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ за } x\le -1 \\ 0,2 \text{ за } -1<x\le 1 \\ 0,3 \text{ за } 1<x\le 2 \\ 0,6 \text{ за } 2<x\le 5 \\ 0,7 \text{ за } 5<x\le 6 \\ 1 \text{ за } x>6, \end{cases}$$

тогаш X ќе биде определена со следнава таблица:

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Ќе разгледаме, на крајот на оваа точка, неколку поопшти примери што се од посебен интерес за примената на теоријата на веројатноста. Тие имаат посебно место и во самата теорија на веројатноста, а нам натаму ќе ни бидат полезни за илустрација на поимите што покасно ќе ги изучуваме.

Пример 6.2.3. (Биномен закон) Случајната величина X што е распределена по Биномниот закон веќе ја сретнавме во примерите 6.1.3 и 6.1.6в). Да се потсетиме само дека X ги прима вредностите $0,1,2,\ldots,n$ со веројатности $P(X=j)=C_n^j\cdot p^j\cdot q^{n-j}$ каде $0<p<1$ и $q=1-p$. Овој закон ќе го означуваме, како што веќе спомнавме, со $B(n,p)$, т.е. ќе пишуваме $X:B(n,p)$.

Пример 6.2.4. (Дискретен рамномерен закон) За случајната величина X што прима вредности од едно конечно множество со веројатноси што се еднакви за сите тие вредности, велиме дека има дискретна рамномерна распределба, или дека е распределена по дискретниот рамномерен закон. Таа, според тоа, е определена со таблицата:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ 1/k & 1/k & \ldots & 1/k \end{pmatrix}$$

Пример 6.2.5. (Хипергеометриски закон) Во едно множество од n елементи, m имаат определено својство ($m<n$). Од даденото множество произволно се избираат k елементи ($k<n$). Бројот X на елементите што го поседуваат споменатото својство, меѓу избраните k елементи, е случајна величина што ги прима вредностите $0,1,2,\ldots,s$, каде $s=min(m,k)$. Бидејќи бројот на сите можни избори на k од n-те елементи е C_n^k, а меѓу нив бројот на сите можни избори при кои j елементи го поседуваат посебното својство е $C_m^j\cdot C_{n-m}^{k-j}$, за веројатностите со кои X ги добива одделните вредности имаме:

$$p_j = P(X=j) = C_m^j\cdot C_{n-m}^{k-j}/C_n^k \ .$$

За случајната величина X определена на опишаниот начин велиме дека има хипергеометриска распределба, или дека е распределена по хипергеометрискоит закон и пишуваме X:

$H(n,m,k)$. Да покажеме дека $\sum_{j=0}^{s} p_j=1$. За таа цел прво ќе покажеме дека е точна формулата

$$C^r_{s+t} = \sum_{j=0}^{s} C^j_s \cdot C^{r-j}_t . \qquad (*)$$

Тргнувајќи од идентичното равенство $(1+x)^{s+t}=(1+x)^s\cdot(1+x)^t$, го определуваме коефициентот пред x^r во развојот на биномите од двете страни на равенството. Тој коефициент на левата страна ќе биде C^r_{s+t}. Ако е a_l коефициентот пред x^l во развојот на биномот $(1+x)^s$, а σ_k коефициентот пред x^k во развојот на биномот $(1+x)^t$, ќе добиеме дека

$$C^r_{s+t} = a_0\sigma_r + a_1\sigma_{r-1} + \dots + a_r\sigma_0 ,$$

од каде следува формулата $(*)$. Да земеме $k=min(m,k)$ и во $(*)$ да извршиме замена: $s=m$, $t=n-m$, $r=k$. Ке добиеме дека $\sum_{j=0}^{k} C^j_m\cdot C^{k-j}_{n-m}=C^k_n$, а потоа и

$$\sum_{j=0}^{k} p_j = (1/C^k_n)\cdot \sum_{j=0}^{k} C^j_n\cdot C^{k-j}_{n-m} = 1.$$

Ако, пак, $m=min(m,k)$, доказот останува ист, но треба да се има предвид дека, за $j>s$, во формулата $(*)$ сумирањето треба да се прекине до $j=s$, бидејќи во биномот $(1+x)^s$ нема член x^j каде $j>s$.

Во досега изнесените примери имавме дискретни случајни величини што можат да примат само конечен број вредности. Во дефиницијата за дискретна случајна величина рековме дека случајната величина X ќе биде дискретна и ако прима вредности од едно преброиво подмножество од множеството од реалните броеви. Подолу ќе дадеме два примера на такви случајни величини, но претходно да забележиме дека, она што беше досега кажано за дискретните величини што примаат конечно многу вредности, на соодветен начин може да се прераскаже и за дискретните величини за кои множеството од вредностите што ги примаат е преброиво.

Пример 6.2.6.*(Геометриски закон) Да реализираме една серија од еднакви но независни експерименти која ќе заврши со настапувањето на даден случаен настан A. Настанот A, според тоа, настапува со иста веројатност во секој од експериментите на серијата; нека p е таа веројатност при што ќе земеме p да биде различен од 0 и 1. Да ставиме q=1-p. Бројот X на експериментите од оваа серија ќе биде случајна величина што ги прима како вредности сите природни броеви: 1, 2, 3, ..., n, ... Имајќи ја предвид независноста на експериментите во серијата, за веројатностите со кои X ги прима овие вредности добиваме

$$p_n = P(X=n) = p\cdot q^{n-1}.$$

Да провериме дека $\sum_{n=1}^{\infty} p_n=1$, каде, јасно, со законот сума на левата страна од равенството е означена сумата на конвергентниот ред чиј општ член е p_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p\cdot q^{n-1} = p\cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p\cdot(1/(1-q)) = p\cdot(1/p) = 1.$$

За случајната величина X од овој пример велиме дека е распределена по геометрискиот закон и пишуваме X: $\Gamma(p)$.*

Пример 6.2.7.*(Пуасонов закон) Пуасоновиот закон фактички го воведовме со теоремата 5.1.4 (теоремата на Пуасон) со кој може да се апроксимира биномниот закон за мали вредности на веројатноста p. Така, случајната величина X е распределена по Пуасоновиот закон ако ги прима вредностите 0,1,2,...,n,... со веројатности $p_n=P(X=n)=(a^n\cdot e^{-a})/n!$, каде $a>0$ е константа. За да провериме дека $\sum_{n=0}^{\infty} p_n=1$, треба само да се потсетиме дека сумата на редот $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ е еднаква на e^a.*

6.3.* Непрекинати случајни величини

За разлика од дискретните случајни величини кои примаат дискретни значења (меѓу кои било два реални броја што ги примаат како вредности дискретните величини, секогаш има и други реални броеви), една случајна величина X може да ги прима непрекинато сите вредности од некој интервал (a,b) а $F(x)$ да биде непрекината функција во тој интервалл (овде може да биде $a=-\infty$ или $b=+\infty$ или и едното и другото). Кога $F(x)$ е непрекината функција во интервалот (a,b), тогаш за секој $x\in(a,b)$, според теееремата 6.2.1, ќе имаме дека $P(X=x)=0$. Поради тоа, во овој случај X не може да се окарактеризира со веројатностите; сите тие се еднакви на 0, но ниеден од случајните настани $X=x$, $x\in(a,b)$, не е невозможен, а за разни $x_1,x_2\in(a,b)$, X може едниот од овие два броја да го прима почесто одошто другиот. Тоа е мотивот што во овој случај ќе бараме друг начин за задавање на случајната величинаа, кој во извесна смисла ќе задржи некои аналогии со веројатностите во дискретниот случај.

Нека X ги прима непрекинато вредностите од интервалот (a,b), нека $\Delta x>0$ и нека $x,x+\Delta x\in(a,b)$. Ако постои (конечна) граница

$$p(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x\leq X<x+\Delta x)}{\Delta x},$$

тогаш $p(x)$ ќе ја викаме **густина** на X. Бидејќи според теоремата 6.1.7, $P(x\leq X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)$, за густината ја добиваме следната формула:

$$p(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Густината на распределбата на веројатностите за случајната величина X што прима вредности од интервалот (a,b), при претпоставка дека $F(x)$ е диференцијабилна на тој интервал, може да се смета за функција што е дефинирана на целото множество од реалните броеви, дури и кога еден или двата од краевите на тој интервал е реален број. Имено, ако a е реален број, тогаш $F(x)=0$ за $x\leq a$, па можеме да ставиме $p(x)=0$ за $x\leq a$; слично, ако b е реален број, тогаш $F(x)=1$, па и во овој случај можеме да ставиме $p(x)=0$.

За да може да се определи густината на една случајна величина, претпоставуваме дека нејзината функција на распределба е диференцијабилна. Ќе претпоставиме дури и нешто повеќе: ако $F(x)$ е функцијата на распределба на случајната величина X, ќе претпоставиме дека $F(x)$ има извод што е интеграбилна функција, т.е. дека густината $p(x)$ е интеграбилна. Во тој случај за случајната величина X велиме дека е **апсолутно непрекината** случајна величина. Натаму овие случајни величини ќе ги викаме, просто, **непрекинати**. Да докажеме неколку својства за густината.

Теорема 6.3.1.

Следниве својства за густината на која било случајна величина што е непрекината се точни:

а) $p(x) = F'(x)$,

б) $p(x)\geq 0$ *за секој* $x\in\mathbb{R}$,

в) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$,

г) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

Доказ. Својството а) веќе го докажавме при дефинирањето на густината $p(x)$.

б) Бидејќи $F(x)$ е монотона функција што не опаѓа, од особината а) направо следува дека $p(x)=F'(x)\geq 0$.

в) Оваа особина следуува од претпоставената интеграбилност на $p(x)$ и својството $F(-\infty)=0$, а според Њутн-Лајбницовата формула за врската меѓу неопределениот и определениот интеграл.

г) Доказот следува од в) и особината $F(+\infty)=1$. ∎

Да ја докажеме уште и следнава особина:

Теорема 6.3.2.

Нека X е непрекината случајна величина со густина $p(x)$ и нека $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Тогаш:

$$P(a<X<b) = \int_a^b p(x)dx.$$

Доказ. Најнапред да покажеме дека $P(a<X<b)=P(a\le X<b)=$ $=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$. На пример, имаме дека $P(a\le X<b)=$ $=P(X=a)+P(a<X<b)=P(a<X<b)$, затоа што $P(X=a)=0$. Слично се докажуваат и другите равенства.

Тргнувајќи од теоремата 6.1.7, имајќи ја предвид и претходната забелешка, имаме:

$$P(a<X<b) = \int_{-\infty}^{b} p(x)dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)dx = \int_a^b p(x)dx. \ \blacksquare$$

Да изнесеме, на крајот, два примера за непрекинати случајни величини:

Пример 6.3.3. (Непрекинат рамномерен закон) За случајната величина X велиме дека е рамномерно распределена во интервалот (a,b) ако нејзината густина во тој интервал е константа, различна од 0, а надвор од интервалот еднаква на 0. Значи,

$$p(x) = \begin{cases} C, & \text{за } x\in(a,b) \\ 0, & \text{за } x\notin(a,b) \end{cases}.$$

Да ја определиме константата C; користејќи го својството г) од теоремата 6.3.1 добиваме:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_a^b Cdx = C(b-a),$$

така што,

$$p(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & \text{за } x\in(a,b) \\ 0, & \text{за } x\notin(a,b) \end{cases}$$

Да ја определиме и функцијата на распределба на X:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{за } x\le a \\ (x-a)/(b-a), & \text{за } a<x<b \\ 1, & \text{за } x\ge b \end{cases}.$$

Пример 6.3.4. (Нормален закон) Еден од најважните закони на распределба, и од теориска гледна точка на примената на теоријата на веројатноста е нормалниот, или Гаусовиот закон, при кој случајната величина има густина

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

каде a и $\sigma(>0)$ се константи. Да покажеме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

За таа цел ќе го користиме следниов Пуасонов интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Добиваме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx =$$

$$= (\text{смена } (x-a)/\sigma\sqrt{2}=y) = (1/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.^*$$

6.4. Независност на случајните величини

Пред да го воведеме поимот за независност на случајните величини, ќе се задржиме сосема кратко на повеќедимензионалните случајни величини (случајните вектори). За да го поедноставиме разгледувањето, ќе работиме само со дводимензионалните случајни вектори, забележувајќи дека обопштувањето на случај од повеќе димензии е природно и нема да му создаде на читателот тешкотии ако сака самиот тоа да го направи.

Подредениот пар (X,Y) од случајните величини X и Y го викаме дводимензионален случаен вектор (натаму, за пократко ќе велиме само **случаен вектор**). Аналогно на случајните величини, за секој случаен вектор може да се дефинира функција на распределбата на следниов начин:

$$F(x,y) = P((X<x)\cdot(Y<y)).$$

Функцијата $F(x,y)$ е дефинирана за секои $x,y\in\mathbb{R}$ и ги поседува следниве својства што се проверуваат лесно врз основа на својствата на функцијата на распределба на една случајна величина:

Теорема 6.4.1.*

Функцијата на распределба на кој било случаен вектор ги задоволува следниве особини:

а) $F(x,y)$ *е ограничена, т,е, за секои* $x,y\in\mathbb{R}$ $0\le F(x,y)\le 1$;

б) $F(x,y)$ *не опаѓа по секоја од променливите;*

в) $F(x,y)$ *е непрекината одлево по секоја од променливите;*

г) $F(-\infty,y)=0=F(x,-\infty)$ *за кои било* $x,y\in\mathbb{R}$;

д) ако $F_1(x)$ *и* $F_2(y)$ *се функциите на распределба на случајните величини* X *и* Y*, соодветно, тогаш*

$$F(x,+\infty) = F_1(x),\ F(+\infty,y) = F_2(y)\ ;$$

е) $F(+\infty,+\infty) = 1.$ ■

Ако се X и Y дискретни случајни величини, тогаш и случајниот вектор (X,Y) го викаме дискретен. Еден закон на распределбата во овој случај претставуваат веројатностите $p_{jk}=P((X=x_j)\cdot(Y=y_k))$ со кои случајниот вектор (X,Y) ги прима одделните вредности (x_j,y_k), зошто со нивна помош лесно се определува функцијата на распределба на случајниот вектор. Ке го илустрираме тоа на следниов пример:

Пример 6.4.2. Случајниот вектор е зададен со следнава таблица:

Y \ X	1	2	3	4
1	3/40	1/40	5/40	2/40
2	7/40	4/40	1/40	1/40
3	0	2/40	8/40	6/40

Во таблицата, во пресекот на редиците и колоните, се наоѓаат веројатностите за соодветните вредности на (X,Y). На пример, $p_{32}=P((X=3)\cdot(Y=2))=1/40$. Лесно се пресметува дека сумата на сиве овие веројатности е еднаква на 1.

Да ја определиме функцијата на распределба на (X,Y). Јасно е дека $F(x,y)=0$ за $x\leq 1$ или $y\leq 1$ и дека $F(x,y)=1$ за $x>4$ и $y>3$. Натаму, на пример, $F(3,2)=P((X<3)\cdot(Y<2))=$ $=P((X<3)\cdot(Y=1)=P(X=1)\cdot(Y=1)+(X=2)\cdot(Y=1))=P((X=1)\cdot(Y=1))+$ $+P((X=2)\cdot(Y=1)=3/40+1/40=4/40$. Спроведувајќи ги на сличен начин сите пресметувања, ќе ги добиеме следниве вредности за $F(x,y)$ (дадени во таблицата):

Y \ X	≤1	≤2	≤3	≤4	>4
≤1	0	0	0	0	0
≤2	0	3/40	4/40	9/40	11/40
≤3	0	10/40	15/40	21/40	24/40
>3	0	10/40	17/40	31/40	1

Г* Да земеме, сега, X и Y да бидат непрекинати случајни величини, а $F(x,y)$ да биде функцијата на распределба на случајниот вектор (X,Y). Аналогно на начинот на воведување на густината кај случајните величини, го воведуваме поимот за **густина**, на следниов начин:

$$p(x,y)=\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{P((x\leq X<x+\Delta x)(y\leq Y<y+\Delta y))}{\Delta x\cdot\Delta y}.$$ *┘

Може да се докаже (ние нема да се задржуваме на доказот) дека:

Теорема 6.4.3.*

Густината $p(x,y)$ *ги задоволува следниве својства:*

а) $p(x,y)\geq 0$ *за секои* $x,y\in\mathbb{R}$;

б) $p(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$;

в) $P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D p(x,y)dxdy$,

каде $(X,Y)\in D$ *значи дека точката* (X,Y) *е содржана во рамнинската област* D, *а формулата покажува дека веројатноста на случајниот настан точката* (X,Y) *да земе вредност од* D *се пресметува со двојниот интеграл од густината по* D;

г) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{+\infty}^{y}p(u,v)dudv$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1$. ■

Ако ги означиме со $p_1(x)$ и $p_2(y)$ густините на случајните величини X и Y, соодветно, тогаш врз основа на теоремите 6.3.1 а) и 6.4.1 д) се добива дека,

Теорема 6.4.4.*

$$p_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy, \quad p_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx,$$

*каде $p(x,y)$ е густината на случајниот вектор (X,Y).**■

Да го воведеме, на крајот, најавениот услов за независност на две случајни величини. Велиме дека случајните величини X и Y се **независни** ако за било кој $x,y\in\mathbb{R}$ независни се случајните настани $X<x$ и $Y<y$. Оттука, ако $F(x,y)$ е функцијата на распределба на случајниот вектор (X,Y), а $F_1(x)$ и $F_2(y)$ се функции на распределба на X и Y, соодветно, ќе добиеме дека

$$F(x,y) = P((X<x)\cdot(Y<y)) = P(X<x)\cdot P(Y<y) = F_1(x)\cdot F_2(y),$$

поради што имаме дека е точнна следнава теорема:

Теорема 6.4.5.

Нужен и доволен услов за независност на случајните величини X и Y е:

$$F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y). \; ■$$

Условот за независност на случајните величини X и Y може да се изрази и на следниве начини:

Ако X е дискретна случајна величина што ги прима вредностите $x_1,x_2,\ldots$ со веројатности $p_1,p_2,\ldots$, а Y дискретна величина што ги прима вредностите $y_1,y_2,\ldots$ со веројатности $q_1,q_2,\ldots$ и ако $p_{jk}=P((X=x_j)\cdot(Y=y_k))$, тогаш нужниот и доволен услов за независност на X и Y ќе гласи $p_{jk}=p_j\cdot q_k$.

Ако, пак, X и Y се непрекинати случајни величини со густини $p_1(x)$ и $p_2(y)$, соодветно, и ако $p(x,y)$ е густината на случајниот вектор (X,Y), тогаш нужен и доволен услов за независноста на X и Y ќе биде $p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$. Да го формулираме изнесеното во следнава

Теорема 6.4.6.

Нужен и доволен услов за независноста на случајните величини X и Y е:

а) $p_{jk}=p_j\cdot q_k$, ако X и Y се дискретни,

б) $p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$, ако X и Y се непрекинати!

6.5. Функции од случајни величини

Нека е X дискретна случајна величина што ги прима вредностите x_1, $x_2,\dots$ со веројатности p_1, $p_2,\dots$ и нека $f(x)$ е (еднозначна) функција дефинирана во сите точки x_j, $j=1,2,\dots$. Можеме да ја определиме случајната величина $Y=f(X)$ таква што Y да ги прима вредностите y_1, $y_2,\dots$ каде $y_j=f(x_j)$, $j=1,2,\dots$. На тој начин го воведуваме поимот за функција од случајна величина. Останува да се определи законот на распределбата на Y. Ќе разликуваме два случаја:

а) ако $y_j\neq y_k$ за $j\neq k$ (тоа ќе биде случај ако $f(x)$ е строго монотона функција), тогаш Y ќе ги прима своите вредности со веројатности исти со веројатностите со кои X ги прима соодветните вредности, т.е. $P(Y=y_j)=P(X=x_j)=p_j$, $j=1,2,\dots$.

б) ако $f(x_{j_k})=y_j$ за $k=1,2,\dots$, тогаш $P(Y=y_j)=\sum_k P(X=x_{j_k})$ зошто случајниот настан $Y=y_j$ може да се претстави како дисјунктнаа сума од случајните настани $X=x_{j_k}$, $k=1,2,\dots,t$. Имено, секој од настаните $X=x_{j_k}$ го повлекува $Y=y_j$ а последниов настан настапува само кога ќе настапи некој од настаните $X=x_{j_k}$. За илустрација на изнесеното ќе го разгледаме следниов пример.

Пример 6.5.1. Случајната величина X е зададена со

$$X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Да ја определиме случајната величина $Y=X^2$.

Променливата Y ги прима вредностите 0,1,4 и 9. Бидејќи $Y=0$ за $X=0$, имаме дека $P(Y=0)=0,1$; $Y=1$ се добива за $X=-1$ и $X=1$, така што $P(Y=1)=0,2+0,2=0,4$; $Y=4$ се добива за $X=-2$ и $X=2$, па $P(Y=4)=0,1+0,2=0,3$ и, на крајот, $Y=9$ се добива за $X=3$, па $P(Y=9)=0,2$. Така Y ќе биде определена со таблицата:

$$Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Да се задржиме и на непрекинатите случајни величини.

Теорема 6.5.2.*

Нека е X непрекината случајна величина што ги прима вредностите од интервалот (a,b) (може $a=-\infty$ или $b=+\infty$ или и едното и другото) и нека $p(x)$ е густината на X. Ако $f(x)$ е монотона функција (во строга смисла) во (a,b) што има непрекинат извод во тој интервал, тогаш густината на случајната величина $Y=f(X)$ се определува по формулата:

$$p_y(x) = p(f^{-1}(x))\cdot|(f^{-1}(x))'|,$$

каде $f^{-1}(x)$ е инверзната функција на $f(x)$.

Доказ.* Да земеме $f(x)$ монотоно да расте во интервалот (a,b). Тогаш $f^{-1}(x)$ е еднозначна функција и монотоно расте во интервалот $(f(a),f(b))$, а поради диференцијабилноста на $f(x)$ следува дека и $f^{-1}(x)$ е диференцијабилна. Имајќи го ова предвид, добиваме:

$$F_y(x) = P(Y<x) = P(f(X)<x) = P(X<f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x)),$$

каде $F(x)$ е функцијата на распределба на X. Според теоремата 6.3.1 а), густината на Y ќе ја добиеме со диференцирање на $F_y(x)$:

$$p_y(x) = F_y'(x) = F'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))',$$

а, бидејќи $(f^{-1}(x))'\geq 0$ ($f^{-1}(x)$ монотоно расте), добиваме

$$p_y(x) = p(f^{-1}(x))\cdot|(f^{-1}(x))'|.$$

Нека $f(x)$ монотоно опаѓа во (a,b). Тогаш и $f^{-1}(x)$ монотоно ќе опаѓа во $(f(b),f(a))$ а поради тоа ќе биде $(f^{-1}(x))'\leq 0$. Работејќи како и во претходниот случај ќе добиеме:

$$F_y(x) = P(f(X)<x) = P(X>f^{-1}(x)) = P(X\geq f^{-1}(x)) =$$
$$= 1 - P(X<f^{-1}(x)) = 1 - F(f^{-1}(x)),$$

а потоа, со диференцирање по x:

$$p_y(x) = -p(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))' = p(f^{-1}(x))\cdot|(f^{-1}(x))|. \blacksquare$$

Ке разгледаме два примера: во едниот ќе може директно да се примени штотуку докажаната теорема, додека со другиот ќе покажеме како, во некои случаи, и покрај тоа што функцијата $f(x)$ не е монотона, пак може да се искористи теоремата 6.5.2.

Пример 6.5.3.* Нека е X рамномерно распределена случајна величина во интервалот $(0,1)$ и нека $Y=aX+b$. Да ја најдеме густината на Y.

Инверзна функција за функцијата $f(x)=ax+b$ е функцијата $f^{-1}(x)=(x-b)/a$. Според теоремата 6.5.2 имаме дека

$$p_y(x) = \frac{1}{|a|}\cdot(\frac{x-b}{a})$$

каде $p(x)$ е густината на X. Бидејќи

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x\in(0,1) \\ 0, & \text{за } x\notin(0,1) \end{cases}$$

добиваме

$$p_y(x) = \begin{cases} 1/a, & \text{за } x\in(b,a+b) \\ 0\ ; & \text{за } x\notin(b,a+b), \end{cases} \text{ ако } a>0,$$

односно,

$$p_y(x) = \begin{cases} -1/a, & \text{за } x\in(a+b,b) \\ 0\ , & \text{за } x\notin(a+b,b), \end{cases} \text{ ако } a<0.$$

Пример 6.5.4.* Случајната величина X е рамномерно распределена во интервалот $(0,2\pi)$. Да ја најдеме густината на случајната величина $Y=\cos X$.

Функцијата $f(x)=cosx$ не е монотона во $(0,2\pi)$, но во секој од интервалите $(0,\pi)$ и $(\pi,2\pi)$ таа е монотона. Според тоа, посебно работиме за секој од овие интервали.

Во $(0,\pi)$ $f(x)=cosx$ монотоно опаѓа, а нејзината инверзна функција $f^{-1}(x)=arccosx$ е определена во $(-1,1)$. Бидејќи густината на X е

$$p(x) = \begin{cases} 1/a, & \text{за } x\in(0,2\pi) \\ 0\ , & \text{за } x\notin(0,2\pi), \end{cases}$$

со формална примена на теоремата 6.5.2 ќе ја определиме функцијата

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 1/2\pi\sqrt{1-x^2}, & \text{за } x\in(-1,1) \\ 0\ , & \text{за } x\notin(-1,1)\ . \end{cases}$$

Слично, во интервалот $(\pi,2\pi)$ $f(x)=cosx$ монотоно расте, па и нејзината инверзна функција монотоно расте во $(-1,1)$. Со формална примена на теоремата 6.5.2 наоѓаме

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 1/2\pi\sqrt{1-x^2}, & \text{за } x\in(-1,1) \\ 0\ , & \text{за } x\notin(-1,1)\ . \end{cases}$$

За секои $y,y+\Delta y\in(-1,1)$ случајниот настан $y\leq Y<y+\Delta y$ е еквивалентен со сумата од случајните настани $x_1\leq X<x_1+\Delta x$ и $x_2\leq X<x_2+\Delta x$, при што последните два настани се дисјунктни зошто $x_1,x_1+\Delta x\in(0,\pi)$, а $x_2,x_2+\Delta x\in(\pi,2\pi)$. Така ќе добиеме дека:

$$p_y(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \begin{cases} 1/\pi\sqrt{1-x^2}, & \text{за } x\in(-1,1) \\ 0, & \text{за } x\notin(-1,1)\ . \end{cases}$$

Да се задржиме сега на прашањето за одредување на законот на распределбата на една случајана величина што е функција од повеќе од една случајна величина. Заради едноставност ќе го дискутираме проблемот на функции од две случајни величини, и тоа само кратко, појаснувајќи ја општата задача низ два примера.

Пример 6.5.5. Да ги најдеме законите на распределба на случајните величини $K=X+Y$ и $T=XY$, каде X и Y се дискретни случајни величини, меѓу себе независни, определени со следните таблици:

$$X: \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} \qquad Y: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Во општ случај, ако X ги прима вредностите $x_1, x_2, x_3, \ldots$ а Y вредностите $y_1, y_2, \ldots$, тогаш $K=X+Y$ како вредности ќе ги прими сите можни збирови од облик x_j+y_k со веројатности $P(K=x_j+y_k)=P((X=x_j)\cdot(Y=y_k))=p_{jk}$. Ако се случајните величини X и Y независни, како што е случај во нашава задача, ќе имаме $P(K=x_j+y_k)=P(X=x_j)\cdot P(Y=y_k)$. Можно е ист збир да се добие повеќе пати од различни собирци земени по еден од вредностите на X и еден од вредностите на Y. Во тој случај на таквиот збир, као на вредност на случајната променлива K, ќе му се придружи веројатност што е збир од веројатностите што им одговараат на сите парови (x_j, y_k) што го даваат содветниот збир. И во случајот на производ од X и Y работиме на ист начин. Извршувајќи ги нужните пресметувања, ќе добиеме:

$$K: \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 17 & 18 \\ 0,08 & 0,32 & 0,02 & 0,08 & 0,10 & 0,40 \end{bmatrix}$$

$$T: \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 & 20 & 24 & 32 \\ 0,08 & 0,02 & 0,10 & 0,32 & 0,08 & 0,40 \end{bmatrix}$$

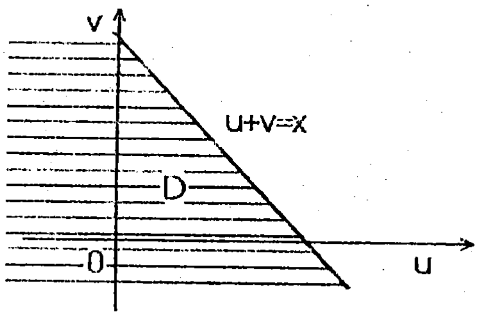
Пример 6.5.6* Нека се X и Y независни случајни величини и нека X е рамномерно распределена во интервалот $(0,2)$, а Y рамномерно распределена во интервалот $(-1,1)$. Да ја определиме густината на случајната величина $K=X+Y$.

И овде најнапред ќе ја решиме задачата во поопшт случај. Нека е $p(x,y)$ густината на случајниот вектор (X,Y). За да ја определиме густината на K ќе тргнеме од нејзината функција на распределба. Според теоремата 6.4.3 в) имаме

$$F_k(x) = P(K<x) = P((X,Y)\in D),$$

каде што D е исцртаната област на сликата, така што:

$$F_k(x) = \iint\limits_D p(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{x-u} p(u,v)dv.$$



сл.1.

Од последното равенство, со диференцирање по x, ќе добиеме дека

$$p_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,x-u)\,du.$$

Ако се X и Y независни случајни величини со густини $p_1(x)$ и $p_2(x)$, соодветно, според теоремата 6.4.6 б) ќе добиеме:

$$p_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(u)\cdot p_2(x-u)\,du.$$

Од причини на симетрија, густината на K може да се изрази и на следниов начин:

$$p_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x-v,v)\,dv.$$

односно, ако X и Y се независни,

$$p_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x-v)\cdot p_2(v)\,dv.$$

Да се вратиме на конкретниот пример. За густините на X и Y добиваме:

$$p_1(x) = \begin{cases} 1/2 & , x\in(0,2) \\ 0 & , x\notin(0,2) \end{cases} \qquad p_2(x) = \begin{cases} 1/2 & , x\in(-1,1) \\ 0 & , x\notin(-1,1) \end{cases},$$

така што,

$$p_k(x) = \frac{1}{2}\int_0^2 p_2(x-u)\,du.$$

Земајќи предвид дека $u\in(0,2)$ и дека $p_2(x-u)=1/2$ за $-1<x-u<1$, т.е. за $x-1<u<x+1$ и дека $p_2(x-u)=0$ во другите случаи, ќе добиеме:

$x\geq-1 \Rightarrow u<x+1\leq0$ и $p_k(x)=0$,

$-1<x\leq1 \Rightarrow -2<u<2$ па $p_k(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x+1}\frac{du}{2} = \frac{x+1}{4}$,

$1<x\leq3 \Rightarrow 0<u<4$ па $p_k(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{2}\frac{du}{2} = \frac{3-x}{4}$,

$x>3 \Rightarrow u>x-1>2$ и $p_k(x) = 0$.

Така добиваме дека:

$$p_k(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ за } x\leq -1 \\ \frac{x+1}{4} & , \text{ за } -1<x\leq 1 \\ \frac{3-x}{4} & , \text{ за } 1<x\leq 3 \\ 0 & , \text{ за } x>3 \end{cases} .$$

6.6. Вежби

6.6.1. Да се определат функциите на распределба на следниве случајни величини:

$$X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} ,$$

$$Y: \begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 & 15 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} .$$

6.6.2. Случајната величина X прима вредности 3,6 и 10 со веројатности 0,2; 0,1 и 0,7 , соодветно. Да се најде законот на распределба на случајната величина $y=2x+1$.

6.6.3.* Случајната величина X ги прима вредностите од множеството $N^{o}=\{0,1,2,\dots,n,\dots\}$ со веројатности $P(X=n)=a\frac{k^{n}}{n!}$, каде k е фиксен број. Да се определат константата a и најверојатната вредност (модата) на X.

6.6.4.* Случајната величина X има густина

$$p(x) = \frac{a}{1+x^{2}} \text{ (Кошиев закон).}$$

а) Да се најдат a и функцијата на распределба на X;

б) Да се пресмета веројатноста на случајниот настан $-1<X<1$.

6.6.5.* Случајната величина X има густина

$$p(x)=a/(e^{-x}+e^{x}).$$

а) Да се најдат константата a и функцијата на распределба, б) да се пресмета веројатноста, во две независни набљудувања случајната величина X да прими вредности помали од 1.

6.6.6.* Случајната величина X има функција на распределба

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x\leq 0 \\ x^2/4, & \text{за } 0<x\leq 2 \\ 1, & \text{за } x>2 \ . \end{cases}$$

Да се најде:

а) густината на X,

б) медијаната на X (т.е. број x_o за кој $F(x_o)=1/2$) и мо́дата на X (т.е. таков број x_m за кој $p(x_m)$ претставува најголема вредност на густината $p(x)$ на X).

6.6.7.* Случајната величина X има густина

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+b)}{b(a+b)}, & \text{за } -b<x\leq 0 \\ \dfrac{2(a-x)}{a(a+b)}, & \text{за } 0<x\leq a \\ 0 & , \text{ за } x\notin(-b,a) \ , \end{cases}$$

каде a>b. Да се најдат модата и медијаната на X.

6.6.8. Дискретната случајна величина X има функција на распределба

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{за } x\leq -3 \\ 0,2 \ , & \text{за } -3<x\leq 0 \\ 0,6 \ , & \text{за } 0<x\leq 2 \\ 0,9 \ , & \text{за } 2<x\leq 5 \\ 1 \ , & \text{за } x>5. \end{cases}$$

Да се најдат вредностите што ги прима X и соодветните веројатности.

6.6.9.* Една точка е случајно фрлена во круг со радиус R. Веројатноста точката да падне во дадена подобласт од кругот е пропорционална со плоштината на подобласта (геометриска веројатност). Да се најдат функцијата на распределба и густината на случајната величина X која го претставува растојанието од фрлената точка до центарот на кругот.

6.6.10.* На дијаметарот на еден полукруг со радиус 1 произволно се бира точка A. Веројатноста A да падне во дадената отсечка од дијаметарот е пропорционална со должината на отсечката. Да се најде:

а) функцијата на распределба и густината на положбата на точката B на полукружницата чија ортогонална проекција е точката A,

б) веројатноста, растојанието (долж лакот) од B до средината на полукружницата да не биде поголемо од $\pi/4$.

6.6.11. Да се најде распределбата на случајната величина Y ако: а) $Y=X+2$, б) $Y=X^2$, в) $Y=X^2+X-2$, при што X е дадено со:

$$X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

6.6.12. Да се најде законот на распределба на случајната величина $Y=\sin X$ ако X е дадена со таблицата:

$$X: \begin{pmatrix} \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

6.6.13. Да се најде функцијата на распределба на случајната величина X каде: а) $Y=X^3-2$, б) $Y=2X-1$, а X е дадена со

$$X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

6.6.14.* Случајната величина X е распределена по Кошиевиот закон:

$$p(x) = 1/\pi(1+x^2).$$

Да се најде густината на $Y=X^3+2$.

6.6.15.* Случајната величина X има густина

$$p(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x\in(0,+\infty) \\ 0, & x\in(-\infty,0] \end{cases}$$

Да се најде густината на случајната величина $Y=1/X^2$.

6.6.16.* Случајната величина X има густина $p(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$. Да се најде густината на случајната величина $Y=X^2$.

6.6.17.* Случајната величина X е рамномерно распределена во интервалот $(-\pi/2,\pi/2)$. Да се најде густината на случајната величина $Y=\sin X$.

6.6.18.* Случајната величина X е распределена по нормалниот закон N(0,1), т.е. има густина $p(x)=(1/\sqrt{2\pi})\cdot e^{-x^2/2}$. Да се најде густината на случајната величина $Y=X^2$.

6.6.19.* Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен во кругот со центар во координатниот почеток и радиус R. Да се најдат густината p(x,y) на (X,Y) и маргиналните густини $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на случајните величини X и Y. Дали X и Y се независни?

6.6.20. Да се најдат функциите на распределба на случајните величини K=X+Y и T=XY ако X и Y се независни и распределени на следниов начин:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

6.6.21.* Секоја од случајните величини $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ е рамномерно распределена во интервалот (0,1). Нека се $X_1, X_2, \ldots, X_k$ независни и нека $\Phi_k(x)$ е густината на случајната величина $Y_k=X_1+X_2+\ldots+X_k$. Да се покаже дека

$$\Phi_{k+1}(x) = \int_{x-1}^{x} \Phi_k(y)dy.$$

VII. БРОЈНИ КАРАКТЕРИСТИКИ

Во овој дел ќе се запознаеме со двете најважни бројни карактеристики на случајните величини: математичкото очекување (или средната вредност) и дисперзијата, спомнувајќи, сосема кратко, уште некои од другите бројни карактеристики. При докажувањето на својствата на овие карактеристики скоро исклучиво ќе работиме со дискретните случајни величини.

7.1. Математичко очекување

Една случајна величина е наполно окарактеризирана ако е познат нејзиниот закон на распределба. Во многу задачи, меѓутоа, не е неопходно познавањето на законот на распределбата на случајната величина, туку доволно ќе биде да се познаваат некои бројни параметри за дадената случајна величина за да може задачата успешно да се реши. На пример, често ќе биде доволно да се знае некој број околу кој се групираат, на некој начин, можните значења на случајната величина, или некој број со кој ќе може да се опише растурањето на значењата на таа величина околу бројот што го опишува центарот на распоредувањето на вредностите на случајната величина. Баквите бројни вредности со кој можат да бидат искажани некои карактеристики на случајната величина се викаат **бројни карактеристики** на таа величина. Во овој дел ќе ја воведеме првата и една од најважните бројни карактеристики: математичкото очекување, или како уште инаку се вика, средната вредност. За да ја појасниме смислата на формалната дефиниција за овој поим што покасно ќе ја изнесеме, ќе почнеме со разгледување на еден пример, мошне близок на читателите.

Пример 7.1.1. Од два ученика, A и B, што учат во ист клас, треба да се избере подобриот "математичар". Во текот на годината овие ученици биле повеќе пати оценувани, според нивните одговори, така што наставникот го извлекол следниов заклучок за секој од нив: ученикот A може да добие оценка 1 со веројатност 0,1, оценка 2 со веројатност 0,2, оценка 3 со веројатност 0,3, оценка 4 со веројатност 0,2 и оценка 5 со веројатност 0,2. Соодветните веројатности за ученикот B биле: 0,2 за оценка 1, 0,1 за оценка 2, 0,1 за оценка 3, 0,2 за оценка 4 и 0,4 за оценка 5.

Ако ги оценуваме учениците A и B според најслабата оценка, тогаш подобро би го вреднувале ученикот A, а кога би донесувале заклучок според највисоката оценка, подобар би бил ученикот B. Овој начин на споредување на математичките "вредности" на A и B не ни дава одговор, а покрај другото содржи уште еден недостаток: не ги зема предвид сите оценки, туку само најниските и највисоките. Според тоа, се чини сосема природно да ја прифатиме вообичаената практика при оценувањето во училиштата: да претпоставиме дека ученикот A бил k пати оценуван (испрашуван); според погоре изнесените заклучоци на наставникот, тој $0,1k$ пати добил оценка 1, $0,2k$ пати оценка 2, $0,3k$ пати оценка 3,

$0,2k$ пати оценка 4 и $0,2k$ пати оценка 5. Неговиот среден успех тогаш ќе биде:

$$\frac{0,1k\cdot 1 + 0,2k\cdot 2 + 0,3k\cdot 3 + 0,2k\cdot 4 + 0,2k\cdot 5}{k} =$$
$$= 1\cdot 0,1 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,3 + 4\cdot 0,2 + 5\cdot 0,2 = 3,2 .$$

Сличната пресметка за средниот успех на ученикот B го дава следниов резултат:

$$1\cdot 0,2 + 2\cdot 0,1 + 3\cdot 0,1 + 4\cdot 0,2 + 5\cdot 0,4 = 3,5 .$$

По овие пресметки можеме да кажеме дека ученикот B е подобар "математичар".

Разгледаниот пример укажува на значењето на следниов израз: ако X е дискретна случајна величина што ги прима вредностите $x_1, x_2, \ldots, x_k$ со веројатностите $p_1, p_2, \ldots, p_k$, тогаш бројот

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k$$

го викаме **математичко очекување**, или **средна вредност** на случајната величина X. Пред да ги изнесеме основните својства за математичкото очекување, кое подоцна ќе го дефинираме и за дискретните случајни величини што примаат вредности од едно преброиво бесконечно множество, како и за непрекинатите случајни величини, да се задржиме на неколку примери.

Пример 7.1.2. Да го пресметаме математичкото очекување на биномниот закон $B(n,p)$. Имаме:

$$MX = 0\cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=2) + \ldots + n\cdot P(X=n) =$$
$$= 1\cdot C_n^1\cdot p\cdot q^{n-1} + 2\cdot C_n^2\cdot p^2\cdot q^{n-2} + 3\cdot C_n^3\cdot p^3\cdot q^{n-3} + \ldots + n\cdot C_n^n\cdot p^n .$$

Поради

$$k\cdot C_n^k = k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\cdot C_{n-1}^{k-1} ,$$

добиваме

$$MX = n\cdot C_{n-1}^0\cdot p\cdot q^{n-1} + n\cdot C_{n-1}^1\cdot p^2\cdot q^{n-2} + \ldots + n\cdot C_{n-1}^{n-1}\cdot p^n =$$
$$= np(C_{n-1}^0\cdot q^{n-1} + C_{n-1}^1\cdot p\cdot q^{n-2} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\cdot p^n).$$

Изразот во заградата (да се потсетиме на биномната формула) го претставува $(n-1)$-от степен на биномот $p+q$, а бидејќи $p+q=1$, добиваме дека

$$MX = np.$$

Пример 7.1.3. Да ја решиме истата задача за дискретниот рамномерен закон, каде што

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ 1/k & 1/k & \dots & 1/k \end{pmatrix}.$$

$$MX = x_1/k + x_2/k + \dots + x_k/k =$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k} x_j .$$

Пример 7.1.4. Нека X: $H(n,m,k)$, т.е. има хипергеометриска распределба. Според примерот 6.2.5 X ги прима вредностите $0,1,2, \dots, s$, каде $s=min(m,k)$, со веројатности

$$P(X=j) = C_m^j\cdot C_{n-m}^{k-j}/C_n^k .$$

Да го определиме математичкото очекување:

$$MX = \sum_{j=0}^{s} j\cdot C_m^j\cdot C_{n-m}^{k-j}/C_n^k = \sum_{j=1}^{s} n\cdot C_{m-1}^{j-1}\cdot C_{n-m}^{k-j}/(n/k)C_{n-1}^{k-1} ,$$

каде е користено равенството $j\cdot C_m^j = m\cdot C_{m-1}^{j-1}$ што го установивме во примерот 7.1.2 како и равенството $C_n^k=(n/k)C_{n-1}^{k-1}$ што лесно се проверува.

Да се потсетиме на равенството (*) од примерот 6.2.5. Ако таму замениме $s=m-1$, $r=k-1$, $t=n-m$, ќе добиеме дека $C_{n-1}^{k-1}=\sum_{j=0}^{s-1} C_{m-1}^{j}\cdot C_{n-m}^{k-j-1}$. Имајќи го ова предвид, добиваме:

$$MX = \frac{mk}{n}\cdot(1/C_{n-1}^{k-1})\cdot\sum_{j=0}^{s-1} C_{n-1}^{j}\cdot C_{n-m}^{k-j-1} = \frac{mk}{n} .$$

Нека е X дискретна случајна величина, но нека прими вредности од едно пребоиво множество, т.е.

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

По пат на една природна генерализација, дефиницијата за математичко очекување, во овој случај, може да се адаптира на следниов начин:

*Под **математичко очекување** на случајната величина X го подразбираме збирот на редот

$$MX = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \ ,$$

при претпоставка дека тој ред е апсолутно конвергентен, т.е. дека е конвергентен редот $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n$. Да разгледаме и овде два примера:

Пример 7.1.5.*Нека X:Г(p), т.е. случајната величина X е распределена по геометрискиот закон. Според примерот 6.2.6, каде што го објаснивме геометрискиот закон, X ги прима вредностите со веројатности $P(X=n)=p\cdot q^{n-1}$, каде $q=1-p$. Го определуваме математичкото очекување:

$$MX = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p\cdot q^{n-1} = p\cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot q^{n-1} .$$

Да ставиме $\Phi(q)= \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$. Поради $0<q<1$, последниот ред можеме почлено да го интегрираме, со што ќе добиеме дека

$$\int_0^q \Phi(q)dq = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = q\cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} ,$$

а последниот ред е геометрискиот и неговата сума е $\frac{1}{1-q}$. Така

$$\int_0^q \Phi(q)dq = \frac{q}{q-1} \ ,$$

од каде, сега, со диференцирање по q ќе добиеме $\Phi(q)=1/p^2$, зашто $1-q=p$, а потоа и

$$MX = \frac{1}{p} \ .$$

Пример 7.1.6.* Да го пресметаме математичкото очекување и на случајната величина X:$P(a)$, која има Пуасонова распределба (пример 6.2.7).

Случајната величина X, овде, ги прима вредностите 0, 1, 2,..., n,... со веројатности $P(X=n)=(a^n/n!)\cdot e^{-a}$, така што ќе имаме:

$$MX = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot(a^n/n!)\cdot e^{-a} = a\cdot e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}/(n-1)! =$$

$$= ae^{-a}\cdot e^{a} = a \ ,$$

зашто $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}/(n-1)! = e^{a}$.

*На крајот да го дефинираме математичкото очекување и за непрекинатите случајни величини. Нека случајната величина X има густина $p(x)$. Под **математичко очекување** на X го подразбираме интегралот

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,$$

при претпоставка дека тој интеграл е апсолутно конвергентен (конвергентен е интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p(x)dx$).

И овде ќе разгледаме два примера:

Пример 7.1.7.* Нека е X рамномерно распределена во интервалот (a,b), т.е. X има густина

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{за } x \in (a,b) \\ 0, & \text{за } x \in (a,b), \quad a<b. \end{cases}$$

За математичкото очекување на X добиваме:

$$MX = (1/(b-a))\int_{a}^{b} xdx = x^{2}/2(b-a)\Big|_{a}^{b} = (a+b)/2.$$

Пример 7.1.8.* Да го пресметаме математичкото очекување на случајната величина X распределена по нормалниот закон $N(a,\sigma^{2})$.

Бидејќи густината на X е

$$p(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\cdot e^{-(x-a)^{2}/2\sigma^{2}},$$

добиваме

$$MX = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-(x-a)^{2}/2\sigma^{2}} dx = (\text{смена } (x-a)/\sigma\sqrt{2}=y)$$

$$= (1/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} (a+\sigma\sqrt{2}\cdot y)\cdot e^{-y^{2}} dy =$$

$$= (a/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^{2}} dy + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot e^{-y^{2}} dy.$$

Првиот од последните два интеграли е Пуасоновиот и неговата вредност е $\sqrt{\pi}$, додека за вториот интеграл лесно се добива дека е еднаков на 0. Така ќе добиеме дека

$$MX = a. \quad \star$$

7.2. Особини на математичкото очекување

Со незнатни исклучоци, сите особини што овде ќе ги изнесеме, ќе ги докажеме за случајните величини што се дискретни и примаат вредности од едно конечно множество на реални броеви.

Теорема 7.2.1.

Нека е C константа и X случајна величина.

Тогаш:

a) $MC = C$,

b) $M(CX) = C\cdot MX$.

Доказ. Една константа C може да се смета за случајна величина што прима само една вредност (C) со веројатност 1, од каде и следува доказот на *a*).

Нека X ги прима вредностите $x_1, x_2, \dots, x_k$ со веројатности $p_1, p_2, \dots, p_k$. Тогаш $Y=CX$ ќе ги прими вредностите Cx_j со веројатности $P(Y=Cx_j)=P(X=x_j)=p_j$, $j=1,2,\dots,k$ (функцијата $y=Cx$ е монотона). Според тоа ќе добиеме:

$$M(CX) = \sum_{j=1}^{k} Cx_j\cdot p_j = C\cdot \sum_{j=1}^{k} x_j p_j = C\cdot MX. \blacksquare$$

Забелешка 7.2.2. На доказот на особината б) од горната теорема ќе направиме една принципиелна забелешка што на соодветен начин може да се адаптира и за доказите на останатите својства на математичкото очекување. Имено, ако случајната величина X во горниот доказ примаше вредности од едно преброиво множество, тогаш во доказот треба само обичната (конечна) сума да се замени со сума на бесконечен конвергентен ред. Што се однесува до непрекинатиот случај, наместо сума доаѓа интеграл со тоа што за изразот (функцијата) за кој се пресметува математичкото очекување треба да се искористи соодветниот аналог за непрекинатиот случај. Да го илустрираме тоа на доказот на особината б).

*Ако случајната величина X има густина $p(x)$, тогаш густината на случајната величина $Y=CX$ ќе биде, според теоремата 6.5.2,

$$p_y(x) = \frac{1}{|C|}\cdot p\left(\frac{x}{C}\right),$$

така што,

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{|C|}\cdot p\left(\frac{x}{C}\right)dx.$$

За $C>0$ добиваме:

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{C}p\left(\frac{x}{C}\right)dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{C}p\left(\frac{x}{C}\right)d\left(\frac{x}{C}\right) =$$

$$= C\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot p(y)dy = C\cdot MX.$$

Ако, пак, $C<0$, ќе добиеме:

$$MY = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{C}p\left(\frac{x}{C}\right)dx = (x/C=y \Rightarrow (x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty) \text{ и}$$

$$(x\to+\infty \Rightarrow y\to-\infty)) = C\int_{-\infty}^{+\infty} yp(y)dy = C\cdot MX. \ \blacksquare^*$$

Теорема 7.2.3.

За кои било случајни величини X и Y е

$$M(X+Y) = MX + MY.$$

Доказ. Ќе земеме X и Y да се дискретни и да примаат конечен број на вредности. Така, нека X ги прима вредностите $x_1,x_2,\ldots,x_n$ со веројатности $p_1,p_2,\ldots,p_n$, а Y нека ги прима вредностите $y_1,y_2,\ldots,y_m$ со веројатности $q_1,q_2,\ldots,q_m$. Тогаш $X+Y$ ќе ги прими сите можни збирови x_j+y_k, $j=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,m$, со веројатности $p_{jk}=P((X=x_j)\cdot(Y=y_k))$. Така,

$$M(X+Y) = \sum_{j=1}^{n}\cdot\sum_{k=1}^{m}(x_j+y_k)p_{jk} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}x_j\cdot\sum_{k=1}^{m}p_{jk} + \sum_{k=1}^{m}y_k\cdot\sum_{j=1}^{n}p_{jk}\ .$$

Да ја пресметаме сумата $\sum_{k=1}^{m}p_{jk}$:

$$\sum_{k=1}^{m}p_{jk} = \sum_{k=1}^{m}P((X=x_j)(Y=y_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P(Y=y_k)\cdot P((X=x_j)/(Y=y_k)) = P(X=x_j) = p_j ,$$

при што се искористени формулите за веројатност на производ и за тотална веројатност. На сличен начин се добива дека $\sum_{j=1}^{n} p_{jk}=q_k$, така што конечно добиваме:

$$M(X+Y) = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j + \sum_{k=1}^{m} y_k q_k = MX + MY. \blacksquare$$

Од теоремите 7.2.1 б) и 7.2.3 направо следува:

Последица 7.2.4.

За кои било случајни величини $X_1, X_2, \dots, X_k$ *и за кои било константи* $C_1, C_2, \dots, C_k$ *, точна е формулата:*

$$M(C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_kX_k) = C_1MX_1 + C_2MX_2 + \dots + C_kMX_k. \blacksquare$$

Ако во последнава формула земеме $C_1=1$, $C_2=-1$, $C_j=0$ за $j=3,4,\dots,k$, ќе добиеме дека:

Последица 7.2.5.

За кои било случајни величини X и Y е:

$$M(X-Y) = MX - MY . \blacksquare$$

Теорема 7.2.6.

Ако X и Y се независни случајни величини, тогаш:

$$M(XY) = MX\cdot MY .$$

Доказ. Нека се X и Y зададени како и во доказот на теоремата 7.2.3. Поради претпоставената независност на X и Y имаме дека $p_{jk}=P((X=x_j)(Y=y_k))=P(X=x_j)P(Y=y_k)=p_jq_k$, така што

$$M(XY) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_j y_k p_j q_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \cdot \sum_{k=1}^{m} y_k q_k = MX\cdot MY . \blacksquare$$

Во општ случај формулата за математичко очекување од производ на две случајни величини е посложена, што се гледа од следнава

Теорема 7.2.7.

За кои било случајни величини X и Y е:

$$M(XY) = MX\cdot MY + K_{xy} ,$$

каде $K_{xy}=M((X-MX)(Y-MY))$.

Доказ. Ке тргнеме од равенството со кое е определен бројот K_{xy} кој е познат по име **момент на корелација** на случајните величини X и Y. При тоа, ќе ја искористиме и последицата 7.2.4:

$$K_{xy} = M((X-MX)(Y-MY)) = M(XY-(MX)\cdot Y-(MY)\cdot X+MX\cdot MY) =$$
$$= M(XY) - MX\cdot MY - MX\cdot MY + MX\cdot MY = M(XY) - MX\cdot MY,$$

така што навистина $M(XY)=MX\cdot MY+K_{xy}$. ■

За две случајни величини X и Y се вели дека **не се во корелација** ако $K_{xy}=0$. Од теоремите 7.2.6 и 7.2.7 следува дека:

Последица 7.2.8.

Ако случајните величини X и Y се независни, тогаш X и Y не се во корелација. ■

Забелешка 7.2.9. Веќе на почетокот на овој параграф споменавме дека овде ќе ги разгледаме само двете најважни бројни карактеристики: математичкото очекување и дисперзијата. Но, во врска со последицата 7.2.8 е интересно да се види дали поимите за независност и некорелираност совпаднуваат? Имено, бидејќи од независноста на две случајни величини следува дека тие не се во корелација, интересно е да се види дали ако две случајни величини не се во корелација тогаш тие нужно се и независни? Одговорот е негативен, како што покажува следниов пример:

Пример 7.2.10. Нека (X,Y) е случаен вектор што е рамномерно распределен во кругот со радиус R и центар во $(0,0)$. Густината на (X,Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/R^2\pi & \text{за } x^2+y^2\le R^2 \\ 0 & \text{за } x^2+y^2>R^2 \end{cases}.$$

Случајните величини X и Y не се независни зошто, на пример, $p(0,0)=1/R^2\pi\neq 4/R^2\pi^2=p_1(0)\cdot p_2(0)$ (вежба 6.6.19). Од друга страна, пак

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)dxdy = (1/R^2\pi)\int_{-R}^{R} xdx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy = 0,$$

што покажува дека X и Y не се во корелација. Да забележиме дека формулата за пресметување на K_{xy} што овде ја изнесовме и користевме, ќе ја обосноваме покасно, кога ќе зборуваме за бројните карактеристики на случајните вектори.

7.3. Дисперзија

Под **дисперзија** на случајната величина X го подразбираме бројот

$$DX = M(X-MX)^2.$$

Од дефиницијата на дисперзијата се гледа дека таа претставува мера на отклонување на случајната величина X од нејзиното математичко очекување. Во иста смисла, како мера на отклонување, често се користи квадратниот корен од дисперзијата кој се вика и **стандардна девијација**. За пресметување на дисперзијата често се користи следнава формула:

Теорема 7.3.1.

За која било случајна величина X е:

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

Доказ. Ја користиме дефиницијата за дисперзија и соодветните својства на математичкото очекување:

$$DX = M(X-MX)^2 = M(X^2 - 2MX\cdot X + (MX)^2) =$$

$$= MX^2 - 2MX\cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2. \blacksquare$$

За да можеме да ја користиме формулата од горната теорема, потребно е да докажеме дека:

Теорема 7.3.2.

а) Нека X е дискретна случајна величина што ги прима вредностите x_1, x_2, ..., x_k со веројатности p_1, p_2, ..., p_k. Тогаш:

$$MX^2 = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 p_j \ ;$$

**б) ако X е дискретна случајна величина што ги прима вредностите x_1, x_2, ..., x_n, ... со веројатности $p_j=P(X=x_j)$, $j=1, 2, ..., n, ...$, тогаш:*

$$MX^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 p_n \ ;$$

**в) ако X е непрекината случајна величина со густина $p(x)$, тогаш:*

$$MX^2 = \int x^2 p(x)dx. \ *$$

Доказ. Доказот на а) следува од дефиницијата и забелешките во врска со дефиницијата на функциите од една дискретна случајна величина, додека за б) е потребно само обичната сума во а) да се замени со сума на конвергентен бесконечен ред.

Да го изнесеме доказот на делот в) од теоремата. Да ставиме $Y=X^2$; тогаш е:

$$F_y(x) = P(X^2<x) \ .$$

За $x\leq 0$ имаме дека $F_y(x)=0$ така што и $p_y(x)=0$. За $x>0$ имаме:

$$F_y(x) = P(|X|<\sqrt{x}) = P(-\sqrt{x}<X<\sqrt{x}) =$$
$$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \ ,$$

каде $F(x)$ е функцијата на распределба на X. Според тоа, за $x>0$ ја добиваме следнава густина на случајната величина Y:

$$p_y(x) = p(\sqrt{x})/2\sqrt{x} + p(-\sqrt{x})/2\sqrt{x} \ .$$

Пресметувајќи го, сега, математичкото очекување на $Y=X^2$, ќе добиеме:

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_y(x)dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{x\cdot p(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx + \int_0^{+\infty} \frac{x\cdot p(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx \ .$$

Ако во првиот од последните два интеграла извршиме замена $\sqrt{x}=u$, а во вториот $-\sqrt{x}=v$, ќе добиеме:

$$MY = \int_0^{+\infty} u^2p(u)du - \int_0^{-\infty} v^2p(v)dv =$$
$$= \int_0^{+\infty} u^2p(u)du + \int_{-\infty}^{0} v^2p(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2p(t)dt. \ \blacksquare$$

Да разгледаме неколку примери.

Пример 7.3.3. Нека $X:B(n,p)$. Во примерот 7.1.2 го најдовме математичкото очекување, т.е. покажавме дека $MX=np$. Да најдеме, сега, колку изнесува MX^2; наместо да пресметуваме директно, ќе тргнеме од следнава формула:

$$(q+px)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j} \cdot x^j$$

и ќе диференцираме по x:

$$np(q+px)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} j \cdot C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j} \cdot x^{j-1} ,$$

од каде, со замена на x со 1, земајќи предвид дека $p+q=1$, ќе добиеме:

$$np = \sum_{j=1}^{n} j \cdot C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} j \cdot P(X=j) = MX .$$

Така, патем, пак го пресметавме маатематичкото очекување на X. Ако го̀ помножиме со x идентичното равенство добиено по диференцирањето на почетната формула, ќе добиеме дека

$$npx(q+px)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} j \cdot C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j} \cdot x^j .$$

Сега уште еднаш ќе диференцираме по x, а потоа ќе замениме $x=1$:

$$np(q+px)^{n-1} + np^2x(q+px)^{n-2} \cdot (n-1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j^2 \cdot C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j} \cdot x^{j-1} ,$$

$$np + np^2(n-1) = \sum_{j=1}^{n} j^2 \cdot C_n^j \cdot p^j \cdot q^{n-j} = \sum_{j=0}^{n}{}_{j} j^2 \cdot P(X=j) = MX^2$$

Конечно, со примена на формулата од теоремата 7.3.1, ќе добиеме:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 =$$

$$= np(1-p) = npq .$$

Пример 7.3.4. Да ја пресметаме дисперзијата на хипергеометрискиот закон, $X:H(n,m,k)$. Случајната величина X ги примаше вредностите 0, 1, 2,..., s, $s=min(m,k)$, со веројатности $P(X=j) = C_m^j \cdot C_{n-m}^{k-j}/C_n^k$. Овде, наместо да го пресметуваме математичкото очекување MX^2, ќе пресметуваме $M(X(X-1))$ за кое, аналогно на формулата за MX^2, може да се покаже дека е еднакво на:

$$M(X(X-1)) = \sum_{j=0}^{s} j(j-1)\cdot P(X=j) .$$

При следните пресметувања на двапати ќе го користиме равенството $j\cdot C_{m}^{j}=m\cdot C_{m-1}^{j-1}$, како и равенството $C_{n}^{k}=\frac{n(n-1)}{k(k-1)}C_{n-2}^{k-2}$.

$$\begin{aligned}M(X(X-1)) &= \sum_{j=0}^{s} j(j-1)\cdot C_{m}^{j}\cdot C_{n-m}^{k-j}/C_{n}^{k} = \\ &= \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)}\cdot \sum_{j=2}^{s} C_{m-2}^{j-2}\cdot C_{n-m}^{k-j}/C_{n-2}^{k-2} = \\ &= \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)}\cdot (1/C_{n-2}^{k-2})\cdot \sum_{j=0}^{s-2}\cdot C_{m-2}^{j-2}\cdot C_{n-m}^{k-j} = \\ &= \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)} .\end{aligned}$$

И во овие пресметувања го искористивме равенството *(*)* од примерот 6.2.5 според кое, заменувајќи $s=m-2$, $r=k-2$ и $t=n-m$, имаме дека $C_{n-2}^{k-2}=\sum_{j=0}^{s-2}\cdot C_{m-2}^{j-2}\cdot C_{n-m}^{k-j}$. За дисперзијата на X, ако се потсетиме дека $MX=mk/n$ (пример 7.1.4), ќе добиеме:

$$\begin{aligned}DX &= MX^{2} - (MX)^{2} = M(X(X-1)) + MX - (MX)^{2} = \\ &= \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{mk}{n} - \frac{m^{2}k^{2}}{n^{2}} = \\ &= \frac{mk}{n}\cdot(\frac{(k-1)(m-1)}{n-1} + 1 - \frac{mk}{n}) = \\ &= \frac{mk}{n}\cdot\frac{(n-m)(n-k)}{n(n-1)} .\end{aligned}$$

Ќе разгледаме уште по два примера за секој од двата вида случајни величини: дискретни што примаат вредности од едно пребровиво множество и непрекинати случајни величини.

Пример 7.3.5.* Нека е X распределена по геометрискиот закон, $X:\Gamma(p)$. Во примерот 7.1.5 пресметавме дека $MX=1/p$. Земајќи предвид дека X ги прима вредностите $1,2,\ldots,n,\ldots$ со веројатности $P(X=n)=p\cdot q^{n-1}$, $q=1-p$, пресметуваме:

$$MX^{2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2}pq^{n-1} = p\cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{2}q^{n-1} .$$

Ако ставиме $\Phi(q)= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2}q^{n-1}$, ќе добиеме:

$$\int_0^q \Phi(q)dq = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n = (q/p)\cdot \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} =$$

$$= (q/p)\cdot MX = \frac{q}{p^2} = \frac{q}{(1-q)^2} ,$$

од каде, со диференцирање по q, ќе се добие:

$$\Phi(q) = \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^3} ,$$

а потоа,

$$MX^2 = p\cdot\frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2} .$$

На крајот,

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} .$$

Пример 7.3.6.* Да ја пресметаме дисперзијата на Пуасоновиот закон $P(a)$:

$$MX^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\frac{a^n}{n!}e^{-a} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{a^n}{(n-1)!}e^{-a} = ae^{-a}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Редот $\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ е конвергентен за секој $a\in(-\infty,+\infty)$; да ја означименеговата сума со $\Phi(a)$. Тогаш

$$\int_0^a \Phi(a)da = \sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{a^n}{(n-1)!} = a\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = ae^a ,$$

а потоа, со диференцирање по a,

$$\Phi(a) = (a\cdot e^a)' = (1+a)\cdot e^a .$$

На тој начин добиваме дека,

$$MX^2 = a\cdot e^{-a}\cdot(1+a)\cdot e^a = a + a^2 .$$

Бидејќи е $MX=a$ (пример 7.1.6), за дисперзијата добиваме:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = a + a^2 - a^2 = a .$$

Пример 7.3.7.* Нека е X непрекината случајна величина што е рамномерно распределена во интервалот (a,b). Во примерот 7.1.7 добивме дека $MX=(a+b)/2$. За густината на X имавме

$$p(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & , \text{ за } x\in(a,b), \\ 0 & , \text{ за } x\notin(a,b),\ a<b , \end{cases}$$

така што:

$$MX^2 = (1/(b-a))\cdot\int_a^b x^2dx = (a^2+ab+b^2)/3 .$$

За дисперзијата на X ќе добиеме:

$$DX = (a^2+ab+b^2)/3 - (a+b)^2/4 = (a-b)^2/12 \ .$$

Пример 7.3.8.* Да ја пресметаме, на крајот, и дисперзијата на нормалниот закон; нека $X{:}N(a,\sigma^2)$, т.е. X има густина

$$p(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\cdot e^{-(x-a)^2}/2\sigma^2 \ .$$

Овде дисперзијата ја пресметуваме по формулата со која таа беше дефинирана. Бидејќи $MX=a$ (пример 7.1.8) имаме:

$$DX = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot e^{-(x-a)^2}/2\sigma^2 dx =$$

$$= (\text{смена } (x-a)/\sigma\sqrt{2}=y) = (2\sigma^2/\sqrt{\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot e^{-y^2}dy \ .$$

Последниот интеграл го решаваме по методот на делумна интеграција земајќи $u=y$, $dv=ye^{-y^2}dy$:

$$DX = (-\sigma^2/\sqrt{\pi})y\cdot e^{-y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+(\sigma^2/\sqrt{\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy = \sigma^2 \ ,$$

зашто последниот интеграл е Пуасоновиот и неговата вредност е $\sqrt{\pi}$, додека првиот од собироците е еднаков на 0.

Да одбележиме неколку својства на дисперзијата. Во докажувањето на тие својства ќе ја користиме само дефиницијата за дисперзија и веќе докажаните својства за математичкото очекување.

Теорема 7.3.9.

Следниве својства за дисперзијата се точни

а) $DC=0$, *каде* C *е константа;*

б) $D(CX)=C^2\cdot DX$, C*-константа;*

в) ако се X *и* Y *независни случајни величини, тогаш*

$$D(X+Y) = DX + DY,\ D(X-Y) = DX + DY;$$

г) ако се $X_1,X_2,\ldots,X_k$ *независни случајни величини, а* $C_1,C_2,\ \ldots,\ C_k$ *произволни константи, тогаш*

$$D(C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_kX_k) = C_1^2DX_1+C_2^2DX_2+\ldots+C_k^2DX_k .$$

Доказ.

а) $DC = M(C-MC)^2 = M(C-C)^2 = M0 = 0;$

б) Доказот е едноставен како и на а):

$$D(CX) = M(CX-M(CX))^2 = M(CX-CMX)^2 =$$

$$= M(C^2(X-MX)^2) = C^2M(X-MX)^2 = C^2DX;$$

в) $$D(X+Y) = M(X+Y-M(X+Y))^2 = M(X+Y-MX-MY)^2 =$$

$$= M((X-MX) + (Y-MY))^2 =$$

$$= M((X-MX)^2 + (Y-MY)^2 + 2(X-MX)(Y-MY)) =$$

$$= M(X-MX)^2 + M(Y-MY)^2 + 2M((X-MX)(Y-MY)) =$$

$$= DX + DY + 2K_{xy}$$

Поради претпоставената независност на X и Y имаме дека $K_{xy}=0$, така што $D(X+Y)=DX+DY$. Доказот на вториот дел од в) е сличен на изнесениот; второто својство од в) следува и од својството г) што сега ќе го докажеме, ако таму земеме $C_1=1$, $C_2=-1$, $C_j=0$ за $j>2$.

г) Користејќи ја и овде претпоставката за независност, добиваме:

$$D(C_1X_1+ C_2X_2+...+ C_kX_k) =$$

$$= M(C_1(X_1-MX_1) + C_2(X_2-MX_2) +...+ C_k(X_k-MX_k))^2 =$$

$$= M(C_1^2(X_1-MX_1)^2 + C_2^2(X_2-MX_2)^2 +...+ C_k^2(X_k-MX_k)^2 +$$

$$+ 2M(C_1(X_1-MX_1)C_2(X_2-MX_2)) + 2M(C_1(X_1-MX_1)C_3(X_3-MX_3)) +$$

$$+...+ 2M(C_{k-1}(X_{k-1}-MX_{k-1})C_k(X_k-MX_k)) =$$

$$= C_1^2DX_1+C_2^2DX_2+...+C_k^2DX_k+$$

$$+ 2K_{x_1x_2}+2K_{x_1x_3}+...+2K_{x_{k-1}x_k} =$$

$$= C_1^2DX_1+C_2^2DX_2+...+C_k^2DX_k ,$$

зашто $k_{x_jx_k}=0$ за секои $j\neq k$. Да забележиме дека во доказот на последново својство е доволно да се искористи по парови независноста на случајните величини $X_1,X_2,...X_k$. ■

7.4 Моменти

Да споменеме уште некои бројни карактеристики на случајните вектори и, во исто време, да видиме како се воведуваат математичкото очекување и дисперзијата за случајните вектори.

Нека е a кој било реален број. Под **момент** од ред k на случајната величина X, во однос на a го подразбираме бројот

$$\nu_k(a) = M(X-a)^k ,$$

а под **апсолутен момент** од ред k во однос на a, бројот

$$m_k(a) = M|X-a|^k .$$

Ако во горните формули земеме a=0, ќе ги добиеме **почетните моменти** од ред k, т.е.

$$\alpha_k = MX^k \quad \text{и} \quad \overline{\alpha_k} = M|X|^k$$

ги викаме **почетен** односно **апосолутен почетен** момент на X од ред k.

Ако пак, земеме a=MX, тогаш соодветните моменти ги викаме **централни**. Значи,

$$\mu_k = M(X-MX)^k$$

ќе биде централен момент на X од ред k, а

$$\overline{\mu_k} = M|X-MX|^k$$

ќе биде апсолутен централен момент на X од ред k.

За пресметување на различните видови моменти на една случајна величина е потребно да се види како се пресметува математичкото очекување на функциите од случајната величина што учествуваат во дефинициите на разните моменти. Пресметувањето на споменатите моменти ќе биде овозможено ако го воведеме поимот за математичко очекување на произволна функција од една случајна величина. Тоа и ќе го направиме но, со цел да можеме да ги дефинираме и соодветните бројни карактеристики на случајните вектори, ќе дадеме дефиниција за математичкото очекување на функција од две независно-променливи случајни величини.

Нека (X,Y) е случаен вектор. Да земеме (X,Y) да биде дискретен при што X да ги прима вредностите x_j, $j=1,2,\dots$, а Y да ги прима вредностите y_k, $k=1,2,\dots$. Нека $p_{jk}=P((X=x_j)(Y=y_k))$ и нека $\Phi(x,y)$ е функција од две независнопроменливи. Под **математичко очекување** на случајната величина определена со функцијата ϕ, т.е. на $\phi(X,Y)$ го подразбираме бројот

$$M\phi(X,Y) = \sum_{j}\sum_{k}\phi(x_j,y_k)p_{jk} .$$

Притоа, ако X и Y примаат вредности од конечни множества, тогаш во горната формула имаме обична сума, а во случај тие да примаат вредности од бесконечни множества, тогаш имаме сума на конвергентен ред. За $\phi(x,y)=\psi(x)$, од горната формула следува дека

$$M\psi(X) = \sum_{j}\psi(x_j)p_j .$$

Навистина, ако X ги прима вредностите x_j со веројатности p_j за $j=1,2,\dots, k$, ќе имаме:

$$\begin{aligned} M\psi(X) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\psi(x_j)p_{jk} = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)\sum_{k=1}^{m}P((X=x_j)(Y=y_k)) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)p_j , \end{aligned}$$

зашто,

$$\sum_{k=1}^{m}P((X=x_j)(Y=y_k)) = \sum_{k=1}^{m}P(Y=y_k)\cdot P((X=x_j)/(Y=y_k)) ,$$

а последната сума, според формулата за тотална веројатност, ја дава веројатноста $p_j=P(X=x_j)$.

*Ако пак, X и Y примаат вредности од бесконечни множества, тогаш во горните разгледувања треба само обичната сума да се замени со сума на бесконечен конвергентен ред. Имено, ако ставиме $B=(X=x_j)$ и $A_k=(Y=y_k)$, $k=1,2,\dots$, имаме дека случајните настани од низата A_k се по парови дисјунктни и дека $\Omega=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$, така што $B=\Omega B=\sum_{k=1}^{\infty}A_kB$ а оттука, во аксиоматиката на Колмогоров, се добива дека

$$P(B) = P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k B) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\cdot P(B/A_k) ,$$

што претставува обопштување на формулата за тотална веројатност. Тоа значи дека $\sum_{k=1}^{\infty} P((X=x_j)(Y=y_k))=P(X=x_j)=p_j$ поради што сега се добива:

$$M\psi(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(x_j)p_{jk} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \psi(x_j) \sum_{k=1}^{\infty} P((X=x_j)(Y=y_k)) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(x_j)p_j .$$

Нека се X и Y непрекинати случајни величини и нека $p(x,y)$ е густината на случајниот вектор (X,Y). Под **математичко очекување** на $\phi(X,Y)$ го подразбираме бројот

$$M\phi(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)p(x,y)dxdy .$$

Ако е $\phi(x,y)=\psi(x)$, и во овој случај имаме дека,

$$M\psi(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)p_1(x)dx ,$$

зашто според теоремата 6.4.4 густината $p_1(x)$ на случајната величина X е определена со интегралот

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy . \;*$$

Да забележиме дека: *(i)* земајќи $\psi(x)=x^2$, од погоре изнесените формули можеме да ги добиеме формулите за пресметување на MX^2 кои порано ги докажавме; *(ii)* поимот за за математичко очекување на функција од повеќе од две случајни независнопроменливи може да се воведе со една едноставна и природна генерализација на изнесеното, разгледувајќи, во тој случај, случајни вектори со повеќе од две димензии.

Да ги изнесеме, сега, дефинициите за неколку бројни карактеристики на случајните вектори. Нека (X,Y) е случаен вектор. **Почетен момент** од ред (k,t) за случајниот вектор (X,Y) е бројот

$$\alpha_{kt} = M(X^kY^t) \ ,$$

кој се пресметува, во согласност со дефинициите за математичко очекување на функција од случајни променливи, по формулите:

$$\alpha_{kt} = \sum_j \sum_s x_j^k \cdot y_s^t p_{js} \ ,$$

во дискретниот случај, каде $p_{js}=P((X=x_j)(Y=y_s))$, односно,

$$\alpha_{kt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^t p(x,y)dxdy \ ,$$

во непрекинатиот случај, каде $p(x,y)$ е густината на (X,Y).

Математичкото очекување на случајниот вектор (X,Y) е подредениот пар (a_1,a_2) каде $a_1=\alpha_{10}=MX$ и $a_2=\alpha_{01}=y$.

Централен момент од ред (k,t) за случајниот вектор (X,Y) е бројот

$$\mu_{kt} = M((X-a_1)^k(Y-a_2)^t) \ ,$$

каде (a_1,a_2) е математичкото очекување на (X,Y).

На случајниот вектор (X,Y) може да му се придружи следнава матрица

$$\begin{pmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{pmatrix}$$

што се вика **дисперзиона матрица** за векторот (X,Y). Дисперзионата матрица за кој било случаен вектор е симетрична (ова важи и за повеќедимензионалните случајни вектори, при што дисперзионата матрица во овој случај се воведува по пат на природно обопштување на кажаното за дводимензионалниот случај). По главната дијагонала на дисперзионата матрица на векторот (X,Y) се дисперзиите на случајните величини X и Y, оделно, т.е. $\mu_{20}=DX$, $\mu_{02}=DY$, додека $\mu_{11}=K_{xy}$ е моментот на корелација на X и Y кој порано го сретнавме. Подредениот пар (DX,DY) се вика **дисперзија** на случајниот вектор (X,Y). Бројот

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

се вика **коефициент** на корелација меѓу случајните величини X и Y. Забележуваме дека $K_{xy}=0$ ако и само ако $r_{xy}=0$ така што, ако случајните величини X и Y се независни, тогаш $r_{xy}=0$, додека обратно, во општ случај од $r_{xy}=0$ не следува независноста на X и Y. Во некои случаи може $r_{xy}=0$ да повлече независност на X и Y, што ќе видиме од следниов пример со кој ќе ги илустрираме поимите што погоре ги воведовме.

Пример 7.4.1.* За случајниот вектор (X,Y) велиме дека е распределен по нормалниот закон ако е непрекинат и има густина

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\cdot e^{-\phi(x,y)},$$

каде што

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right],$$

a, b, σ_1, σ_2 и r се константи при што σ_1 и σ_2 се позитивни, а $|r|<1$. Ќе ги пресметаме: математичкото очекување, дисперзијата на (X,Y) и коефициентот на корелација меѓу X и Y.

Најнапред ќе ги пресметаме маргиналните густини $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на X и Y:

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\phi(x,y)}dy .$$

Функцијата $\phi(x,y)$ може да се трансформира во следниов вид:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{r(x-a)}{\sigma_1} - \frac{(y-b)}{\sigma_2}\right]^2 + \frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} .$$

Ако ја извршиме замената

$$\frac{1}{\sqrt{2(1-r^2)}}\left[-\frac{r(x-a)}{\sigma_1} + \frac{y-b}{\sigma_2}\right] = t ,$$

ќе добиеме дека:

$$p_1(x) = \frac{e^{-(x-a)^2/2\sigma_1^2}}{\sigma_1\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma_2^2} .$$

Така, значи, X е распределена по нормалниот закон $N(a,\sigma_1^2)$. Оттука следува дека $MX=a$, $DX=\sigma_1^2$ (примери 7.1.8 и 7.3.8).

Од причини на симетрија добиваме дека $MY=b$, $DY=\sigma_2^2$. Така, математичкото очекување на (X,Y) е (a,b) а дисперзијата (σ_1^2,σ_2^2). Да го определиме K_{xy}:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)(y-b)p(x,y)dxdy \ .$$

Ако ја извршиме и овде истата замена како и при определувањето на $p_1(x)$, ќе добиеме:

$$K_{xy} = \frac{1}{\pi\sigma_1\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)\cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma_1^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_2\sqrt{2(1-r^2)}\cdot t + \\ + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot r(x-a))e^{-t^2}dt \ .$$

Лесно се пресметува дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_2\sqrt{2(1-r^2)}\cdot t + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot r(x-a))e^{-t^2}dt = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot r(x-a)\sqrt{\pi} \ ,$$

така што

$$K_{xy} = \frac{\sigma_2 r}{\sigma_1^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma_1^2}dx = r\sigma_1\sigma_2 \ .$$

За коефициентот на корелација сега добиваме $r_{xy}=r$.

Со горните пресметувања ја објаснивме веројатносната смисла на 5-те параметри што учествуваат во дефинирањето на дводимензионалниот нормален закон.

Да покажеме сега, дека кај нормалниот закон поимите независност и некорелираност совпаднуваат. Бидејќи секогаш од независноста на две случајни величини следува дека тие не се во корелација, да покажеме дека во овој закон од тоа што X и Y не се во корелација следува и независноста на X и Y. Имено, нека $K_{xy}=0$ (т.е $r_{xy}=0$). Тогаш густината на (X,Y) ќе биде:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma_1^2-(y-b)^2/2\sigma_2^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma_1^2}\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(y-b)^2/2\sigma_2^2} =$$

$$= p_1(x)\cdot p_2(y) \ ,$$

зашто за првиот множител понапред видовме дека ја претставува маргиналната густина на X, а вториот е маргинална густина на Y. Од тоа, според теоремата 6.4.6 б) следува дека X и Y се независни.*

7.5. Вежби

7.5.1. Да се пресметаат математичкото очекување и дисперзијата за случајните величини X и Y зададени со таблиците:

$$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} \quad Y:\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 & 15 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

7.5.2. Случајните величини X и Y се заемно независни и зададени со следниве таблици:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Да се пресметаат математичките очекувања и дисперзиите на следниве случајни величини: X, Y, X+Y, XY.

7.5.3. Случајната величина X е зададена со таблицата

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Да се најдат веројатностите p_1, p_2 и p_3 ако $MX=0{,}1$ и $MX^2=0{,}9$.

7.5.4. Во едно множество од 10 предмети има точно 3 нестандардни предмети. Од даденото множество произволно се бираат 2 предмети. Да се најдат математичкото очекување и дисперзијата на бројот на нестандардни предмети од избраните 2.

7.5.5. Еден работник опслужува 4 машини. Веројатноста дека, во тек на еден час, не е потребна интервенција на работникот на првата машина, за таа да работи, изнесува 0,9. Соодветните веројатности за останатите машини изнесуваат: 0,8 , 0,75 и 0,7 , содветно. Да се пресметаат математичкото очекување и дисперзијата на бројот на машините кои во тек на еден час не побаруваат интервенција од работникот.

7.5.6. n коцки за играње N пати се фрлаат на рамнина, едно по друго. Да се најдат математичкото очекување и дисперзијата на случајната величина X која го означува бројот на фрлањата при кои на m од n-те коцки се појавиле 6 точки ($m \leq n$).

7.5.7. Една монета е фрлена 7 пати во воздух и е дочекана на раманина. Да се пресметаат математичкото очекување и дисперзијата на бројот на паѓања "грб".

7.5.8.* Во една продавница купувачи доаѓаат случајно и независно еден од другите. Бројот на купувачите што пристигнуваат во продавницата во тек на времето T се потчинува на Пуасоновиот закон P(a). Во продавницата работи само еден продавач кој во исто време не може да послужи повеќе од еден купувач. Времето на послужување на купувач нека биде еднакво на T. Ако во продавницата има повеќе од еден купувач, тогаш во неа се формира редица од купувачи. Под должина $\tilde{k}$ на таа редица го подразбираме бројот на купувачите што чекаат да бидат послужени.

а) Да се најде математичкото очекување на должината на редицата;

б) да се најде средното време на чекање за новодојдениот купувач додека не дојде на ред да биде послужен (додека не дојде на чело на редицата).

7.5.9.* Дискретната случајна величина X ги прима вредностите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ со веројатности $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ако сите x_j се позитивни и ако $x_j < x_{j+1}$ за секој $j=1,2,\ldots,n-1$, да се покаже дека е

$$\lim_{k\to\infty} \frac{MX^{k+1}}{MX^{k}} = x_n \, .$$

7.5.10. Некој човек имал 8 еднакви по големина и облик клучеви. Од сите нив само еден ја отворал вратата на неговиот стан. Да се пресметаат математичкото очекување и дисперзијата на бројот на обидите на човекот да ја отвори вратата ако тој клучот со кој се обидувал да ја отвори го бирал произволно и:

а)* по секој обид клучот го враќал (замешувал со останатите клучеви);

б) по секој обид клучот со кој се обидел да отвори го издвојувал на страна.

7.5.11. Да се докаже дека, ако X и Y се независни случајни величини, тогаш

$$D(XY) = DX\cdot DY + (MY)^2\cdot DY .$$

7.5.12*. Да се најде математичкото очекување на случајната величина X чија густина е

$$p(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{-|x|} .$$

7.5.13*. Густината на случајната величина X е

$$p(x) = \begin{cases} 1/\pi\sqrt{c^2-x^2} & , \text{ за } x\in(-c,c) \\ 0 & , \text{ за } x\notin(-c,c) . \end{cases}$$

Да се најдат математичкото очекување и густината на X.

7.5.14*. Да се најдат математичкото очекување и дисперзијата на случајната величина X чија функција на распределба е

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ за } x\leq-2 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & , \text{ за } -2<x\leq2 \\ 1 & , \text{ за } x>2 . \end{cases}$$

7.5.15*. Позната е густината на случајната величина X:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^k}{k!}\cdot e^{-x} & , \text{ за } x\geq0 \\ 0 & , \text{ за } x<0 . \end{cases}$$

Да се пресметаат MX и DX.

7.5.16*. Случајните величини X и Y се независни и: X е рамномерно распределена во интервалот (a,b), а Y е рамномерно распределена во интервалот (k,t). Да се пресметаат: M(X+Y), M(XY), D(X+Y) и D(XY).

7.5.17*. Густината на случајната величина X го има следниов вид:

$$p(x) = \begin{cases} ax^2 \cdot e^{-kx}, & \text{за } x \geq 0 \\ 0, & \text{за } x < 0 \quad (k > 0)\ . \end{cases}$$

Да се пресметаат:

а) константата а и функцијата на распределба на X;

б) веројатноста $P(0<X<1/k)$;

в) математичкото очекување и дисперзија на X.

7.5.18*. Функцијата на распределба на случајната величина X е

$$F(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{a^3}{x^3}, & \text{за } x > a \\ 0, & \text{за } x \leq a \quad (a > 0)\ . \end{cases}$$

Да се најдат математичкото очекување и дисперзијата на X.

7.5.19. Случајниот вектор (X,Y) е зададен со приложената таблица:

Y \ X	1	2	3	4
1	3/40	1/40	5/40	2/40
2	7/40	4/40	1/40	1/40
3	0	2/40	8/40	6/40

Да се пресмета математичкото очекување на (X,Y); да се најде дисперзионата матрица на (X,Y) и коефициентот на корелација меѓу X и Y.

7.5.20. Случајните величини X и Y се независни и имаат дискретни распределби дадени со следните таблици:

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,15 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix} \qquad Y: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Да се најдат M(X+Y), M(XY), и M(X+2Y).

7.5.21*. Дадена е густината на случајниот вектор (X,Y):

$$p(x,y) = \begin{cases} C(R^2-\sqrt{x^2+y^2}), & \text{за } x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{за } x^2+y^2 > R^2\ . \end{cases}$$

Да се определат:

а) константата C,

б) веројатноста точката (X,Y) да лежи во кругот $x^2+y^2 \leq a^2$,

в) коефициентот на корелација r_{xy} .

VIII. ЗАКОНОТ НА ГОЛЕМИТЕ БРОЕВИ

Тргнувајќи од неравенството на Чебишев, овде ќе ја докажеме теоремата на Чебишев со која законот на големите броеви се третира во неговата "потесна смисла", а како последица на таа теорема ќе добиеме уште неколку облици на тој закон.

8.1 Неравенство на Чебишев

Да ја изнесеме, најнапред, содржината на тврдењата што се именуваат како закон на големите броеви.

Нека е дадена една низа од случајни величини

$$X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n,\ \dots \tag{1}$$

и нека

$$Y_n = \frac{1}{n}\,(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\ .$$

Ако постои низа од реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ таква што за кои било $\varepsilon, \delta > 0$, n може да се избере доволно голем за да биде точно неравенството

$$P(|Y_n-a_n|<\varepsilon) > 1-\delta \ , \qquad (2)$$

тогаш за низата *(1)* велиме дека се потчинува на **законот на големите броеви.** Неравенството *(2)* често се пишува во следниов вид:

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n-a_n|<\varepsilon) = 1 \ ,$$

со што на овој начин се воведува поимот за **конвергенција по веројатност.** На опишаниот начин ние го воведовме "слабиот закон на големите броеви" за разлика од еден друг закон наречен "јак" или "силен", на кој ние овде нема да се задржуваме.

Потесната смисла на законот на големите броеви, што на почетокот ја навестивме, се изразува низ изборот на низата од реалните броеви, т.е. во овој случај таа низа се бира така што

$$a_n = \frac{1}{n}(MX_1 + MX_2 + \ldots + MX_n) \ .$$

Содржината на овој параграф ќе ја чинат неколку теореми во кои се даваат доволни услови за определени низи од случајни величини да се потчинуваат на законот на големите броеви. При докажувањето на тие теореми, пак, се користи едно од неравенствата на Чебишев, што сега ќе го докажеме.

Теорема 8.1.1.

(Неравенство на Чебишев) За која било случајна величин X што има конечна дисперзија и за кој било реален бр $\varepsilon>0$ точно е неравенството

$$P(|X-MX|\geq\varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \ .$$

Доказ. Да земеме X да биде дискретна случајна величи што ги прима вредностите $x_1, x_2, \ldots, x_k$ со веројатно $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Тогаш веројатноста на случајниот нас $|X-MX|\geq\varepsilon$ може да се пресмета по формулата

$$P(|X-MX|\geq\varepsilon) = \sum_{|x_j-MX|\geq\varepsilon} p_j \ ,$$

каде сумата од десната страна се протегнува по **сите** j **за** с задоволено неравенството напишано под знакот на **сумата**

Да ја пресметаме дисперзијата на X:

$$DX = \sum_{j=1}^{k} (x_j - MX)^2 p_j \geq \sum_{|x_j - MX| \geq \varepsilon} (x_j - MX)^2 p_j .$$

Поради $|x_j - MX| \geq \varepsilon$, продолжувајќи го пресметувањето, ќе добиеме,

$$DX \geq \varepsilon^2 \sum_{|x_j - MX| \geq \varepsilon} p_j = \varepsilon^2 P(|X-MX| \geq \varepsilon) ,$$

а оттука и следува неравенството на Чебишев.

Да забележиме дека, по форма, доказот на неравенството на Чебишев ќе остане ист со изнесениот и во случај X да биде дискретна случајна величина што прима вредности од едно преброиво множество, се разбира, со нужната замена на обичната сума со сума на соодветниот бесконечен конвергентен ред.

*Да го докажеме, сега, неравенството на Чебишев за случајот кога X е непрекината случајна величина. Нека $p(x)$ е густината на X. Применувајќи ја формулата за веројатност на спротивниот настан и формулата од теоремата 6.3.2, ќе добиеме,

$$P(|X-MX| \geq \varepsilon) = 1 - P(|X-MX| < \varepsilon) =$$

$$= 1 - P(MX-\varepsilon < X < MX+\varepsilon) = 1 - \int_{MX-\varepsilon}^{MX+\varepsilon} p(x)dx .$$

Земајќи предвид дека $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$, добиваме:

$$P(|X-MX| \geq \varepsilon) = \int_{-\infty}^{MX-\varepsilon} p(x)dx + \int_{MX+\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx = \int_{|x-MX| \geq \varepsilon} p(x)dx .$$

Пресметувајќи ја и овде дисперзијата, како и во дискретниот случај, ќе најдеме дека:

$$DX = \int (x-MX)^2 p(x)dx \geq \int_{|x-MX| \geq \varepsilon} (x-MX)^2 p(x)dx \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{|x-MX| \geq \varepsilon} p(xx)dx = \varepsilon^2 P(|X-MX| \geq \varepsilon) ,$$

со што го комплетираме доказот. ■*

Да разгледаме еден пример во кој се применува неравенството на Чебишев:

Пример 8.1.2. (Правило на "три сигми") Ќе ја оцениме веројатноста на следниов случаен настан: отклонувањето на која било случајна величина X што има конечна дисперзија σ^2, по апсолутна вредност, да не биде поголемо од 3σ.

Според неравенството на Чебишев имаме дека

$$P(|X-MX|>3\sigma) < \frac{DX}{9\sigma^2} ,$$

при што во неравенството знакот $\geq$ го замениве со $>$ и слично за спротивниот знак. Дека и во овој вид е точно неравенството може лесно да се провери ако се проследи погоре изнесениот доказ. Преминувајќи, сега, на веројатноста на спротивниот настан ќе добиеме

$$P(|X-MX|\leq 3\sigma) > 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = 8/9 \approx 0,889 .$$

8.2. Теоремата на Чебишев

Во сите теореми што натаму ќе ги докажеме ќе претпоставиме независност на низата случајни величини. Оваа претпоставка, во голем број случаи, во практичната примена, може да се обезбеди. Основна за сите натамошни теореми е следнава

Теорема 8.2.1.

(Теорема на Чебишев) Нека е $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *низа од независни случајни величини коишто имаат конечни дисперзии мајорирани со некоја константа* C, *т.е.* $DX_n \leq C$ *за секој* $n=1,2,\ldots$. *Тогаш за кој било реален број* $\varepsilon>0$ е

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right|<\varepsilon\right) = 1 .$$

Доказ. Да ставиме

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j .$$

Тогаш според теоремата 7.2.4 ќе имаме дека $MY_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} MX_j$, а поради претпоставената независност, земајќи предвид дека дисперзиите на случајните величини од низата се мајорирани со C, а со примена и на теоремата 7.3.9 г) ќе добиеме дека,

$$DY_y = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} DX_j \le \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} C = \frac{C}{n} .$$

Сега, според неравенството на Чебишев, за кој било реален број $\varepsilon>0$ имаме дека

$$P(|\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} MX_j| \ge \varepsilon) \le \frac{C}{n\varepsilon^2} .$$

За кој било реален број $\delta>0$ можеме n да го избереме доволно голем, така што да биде $C/n\varepsilon^2<\delta$, а тогаш и

$$P(|\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} MX_j| \ge \varepsilon) < \delta .$$

Земајќи, сега, веројатност на спротивниот настан од настанот во претходната формула, ќе добиеме:

$$P(|\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} MX_j| < \varepsilon) > 1 - \delta .$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} MX_j| < \varepsilon) = 1 . \blacksquare$$

Една последица на теоремата на Чебишев, е дадена во следнава

Теорема 8.2.2.

Нека е X случајна величина со конечна дисперзија и нека $x_1,x_2, \ldots,x_n$ е една низа од вредности добиени за X при n независни набљудувања. Тогаш за кој било реален број $\varepsilon>0$ е

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j - MX| < \varepsilon) = 1 .$$

Доказ. Секој од членовите на низата $x_1,x_2,\ldots,x_n$ можеме да го сметаме за случајна величина распределена по ист закон како и случајната величина X. Поради независноста на набљудувањата, дадената низа може да се смета за низа од независни случајни величини. Според тоа оваа теорема може да се смета како непосредна последица од теоремата 8.2.1. ■

Забелешка 8.2.3. Во практичната примена теоремата 8.2.2 може да се интрепретира на следниов начин: треба да се измери некоја големина a; за таа цел се спроведуваат n независни мерења - нека резултатите од мерењата се: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Природно е да се смета дека секое x_j е случајна величина за која $MX_j = a$. Натаму, треба да очекуваме дека мерењата се "добри", т.е. за секое x_j е $Dx_j \leq C$. Тогаш според теоремата 8.2.2 ќе имаме дека, за кој било $\varepsilon > 0$ да биде

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j - a \right| < \varepsilon \right) = 1 \ .$$

На тој начин може да се оправда и земањето на аритметичката средина како "добра" апроксимација на величината a што ја мериме, се разбира, земајки n да биде "доволно голем".

8.3. Теоремите на Бернули и Пуасон

Најстариот облик на законот на големите броеви е даден со теоремата на Бернули, со која се "оправдува" статистичката дефиниција за пресметување на веројатностите на случајните настани, имено, се покажува дека, за доволно големи вредности на n, релативните честоти добиени од независни серии од n експерименти, осцилираат околу веројатноста на дадениот случаен настан. Да ја докажеме оваа теорема:

Теорема 8.3.1.

(Теорема на Бернули) Во една серија од n независни експерименти, случајниот настан A настапува со иста веројатност p во секој од експериментите. Нека m е бројот, колку пати настапил настанот A во целата серија од n експерименти. Тогаш за кој било реален број $\varepsilon>0$ е

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Доказ. Да ја разгледаме низата од случајни величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ при која секоја величина X_j е распределена по биномномниот закон $B(1,p)$, т.е. секоја X_j прима вредност 0 со веројатност $q=1-p$ (тоа значи дека во соодветниот експеримент, овде j-тиот експеримент, не настапил случајниот настан A) и вредност 1 со веројатност p (значи во j-тиот експеримент настапил случајниот настан A). Така, за секоја X_j имаме $MX_j=p$, $DX_j=pq\le 1/4$. Ако настанот A настапил m пати во серијата од n експерименти, ќе имаме $m=\sum_{j=1}^{n} X_j$, т.е. $\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} X_j=\frac{1}{m}$, додека $\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} MX_j=\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} p=p$. Од теоремата на Чебишев сега следуваа доказот на оваа теорема. ∎

На крајот од овој дел ќе ја докажеме уште теоремата на Пуасон, која претставува обопштување на теоремата на Бернули:

Теорема 8.3.2.

(Теорема на Пуасон) Во една серија од n независни експерименти, случајниот настан A настапил m пати. Нека p_j е веројатноста со која A може да настапи во j-тиот експеримент, $j=1,2,\ldots,n$. Тогаш за кој било реален број $\varepsilon>0$ е

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} p_j\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Доказ. Како и при доказот на теоремата на Бернули, разгледуваме низа од независни случајни величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$

таква што за секој $j=1,2,\dots,n$ имаме дека X_j е распределена по биномен закон; при тоа, $X_j:B(1,p_j)$. Тогаш $MX_j=p_j$ и $DX_j=p_jq_j\leq 1/4$. Заклучокот сега ќе го добиеме како и при теоремата на Бернули со таа разлика што, во овој случај аритметичката средина од математичките очекувања на случајните величини $X_1,X_2,\dots,X_n$ не е еднаква на p туку останува како сума од веројатностите со кои случајниот настан A настапува во одделнните експерименти. ■

8.4. Вежби

8.4.1. Случајната величина X има средна вредност $MX=1$ и стандрадна девијација $\sigma=\sqrt{DX}=0,2$. Со помош на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста на неравенството $0,5<X<1,5$.

8.4.2. Веројатноста за настапување на даден случаен настан A во секој експеримент од една серија од n независни експерименти е 1/3. Со помош на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста дека релативната честота на A не се разликува од веројатноста на A, по апсолутна вредност, за повеќе од 0,01 ако: а) n=9.000 и б) n=75.000.

8.4.3. Веројатноста на дадена машина да се произведе предмет што ќе одговара на стандардите за квалитет изнесува 0,9. На машината се изработени 18.000 предмети. Каква е веројатноста, бројот на стандардните предмети да не се разликува од математичкото очекување на тој број за повеќе од 200 предмети?

8.4.4. Да се докаже (прв вид на неравенството на Чебишев): ако X е ненегативна случајна величина што има математичко очекување, тогаш $P(X>a)<\frac{MX}{a}$.

8.4.5. Средната вредност на потрошувачката на вода во едно населено место изнесува 50.000 литри во денот. Да се оцени веројатноста дека, во даден ден во населеното место нема да се потроши повеќе од 150.000 литри вода.

8.4.6. Бројот на сончевите денови во годината, за дадено место, е случајна величина со математичко очекување еднакво на 75 дена. Да се оцени веројатноста дека, во тек од една година во даденото место нема да има повеќе од 200 сончеви денови.

8.4.7. Дисперзијата на секоја од 2500 независни случајни величини не е поголема од 5. Да се оцени веројатноста дека, отстапувањето на аритметичката средина на случајните величини од аритметичката средина на нивните математички очекувања не е поголемо од 0,4.

8.4.8. Да се докаже следново неравенство што го обопштува првото од неравенствата на Чебишев: случајната величина X е дискретна и прима ненегативни вредности. Ако постои MX^a, каде што a е позитивен реален број, тогаш за кој било позитивен реален број c е

$$p(X\geq c)\ \leq\ \frac{MX^a}{c^a}$$

8.4.9. Да се докаже дека, ако $\phi(x)$ е ненегативна функција која за $x\geq a$ прима вредности што не се помали од $\delta\geq 0$, и ако постои $M\phi(X)$, каде што X е произволна случајна величина, тогаш

$$P(X\geq a)\ \leq\ \frac{M\phi(X)}{\delta}.$$

8.4.10.* Да се докаже теоремата на Хинчин: ако $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ е низа од независни случајни величини што имаат дисперзии такви што $\lim\limits_{n\to\infty}(DX_n/n)=0$, тогаш таа низа се потчинува на законот на големите броеви.

8.4.11. Дали може да се примени законот на големите броеви на низата од независни случајни величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ако:

а) X_n ги прима вредностите $-na, 0, na$ каде што a е позитивен реален број, со веројатности еднакви на $1/2n^2, 1-1/n^2$ и $1/2n^2$, соодветно;

б) X_n ги прима истите вредности како во а) но со веројатности: $1/2^n, 1-1/2^{n-1}, 1/2^n$;

в) X_n ги прима вредностите $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ со веројатности $1/n, 1-2/n, 1/n$.

Одговори, упатства, решенија

Гл.I.

1.7.1. а) $\Omega=\{X1M1C3, X1M2C2, X1M3C1, X2M1C2, X2M2C1, X3M1C1\}$,

б) $A=\{X2M2C1, X3M1C1\}$,

в) $B=\{X1M2C2, X1M3C1, X2M2C1\}$,

г) $C=\{X1M3C1, X2M2C1, X3M1C1\}$.

$A, B, C\subseteq\Omega$; $A\subset C$; сите имаат непразни пресеци, по парови и сите заедно.

1.7.2. $\Omega=\{AXBYC, AXCYB, AYBXC, AYCXB, BXAYC, BXCYA, BYAXC, BYCXA, CXAYB, CXBYA, CYAXB, CYBXA\}$;

а) $K=\{AXBYC, AXCYB, AYBXC, BYAXC, BYCXA, CXAYB, CXBYA, CYBXA\}$;

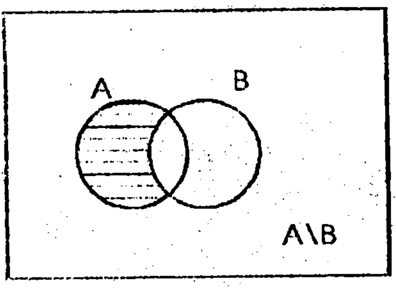
б) $P=\{AXCYB, BYAXC, BYCXA, CXAYB\}$;

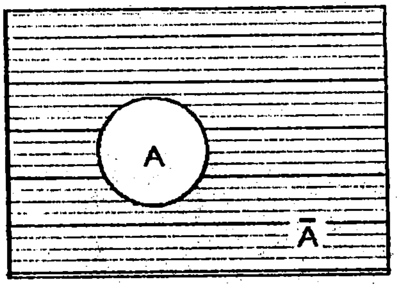
в) $M=\{AXBYC, AYBXC, CXBYA, CYBXA\}$;

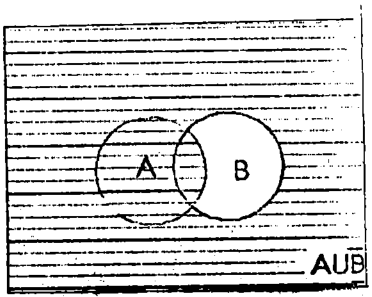
г) Ω.

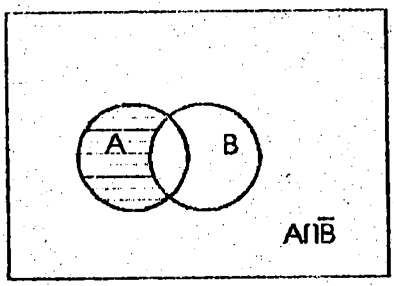
$K, M, P\subset\Omega$; $M\subset K$; $P\subset K$; $M\cap P\neq 0$.

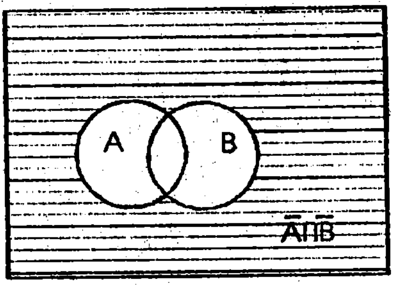
1.7.3.



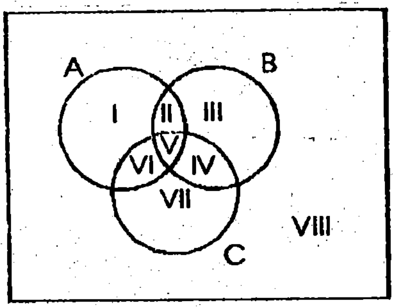




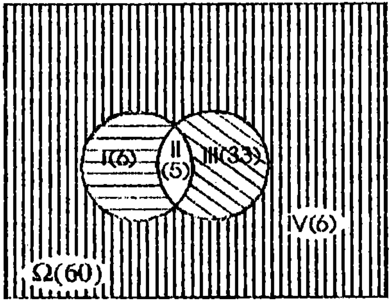




1.7.4. Овде ќе изнесеме само една од можностите при што се користени само операциите пресек и комплемент, а само во последниот случај е дадена уште една алтернатива со помош на операциите унија и комплемент: $I=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$, $II=A\cap B\cap\overline{C}$, $III=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$, $IV=\overline{A}\cap B\cap C$, $V=A\cap B\cap C$, $VI=A\cap\overline{B}\cap C$, $VII=\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$, $VIII=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C} = (\overline{A\cup B\cup C})$.



1.7.5. Нека Ω е множеството од сите студенти, A множеството од сите девојки и B множеството од сите студенти што редовно ги следат предавањата. Множествата A и B имаат заеднички елементи зашто збирот на елементите од овие множества дава поголем број одошто е бројот на елементите на Ω. Така на долниот дијаграм на Вен имаме 4 области оопределени на следниов начин: $I=A\cap\overline{B}$, $II=A\cap B$, $III=\overline{A}\cap B$, $IV=\overline{A}\cap\overline{B}$. Множеството од сите студенти - момчиња што нередовно ги следат предавањата е претставено со IV. Познат е бројот на елементите на секое од множествата: A - 21, B - 48 и I - 6. Определуваме II - 21-6=15, III - 48-15=33 и на крајот, бидејќи IV е комплемент на унијата од I, II и III кои меѓу себе се дисјунктни, најдуваме дека IV има 6 елементи.



1.7.6. Да се искористи 1.7.4. Одговор: 9.

1.7.7. б) $A\cup B=B$, $A\cap B=\emptyset$, $A/B=\emptyset$, $B\setminus A=B$, $A\times A=\emptyset$, $A\times B=\emptyset$, $B\times A=\emptyset$, $B\times B=\{(x,x), (x,y), (x,k), (y,x), (y,y), (y,k), (k,x), (k,y), (k,k)\}$.

1.7.8. а) да; $A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=a_2\cap A_3=\emptyset$, $M=A_1\cup A_2\cup A_3$;

б) не; на пример $A_1\cap A_3=\{p,t\}\neq\emptyset$;

в) да.

1.7.9. $M=\{GGG, GGP, GPG, PGG, GPP, PGP, PPG, PPP\}$,

а) $A_1=\{GGG, GGP, GPG, GPP\}$, $A_2=\{PGG, PGP\}$, $A_3=\{PPG\}$, $A_4=\{PPP\}$;

б) $A_1=\{GGG\}$, $A_2=\{GGP, GPG, PGG\}$, $A_3=\{GPP, PGP, PPG\}$, $A_4=\{PPP\}$.

1.7.12. $A = A\cap(A\cup B) = A\cap(C\cup B) = (A\cap C)\cup(A\cap B) =$

$=(C\cap A)\cup(C\cap B) = C\cap(A\cup B) = C\cap(C\cup B) = C.$

Ако земеме $A=\{x,y\}$, $B=\{x,y,a,b\}$, $C=\{a,b\}$ имаме дека $A\neq C$ но $A\cup B=\{x,y,a,b\}=C\cup B$.

1.7.13. Во сите случаи одговорот е да.

1.7.14. Да.

1.7.16. Со повторување:

111 112 113 114 115

121 122 123 124 125

131 132 133 134 135

141 142 143 144 145

151 152 153 154 155

211 212 213 214 215

221 222 223 224 225

. . . .

511 512 513 514 515

521 522 523 524 525

531 532 533 534 535

541 542 543 544 545

551 552 553 554 555.

Без повторување:

123 132 213 231 312 321

124 142 214 241 412 421

125 152 215 251 512 521

134 143 314 341 413 431

135 153 315 351 513 531

145 154 415 451 514 541

234 243 324 342 423 432

235 253 325 352 523 532

345 354 435 453 534 543.

1.7.17. а) $V_9^3=9.8.7=504$; б) $\overline{V}_9^3=9^3=729$.

1.7.18. Резултатот на секое извлекување е варијација без повторување од класа 4. За да се добие парен број, последната цифра мора да биде 2 или 4 или 6 или 8 додека на другите три места може да дојде која било варијација од класа 3 од останатите цифри. Така го добиваме следново решение: $3.V_8^3=1344$.

1.7.19. Овде среќаваме пермутации со повторување $P_6(a,b,c)$ каде a нека го покажува бројот на изгубените, b бројот на добиените утакмици и c бројот на нерешените игри. Тогаш имаме:

5 бода можат да се освојат на $P_6(3,2,1)$ + $P_6(2,1,3)$ + $P_6(1,0,5)$ начини, или вкупно 126 начини. Натаму:

6 бода: $P_6(2,2,2)+P_6(1,1,4)+P_6(0,0,6)=121$,

7 бода: $P_6(2,3,1)+P_6(1,2,3)+P_6(0,1,5)=126$,

8 бода: $P_6(2,4,0)+P_6(1,3,2)+P_6(0,2,4)=90$,

9 бода: $P_6(1,4,1)+P_6(0,3,3)=50$,

10 бода: $P_6(1,5,0)+P_6(0,4,2)=21$,

11 бода: $P_6(0,5,1)=6$,

12 бода: $P_6(0,6,0)=1$,

Така, опстанокот може да се обезбеди на 126 + 121 + 126 + 90 + 50 + 21 + 6 + 1 = 541 начин.

1.7.20. $5!=120$. Пермутациите со определено значење се: АВНОЈ, ВАНЈО, ВОЈНА, НАВОЈ, ЈАВНО, ЈАНОВ и ЈОВАН.

1.7.21. $5!-2\cdot 4!=72$.

1.7.22. $P_8(3,3,2)=8!/(3!3!2!)=560$.

1.7.23. $P_8(3,3,2)=560$.

1.7.24. Секој кружен распоред од k елементи се вика кружна пермутација на k-те елементи. Да избереме една фиксна пермутација од дадените елементи и да фиксираме еден од елементите на избраната циклична пермутација. Ако фиксираниот елемент го земеме за прв, а останатите елементи ги поредиме зад фиксираниот, одејќи во смерот обратен од смерот на сказалките на сатот, ќе добиеме една обична пермутација. Со друг фиксиран елемент во избраната циклична пермутација ќе добиеме, на опишаниот начин, нова обична пермутација. Продолжувајќи во оваа насока, со секоја циклична пермутација можеме да добиваме k различни обични пермутации без повторување. Ако го означиме со C_k бројот на сите различни циклични пермутации од k елементи, добиваме дека е $k.C_k=P_k=k!$, а оттука, $C_k=(k-1)!$.

1.7.25. $P_7(4,3)=7!/(4!3!)=35$.

1.7.26. $P_{25}(13,12)=25!/(13!12!)=5.200.300$

1.7.27. Со повторување:

111 112 113 114

222 221 223 224

333 331 332 334

444 441 442 443

123 124 134 234

Последните четири комбинации се сите можни комбинации од класа 3 без повторување.

1.7.28. Треба да се реши равенката $C_k^2=45$; решение е $k=10$.

1.7.29. Ако T е бројот на бараните дијагонали имаме: $T=C_{10}^2-10=35$. Упатство: ако се поврзат секои две од темињата ќе се добијат сите дијагонали и сите темиња на десетоаголникот.

1.7.30. 5 точки. Упатство: треба да се реши равенството $C_{k+2}^k=10$. Решението е $k=3$.

1.7.31. а) $C_{18}^9=48620$, б) $C_7^3 . C_{11}^6=16170$,

в) $C_7^3C_{11}^6 + C_7^4C_{11}^5 + C_7^5C_{11}^4 + C_7^6C_{11}^3 + C_7^7C_{11}^2=40480$.

1.7.32. Добитникот може да избере од 1 до 6 предмети, па ако со T го означиме бројот на сите можни начини на кои може да го изврши изборот, ќе имаме: $T=C_6^1+C_6^2+C_6^3+ \ldots +C_6^6$. Овој збир може најлесно да се пресмета ако во биномната формула земеме $a=1$, $b=1$, $p=1$ така што ќе добиеме: $2^6=C_6^0+T$, а оттука $T=63$.

1.7.33. а) $13 \cdot C_4^3=52$, б) $4 \cdot C_{13}^3=1144$,

в) $12 \cdot C_4^2C_4^1+C_4^3=292$.

1.7.34. 120.

1.7.35. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a-b)^6= a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$.

Гл.II.

2.7.1. а) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, б) $A \cup B \cup C$, в) $(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) \cup (\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}) \cup (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C)$,

г) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, д) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cdot B \cdot C)$.

2.7.2. а) $B \subseteq A$ и $C \subseteq A$, б) $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$.

2.7.3. $\Omega=\{ZZZ, ZZC, ZCZ, CZZ, ZCC, CZC, CCZ, CCC\}$

а) $A=\{ZCC, CZC, CCZ\}$, б) $B=\{ZZC, ZCZ, CZZ\}$, в) $C=\{ZZZ, ZZC, ZCZ, CZZ, ZCC, CZC, CCZ\}$, г) $E=\{ZZZ, ZZC, ZCZ, CZZ\}$. Секој од настаните A, B и E го повлекува C, а B го повлекува и E.

2.7.4. $n=4!$, $m=2$ и $p=2/4!=1/12$.

2.7.5. $p=1/6$. Упетство: при пресметувањето на бројот на поволните случаи да се смета дека трите тома се ставени на фиксни места, а останатите можат произволно да се распоредуваат.

2.7.6. а) $p=1/2$, б) $p=3/8$, в) $p=7/8$. Упатство: просторот од елементарни настани се состои од сите трочлени низи составени од двата знака: G и P.

2.7.7. а) $P(A)=V_7^3/\overline{V}_{10}^3 = 0,21$ б) $P(B) = 10/\overline{V}_{10}^3 = 0,01$, в) $P(C)=10\cdot 9\cdot 3/\overline{V}_{10}^3=0,27$ (ако, на пример, два пати се јави 0 и еднаш 1, тогаш тие можат на 3 начини да се распоредат: 001, 010 и 100. Така, секоја од 10-те цифри може да се комбинира со секоја од другите 9 цифри).

2.7.8. а) $p=4\cdot V_8^3/V_9^4=4/9$, б) $p=1/V_9^4=1/3024$.

2.7.9. а) Елементарните настани се пермутации со повторување од класа 5 од 2 елементи, така што нивниот број е еднаков на

$$5!\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{4!\cdot 1!}+\frac{1}{3!\cdot 2!}+\frac{1}{2!\cdot 3!}+\frac{1}{1!\cdot 4!}+\frac{1}{5!}\right) = 32,$$

а бидејќи меѓу нив само една е точната порака, бараната веројатност изнесува $p=1/32$;

б) $p=1/128$.

2.7.10. Ги земаме предвид сите броеви од 000000 до 999999; бројот на сите можни шестоцифрени броеви е 10^6, а на оние со различни цифри е $10!/6!$ па бараната веројатност е $p = 10!/6!\cdot 10!=0,0054$.

2.7.11. $p=0,5$. Зошто?

2.7.12. $p=4/7$. Упатство: во првите 28 дена од јануари сигурно има 4 недели, додека петтата недела би можела да дојде на 29, 30 и 31 јануари, а за тоа постојат 4 можности (29 да биде понеделник, вторник, среда и четврток) да не се случи, од вкупно 7.

2.7.13. Ги разгледуваме случајните настани A - запишаниот број е делив со 2 и B - запишаниот број е делив со 5.

Од 90 двоцифрени броеви половината се деливи со 2, 18 се деливи со 5, а 9 се деливи и со 2 и со 5. Така:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,5+0,2-0,1=0,6.$$

2.7.14. а) Ја пресметуваме прво спротивната веројатност $\overline{p}=C_{75}^{3}/C_{100}^{3}=0,418$, а потоа $p=1-\overline{p}=0,582$; б) $p=4/100=0,04$ зашто постојат 4 можности да се добијат најмалку 500 динари: една можност да се добијат 1000 и 3 можности да се добијат 500 динари; в) $p=0,03$, зашто постојат точно 3 можности за тоа.

2.7.15. Со A, B и C ќе ги означиме случајните настани што означуваат дека победил коњот A, односно B, односно C. Според условите на задачата е $P(A)=P(B)=2P(C)$; натаму, A,B и C се по парови дисјунктни, а нивниот збир е сигурниот настан. Ако ставиме $P(A)=x$, од $1=P(A)+P(B)+P(C)$ ќе добиеме $2=5x$, т.е. $x=2/5$ а потоа за бараната веројатност имаме: $P(A+C)=3/5$.

2.7.17. Да ги нумерираме со $1,2,\ldots,k$ посетителите на претставата а со A_j да го означиме случајниот настан j-тиот посетител да го добие својот шешир, $j=1,2,\ldots,k$. Ги користиме ознаките од вежбата 2.7.16:

$$T_j = C_k^j\cdot\frac{(k-j)!}{k!} = \frac{1}{j!}\ .$$

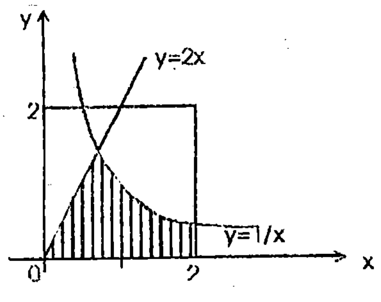
а) Треба да пресметаме $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$; со примена на формулата од 2.7.16 добиваме

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k!}\ .$$

б) Овде настанот е спротивен на оној во а) па:

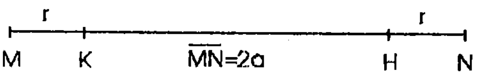
$$\overline{p} = 1-p = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{k}\cdot\frac{1}{k!}\ .$$

2.7.18. Елементарните настани можат да се опишат со подредените парови (x,y) така што просторот од елементарни настани да биде квадратот $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$.



Го означуваме со A случајниот настан за кој ја пресметуваме веројатноста. Тогаш A може да се опише со множеството $A=\{(x,y)\mid xy\le 1,\ y/x\le 2\}$. На настанот A на цртежот му одговара исцртаниот дел. Со примена на геометриската веројатност се добива дека $P(A)=(1+3\ln 2)/8\approx 0,38$.

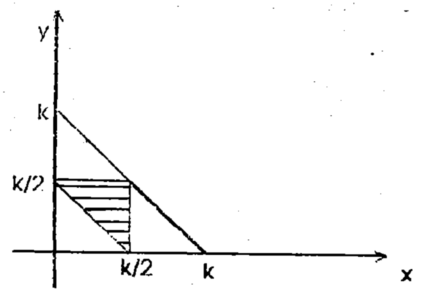
2.7.19. Просторот од сите елементарни настани може да се претстави со отсечка со должина 2a, додека случајниот настан A, монетата да не пресече ниедна од правите, со отсечка со должина 2a-2r (на сликата тоа е отсечката KH).



Применувајќи ја формулата за геометриска веројатност имаме: $P(A)=\dfrac{2a-2r}{2a}=1-\dfrac{r}{a}$.

2.7.20. $p=\dfrac{t(2T-t)}{T^2}$. Упатство: да се спореди со примерот 2.6.1 од тестот.

2.7.21. Да ги означиме деловите со x, y и k-x-y. За да може да се направи триаголник потребно е да бидат задоволени неравенствата: $x<k/2$, $y<k/2$ и $x+y>k/2$. Просторот од елементарни настани тогаш ќе биде $\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le k\}$, додека за случајниот настан A, да може да се образува триаголник, го добиваме множеството $A=\{(x,y)\mid x<k/2,\ y<k/2,\ x+y>k/2\}$, на кое на сликата му одговара исцртаниот дел. Со примена на геометриската веројатност се добива $P(A)=1/4$.



Гл.III.

3.4.1. Нека A_j, $j=1,2,3,4$ е случајниот настан дека предметот што се обработува, при обработката на j-тата машина не излегува со дефект. Бараната веројатност е веројатност на производот од четирите настани A_j што се независни во целина и за кои е: $P(A_1)=0,98$, $P(A_2)=0,99$, $P(A_3)=0,98$ и $P(A_4)=0,97$, така што $p=0,98\cdot 0,99\cdot 0,98\cdot 0,97=$ $=0,92$.

3.4.2. И овде имаме производ од независни настани, така што: $p=0,1\cdot 0,15=0,015$.

3.4.3. Ги разгледуваме следниве случајни: A-избраниот учебник е со платно подврзан, B-избраниот учебник е подврзан обично. Тогаш бараната веројатност е

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=3/10.$$

3.4.4. $p=\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}=1/221$.

3.4.5. $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$, $P(A/B)=P(A/C)=P(B/C)=1/2$ така што A, B и C се независни по парови. Поради $P(ABC)=0\neq$ $\neq 1/8 = P(A)P(B)P(C)$, тие не се независни во целина.

3.4.8. $p=7/10\cdot 6/9\cdot 5/8=7/24$.

3.4.9. Ги разгледуваме настаните: A-проверката дала позитивен резултат, B-предметот е стандарден. Имаме дека $P(A/B)=0,98$, $P(B)=0,96$ и $P(A/\overline{B})=0,05$. Од $A=AB+A\overline{B}$ добиваме дека $P(A)=P(B)\cdot P(A/B)+P(\overline{B})\cdot P(A/\overline{B})=0,96\cdot 0,98+0,04\cdot 0,05=$ $=0,9428$. Од $P(A)\cdot P(B/A)=P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$ најдуваме дека:

$$P(B/A) = \frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)} \approx 0,998 .$$

3.4.10. Ги разгледуваме случајните настани: A_1-од првата кутија се извлечени 2 бели и од втората кутија 1 бело топче, A_2-од првата кутија 2 бели а од втората 1 црно топче, A_3-од првата кутија 1 бело и 1 црно а од втората 1 бело топче, A_4-од првата кутија едно бело и едно црно топче, а од втората кутија едно црно топче, A_5-од првата кутија 2 црни, а од втората кутија едно бело топче, A_6-од првата кутија 2 црни и од втората кутија 1 црно топче и B-последното извлечено топче е бело. Тогаш:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{6} P(A_j)\cdot P(B/A_j) = 0,435 .$$

3.4.11. Со A, B и C ги означуваме случајните настани изработениот предмет е изработен на A,B,C соодветно. Натаму, нека M го означува случајниот настан избраниот предмет да е неисправен. Имаме: $P(A)=0,25$, $P(B)=0,35$, $P(C)=0,40\cdot P(M/A)=0,05$, $P(M/B)=0,04$ $P(M/C)=0,02$. Со примена на формулата на Бејес добиваме:

$$P(A/M) = \frac{0,25\cdot 0,05}{0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,40\cdot 0,02} = 0,365 .$$

3.4.12. Ги разгледуваме случајните настани: A-извлеченото топче е бело, B_1-избрана е кутија од првата група, B_2-избрана е кутија од втората група, B_3-избрана е кутија со 2 бели и четири црни топчиња и B_4-избрана е кутија со 2 бели и 2 црни топчиња. Тогаш:

$$P(A) = 2/7\cdot 3/5 + 3/7\cdot 1/2 + 1/7\cdot 1/3 + 1/7\cdot 1/2 = 0,505 .$$

3.4.13. $P=0,515$.

3.4.14. $P=0,8375$.

3.4.15. Ако A е случајниот настан дека ловецот стигнал за 1 час до населеното место, а B_j-ловецот тргнал по j-тиот пат; $J=1,2,3,4,5,6$, тогаш по формулата на Бејес се добива дека $P(B_2/A)=0,2$.

3.4.16. Бараната веројатност се најдува по формулата на Бејес и изнесува 6/7.

3.4.17. Да го означиме со B случајниот настан-девојката го избрала t-тиот кандидат, а со A-избраниот кандидат е најдобар меѓу сите. Од условите на задачата следува дека t-тиот е најдобар меѓу првите t кандидати. Првите t кандидати можат да се наредат на t! начини од кои (t-1)! се такви што t-тиот да биде најдобар меѓу нив . Така, веројатноста на случајниот настан B е $P(B)=(t-1)!/t!=1/t$. Јасно е дека $A\subseteq B$ така што $AB=A$. Веројатноста на случајниот настан A ја определуваме слично како и за B, така што $P(A)=1/k$. Конечно, $P(A/B)=P(AB)/P(B)=P(A)/P(B)=t/k$.

3.4.18. Нека A_j го означува случајниот настан дека е извлечена j-тата кутија, $j=1,2,...,k+1$. Тогаш е $P(A_j)=1/(k+1)$. Да го означиме со B случајниот настан дека во p-те извлекувања се извлечени бели топчиња. Случајниот настан B/A_j може да се претстави како производ од p независни настани, секој од кои, за $j\neq k+1$ има веројатност j/k, а за $j=k+1$ има веројатност 0. Така, $P(B/A_j)=j^p/k^p$ за $j\neq k+1$ и $P(B/A_{k+1})=0$. По формулата за тотална веројатност сега се добива:

$$P(B) = \frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1^p}{k^p} + \frac{2^p}{k^p} + \ldots + \frac{k^p}{k^p}\right) = \frac{1^p + 2^p + \ldots + k^p}{(k+1)\cdot k^p} .$$

3.4.19. Нека е A_j случајниот настан авионот да биде погоден со j погодоци, $j=0,1,22,3$, а B-авионот е соборен. Тогаш:

$P(A_0) = 0,6\cdot 0,5\cdot 0,3 = 0,09$,

$P(A_1) = 0,4\cdot 0,5\cdot 0,3+0,6\cdot 0,5\cdot 0,3+0,6\cdot 0,5\cdot 0,7 = 0,36$,

$P(A_2) = 0,41$, $P(A_3) = 0,14$, $P(B/A_0) = 0$, $P(B/A_1) = 0,2$,

$P(B/A_2) = 0,6$ и $P(B/A_3) = 1$,

$P(B) = \sum_{j=0}^{3} P(A_j)\cdot P(B/A_j) = 0,458$.

3.4.20. Нека M е случајниот настан дека болниот е излекуван, A, B и C настаните дека болниот боледувал од соодветната болест. Имаме: $P(A)=0,5$, $P(B)=0,3$, $P(C)=0,2$, $P(M/A)=0,7$, $P(M/B)=0,8$, $P(M/C)=0,9$ и, по формулата на Бејес:

$$P(A/M) = \frac{0,5\cdot 0,7}{0,5\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,8 + 0,2\cdot 0,9} = 5/11 .$$

Гл.V.

5.6.1. а) $p=0,5$, $q=0,5$, $P_{10}(5)=C_{10}^{5}\cdot 0,5^{5}\cdot 0,5^{5} = 63/256$.

б) $P_{10}(3)+P_{10}(4)+...+P_{10}(8) = 1-P_{10}(0)-P_{10}(1)-$
$-P_{10}(2)-P_{10}(9)-P_{10}(10) = 957/1024$.

5.6.2. а) $P_{10}(0) = C_{10}^{0}\cdot(9/10)^{10} \approx 0,848888$.

б) 0,057395... , в) 0,987204...

5.6.3. Приборот нема да работи ако се расипат барем елементи, така што бараната веројатност е:

$$1-P_8(0)-P_8(1)-P_8(2) = 0,7969.$$

5.6.4. Да ја означиме со p бараната веројатност. Имаме дека $1-P_4(0)=0,59$, т.е. $(1-p)^4=0,41$, $p=0,2$.

5.6.5. Да го означиме со A_t случајниот настан дека во моментот t по улицата ќе помине возило, $t=1,2,3,\ldots$ Случајните настани $A_1, A_2, A_3, \ldots$ се независни.

а) Овде не интересира случајниот настан $A_3\overline{A}_4\overline{A}_5\overline{A}_6$, зашто ако во 3-тата секунда поминува возило, тој не може да тргне да го поминува патот ни во 1-та ни во 2-та секунда (за да ја помине улицата му се нужни 3 секунди), а потоа, во 4-та, 5-та и 6-та секунда не треба да поминува возило по улицата. Поради претпоставената независност имаме дека $P(A_3\overline{A}_4\overline{A}_5\overline{A}_6)=p\cdot q^3$, каде $q=1-p$.

б) Пресметуваме веројатност на случајниот настан, во било која од првите три секунди да помине возило (да го оневозможи поминувањето на пешакот) и во 4-та секунда поминува возило, а во следните 3 секунди возило да не помине. Значи: $P(\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}A_4\overline{A}_5\overline{A}_6\overline{A}_7)=(1-q^3)pq^3$.

в) Пешакот ќе чека 5 секунди ако: или кога во првата секунда ќе помине возило, а тогаш барем во една и од следните 3 секунди треба да помине возило (тоа е настанот $A_1\overline{\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4}$), или кога во првата секунда нема да помине возило, а тогаш во барем една од следните 2 секунди треба да помине возило $(\overline{A}_1\overline{\overline{A}_2\overline{A}_3})$. Натаму, во 5-та секунда треба да помине возило, а во следните 3 секунди возило не смее да помине. На тој начин идаме до следниов опис на случајниот настан за кој пресметуваме веројатност: $(A_1\overline{\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4}+\overline{A}_1\overline{\overline{A}_2\overline{A}_3})\cdot A_5\overline{A}_6\overline{A}_7\overline{A}_8$. Имајќи ја предвид независноста, бараната веројатност е:

$$(p(1-q^3)+q(1-q^2))pq^3 = (p-pq^3+q-q^3)pq^3 = (1-q^3-pq^3)pq^3.$$

5.6.6. Овде $n=10$; $p=0,49$ $q=0,6$; поради $np-q=3,4$, имаме само еден највероjатен број $k_0=4$ кому му одговара веројатноста $P_{10}(4)=0,251$.

5.6.7. Највероjатниот број за позитивни грешки е $k_1=3$, а за негативни грешки $k_2=1$. И на двата броја им одговара иста веројатност еднаква на 32/81.

5.6.8. Од тоа што имаме два највероjатни броја, $np-q$ е еднаков на помалиот од нив; од $np-q=17$, имајќи предвид дека $n=28$ и $q=1-p$, добиваме дека $p=18/29$.

5.6.9. Пресметуваме по шемата на Бернули со $p=1/2$; имаме дека $P_k=C_{k+5}^{k}\cdot(1/2)^{k+5}$, $k=0,1,2,3,4,5$. Така ќе се добие: $P_0=1/32$, $P_1=3/32$, $P_2=21/128$, $P_3=7/32$, $P_4=63/256$.

5.6.10. Поради тоа што имаме еден највероjатен број, при $k_0=51$ и $p=0,64$ го определуваме n од $50<np-q<51$. Последното доведува до $78,68<n<80,25$, па ги имаме следниве две решенија $n=79$, $n=80$.

5.6.11. Приближно ја одредуваме оваа веројатност со помош на локалната теорема на Лаплас: $n=100$, $p=q=0,5$, $npq=25$, $\sqrt{npq}=5$. Од приближното равенство $\phi(x)/5\approx0,0484$ од таблицата го наjдуваме x, $x=1$, кој заменет во $(k-np)/\sqrt{npq}=x$ дава $k=55$.

5.6.12. Го определуваме n така што $P_n(5<k<n)=0,8$. Земајќи $p=0,05$, $a=5$, $b=n$, $q=0,95$, според интегралната теорема на Лаплас добиваме дека

$$\frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{n-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\right)-\phi\left(\frac{5-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\right)\right]\approx0,8.$$

Поради $\phi\left(\frac{n-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\right)\approx\phi(4,36\sqrt{n})$, уште за $n=1$ се добива дека во горната разлика првиот член има приближна вредност 1, а бидејќи најголемата вредност на функцијата $\phi(x)$ е 1, ја решаваме равенката $\frac{1}{2}\left[1-\phi\left(\frac{5-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\right)\right]\approx0,8$ од која се добива, по ред $\frac{5-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\approx-0,8416$, а потоа $n=144$.

5.6.13. Ја користиме теоремата на Пуасон.

а) $P_{500}(2) \approx 0,184$,

в) $P_{500}(1)+P_{500}(2)+...+P_{500}(500) = 1-P_{500}(0) \approx 0,632$.

5.6.14. Пак според теоремата на Пуасон најдуваме приближно $p \approx 0,26502$.

а) Со помош на теоремата на Лаплас најдуваме $p \approx 0,95$.

5.6.15. Ја користиме теоремата 5.5.1:

$$P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=1-P_3(0) = 0,79.$$

5.6.16. И овде ја користиме теоремата 5.5.1: $\text{п}(x) = (0,3x+0,7)\cdot(0,6x+0,4)\cdot(0,4x+0,6)\cdot(0,8x+0,2)\cdot(0,5x+0,5) = 0,0288x^5 + 0,1656x^4 + 0,3436x^3 + 0,3176x^2 + 0,1276x + 0,0168$, така што $P_5(3)=0,3436$.

б) $P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=0,3436+0,1656+0,0288=0,538$.

5.6.17. $\text{п}(x) = (0,05x+0,95)\cdot(0,1x+0,9)^2\cdot(0,2x+0,8)^2 = 0,00002x^5 + 0,000432x^4 + 0,010362x^3 + 0,093452x^2 + 0,358272x + 0,492480$.

а) $P_5(0) = 0,492480$,

в) $P_5(2) = 0,093452$,

в) $P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5) = 1-P_5(0)-P_5(1) = 0,149248$.

5.6.18. $\text{п}(x) = (0,7x+0,3)^2(0,8x+0,2)^3(0,9x+0,1)^3 = 0,18289152x^8 +0,35489664x^7 +0,29020896x^6 +0,13040168x^5 + 0,03506840x^4 +0,00582288x^3 +0,00057776x^2 +0,00003144x + 0,00000072$.

а) $P_8(8) = 0,18289152$

в) $P_8(5) = 0,13040168$

в) $1-P_8(0) = 0,99996784$.

5.6.19. $\text{п}(x)=(0,3x+0,7)^3(0,2x+0,8)^2(0,1x+0,9) = 0,000108x^6+0,002592x^5+0,024120x^4+0,113340x^3+0,287420x^2+0,374752x +0,197568\cdot P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6) = 0,14016$.

Веројатноста уредот да работи изнесува: $1-0,14016=0,85984$.

5.6.20. $\text{п}(x) = (0,4x+0,6)^3(0,5x+0,5)^2 = 0,016x^5+0,104x^4+0,268x^3+0,342x^2+0,216x+0,054$.

а) $P_5(0) = 0,054$,

б) $P_5(1) = 0,216$,

в) $1-P_5(0)-P_5(1) = 1-0,27 = 0,73$.

Гл.VI.

6.6.1.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{за} \quad x \leq -2 \\ 0,1, & \text{за} \quad -1 < x \leq -1 \\ 0,3, & \text{за} \quad -1 < x \leq 0 \\ 0,6, & \text{за} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0,9, & \text{за} \quad 1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{за} \quad x > 2 \end{cases} \qquad F_y(x) = \begin{cases} 0, & \text{за} \quad x \leq 5 \\ 0,2, & \text{за} \quad 5 < x \leq 7 \\ 0,7, & \text{за} \quad 7 < x \leq 10 \\ 0,9, & \text{за} \quad 10 < x \leq 15 \\ 1, & \text{за} \quad x > 15 \end{cases}$$

6.6.2.

$$Y : \begin{pmatrix} 7 & 13 & 21 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} .$$

6.6.3. Од $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$ се добива $1=a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{k^n}{n!}=a\cdot e^k$, а оттука $a=e^{-k}$. Од $P(X=n):P(X=n+1)=(n+1)/k$ се добива:

$$n+1 > k \Rightarrow P(X=n) > P(X=n+1) ,$$

$$n+1 = k \Rightarrow P(X=n) = P(X=n+1) ,$$

$$n+1 < k \Rightarrow P(X=n) < P(X=n+1) ,$$

поради што: ако k е цел број, тогаш постојат два најверојатни броја, k-1 и k (бимодална распределба), ако пак, k, не е цел број, тогаш постои само една мода еднаква на најмалиот цел број што е поголем од k-1 (унимодална распределба).

6.6.4. а) Од $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$ се добива $a=1/\pi$, а потоа

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} dx/\pi(1+x^2) = 1/2+1/\pi\cdot\mathrm{arctg}x,$$

б) $P(-1<X<1) = F(1)-F(-1) = 1/2$.

6.6.5. а) $a=2/\pi$, $F(x)=2/\pi\cdot\mathrm{arctg}e^x$,

б) $p=[F(1)]^2=4/\pi^2\cdot\mathrm{arctg}^2e$.

6.6.6. а) $p(x)=F'(x)=x/2$. $x\in(0,2]$, $p(x)=0$ $x\notin(0,2]$.

б) $F(x_0)=1/2 \Rightarrow x_0=\sqrt{2}$; бидејќи $1=p(2)\geq p(x)$ за кој било реален број x, имаме $x_m=2$.

6.6.7. Модата x_m припаѓа на $(-b,a)$. Бидејќи $p'(x)\neq 0$ во $(-b,0]$ и $(0,a]$, пресметуваме $p(0)=2/(a+b)$ и $p(a)=0$, така што $x_m=0$. За медијаната x_0, тргнувајки од $F(x_0)=1/2$, најдуваме:

$$\int_{-b}^{0}\frac{2(x+b)}{b(a+b)}dx = \frac{b}{a+b} < 1/2,$$ поради $a>b$, па

$$1/2 = \int_{-b}^{0}\frac{2(x+b)}{b(a+b)}dx + \int_{0}^{x_0}\frac{2(a-x)}{a(a+b)}dx = 1 - \frac{(a-x_0)^2}{a(a+b)},$$

а оттука добиваме $x_0=a-a(a+b)/2$.

6.6.8.

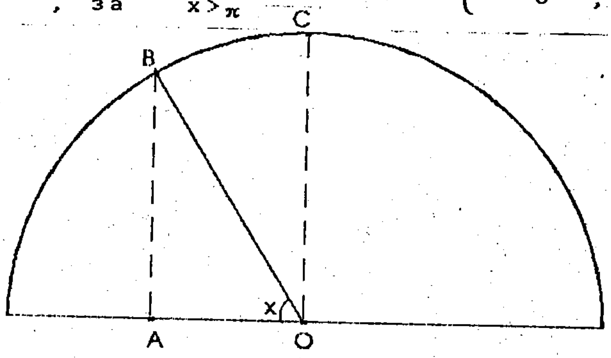
$$X : \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

6.6.9.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x\le 0 \\ x^2/R^2, & \text{за } 0<x\le R \\ 1, & \text{за } x>R \end{cases} \qquad p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{R}, & \text{за } x\in(0,R] \\ 0, & \text{за } x\notin(0,R]. \end{cases}$$

6.6.10. а)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x\le 0 \\ \frac{1-\cos x}{2}, & \text{за } 0<x\le\pi \\ 1, & \text{за } x>\pi \end{cases} \qquad p(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & \text{за } x\in(0,\pi] \\ 0, & \text{за } x\notin(0,\pi] \end{cases}$$



б) $P(|\overset{\frown}{CB}|\le\pi/4) = P(\pi/4\le X\le 3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

6.6.11.
а)

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

б)

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

в)

$$Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

6.6.12.

$$Y : \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

6.6.13. Најнапред ги определуваме таблиците на Y а потоа и функциите на распределба:

а)

$$Y:\ \begin{pmatrix} -10 & -3 & -1 & 4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad F_y(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -10 \\ 0,1, & -10<x\leq -3 \\ 0,4, & -3\leq x<-1 \\ 0,6, & -1\leq x<4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$$

б)

$$Y:\ \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & 3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad F_y(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -5 \\ 0,1, & -5<x\leq -3 \\ 0,4, & -3\leq x<1 \\ 0,6, & 1\leq x<3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

6.6.14. $p_y(x) = \dfrac{1}{3\pi\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}\cdot(1+\sqrt[3]{(x-2)^2})}$.

6.6.15.

$$p_y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\cdot\phi(1/\sqrt{x}), & x\in(0,+\infty) \\ 0, & x\in(-\infty,0] \end{cases}$$

6.6.16.

$$p_y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(p(\sqrt{x})-p(-\sqrt{x})), & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

6.6.17. За густината $p(x)$ на X имаме дека $p(x)=1/\pi$ за $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ и $p(x)=0$ за $x\notin(-\pi/2,\pi/2)$, а за густината на Y:

$$p_y(x) = \begin{cases} 1/\pi\sqrt{1-x^2}, & x\in(-1,1) \\ 0, & x\notin(-1,1) \end{cases}.$$

6.6.18.

$$p_y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}, & \text{за } x>0 \\ 0, & \text{за } x\leq 0 \end{cases}.$$

6.6.19.

$$p(x,y) = \begin{cases} C, & \text{за } x^2+y^2\leq R^2 \\ 0, & \text{за } x^2+y^2>R^2 \end{cases}.$$

Од $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy=1$ следува дека $C=1/R^2\pi$ и

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/R^2\pi, & \text{за } x^2+y^2\leq R^2 \\ 0, & \text{за } x^2+y^2>R^2 \end{cases}.$$

За маргиналните густини се добива

$$p_1(x)=p_2(x) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2-x^2}/R^2\pi\ , & \text{за } |x|\le R \\ 0\ , \ \text{за } |x|>R\ . & \end{cases}$$

Поради $p(0,0)=1/R^2\pi\neq 4/R^2\pi^2=p_1(0)\cdot p_2(0)$, се добива дека X и Y не се независни.

6.6.20.

$$K\ :\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,275 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,025 \end{pmatrix}$$

$$T\ :\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0,55 & 0,15 & 0,175 & 0,05 & 0,05 & 0,025 \end{pmatrix}.$$

6.6.21. $p_{X_k}(x)=1$ за $x\in(0,1)$ и $p_{X_k}(x)=0$ за $x\notin(0,1)$, $k=1,2,...$

$$\phi_1(x)=p_{X_1}(x),\quad \phi_2(x)=\int_0^1\phi_1(y)\phi_1(x-y)dy=\int_0^1\phi_1(x-y)dy=$$

$$=(x-y=t)=-\int_x^{x-1}\phi_1(t)dt=\int_{x-1}^{x}\phi_1(t)dt,$$

и натаму индуктивно,

$$\phi_{k+1}(x)=\int_0^1\phi_1(x)\phi_k(x-y)dy=\int_0^1\phi_k(x-y)dy=\int_{x-1}^{x}\phi_k(t)dt,$$

при што е користен и примерот 6.5.6. од текстот.

Гл.VII.

7.5.1. $MX=0,1$, $MY=8$.

7.5.2. $MX=MY=1$, $M(X+Y)=2$, $M(XY)=1$; $DX=0,5$, $DY=1$, $D(X+Y)=DX+DY=1,5$, според вежбата 7.5.11 имаме $D(XY)=DXDY+$ $+(MY)^2DY+(MY)^2DX+(MX)^2DY=2$.

7.5.3. Од системот равенки $p_1+p_2+p_3=1$, $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=$ $=0,1$ и $x_1^2p_1+x_2^2p_2+x_3^2p_3=0,9$ се добива $p_1=0,4$, $p_2=0,1$, $p_3=0,5$.

7.5.4. Случајната величина X што го означува бројот на извлечените нестандардни предмети е определена со:

$$X\ :\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7/15 & 7/15 & 1/15 \end{pmatrix}$$

така што: $MX=9/15$, $DX=84/225$.

7.5.5. Бројот на машините X за кои е потребна интервенција во тек од еден час има распределба

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,0015 & 0,0275 & 0,1685 & 0,4245 & 0,378 \end{pmatrix}$$

и $MX=3,15$, $DX=0,6475$.

7.5.6. Случајната величина X има биномна распределба $B(N,\overline{p})$ каде $\overline{p}$ е веројатноста во серијата од n независни експерименти (n коцки), m пати да се појават 6 точки, т.е.

$$\overline{p} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad \overline{q} = 1-\overline{p}, \quad q = 1-p.$$

Според тоа, $MX=N\overline{p}=NC_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, $DX=N\overline{p}\cdot\overline{q}=NC_n^m p^m \cdot q^{n-m} \cdot (1-C_n^m \cdot \cdot p^m \cdot q^{n-m})$ а видејки во нашиов случај е $p=1/6$, имаме

$$MX = NC_n^m \cdot \frac{5^{n-m}}{6^m}, \quad DX = NC_n^m \cdot \frac{5^{n-m}}{6^m}\left(1-C_n^m \cdot \frac{5^{n-m}}{6^m}\right).$$

7.5.7. $MX=3,5$, $X=1,75$ (Упатство: имаме биномна распределба $B(7,\frac{1}{2})$).

7.5.8. Нека P_k е веројатноста дека, во даден момент t должината на редицата е k. За да биде $k=0$ во моментот t, треба да настапи еден од следниве два динсјунктни случајни настани: во моментот $t-1$ е $k=0$ и во интервалот $(t-1,t)$ не дошол во продавницата ниту еден купувач, или, во моментот $t-1$ е $k=1$ а во интервалот $(t-1,t)$ во продавницата не дошол ниту еден купувач. Така,

$$P_0 = e^{-a} \cdot (P_0+P_1) ,$$

зашто по Пуасоновиот закон е $P(X=0)=e^{-a}$. Со слични расудувања се добива дека:

$$P_1 = e^{-a}[(P_0+P_1)\cdot\frac{a}{1!} + P_2] ,$$

$$P_2 = e^{-a}[(P_0+P_1)\cdot\frac{a^2}{2!} + P_2\cdot\frac{a}{1!} + P_3] ,$$

$$P_3 = e^{-a}[(P_0+P_1)\cdot\frac{a^3}{3!} + P_2\cdot\frac{a^2}{2!} + P_3\cdot\frac{a}{1!} + P_4] , \ldots$$

Ќе ја определиме функцијата

$$K(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot t^k = e^{-a}(P_0+P_1) + e^{-a}[(P_0+P_1)\cdot\frac{a}{1!} + P_2]\cdot t +$$

$$+ e^{-a}[(P_0+P_1)\cdot\frac{a^2}{2!} + P_2\cdot\frac{a}{1!} + P_3]\cdot t^2 + \ldots =$$

$$= e^{-a}\cdot P_0\cdot(1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \ldots) +$$

$$+ e^{-a}\cdot P_1\cdot\left(1+\frac{at}{1!}+\frac{a^2t^2}{2!}+\ldots\right)+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+ e^{-a}\cdot P_k\cdot\left(1+\frac{at}{1!}+\frac{a^2t^2}{2!}+\ldots\right)\cdot t^{k-1}+\ldots=$$

$$= e^{-a}\cdot e^{at}\cdot P_0 + e^{-a}\cdot e^{at}\cdot P_1 + e^{-a}\cdot e^{at}\cdot P_2\cdot t +$$

$$+\ldots+ e^{-a}\cdot e^{at}\cdot P_k\cdot t^{k-1}+\ldots=$$

$$e^{a(t-1)}\cdot(P_0+P_1+P_2\cdot t+\ldots+P_k\cdot t^{k-1}+\ldots)=$$

$$=\frac{e^{a(t-1)}}{t}\cdot(P_0(t-1)+P_0+P_1t+P_2\cdot t^2+\ldots+$$

$$+P_k\cdot t^k+\ldots)=$$

$$=\frac{e^{a(t-1)}\cdot(t-1)}{t}\cdot P_0+\frac{e^{a(t-1)}}{t}\cdot K(t).$$

така што е

$$K(t)=\frac{P_0\cdot(1-t)}{1-t\cdot e^{a(t-1)}}$$

Поради тоа што $K(1)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k=1$, имаме дека $1=\lim_{t\to 1}K(t)=$ $=P_0/(1-a)$ така што $P_0=(1-a)$ и конечно

$$K(t)=\frac{(1-a)\cdot(1-t)}{1-t\cdot e^{a(t-1)}}.$$

а) Од $K(t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k t^k$, со диференцирање се добива дека $K'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P_k t^{k-1}$, така што, за $t=1$, имаме:

$$K'(1)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P_k=\widetilde{Mk},$$

т.е.

$$\widetilde{Mk}=\lim_{t\to 1}K'(t)=\lim_{t\to 1}\frac{(a-1)(1+(at-at^2-1)e^{a(1-t)})}{(1-t\cdot e^{a(1-t)})},$$

а со примена на Лопиталовото правило,

$$\widetilde{Mk}=\lim_{t\to 1}\frac{(a-1)(2a-2at-a^2t+a^2t^2)}{2\cdot(at-1)(1-t\cdot e^{a(1-t)})^2}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(a-1)(-2a-a^2-2a^2t)}{2a(1-t\cdot e^{a(1-t)})+2(at-1)^2e^{a(1-t)}}=$$

$$=\frac{a(1-a/2)}{1-a}.$$

в) Ако новодојдениот купувач не затекне ред, а продавачот послужува некого, тогаш новодојдениот ќе биде на чело на колоната, ако пак тој затекне ред од 1 човек, тогаш неговото време на чекање е времето што останува до крајот на послужувањето на затекнатата муштерија. Така, времето на чекање, во овој случај, е случајна величина што е рамномерно распределена на (0,1) чие математичко очекување е 1/2. Ако ја означиме со X случајната величина што го претставува времето на чекање, тогаш можеме да сметаме дека X е дискретна и дека првата вредност што ја добива е 1/2, а ја прима со веројатност p_1 (зашто 1/2 се добива при k=1). Натаму, за k=2 можеме да сметаме дека ја прима вредноста 3/2 со веројатност p_2 и тн., за должина на редицата еднаква на k X прима вредност (2k-1)/2 со веројатност P_k, и тн. Така, за средното време на чекање ќе добиеме:

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2} \cdot P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} P_k + \frac{1}{2} \cdot P_0 =$$

$$= M\tilde{k} - \frac{1}{2} + \frac{1-a}{2} = \frac{a}{2(1-a)} .$$

7.5.9.

$$\frac{MX^{k+1}}{MX^k} = \frac{x_n^{k+1}\left[\sum_{j=1}^{n-1} (x_j/x_n)^{k+1} p_j + 1\right]}{x_n^k\left[\sum_{j=1}^{n-1} (x_j/x_n)^k p_j + 1\right]} ,$$

па поради

$$\lim_{k\to\infty} (x_j/x_n)^k = \lim_{k\to\infty} (x_j/x_n)^{k+1} = 0 ,$$

за $j<n$, зашто тогаш $x_j<x_n$, се добива дека

$$\lim_{k\to\infty} \frac{MX^{k+1}}{MX^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_n^{k+1}}{x_n^k} = x_n .$$

7.5.10. а) Бројот на обидите, во овој случај, има геометриска распределба $\Gamma(1/8)$ па според примерот 7.5.1 е $MX=1/p=8$, а според примерот 7.3.5, $DX=(1-p)/p^2=56$.

в) Во овој случај распределбата на бројот на обидите Y е рамномерна дискретна со 8 состојби, така што MY=4,5 , DY=5,28 .

7.5.11.

$$\begin{aligned}
D(XY) &= M[XY - M(XY)]^2 = \\
&= M[XY - (MX)Y + (MX)Y - (MY)X + (MY)X - MX\cdot MY]^2 = \\
&= M[(X-MX)Y + MX\cdot(Y-MY) - (MY)X + MX\cdot MY - \\
&\qquad - MX\cdot MY + (MY)X]^2 = \\
&= M[(X-MX)Y + MX\cdot(Y-MY) + (X-MX)\cdot MY - (X-MX)MY]^2 = \\
&= M[(X-MX)(Y-MY) + MX\cdot(Y-MY) + (X-MX)\cdot MY]^2 = \\
&= M(X-MX)^2\cdot M(Y-MY)^2 + (MX)^2\cdot M(Y-MY)^2 + \\
&\quad + M(X-MX)^2\cdot(MY)^2 + 2MX\cdot M(Y-MY)\cdot K_{xy} + \\
&\quad + 2MY\cdot M(X-MX)\cdot K_{xy} + 2MX\cdot MY\cdot K_{xy} .
\end{aligned}$$

Поради претпоставената независност на X и Y е $K_{xy}=0$, така што:

$$D(XY) = DX\cdot DY + (MX)^2\cdot DY + (MY)^2\cdot DX .$$

7.5.12. $MX = 0$.

7.5.13. $MX = 0$, $DX = c^2/2$.

7.5.14.

$$p(x) = \begin{cases} 1/4 , & x\in(-2,2] \\ 0 , & x\notin(-2,2] ; \end{cases}$$

$$MX = 0 , \quad DX = 4/3 .$$

7.5.15. $MX=\Gamma(k+1)/k!\cdot k+1$, $DX=k+1$, каде функцијата $\Gamma(x)$ е определена со неправиот интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\cdot y^{x-1}dy .$$

7.5.16. $M(X+Y)=MX+MY=(a+b)/2+(k+t)/2=(a+b+k+t)/2$ (пример 7.1.7), $M(XY)=MX\cdot MY=(a+b)(k+t)/4$, $D(X+Y)=DX+DY=(a+b)^2/12+(k-t)^2/12$ (пример 7.3.7), $D(XY)=DX\cdot DY+(MY)^2DX+(MX)^2DY=(a-b)^2\cdot(k-t)^2/144+$
$+(a-b)^2(k+t)^2/24+(a+b)^2(k-t)^2/24$.

7.5.17.

а) $a=k^2/2$,

$$F(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{k^2x^2+2kx+2}{2}\cdot e^{-kx} , & x\geq 0 \\ 0 , & x<0 . \end{cases}$$

б) $P(0<X<1/k) = F(1/k) = 1-5/2e$.

в) $MX = 3/k$, $DX = 3/k^2$.

7.5.18. $MX = 3a/2$. $DX = 3a^2/4$.

7.5.19. $MX=\sum_{j=1}^{4}\cdot\sum_{k=1}^{3}x_j p_{jk}=102/40$, $MY=85/40$, $DX=479/40$, $DY=131/320$, $K_{xy}=M(XY)-MX\cdot MY=228/40-102\cdot 85/40\cdot 40=9/32$. Така: математичкото очекување е $(51/20,17/8)$, дисперзионата матрица $\begin{pmatrix}479/40 & 9/32\\ 9/32 & 131/320\end{pmatrix}$, а коефициентот на корелација $r_{xy}\approx 0,12$.

7.5.20. $MX=0,7$, $MY=2,4$, $M(X+Y)=MX+MY=3,1$,

$M(XY)=MX\cdot MY=1,68$, $M(X+2Y)=MX+2MY=5,5$.

7.5.21. а) $C=3/R^3\pi$,

б) нека $K_a: x^2+y^2\le a^2$; за $a\le 0$, $P((X,Y)\in K_a)=0$, за $a\ge R$, $P((X,Y)\in K_a)=1$, за $0<a<R$, $P((X,Y)\in K_a)=\frac{a^2}{R^3}(3-2a)$,

в) $r_{xy}=0$.

Гл.VIII.

8.4.1. $P(0,5<X<1,5) = P(|X-MX|<0,5) =$

$= 1 - P(|X-MX|\ge 0,5)\ge 1 - 0,04/0,25 = 0,884$.

8.4.2. Нека m е бројот колку пати настапил случајниот настан A во серијата од n независни експерименти. Тогаш m е случајна величина што има биномна распределба $B(1/3,n)$ и, значи, $Mm=n/3$, $Dm=2n/9$.

а) $P(|\frac{m}{n}-p|\le 0,01) = P(|m-np|\le 90) \ge 1-Dm/90^2 \approx 0,75$,

б) $P(|\frac{m}{n}-p|\le 0,01) \ge 1-150000/9\cdot 750^2 \approx 0,97$.

8.4.3. Ако X е бројот на стандардните предмети меѓу изработените 18000, тогаш X има биномна распределба $B(0,9;18000)$. Така, $MX=18000\cdot 0,9=16200$, $DX=18000\cdot 0,9\cdot 0,1=$ $=1620$ и

$P(|X-MX|\le 200) \ge 1-DX/200^2$,

$P(|X-16200|\le 200) \ge 0,955$.

8.4.4. Ако X е дискретна и прима вредности $x_j\ge 0$ со веројатности $p_j=P(X=x_j)$, тогаш:

$$MX\ \sum_j x_j p_j \ \ge \sum_{x_j>a}\cdot x_j p_j \ > a\cdot\sum_{x_j>a}\cdot p_j = a\cdot P(X>a)\ ,$$

а оттука следува неравенството.

Ако пак, X е непрекината случајна величина со густина $p(x)$, имаме:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \geq \int_{x>a} xp(x)dx > a \cdot \int_{x>a} p(x)dx = a \cdot P(X>a) .$$

8.4.5. Според вежбата 8.4.4 имаме дека

$$P(X>150000) < 50000/150000 = 1/3 ,$$

а потоа,

$$P(X\leq 150000) = 1-P(X>150000) > 1-1/3 = 2/3 .$$

8.4.6. Како и во претходната вежба, $P(X\leq 200) > 5/6$.

8.4.7.

$$P(\left|\frac{1}{n}\cdot \sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{1}{n}\cdot \sum_{j=1}^{n} MX_j\right| \leq 0,4) \geq 1-D(\frac{1}{n}\cdot \sum_{j=1}^{n} X_j)/0,4^2,$$

а поради $DX_j\leq 5$ имаме

$$D(\frac{1}{n}\cdot \sum_{j=1}^{n} X_j) \leq 5n/n^2 = 5/n,$$

при што $n=2500$.

Конечно:

$$P(\left|\frac{1}{2500}\cdot \sum_{j=1}^{2500} X_j - \frac{1}{2500}\cdot \sum_{j=1}^{2500} MX_j\right| \leq 0,4) \geq 0,9875 .$$

8.4.8. Нека X прима вредности x_j со веројатности $p_j=P(X=x_j)$, $x_j\geq 0$. Имаме:

$$MX^a = \sum_j x_j^a p_j \geq \sum_{x_j\geq c} x_j p_j \geq c^a \cdot \sum_{x_j\geq c} p_j = c^a \cdot P(X\geq c).$$

8.4.9. Упатство: слично како вежбите 8.4.4 и 8.4.8.

8.4.10. Да ставиме $Y_n = \frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n)$ и да го примениме неравенството на Чебишев:

$$P(\left|\frac{1}{n}\cdot \sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\cdot \sum_{j=1}^{n} MX_j\right|<\varepsilon) > 1-(\sum_{j=1}^{n} DX_j)/n^2\varepsilon^2 \rightarrow 1, \quad n\rightarrow\infty.$$

8.4.11. а) да, според теоремата на Чебишев зашто $MX_n=0$, $DX_n=a^2$ (сите дисперзии се мајорирани);

б) $MX=0$, $DX_n=n^2a^2/2^{n-1}<a^2$ за $n>6$ а $DX_n\leq(9/4)a^2$ за секој n, па одговорот е позитивен;

в) да; $MX_n=0$, $DX_n=2$.

Прилог 1

Таблици за веројатностите

при $B(n,p)$

вредности на n = 5, 10, 15, 20, 25, 50, 100

веројатности p = 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5

n = 5, вредности на $P(X=j)$:

j	p=0,1	p=0,2	p=0,25	p=0,3	p=0,4	p=0,5
0	0,59049	0,32768	0,23730	0,16807	0,07776	0,03125
1	0,32805	0,40960	0,39551	0,36015	0,25920	0,15625
2	0,07290	0,20480	0,26367	0,30870	0,34560	0,31250
3	0,00810	0,05120	0,08789	0,13230	0,23040	0,31250
4	0,00045	0,00640	0,01495	0,02835	0,07680	0,15625
5	0,00001	0,00032	0,00098	0,00243	0,01024	0,03125

n = 10

0	0,34868	0,10737	0,05631	0,02825	0,00605	0,00098
1	0,38742	0,26844	0,18772	0,12106	0,04031	0,00976
2	0,19371	0,30199	0,28156	0,23347	0,12093	0,04395
3	0,57390	0,20133	0,25029	0,26683	0,21499	0,11718
4	0,01117	0,08808	0,14599	0,20012	0,25082	0,20508
5	0,00148	0,02642	0,05840	0,10292	0,20066	0,24610
6	0,00014	0,00551	0,01622	0,03676	0,11148	0,20507
7	0,00010	0,00078	0,00309	0,00900	0,04247	0,11719
8	0,00000	0,00008	0,00039	0,00145	0,01061	0,04395
9		0,00000	0,00003	0,00013	0,00158	0,00976
10			0,00000	0,00001	0,00010	0,00098

n = 15

0	0,20589	0,03518	0,01336	0,00475	0,00047	0,00003
1	0,34331	0,13195	0,06682	0,03052	0,00470	0,00046
2	0,26690	0,23089	0,15591	0,09156	0,02194	0,00320
3	0,12850	0,25014	0,22520	0,17004	0,07339	0,01389
4	0,04284	0,18761	0,22520	0,21862	0,12678	0,04165
5	0,01047	0,10318	0,16514	0,20613	0,18594	0,09065
6	0,00194	0,04299	0,09175	0,14724	0,20659	0,15274
7	0,00028	0,01382	0,03932	0,08113	0,17709	0,19638

j	$p=0,1$	$p=0,2$	$p=0,25$	$p=0,3$	$p=0,4$	$p=0,5$
8	0,00003	0,00345	0,01311	0,03477	0,11805	0,19638
9	0,00000	0,00068	0,00340	0,01159	0,06122	0,15274
10		0,00010	0,00067	0,00298	0,02448	0,09165
11		0,00001	0,00011	0,00058	0,00742	0,04650
12		0,00000	0,00001	0,00008	0,00165	0,01389
13			0,00000	0,00001	0,00025	0,00320
14				0,00000	0,00003	0,00046
15					0,00000	0,00003

$n = 20$

0	0,12158	0,01153	0,00317	0,00080	0,00004	0,00000
1	0,27017	0,05765	0,02114	0,00684	0,00048	0,00002
2	0,28518	0,13690	0,06695	0,02784	0,00309	0,00018
3	0,19012	0,20537	0,13390	0,07161	0,01235	0,00109
4	0,08978	0,21820	0,18968	0,13042	0,03499	0,00462
5	0,03192	0,17456	0,20233	0,17886	0,07465	0,01478
6	0,00886	0,10910	0,16861	0,19164	0,12441	0,03697
7	0,00197	0,05455	0,11241	0,17426	0,16588	0,07393
8	0,00036	0,02216	0,06088	0,11440	0,17971	0,12013
9	0,00005	0,00739	0,02707	0,06537	0,15974	0,16018
10	0,00001	0,00203	0,00992	0,03072	0,11714	0,17620
11	0,00000	0,00046	0,00300	0,01200	0,07095	0,16018
12		0,00008	0,00076	0,00386	0,03550	0,12014
13		0,00002	0,00015	0,00102	0,01456	0,07393
14		0,00000	0,00003	0,00022	0,00486	0,02697
15			0,00000	0,00003	0,00129	0,01478
16				0,00001	0,00027	0,00462
17				0,00000	0,00004	0,00109
18					0,00001	0,00002
19					0,00000	0,00000
20						0,00000

$n = 25$

j	p=0,1	p=0,2	p=0,25	p=0,3	p=0,4	p=0,5
0	0,07179	0,00378	0,00075	0,00013	0,00000	0,00000
1	0,19942	0,02361	0,00627	0,00144	0,00005	0,00000
2	0,26588	0,07084	0,02509	0,00739	0,00038	0,00001
3	0,21650	0,13576	0,06410	0,02428	0,00194	0,00007
4	0,13842	0,18666	0,11753	0,05723	0,00710	0,00038
5	0,06459	0,19602	0,16454	0,10302	0,01989	0,00158
6	0,02392	0,16335	0,18282	0,14716	0,04421	0,00528
7	0,00722	0,11084	0,16541	0,17120	0,07998	0,01432
8	0,00180	0,06235	0,12405	0,16708	0,11998	0,03224
9	0,00038	0,02944	0,07811	0,13363	0,15109	0,06088
10	0,00007	0,01178	0,04166	0,09164	0,16115	0,09742
11	0,00001	0,00401	0,01994	0,05355	0,14651	0,13284
12	0,00000	0,00117	0,00636	0,02678	0,07597	0,15498
13		0,00029	0,00245	0,01148	0,04341	0,15498
14		0,00007	0,00071	0,00421	0,02122	0,13304
15		0,00001	0,00017	0,00133	0,00884	0,09742
16		0,00000	0,00003	0,00035	0,00312	0,06088
17			0,00001	0,00008	0,00093	0,03224
18			0,00000	0,00002	0,00023	0,01432
19				0,00000	0,00004	0,00528
20					0,00001	0,00158
21					0,00000	0,00038
22						0,00007
23						0,00001
24						0,00000

$n = 50$

j	p=0,1	p=0,2	p=0,25	p=0,3	p=0,4	p=0,5
0	0,00515	0,00001	0,00000			
1	0,02864	0,00018	0,00001			
2	0,07794	0,00110	0,00008	0,00000		
3	0,13856	0,00437	0,00041	0,00003		
4	0,18019	0,01284	0,00161	0,00014		
5	0,18492	0,02953	0,00494	0,00055	0,00000	
6	0,15411	0,05537	0,01234	0,00177	0,00001	
7	0,10762	0,08701	0,02587	0,00477	0,00005	
8	0,06428	0,11692	0,04634	0,01099	0,00017	
9	0,03333	0,13641	0,07208	0,02198	0,00053	0,00000
10	0,01519	0,13982	0,09852	0,03862	0,00144	0,00001
11	0,00613	0,12711	0,11942	0,06019	0,00339	0,00004
12	0,00222	0,10327	0,12937	0,08383	0,00756	0,00010
13	0,00071	0,07547	0,12605	0,10501	0,01474	0,00032
14	0,00022	0,04987	0,11104	0,11895	0,02597	0,00083
15	0,00005	0,02992	0,08884	0,12235	0,04154	0,00200
16	0,00002	0,01636	0,06477	0,11470	0,06059	0,00437
17	0,00000	0,00818	0,04319	0,09831	0,08079	0,00875
18		0,00375	0,02639	0,07725	0,09873	0,01603
19		0,00158	0,01481	0,05576	0,11087	0,02701
20		0,00061	0,00766	0,03704	0,11455	0,04186
21		0,00022	0,00364	0,03704	0,10909	0,05980
22		0,00007	0,00160	0,02267	0,07781	0,07882
23		0,00002	0,00065	0,01282	0,05836	0,09597
24		0,00001	0,00025	0,00669	0,04047	0,10795
25		0,00000	0,00008	0,00322	0,02593	0,09597
26			0,00003	0,00144	0,01538	0,07882
27			0,00000	0,00059	0,00841	0,05980
28				0,00022	0,00426	0,04186
29				0,00008	0,00199	0,02701
30				0,00003	0,00085	0,01603

j	p=0,1	p=0,2	p=0,25	p=0,3	p=0,4	p=0,5
31				0,00001	0,00034	0,00875
32				0,00000	0,00012	0,00437
33					0,00004	0,00200
34					0,00002	0,00083
35					0,00000	0,00032
36						0,00010
37						0,00004
38						0,00001
39						0,00000

$n = 100$

0	0,00003					
1	0,00029					
2	0,00162					
3	0,00590					
4	0,01587	0,00000				
5	0,03387	0,00002				
6	0,05958	0,00006				
7	0,08889	0,00020	0,00000			
8	0,11482	0,00058	0,00001			
9	0,13042	0,00147	0,00003			
10	0,13187	0,00337	0,00010	0,00000		
11	0,11987	0,00687	0,00025	0,00001		
12	0,09879	0,01276	0,00064	0,00001		
13	0,07430	0,02157	0,00133	0,00004		
14	0,05131	0,03353	0,00296	0,00010		
15	0,03268	0,04807	0,00566	0,00024		
16	0,01929	0,06383	0,01003	0,00057		
17	0,01059	0,07885	0,01652	0,00119		
18	0,00543	0,09090	0,02538	0,00236	0,00000	
19	0,00260	0,09807	0,03652	0,00437	0,00001	
20	0,00117	0,09930	0,04930	0,00757	0,00001	

j	*p*=0,1	*p*=0,2	*p*=0,25	*p*=0,3	*p*=0,4	*p*=0,5
21	0,00050	0,09457	0,06261	0,01237	0,00002	
22	0,00020	0,08490	0,07493	0,01904	0,00007	
23	0,00007	0,07198	0,08481	0,02786	0,00014	
24	0,00003	0,05774	0,09145	0,03804	0,00031	
25	0,00001	0,04387	0,09180	0,04956	0,00063	
26	0,00000	0,03165	0,08827	0,06127	0,00121	
27		0,02168	0,08064	0,07197	0,00220	0,00000
28		0,01413	0,07008	0,08041	0,00383	0,00001
29		0,00877	0,05800	0,08556	0,00635	0,00001
30		0,00519	0,04575	0,08678	0,01300	0,00002
31		0,00293	0,03444	0,08399	0,01507	0,00005
32		0,00158	0,02475	0,07761	0,02165	0,00011
33		0,00081	0,01701	0,06854	0,02975	0,00024
34		0,00040	0,01116	0,05788	0,03909	0,00045
35		0,00019	0,00702	0,04678	0,04913	0,00087
36		0,00009	0,00423	0,03620	0,05914	0,00156
37		0,00004	0,00243	0,02683	0,06820	0,00270
38		0,00001	0,00135	0,01907	0,07538	0,00447
39		0,00000	0,00071	0,01299	0,09989	0,00711
40			0,00037	0,00849	0,08121	0,01084
41			0,00017	0,00533	0,07924	0,01587
42			0,00009	0,00320	0,06673	0,02230
43			0,00003	0,00186	0,05763	0,03006
44			0,00002	0,00102	0,04781	0,03896
45			0,00001	0,00055	0,03811	0,04847
46			0,00000	0,00028	0,02919	0,05796
47				0,00014	0,02149	0,06659
48				0,00007	0,01520	0,07353
49				0,00003	0,01034	0,07803
50				0,00001	0,00675	0,07958
51				0,00001	0,00495	0,07803
52				0,00000	0,00256	0,07353
53					0,00159	0,06659

j	*p*=0,1	*p*=0,2	*p*=0,25	*p*=0,3	*p*=0,4	*p*=0,5
54					0,00083	0,05796
55					0,00044	0,04847
56					0,00023	0,03896
57					0,00011	0,03006
58					0,00006	0,02230
59					0,00002	0,01587
60					0,00001	0,01084
61					0,00000	0,00711
62						0,00447
63						0,00270
64						0,00156
65						0,00087
66						0,00045
67						0,00024
68						0,00011
69						0,00005
70						0,00002
71						0,00001
72						0,00001
73						0,00000

Прилог 2

Таблици за веројатностите

на $P(a)$

вредности на параметарот $a = 0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4;\ 0,5;\ 0,6;\ 0,7;\ 0,8;\ 0,9;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10.$

Вероjатности $P(X=k) = \frac{a^k}{k!}\cdot e^{-a}$:

k	$a=0,1$	$a=0,2$	$a=0,3$	$a=0,4$	$a=0,5$
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67302	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22224	0,26543	0,30327
2	0,00453	0,01637	0,03334	0,05362	0,07581
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4	0,00000	0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016
6			0,00000	0,00000	0,00001
7					0,00000

k	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$	$a=1$
0	0,54881	0,49658	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,09878	0,12167	0,14379	0,16466	0,18394
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4	0,00297	0,00496	0,00767	0,01112	0,01533
5	0,00035	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8		0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
9					0,00000

k	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$
0	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248
1	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487
2	0,27067	0,22404	0,14652	0,08422	0,04462
3	0,18044	0,22404	0,19537	0,14038	0,08923
4	0,09023	0,16803	0,19537	0,17546	0,13386
5	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062

k	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$
6	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062
7	0,00343	0,02161	0,05954	0,10445	0,13768
8	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326
9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03626	0,06884
10	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130
11	0,00001	0,00022	0,00192	0,00825	0,02253
12	0,00000	0,00005	0,00065	0,00343	0,01126
13		0,00002	0,00019	0,00132	0,00520
14		0,00000	0,00006	0,00047	0,00223
15			0,00002	0,00016	0,00089
16			0,00000	0,00005	0,00033
17				0,00002	0,00012
18				0,00000	0,00004
19					0,00002

k	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	0,00091	0,00033	0,00012	0,00004
1	0,00639	0,00269	0,00111	0,00046
2	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227
3	0,05212	0,02863	0,01500	0,00757
4	0,09123	0,05725	0,03373	0,01891
5	0,12772	0,09161	0,06073	0,03784
6	0,14900	0,12213	0,09109	0,06305
7	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008
8	0,13038	0,13959	0,13175	0,11260
9	0,10141	0,12407	0,13176	0,12511
10	0,07098	0,09927	0,11858	0,12511
11	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12	0,02635	0,04812	0,07266	0,09478
13	0,01419	0,02962	0,05038	0,07290
14	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208
15	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472

k	*a*=7	*a*=8	*a*=9	*a*=10
16	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170
17	0,00060	0,00213	0,00579	0,01276
18	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19	0,00009	0,00040	0,00137	0,00374
20	0,00003	0,00016	0,00062	0,00186
21	0,00001	0,00006	0,00011	0,00089
22	0,00000	0,00002	0,00005	0,00040
23		0,00001	0,00001	0,00018
24		0,00000	0,00001	0,00007
25			0,00000	0,00003
26				0,00001
27				0,00001
28				0,00000

Прилог 3

ТАБЛИЦИ
за густината и функцијата на распределба на величината $N(0,1)$

густината $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ е парна $(\Phi(-x)=\Phi(x))$, функцијата на распределба може да се определи со помош на функцијата на Лаплас

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} \cdot dy$$

која е непарна $(\Phi(-x)=-\Phi(x))$.

Од изнесените причини во таблиците се дадени само вредностите на овие функции за позитивни вредности на променливата x.

Вредности на функцијата $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1845	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Забелешки : 1) сите вредности во таблицата се помножени со 10^4,
2) $(\Phi(-x)=\Phi(x))$.

Вредности на функцијата $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} \cdot dy$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00798	01496	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10348	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32552	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40389	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1,0	68269	68750	69227	69699	70166	70625	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76596
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	83547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86696	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93659	93711	93852	93988	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94726	94882	95000	95116	95230	95331
2,0	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96427	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	97798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98405	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99263	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721
3,0	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99983	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993

Забелешки : 1) сите вредности во таблицата се помножени со 10^5,

2) $(\Phi(-x)=-\Phi(x))$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., Теория вероятностей, Москва, 1964.

[2] ГНЕДЕНКО Б.В., Курс теории вероятностей, Москва, 1961.

[3] ГНЕДЕНКО Б.В., ХИНЧИН А.Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, Москва, 1964.

[4] GOLDMAN M., Introduction to Probability and Statistics Harcourt, Brace and World, Inc., 1970

[5] ЕМЕЛЯНОВ Г.В., СКИТОВИЧ В.П., Задачник по теории вероятностей и математической статистике, Ленинград, 1967.

[6] IVKOVIĆ Z., Uvod u teoriju verovatnoće, slučajne procese i matematičku statistiku, Beograd, 1970.

[7] ЯГЛОМ А.М., ЯГЛОМ М.М., Вероятность и информация, Москва, 1973.

[8] КЕМЕНИ Дж., СНЕЛЛ Дж., ТОМСОН Дж., Введение в конечную математику, Москва 1965.

[9] МЕШАЛКИН Л.Д., Сборник задач по теории вероятностей, Изд-во МГУ, Москва 1963.

[10] MODE E., Elements of Probability and Ststistics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1966.

[11] MOOD A., GRAYBILL F., BOES D., Introduction to the Theory of Statistics, Mc Graw-Hill, Inc., 1974.

[12] МОСТЕЛЛЕР Ф., РУРКЕ Р., ТОМАС Дж., Вероятность, Москва, 1969.

[13] PAVLIĆ I., Statistička teorija i primjena, Zagreb, 1970

[14] ПУГАЧЕВ В.С., Введение в теорию вероятностей, Москва, 1968.

[15] ПУСТИЛЬНИК Е.М., Статистические методю анализа и обработки наблюдений, Москва 1968.

[16] РОЗАНОВ Ю.А., Лекции по теории вероятностей, Москва 1968.

[17] СЕВАСТЬЯНОВ Б.А., ЧИСТЯКОВ В.П., ЗУБКОВ А.М., Сборник задач по теории вероятностей, Москва, 1980.

[18] СВЕШНИКОВА А.А. (под редакцией), Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайюх функций, Москва 1965.

[19]. СМИРНОВ Н.В., ДУНИН-БАРКОВСКИИ И.В., Курс теории вероятностей и математической статистики, Москва, 1969.

[20] ТУТУБАЛИН Н.В., Теория вероятностей, Москва, 1972.

ИНДЕКС

СОДРЖИНА

ОП за издавање на учебници и наставни средства
"Просветно дело" - Скопје, ул. Вељко Влаховиќ бр. 15 Градски ѕид, блок 4.

За издавачот:
д-р Крсте Ангеловски

*

д-р Бранко Трпеновски,
ЕЛЕМЕНТАРЕН УВОД ВО ТЕОРИЈАТА
НА ВЕРОЈАТНОСТА

*

Лектура
д-р Наум Целакоски

*

Илустрации
Авторот

*

Технички уредник
Блаже Танчевски

*

Корицата ја илустрирал
Илија Богоевски

*

Коректор
Авторот

*

Ракописот е предаден во печат јули 1994 година. Печатењето е завршено во август 1994 година. Обем: 212 стр. Формат: 20 x 28,5 см. Тираж: 1000 примероци. Книгата е отпечатена во печатница „Коста Абраш" - Охрид.

Според Мислењето на Министерството за култура број 21-3035/2 од 18. 05. 1994 година, за ова издание се плаќа посебно повластена даночна стапка.

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
“Климент Охридски”, Скопје

519.2(075.8)

ТРПЕНОВСКИ, Бранко

Елементарен увод во теоријата на
веројатноста / Бранко Трпеновски;
[илустрации авторот]. - 3. поправено изд.
- Скопје : Просветно дело, 1994. - 210 стр. :
илустр. ; 24 см

1. изд. 1969. - Тираж 1000.

а) Теорија на веројатноста