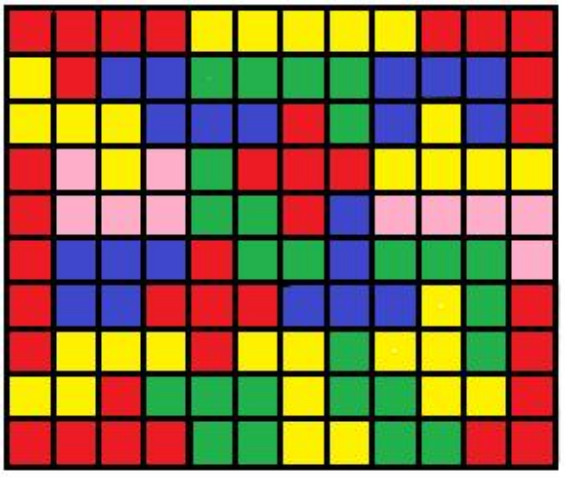
МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 47

Самоил Малчески

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ДЕВЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ



Скопје, 2024

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка подготвителни задачи за натпревари по математика за учениците од деветто одделение во основното образование. Збирката содржи 460 решени задачи кои се поделени во шест тематски целини и тоа:

- Теорија на броеви
- Алгебра,
- Текстуални задачи,
- Логика и комбинаторика.
- Геометрија и
- Дополнителни задачи.

Во одделните целини, освен во геометријата, задачите не се поделени во посебни параграфи, но сепак истите се групирани според сродноста. Делот Геометрија содржи две целини и тоа: Планиметрија и Стереометрија. Притоа, задачите содржами во двете целини се поделенои според сродност, па така во делот Стереометрија посебно се обработени последователно се обработени рабестите тела (призми и пирамиди), валчестите тела

Во првиот дел од збирката се дадени формулациите на задачите, а во вториот дел за повеќето задачи се дадени целосни решенија, а само кај мал дел се дадени само одговори. На читателот му препорачувам да се обиде самостојно да ја реши секоја задача, а потоа решението кое го добил да го спореди со даденото решение, односно да го проучи даденото решение ако самостојно не успеал да ја реши задачата.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците

за регионалните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторот
4. јули, 2024 г.

1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Определи ја цифрата на единиците на броевите од видот $4^n + 5^n + 6^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$1^n + 2^n + 3^n + ... + 2010^n, n \in \mathbb{N}.$$

3. Определи ја цифрата на единиците на бројот од видот $3^m + 7^n$, каде $m, n \in \mathbb{N}$.

4. Секој природен број припаѓа на едно од множествата A и B. Докажи дека за барем едно од овие множества важи дека за секој природен број n во него постојат бесконечно многу броеви кои се деливи со n.

5. Секој природен број му припаѓа точно на едно од множествата A, B и C. Познато е дека во множеството A има само конечно многу парни броеви, а во множеството B само конечно многу броеви деливи со 3. Докажи дека во множеството C има бесконечно многу броеви деливи со 2015.

6. Определи ги сите природни броеви n запишани со најмалку три цифри такви што и бројот n и неговиот квадрат завршуваат со истите три цифри.

7. За еден природен број ќе велиме дека е *несреќен* ако збирот на неговите цифри е делив со 13.
   а) Дали постојат два последователни несреќни броја?
   б) Докажи дека постојат бесконечно многу парови последователни природни броеви кои се несреќни.

8. Ако a е цел број, докажи дека или $a^3 - a$ или $a^3 + a$ е делив со 10.

9. Ако ab не е делив со 5, докажи дека $a^4 - b^4$ е делив со 5.

10. Докажи, дека за секој непарен број n бројот $n^3 + 3n^2 - n - 3$ е делив со 48.

11. Нека m и n се природни броеви и нека m не е делив со 3. Докажи дека разликата $n^3 - m^2 n$ е делива со 3.

12. Докажи дека дропката $\frac{1+5^{k+1}\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^{k+1}}$ е скратлива за секој број $k = 0,1,2,\ldots$.

13. Која цифра треба да се запише на местото на буквата x за да бројот $\underbrace{444..44}_{2014}x\underbrace{111..11}_{2014}$ е делив со 37?

14. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш бројот $p^2 - 1$ е делив со 12. Докажи!

15. Определи го најголемиот природен број кој е делив со 11, а чии цифри се различни.

16. Определи го најмалиот десетцифрен број кој е делив со 11 и кој е запишан со различни цифри.

17. На таблата е запишан природен број a. Дозволено е на бројот да му се додаде еден негов делител, различен од самиот број и бројот 1. На добиениот број може да се примени претходната постапка итн. Дали тргнувајќи од бројот 4, со повеќекратна примена на наведената постапка, може да се добие бројот:
    а) 2010, б) 2011.

18. Дали постои број од видот 11...1100...0 запишан само со помош на определен број единици, а потоа со определен број нули, кој е делив со 2010.

19. Во триесетцифрен број сите цифри се различни од нула. Докажи дека од записот на овој број може да се избришат неколку цифри така што

добиениот број ќе биде делив со 101.

20. Во 50-цифрен број сите цифри се различни од нула. Докажи дека од записот на овој број може да се избришат некои цифри така што добиениот број ќе биде делив со 2849?

21. Се формираат сите различни производи од по два различни множители од првите пет прости броеви. Пресметај го квадратниот корен од производот на квадратните корени на добиените производи.

22. Докажи дека има бесконечно многу природни броеви кои не може да се запишат во вид на збир на квадрати на два природни броја.

23. а) Определи ги сите остатоци кои се добиваат при делење на куб на природен број со бројот 9.
б) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви кои не може да се запишат како збир на кубови на три природни броја.

24. Нека се a,b,c природни броеви и $a \neq b$. Ако важи $\frac{a}{b}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$, докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не е прост број.

25. Определи осумцифрен број запишан со различни цифри и кој е делив се секоја своја цифра, т.е. со соодветниот едноцифрен број.

26. Определи го најмалиот природен број n кој има точно 2013 делители. Докажи дека $\sqrt{n}$ е природен број.

27. Кој е најмалиот број броеви кои треба да се избришат од множеството $\{1,2,3,...,27,28\}$ за да производот на преостанатите броеви биде точен квадрат?

28. За кои парни природни броеви n изразот е $2^n+3^n+4^n$ е точен квадрат?

29. За кои непарни природни броеви n бројот $2^n+3^n+4^n$ е точен квадрат?

30. Најди најмал природен број n кој е 2015 пати поголем од збирот на сите свои прости делители.

31. Нека x и y се природни броеви такви што $\frac{2024!}{7^x 11^y}$ е природен број. Определи ја најголемата можна вредност на збирот $x+y$.

32. Определи го природниот број x за кој $\sqrt{\frac{x+36}{x-36}}$ е природен број.

33. Тетратка чини 110, а молив 50 денари. На колку начини за точно 20120 денари може да се купат определен број тетратки и моливи?

34. Ванчо во својата каса има само монети од 2 и 5 денари. На колку начини може да купи топка која чини 2024 денари, ако ја користи само заштедата во касата? Се подразбира дека во касата има доволно монети за секоја комбинација?

35. Определи ги сите природни броеви n за кои постои цел број x, таков што важи
$$\frac{|...|||x|+x+1|+x+2|+...+x+n|-67}{\sqrt{x+3}}=0.$$

36. Определи го најмалиот природен број n таков што во множеството природни броеви равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ има точно:

    а) 2019 решенија,
    б) 2020 решенија.

37. Во множеството прости броеви реши ја равенката $5p^2-5p=208+q$.

38. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$3p^2+3p-q-1138=0.$$

39. Производот на два броја е двапати поголем од нивниот збир. Определи ги овие броеви.

40. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2 + x - xy - y = 2010.$$

41. Определи ги сите тројки природни броеви a,b,c за кои важи
$$a + b + c = 2007, \quad 3(a^2 + b^2 + c^2) = 2007^2.$$

42. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

43. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 - xy + y^2 + x + y = 2.$$

44. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 = 2y + 1.$$

45. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33.$$

46. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0. \qquad (1)$$

47. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 = xy + x + y.$$

48. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$a^2b^2 + 2ab - b^2 + 2b = 2022.$$

49. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$a^2 - a = 4b^2 - 2b + 2024.$$

50. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 = 2009^2.$$

51. Докажи дека равенката $x^2 + y^2 - z^2 = 2008$ има бесконечно многу це-

лобројни решенија.

52. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1.$$

53. Во множеството природни броеви реши ја равенката $n!+1=(10n+1)^2$.

54. Докажи дека равенката $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}=1$ нема решенија во множеството природни броеви.

55. Докажи дека равенката $3m^2-7n^2=9$ нема решение во множеството природни броеви.

56. Докажи дека не постојат природни броеви x и y за кои важи
$$5^x=y^2+2012.$$

57. Во множеството природн броеви реши го системот
$$\begin{cases} x+yz=2024z, \\ y+zx=2024x, \\ z+xy=2024y. \end{cases}$$

58. Во множеството природни броеви реши го системот
$$\begin{cases} x+yz=59, \\ xy+z=46. \end{cases}$$

59. Определи ја цифрата на единиците на бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$.

60. Определи го двоцифрениот завршеток на бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$.

61. Нека p е прост број поголем од 3. Определи го остатокот при делењето на бројот 2^{p^2} со 13.

62. Докажи дека $3^{2009}+4^{2009}$ е делив со 7, но не е делив со 5.

63. Определи го остатокот при делењето на бројот $19^{61}+87^{87}$ со 44.

64. Докажи дека $1^{2023}+2^{2023}+...+998^{2023}+999^{2023}$ е деливо со 1000.

65. Докажи дека $A=3^{2013}+4^{2013}$ е сложен број.

66. Дали бројот $2013^{2012}+2014$ е прост или сложен.

67. Докажи дека бројот $B=3^{2013m}+4^{2013n}$, каде m и n се непарни природни броеви е делив со 91.

68. Определи го збирот на цифрите од збирот на цифрите од збирот на цифрите на бројот 2015^{2015}.

2. АЛГЕБРА

1. Во неточното равенство $84 = 65$ допиши знаци на операции, без да користиш загради и да допишуваш нови цифри, така што ќе добиеш точно равенство.

2. Определи ја цифрата на единиците на бројот $((((3^2)^3)^4)^5)^6$.

3. Со колку нули завршува збирот $98! + 99! + 100!$.

4. Нека n е природен број и $a = \frac{10^{2n}-1}{3(10^n+1)}$ е цел број. Ако збирот на цифрите на бројот a е 567, определи го бројот n.

5. Пресметај ја вредноста на изразот
$$\frac{2^{7n+3}\cdot 2^{6n-5}}{2^{12n}:2^{9n}} : \frac{2^{7n-9}\cdot 2^{5n-4}}{2^{2n-3}\cdot 2^3} - 3\cdot 2^3.$$

6. Спореди ги по големина броевите
$$1679616^{1679616}\cdot 2985984^{2985984} \text{ и } 4478976^{4478976}.$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$A = (\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$$

8. Ако $x^2 + y^2 + xy = 39$ и $10x - 14y + xy = 113$, пресметај ја вредноста на изразот $2x + 3y$.

9. Нека a и b се реални броеви такви што $a > b > 0$ и $a^2 + b^2 = 6ab$. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{a+b}{a-b}$.

10. Пресметај ја вредноста на изразот $R(a,b,c) = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{a-b-c}{abc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$, за

$a=1,5$, $b=0,25$ и $c=-3,75$.

11. Дали постојат различни природни броеви a,b,c,d такви што
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1?$$

12. Дали постојат различни природни броеви a,b,c,d такви што важи
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2014}.$$

13. Нека a,b,c се ненулти реални броеви такви што
$$a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1.$$
Определи ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

14. На таблата се запишани неколку позитивни реални броеви така што секој од нив е 2009 пати помал од збирот на преостанатите броеви. Определи колку броеви има и докажи дека сите броеви се меѓусебно еднакви.

15. Дадени се k природни броеви $a_1,a_2,...,a_k$, $k\geq 7$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на k, ако збирот на сите броеви е 100, а збирот на било кои 7 дадени броеви е помал од 15.

16. Ако a и b се два последователни природни броја, докажи дека $a^2+b^2+a^2b^2$ е точен квадрат.

17. Ако a,b,c,d се четири последователни природни броеви, докажи дека $abcd+1$ е точен квадрат.

18. Во изразот
$$(x^3-2)^2+(x^2+*)^2$$
замени го знакот * со некој моном така што по квадрирањето и средувањето се добива полином кој е збир на четири мономи.

19. Во изразот
$$(x^4-3)^2+(x^3+*)^2$$
на местото на знакот * стави моном така што по средувањето се добие

полином кој е збир на четири мономи.

20. Нека a,b,c се броеви различни од нула, такви што $b(c+a)$ е аритметичка средина на броевите $a(b+c)$ и $c(a+b)$. Ако $b=\frac{2019}{2020}$, пресметај ја аритметичката средина на броевите $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

21. На кружница во насока на движењето на стрелките на часовникот се испишани реалните броеви $x_1,x_2,...,x_{12}$ такви што секој број е еднаков на аритметичката средина на броевите меѓу кои се наоѓа. Определи ги броевите $x_1,x_2,...,x_{12}$ ако нивниот збир е еднаков на 2012.

22. За броевите a,b,c,d е познато дека
$$ac+ad+bc+db=68 \text{ и } c+d=4.$$
Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c+d$.

23. Определи ги позитивните броеви a, b и c за кои важи:
$$a^2+ab+ac=20,$$
$$ab+b^2+bc=30 \text{ и}$$
$$ac+bc+c^2=50.$$

24. Нека x,y,z се реални броеви такви што броевите xy,yz,zx се рационални и се различни од нула. Докажи дека:
а) бројот $x^2+y^2+z^2$ е рационален,
б) ако бројот $x^3+y^3+z^3$ е рационален и е различен од нула, тогаш и броевите x,y,z се рационални.

25. Ако a,b,c и $\frac{a-b\sqrt{2015}}{b-c\sqrt{2015}}$ се рационални броеви, докажи дека $b^2=ac$.

26. Нека a,b,c,x,y,z се реални броеви такви што $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$.
Докажи дека $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

27. Нека $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Докажи дека

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

28. Ако за реалните броеви x,y,z важи $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$, докажи дека $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

29. Ако е $x+\frac{1}{x}=a$, изрази го $x^4+\frac{1}{x^4}$ со помош на a.

30. Ако $\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}}=a$, со помош на a пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}$.

31. Ако $x+y=0$ и $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, пресметај x^8+y^8.

32. Реши ја равенката

$$x+\frac{1}{x-2011}=2011+\frac{1}{x-2011}.$$

33. Реши ја равенката

$$|3x-1|-2=2x-|1-x|.$$

34. Реши ја равенката

$$||x-2|-|3-x||=|x+1|.$$

35. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2-8x+16}+|x+3|=25.$$

36. Реши ја равенката

$$|(\sqrt{7-x})^2+1|=13.$$

37. За кои вредности на бројот a равенката
$$(3x-a)^2+(4x+1)^2=(5x-1)^2,$$
а) има решение,
б) има решение 4,
в) нема решение?

38. За кои вредности на бројот a равенката
$$(3x-a)^2+4(x+1)^2=(x-2)^2+4(x-1)(x+1),$$
а) има решение,
б) има решение 2,
в) нема решение?

39. Определи ги реалните броеви x,y,z,t за кои важи
$$x^2+y^2+z^2+t^2+1=x(y+z+t+1).$$

40. Определи ги сите можни вредности на позитивниот реален број a за кој неравенката $|x-2|<a$ има точно 4 решенија во множеството цели броеви.

41. Определи ги сите можни вредности на позитивниот реален број a за кој неравенката $|x-2{,}1|<a$ има точно 4 решенија во множеството цели броеви.

42. Реши ја неравенката:
$$|x-|x+|x-|x+|x|||||\le 2012. \qquad (1)$$

43. Определи го збирот на целобројните решенија на неравенката
$$|x-|x-|x-|x-|x|||||\le 2008.$$

44. Определи го збирот на сите целобројни решенија на неравенката
$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}\le 9.$$

45. Дадена е линеарната функција
$$f(x)=(2a-3b)x+a-2b,\ a,b\in\mathbb{R}.$$
Ако

$$f(x-1)+f(2x+1)=3x+1,$$

определи ги коефициентите a и b.

46. Определи ја линеарната функција $y=kx+n$ чиј график ја содржи точката $A(0,4)$ и со позитивните делови на координатните оски формира триаголник со плоштина 6.

47. Во координатна рамнина се дадени точките $A(2,3)$ и $B(10,11)$.
а) Определи ја должината на отсечката AB.
б) Определи ги должините на ортоголналните проекции на отсечката AB на координатните оски.
в) Определи го аголот кој отсечката AB го зафаќа со својата ортогонална проекција на $x-$оската.

48. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со графикот на функцијата $y=-2|x-1|+4$ и $x-$оската.

49. Во координатен систем во рамнината е дадена точка $T(2,4)$. Низ точката T се повлечени прави p и q. Правата p ја сече $x-$оската во точката A, а $y-$оската во точката D. Правата q ја сече $x-$оската во точката B, а $y-$оската во точката C. Определи ги равенките на правите p и q ако триаголниците ABT и CDT се рамнокраки со основи AB и CD, соодветно, а односот на нивните плоштини е $P_{ABT}:P_{CDT}=9:4$.

50. Пресметај ја плоштината на триаголникот чии темиња се пресечните точки на правите:

$$y=x,\ y=-x+4,\ y=3x-12.$$

51. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со правата $y=4$ и графикот на функцијата

$$y=|x+1|+|x-1|.$$

52. Определи ги сите прави паралелни со $y-$оската кои со правата $y=\frac{1}{2}x+1$ и $x-$оската формираат триаголник со плоштина 16.

53. Пресликај ја точката $A(6,3)$ со осна симетрија во однос на графикот на функцијата $y=x$ и означи ја сликата со B. Потоа пресликај ја точката B со осна симетрија во однос на y-оската и означи ја сликата со C. Точката C пресликај ја со осна симетрија во однос на графикот на функцијата $y=-x$ и сликата означи ја со D. Пресметај ги периметарот и плоштината на четириаголникот $ABCD$.

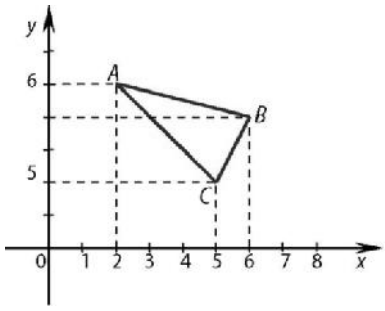
54. Пресликај ја точката $A(4,2)$ со централна симетрија во однос на координатниот почеток и добиената точка означи ја со D. Потоа двете точки пресликај ги со осна симетрија во однос на графикот на функцијата $y=x+4$. Сликата на точката A означи ја со B, а сликата на точката D означи ја со C. Пресметај го периметарот на добиениот четириаголник $ABCD$.

55. Права $3x+4y=k, k>0$ ги сече координатните оски Ox и Oy во точките A и B, соодветно. Ако плоштината на триаголникот OAB е еднаква на 216, колку е оддалечена точката O од правата AB?

56. Во координатната рамнина Oxy е дадена права $4x+3y=n$, $n>0$ која од координатниот почеток O е оддалечена 12. Определи ја плоштината на триаголникот кој таа права го формира со координатните оски Ox и Oy.

57. Во линеарната функција $y=\frac{m-1}{2}x+\frac{m+1}{2}, m\in\mathbb{R}$, определи го параметарот m така што нејзиниот график ќе биде паралелен со графикот на функцијата $2x-y+5=0$. Определи ја плоштината на делот од рамнината ограничен со овие паралелни прави и координатните оски.

58. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC прикажан на цртежот десно.



59. Определи ги сите парови реални броеви k и n, такви што графикот на функцијата $y = kx + n$ го сече под прав агол графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}x + 1$ во точката $C(6,4)$.

60. Докажи го неравенството
$$2^{2015} + 3^{2015} < 4^{2015}.$$

61. Докажи го неравенството
$$3^{2016} + 4^{2016} < 6^{2016}.$$

62. Докажи дека
$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)} > \frac{674}{1011}.$$

63. Докажи дека
$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} + \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}} < 8.$$

64. Докажи дека
$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}} + \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}} < 10.$$

65. Докажи дека за секој реален број x важи
$$x^{10} - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 > 0.$$

66. Определи број x така што збирот $x + x^2$ ќе биде минимален.

67. Нека x и y се реални броеви такви што $2x + 3y = 10$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $4x^2 + 9y^2$.

68. За кои вредности на реалните броеви x и y изразот
$$x^2 - 8xy + 19y^2 - 6y + 3$$
прима најмала вредност.

69. Ако x и y се ненегативни реални броеви такви што $x^2 + y^2 = 18$,

тогаш $x+y\le 6$. Докажи!

70. Ако x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=6$, докажи дека $xy+yz+zx\le 12$.

71. Докажи дека за секој реален број x важи
$$(x^2+1)^8-(x^2+1)^5\ge \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^4}.$$

72. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$. Докажи дека
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\le \frac{1}{abc}. \qquad (1)$$

73. Ако $a+b>0$, докажи дека $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

74. Докажи дека за секој реален број a важи неравенството
$$3(1+a^2+a^4)\ge (1+a+a^2)^2.$$

75. Докажи дека за произволни реални броеви x,y и z важи неравенството:
$$3(x^2+y^2+z^2)\ge (x+y+z)^2.$$

76. Нека a и b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи дека важи неравенстото
$$a^4+a^2b^2+b^4\ge \frac{3}{4}c^4. \qquad (1)$$

77. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c$$
и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

78. Нека за целите броеви a,b и n важи $b\ne 0$ и $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$. Докажи дека геометриската средина на броевите a и b е цел број.

79. Докажи дека за ненегативни реални броеви x, y, z и t важи неравенството

$$(\frac{x+y+z+t}{4})^4 \geq xyzt\ . \qquad (1)$$

80. Докажи дека за ненегативните реални броеви a, b и c важи неравенството

$$(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc\ . \qquad (1)$$

81. Дадена е низа броеви таква што секој нејзин член почнувајќи од вториот е еднаков на производот на двата негови соседни члена. Производот на првите десет членови на оваа низа е еднаков на 18, а производот на првите 20 нејзини члена е еднаков на 12. Определи го производот на првите 2013 членови на оваа низа.

82. Нека $1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, 1000$ е најдолгата можна низа природни броеви такви што почнувајќи од третиот член, секој следен член е еднаков на збирот на сите претходни членови. Определи го членот x_2 .

3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Збирот на првите n природни броеви е за 10000 помал од збирот на следните n природни броеви. Определи го бројот n.

2. Производот на три последователни броја е 65 пати поголем од нивниот збир. Кои се тие броеви.

3. Определи го збирот на сите природни броеви помали од 1000 кај кои збирот на цифрите е непарен.

4. Определи два последователни природни броја такви што едниот може да се запише како производ $2(a-3)(a+1)$, а другиот како производ $(a-2)(2a-1)$, каде a е природен број.

5. Определи двоцифрен број за кој количникот на тој број и збирот на неговите цифри е минимален.

6. Определи го тригцифрениот природен број за кој количникот на тој број и збирот на неговите цифри е најмал можен број.

7. Определи ги сите вредности на променливата x за кои производот на дропките $\frac{x+1}{x+3}$ и $\frac{2}{x+5}$ ќе биде еднаков на нивната разлика.

8. Определи го природниот број $\overline{abcdef}$ кој е запишан со различни цифри и за за кој се исполнети условите

$$a \cdot d \neq 0,\ a+d=b+e=c+f=9$$

и количникот $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}}$ е природен број.

$A = 6 \cdot 142857 = 857142$

9. Филип запишал 500 последователни природни броеви и притоа запишал 2012 цифри. Кои броеви ги запишал Филип?

10. На таблата се три различни двоцифрени броја. Пабло треба производот на два броја да го подели со третиот број. Но, тој згрешил, па количникот на првите два броја го помножил со третиот број и така наместо точниот резултат 96 го добил вториот од тие два броја. Кои броеви биле запишани на таблата?

11. На таблата се запишани неколку позитивни реални броеви секој од кои е еднаков на една шестина од збирот на преостанатите броеви. Колку броеви се запишани на таблата?

12. Неколку деца јаделе бомбони. Секое дете изело 10 бомбони помалку отколку што изеле сите преостанати деца заедно. Колку деца биле и колку бомбони изеле?

13. Бактерија се размножува бесполово така што на секои десет минути се дели на две бактерии. Колку бактерии биле на почетокот ако по 2 часа имало 2^{17} бактерии?

14. Горјан започнал да ја копа градината меѓу 9 и 10 часот, а целата ја окопал меѓу 15 и 16 часот. Колку време ја копал градината Горјан, ако и во моментот кога почнал да копа и во моментот кога завршил со копањето минутната и часовната стрелка биле заемно нормални?

15. Еден концерт почнал меѓу 18 и 19 часот, а завршил меѓу 21 и 22часот. Определи колку време траел коцертот, ако за тоа време минутната и часовната стречка си ги замениле местата.

16. На две свеќи со иста должина, но различна дебелина потребно им е различно време за целосно да изгорат. На подебелата свеќа ѝ се потребни 4 часа за целосно да изгори, а на потенката свеќа ѝ се потребни 2 часа. Свеќите биле запалени во исто време, одредено време гореле, а потоа двете биле изгаснати. Откако биле изгаснати, остатокот од подебелата свеќа бил три пати подолг од остатокот од потенката свеќа. Колку време гореле свеќите?

17. Таткото, мајката, синот и ќерката заедно имаат 130 години. Мајката и синот заедно имаат 2 години помалку отколку што заедно имаат таткото и ќерката. Таткото е пет пати постар од ќерката, а пред 2 години

мајката била пет пати постара од ќерката. Колку години има секој член на ова семејство?

18. Баба Рада го прашала дедо Младен колку години има. Тој и одговорил: „Пред педесет години бев два пати постар од тебе, а по шеесет години ќе бидам единаесеттина од твоите години постар од тебе“. Колку години има дедо Младен, а колку баба Рада?

19. Јован го прашал Климе колку години има. Климе му одговорил: „Јас сум два пати постар отколку што ти беше кога имав толку години колку што имаш ти сега. А кога ќе имаш толку години колку што јас имам сега, збирот на нашите години ќе биде 63.“ Колку години има Јован, а колку Климе?

20. На прашањето колку години има Ирина одговорила дека има толку години колку што родендени прославил нејзиниот дедо. Ирина и нејзиниот помлад брат Јанко се родиле меѓу два родендени на нивниот дедо, а тие тројца заедно имаат 107 години. Колку години има Ирина?

21. Годините на таткото и неговите две деца (не се близнаци) се степени на ист прост број. Пред една година бројот на годините на секој од нив бил прост број. Колку години има сега таткото, а колку има секое од неговите деца? (Познато е дека такото има помалку од сто години)

22. Марко бил роден меѓу 1300 и 1400 година, а Дарко меѓу 1400 и 1500 година. И двајцата биле родени на 6-ти април, во години кои што се точни квадрати на природни броеви. Двајцата живееле по 110 години. Во која година, додека биле живи, нивните години на 7-ми април биле точни квадрати на природни броеви.

23. Мајсторот Ламбе може за еден ден да направи 65 дрвени лажици, или да лакира 104 лажици. Колку лажици Ламбе може да направи и лакира во еден ден?

24. Ацо, Бојан и Симон заедно работат на училишен проект. Ако Ацо не работи, тогаш проектот ќе биде завршен за 2 часа, ако Бојан не работи, тогаш проектот ќе биде завршен за 3 часа. Ако Симон не

работи, тогаш проектот ќе биде завршен за 4 часа. Дарко решил да им помогне и тој сам проектот може да го заврши за 12 часа. Определи го најкраткото време за кое проектот може да се заврши.

25. Кравата испасува толку трева од ливадата колку козата и гуската заедно. Кравата и козата заедно ја испасуваат ливадата за 45 дена, кравата и гуската за 60 дена, а козата и гуската за 90 дена. Тревата на ливадата постојано и рамномерно расте. За колку дена кравата, козата и гуската заедно ќе ја испасат целата ливада?

26. Одреден број на момчиња и девојчиња отишле на кампување за време на летниот распуст. Тие испланирале еколошка акција, што би ја завршиле за 29 дена ако секое дете работи рамномерно – во кои било денови сработува ист дел од работата. Момчињата работеле нешто побрзо; за исто време 2 момчиња работат исто колку што работат 3 девојчиња. За среќа, по три дена од почнување со работата, им се придружила поголема група деца, и тоа: момчиња – 8 пати повеќе од првичниот број на девојчиња, и девојчиња – 18 пати повеќе од првичниот број на момчиња. Новодојдените деца работат со иста динамика како и прводојдените. Колку вкупно денови биле работни?

27. Секоја од трите сести Маја, Ема и Филимена си купила материјал за фустан. Маја купила за третина повеќе од Ема, а Филимена купила за 1,6 метри помалку од Маја. Ако Маја даде четвртина од својот материјал на Филимена, а Ема третина од својот материјал и даде на Филимена, тогаш Филимена ќе има материјал колку двете нејзини сестри заедно. Колку материјал купила секоја сестра?

28. Војничка колона има должина $1\,km$ и се движи рамномерно. Курир од челото на колоната дотрчува до крајот на колоната, предава порака и трчајќи се враќа на челото на колоната. За тоа време колоната поминала $1\,km$. Колкав пат поминал курирот?

29. Половината од патот коњаник го поминал со брзина од 12 километри на час, а остатокот од патот одел пешки со брзина 4 километри на час. Определи ја средната брзина на коњот на тој пат.

30. За време на летувањето Андреј со другарите тргнал на излет. Еден дел

од патот до целта го поминале со автомобил, другиот дел на велосипеди и третиот дел пешачеле. Брзините на движење на трите начини биле пропорционални со броевите 9, 5 и 1. Познато е дека со автомобил патувале половина час подолго отколку со велосипеди, а половина час пократко отколку што пешачеле. Од излет се вратиле со велосипеди. Дали подолго време патувале кога оделе на излет или кога се враќале?

31. Станко и Бојана тргнале еден кон друг со велосипеди. Кога Станко поминал петтина од патот, а Бојана 1300 метри им останало до средбата да поминат три пати подолг пат од патот што дотогаш го поминал Станко. Колку еден од друг биле оддалечени на почетокот Станко и Бојана?

32. Соња и Милан тргнале истовремено од местото A кон местото B. Оддалеченоста на овие места е $7,5\,km$. Соња оди со брзина $4\,km/h$, а Милан со брзина $5\,km/h$. Кога Милан пристигнал во местото B без задржување тргнал назад. На која оддалеченост од местото A Милан ќе ја сретне Соња?

33. Двајца велосипедисти Андреј и Горјан тргнале истовремено од Прилеп за Битола. Андреј се движи со брзина од $16\,km/h$, а Горјан со брзина од $20\,km/h$. Горјан стигнал во Битола и таму се задржал 15 минути, а потоа со велосипедот тргнал назад повторно со истата брзина. На кое растојание од Битола ќе го сретне Андреј, ако патот од Прилеп до битола е долг $38\,km$?

34. На патот кој поврзува две планински села A и B нема рамни делови. Велосипедист на угорнина оди со брзина од $20\,km/h$, а на удолнина со брзина од $40\,km/h$. Определи го растојанието меѓу овие две села ако се знае дека на велосипедистот му се потребни 3 часа да го помине патот од A до B и назад, без да застанува.

35. Филип вози автомобил на угорнина со брзина од 65 километри на час, а на удолнина со брзина 104 километри на час. Кое е растојанието до кое Филип може да отиде и да се врати за еден час? На патот нема рамни делови, туку секогаш се вози или на угорнина или на удолнина.

36. Киро и Рампо тргнале истовремено, Киро од местото A во местото B, а Рампо од местото B во местото A. Секој се движи со своја постојана брзина. Од моментот кога се сретнале, на Киро му биле потребни 16 часа за да стигне во B, а на Рампо 9 часа за да стигне во A. Колку часови секој од нив патувал од едното до другот место?

37. Во 7 часот еден велосипедист тргнал од местото A во местото B, а во исто време друг велосипедист тргнал од местото B кон местото A. Велосипедистите се движеле секој со своја постојана брзина. Растојанието меѓу двете места било $171\,km$. Велосипедистите се сретнале по 3 часа возење. Ако велосипедистот од местото A тргнел 1 час и 54 минути порано, ќе го сретнел велосипедистот од местото B по 4 часа возење. Со која брзина се движел секој од велосипедистите?

38. На кружна патека долга $1650\,m$ се движат два моторциклисти со различни, но константни брзини. Ако се движат во спротивни насоки се среќаваат по една минута, а ако се движат во иста насока тогаш побрзиот ќе го стигне поспориот по 11 минути. Определи ја брзината на секој моторциклист.

39. Растојанието од Скопје до Гевгелија Раде го поминал така што првата половина од времето возел велосипед со брзина v_1, а втората половина од времето возел со автомобил v_2. Станко пак истото растојание го поминал така што првата половина од патот ја поминал возејќи велосипед со брзина v_1, а втората половина од патот возел автомобил со брзина v_2. Кој стигнал побрзо во Гевгелија: Раде или Станко?

40. Два параброда се движат рамномерно во ист правец по две паралелни патеки. Растојанието меѓу нив во 6:00 часот било $200\,km$, во 13:00 часот било $150\,km$ и во 17:00 часот било $130\,km$. Определи го најмалото растојание меѓу парабродите во текот на денот.

41. Летајќи низ ветер, авион го прелетува растојанието од точката A до точката B за 15 минути, а летајќи наспроти ветерот за 18 минути и 45 секунди. Колкава е брзината на авионот и колкава е брзината на ветерот ако растојанието меѓу точките A и B е $100\,km$?

42. Во иста вреќа се наоѓаат грав и грашок кои Пепелашка треба да ги раздели. Односот на масите на грашокот и гравот е 2:3. Маќеата на Пепелашка сметала дека е малку грашок во вреќата, па додала уште $2\,kg$. Сега размерот на масите на гравот спрема грашакот е ист како што бил размерот на почетокот размерот на масите на грашокот спрема гравот. Колку килограми грашок и колку килограми грав треба да раздели Пепелашка?

43. Свежо грозје содржи 80%, а суво грозје содржи 12% вода. Колку килограми свежо грозје се потребни за да се добие 15 килограми суво грозје?

44. Свежите сливи содржат 90% вода, а сушените 12%. Колку суви сливи се добиваат од 110 kg свежи сливи?

45. Матеј добил џепарлак за определен број денови. Требало да троши по 120 денари дневно, но бидејќи тој трошел по 150 денари дневно, последните три дена останал без пари. Колку пари добил Матеј и за колку дена било предвидено да ги потроши парите?

46. Пабло добил џепарлак од родителите за определен број денови. Првиот ден потрошил 10 денари и $\frac{1}{12}$ од преостанатите пари, вториот ден потрошил 20 денари и $\frac{1}{12}$ од преостанатите пари, третиот ден потрошил 30 денари и $\frac{1}{12}$ од преостанатите пари и така се додека имал пари. На крајот Пабло констатирал дека секој ден трошел иста сума пари. Колку пари добил Пабло и за колку дена ги потрошил?

47. Душко живее во Росоман. Денес од својата градина берел лубеници и дињи. Секоја лубеница ја продавал за 80 денари, а секоја диња за 60 денари. За да уплати летување за својот син Павел, потребно е да продаде четвртина од лубениците и половина од дињите, но истата сума ќе ја заработи и ако продаде три четвртини од дињите и дванаесеттина од лубениците. Колку лубеници и колку дињи набрал Душко, ако вкупната вредност на лубениците е за 1920 денари поголема од вкупната вредност на дињите?

48. Ана, Бранко и Вера играат карти. На почетокот секој од нив имал определен број жетони и тоа редоследно во однос $11:10:9$. На крајот на играта броевите на нивните жетони се во однос $11:7:3$. Колку жетони имале поединечно на крајот на играта, ако знаеме дека некој изгубил 363 жетони?

49. Петар имал 100 книги. Еден ден ги преуредил своите книги. Половината од средната полица ги префрлил на долната полица. Од првобитниот број книги од долната полица зел една третина и од тоа една третина ставил на средната полица, а остатокот на горната полица. Потоа од горната полица зел 10 книги и половината од нив ги ставил на средната, а половината на долната полица. По сите преместувања на секоја полица имало толку книги колку што имало на почетокот. Колку книги има на секоја полица?

50. За потребите на спортската секција наставникот Кирил купил 3 фудбалски и 7 ракометарски топки, по што му преостанале дел од парите кои ги имал. Тој пресметал дека ако купел 7 фудбалски и 1 ракометарски топка, тогаш нема да имал доволно пари. Дали на Кирил ќе му преостанат или ќе му недостасуваат пари ако купи 11 ракоментарски топки?

51. На еден натпревар организаторот сака на учесниците да им подели определен број чоколади. Се покажало дека има доволно чоколади секое девојче да добие по две, а секое момче да добие по една чоколада, но нема доволно секое момче да добие по две, а секое девојче да добие по една чоколада. Ако момчињата џентлменски се откажат од својот дел, дали ќе има доволно чоколади за секое девојче да добие по три чиколади:

52. Над земјата Недојдија летале јато од четириесетножни едноглави нетопири и триглави змејови. Петар Пан ги броел нозете, а Ѕвончица главите. Вкупно избројале 658 нозе и 39 глави. Колку нозе има еден змеј?

53. При првата средба на делегациите на Земјата и Марс се покажало дека марсовците имаат нозе како и луѓето, но се разликуваат по бројот на

рацете и бројот на прстите на рацете. На средбата имало 6 марсовци повеќе од луѓе, но вкупниот број прсти (на рацете и на нозете) кај марсовците бил за 1 помал отколку кај луѓето. Колку учесници имало на средбата?

54. Пабло и Матео учествуваат на трка. Бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта пред Пабло е еднаков на бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта по него. Бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта пред Матео е три пати поголем од бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта по него. Сите натпреварувачи стигнале на целта и не постојат двајца кои постигнале исто време. Во конечното рангирање има точно 10 натпреварувачи меѓу Пабло и Матео. Колку луѓе учествувале на натпреварот?

55. Раде, Глигор и Ванчо меѓу себе поделиле џамлии. Прво раде зел третина од сите џамлии, Глигор зел третина од остатокот и Ванчо третина од џамлиите кои останале по Раде и Глигор. Остатокот од џамлиите го поделиле на три еднакви дела, при што Глигор добил 130 џамлии. Колку вкупно џамлии поделиле Раде, Глигор и Ванчо?

56. Тројца работници од еден заеднички куп треба да распоредат исти сандаци на три купа. Прво Крсте од заедничкиот куп зел определено количество сандаци, $\frac{3}{4}$ ставил на купот K, а остатокот рамноправно на куповите L и M. Потоа Ласте од заедничкиот куп зел определено количество сандаци, $\frac{1}{4}$ ставил на купот L, а остатокот рамноправно го поделил на куповите K и M. На крајот Матеј од заедничкиот куп ги зел преостанатите сандаци, $\frac{1}{12}$ ставил на купот M, а остатокот рамноправно го поделил на куповите K и L. На крајот бројот на сандаците на куповите K, L, M бил во однос $3:2:1$. Определи го најмалиот можен број сандаци.

4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Во едно одделение има n ученици, меѓу кои k учат англиски, а l учат руски јазик. Можно е некои ученици да не учат ниту еден од овие два јазика. Колку најмалку ученици ги учат двата јазици (во зависност од n, k, l)?

2. Во едно одделение има 20 момчиња. Меѓу нив 14 имаат сини очи, 15 имаат црна коса, 17 имаат повеќе од $60\,kg$ и 18 имаат повеќе од $165\,cm$. Докажи дека најмалку четири момчиња ги имаат сите наведени својства.

3. На островот на лажливците и витезите постојат четири фудбалски екипи: АХА, ЕХЕ, ОХО и УХУ. Во анкетата на секој островјанин му се поставени четири прашања:
   1) Дали навиваш за АХА?
   2) Дали навиваш за ЕХЕ?
   3) Дали навиваш за ОХО?
   4) Дали навиваш за УХУ?

   Според одговорите на анкетата, процентите на навивачите за одделната екипа се:
   АХА: 40%,
   ЕХЕ: 70%,
   ОХО: 50%,
   УХУ: 0%.
   Колку остројани навистина навиваат за АХА?

4. По еден фудбалски натпревар три момчиња, кои биле стрелци на сите постигнати голови на натпреварот, искажале по две тврдења:
   Ацо. Јас дадов три гола. Илија даде само еден гол.
   Илија. Јас дадов четири гола. Марко даде пет гола.
   Марко. Јас дадов шест гола. Ацо даде само два гола.
   Познато е дека секој од нив кажал едно висинито и едно невситинито тврдење. Стојан, кој бил само навивач, рекол: *На натпреварот без постигнати* 10 *голови*.

Дали тврдењето на Стојан е точно.

5. На еден симпозиум учествувале 100 луѓе – хемичари и алхемичари. Познато е дека хемичарите секогаш ја говорат вистината, а алхемичарите секогаш лажат. На секој од нив му е поставено прашањето: „Ако не те сметаме тебе, дали меѓу преостанатите има повеќе хемичари или алхемичари“. Кога првите 51 испитаници дале одговор дека има повеќе алхемичари, анкетирањето е прекинато. Колку хемичари имало меѓу учесниците на симпозиумот?

6. Симона првиот вторник во месецот го поминала во Неготино, а првиот вторник по првиот понеделник истиот месец го поминала во Битола. Следниот месец, Симона првата среда ја поминала во Кратово, а првата среда по првиот вторник ја поминала во Скопје. Каде таа година била Симона на 8. март?

7. Едно момче во среда и петок секогаш ја говори вистината, во вторник секогаш лаже, а во другите денови може и да лаже и да говори вистина. Во текот на седум последователни денови, му го поставувале истото прашање: „Како се викаш?“. Првите шест одгвори биле:

   АЦО, БОРО, ВАСКО, ВАСКО, ПЕТРЕ, БОРО

   Кој бил неговиот одговор седмиот ден?

8. Невена, Билјана и Снежана седат една до друга така што Невена ги гледа Билјана и Снежана, Билјана ја гледа само Снежана, а Снежана не ја гледа ниту Билјана, ниту Невена. Потоа од кутија во која имало два бели и три црни шешири (содржината на кутијата им била позната на девојките), се земени три шешири и се ставени на главите на девојките, а два шешира останале во кутијата. Тогаш Невена и Билјана редоследно изјавиле:

   Невена: *Јас не ја знам бојата на мојот шешир.*

   Билјана: *Ниту јас не ја знам бојата на мојот шешир.*

   Дали Снежана врз основа на нивните изјави може да ја определи бојата на својот шешир.

9. На дворот на Цар Соломон има 100 мудреци. Царот врши проверка на нивната остроумност на следниот начин: ги постројува во колона еден по друг и на секој на главата му става бела или црна капа. Секој

мудрец ги гледа капите на сите мудреци кои во колоната се пред него, но не ја гледа својата капа, ниту капите на мудреците кои се зад него. Потоа мудреците еден по друг изговараат само еден збор: црна или бела (секој може да говори само еднаш). Потоа Цар Соломон и казнува сите мудреци кои не ја погодиле бојата на својата капа.
Пред проверката мудреците се договориле и смислиле како бројот на казнетите да биде најмал можен број. Колку од нив сигурно нема да бидат казнети?

10. На дворот на Цар Соломон има 100 мудреци. Царот врши проверка на нивната остроумност на следниот начин: ги постројува во колона еден по друг и на секој на главата му става бела, сина или црна капа. Секој мудрец ги гледа капите на сите мудреци кои во колоната се пред него, но не ја гледа својата капа, ниту капите на мудреците кои се зад него. Потоа мудреците еден по друг изговараат само еден збор: црна, сина или бела (секој може да говори само еднаш). Потоа Цар Соломон и казнува сите мудреци кои не ја погодиле бојата на својата капа.
Пред проверката мудреците се договориле и смислиле како бројот на казнетите да биде најмал можен број. Колку од нив сигурно нема да бидат казнети?

11. На еден меѓународен натпревар се поделени 7 медали. Се покажало дека секој добитник на медал зборува два јазика и дека меѓу секои тројца добитници на медали постојат двајца кои зборуваат ист јазик. Докажи дека постојат три добитници на медали кои зборуваат ист јазик.

12. Дадени се 6 точки во рамнината кои определуваат 15 отсечки и 20 триаголници (сите отсечки имаат различни правци), при што должините на сите отсечки се различни. Докажи дека една од овие отсечки е најголема страна на некој од овие триаголници и истовремено е најкратка страна на некој друг триаголник.

13. Сите темиња на правилен стоаголник се обоени во 10 различни бои. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се обоени во најмногу две бои.

14. Една истражувачка лабораторија има специјална (бестежинска) про-

сторија во која предметите лебдат онаму каде што се оставени. Просторијата има форма на квадар со висина 4 *m* и со основа квадрат со страна 7 *m*. Во центарот на основата е поставен носечки столб во форма на квадар со основа квадрат со страна 1 *m* и висина 4 m.
а) Во просторијата се расфрлани 16 балони во форма на топки со дијаметар 10 *cm*, кои лебдат. Дали мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и 2 *m* и ѕидови паралелни на ѕидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него?
б) Што ќе се случи кога би биле 17 балони? Дали, во овој случај, мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и 2 *m* и ѕидови паралелни на ѕидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него?

15. На колку начини можеме секое теме на правилен осумаголник да го обоиме со сина или црвена боја така што не постојат четири истобојни темиња кои се темиња на правоаголник?

16. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои првата и последната цифра се еднакви.

17. Определи го бројот на петцифрените броеви, кај кои сите цифри се различни, а збирот на првата и последната цифра е 8.

18. На тениски турнир учествуваат 10 тенисери и 6 тенисерки. На колку начини нив може да се изберат 4 мешовити парови кои ќе играат мечови по системот првиот пар против четвртиот, а вториот против третиот?

19. На тениски турнир учествуваат 10 тенисери и 6 тенисерки. На колку начини нив може да се изберат 4 мешовити парови кои ќе играат мечови по системот првиот пар против четвртиот, а вториот против третиот, ако се знае дека Елена и Бојан никогаш не играат во заеднички мешовит пар?

20. Фрламе три коцки коцки за играње, на чии ѕидови се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6. Определи го бројот на случаите во кои броевите кои се на ѕидовите на горната страна може да бидат должини на страни на триаголник изразени во сантиметри.

21. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои ниту една цифра не е 0, а производот на цифрите е делив со 20?

22. Колку има:
    а) петцифрени парни природни броеви чиј производ на цифри е парен број,
    б) петцифрени парни природни броеви чиј производ на цифри е непарен број,
    в) петцифрени непарни природни броеви чиј производ на цифри е парен број,
    г) петцифрени непарни природни броеви чиј производ на цифри е непарен број?

23. Колку има:
    а) петцифрени парни природни броеви чиј збир на цифри е парен број,
    б) петцифрени парни природни броеви чиј збир на цифри е непарен број,
    в) петцифрени непарни природни броеви чиј збир на цифри е парен број,
    г) петцифрени непарни природни броеви чиј збир на цифри е непарен број?

24. Во рамнината се дадени 20 различни точки, меѓу кои има 8 тројки колинеарни точки. Колку различни прави се определени со овие точки?

25. Во просторот се дадени 20 различни точки, меѓу кои има 8 петорки компланарни точки. Колку различни рамнини се определени со вие точки?

26. Во просторот се дадени n точки такви што меѓу нив не постојат три колинеарни точки. Овие точки определуваат 2024 различни рамнини. Определи го најмалиот можен број n.

27. Колку има рамнокраки триаголници со периметар $2011\,cm$ чии должини на страни изразени во сантиметри се целобројни?

28. На колку различни начини може да се распоредат сите букви од зборот *ANAGRAM* така што никои две букви A не се една до друга?

29. Воденичарот Марко во својата воденица денес има многу работа. Треба да сомеле 6 вреќи пченка од по $20\,kg$, 4 вреќи од по $30\,kg$ и 4 вреќи од по $40\,kg$. На колку начини Марко може да ја сомеле пченката, ако решил да не меле пченка едно по друго од две вреќи со иста маса?

30. Во записот
$$O \cdot S \cdot T \cdot E \cdot N = S \cdot T \cdot O \cdot L \cdot I \cdot C \cdot A$$
замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што ќе добиеш точно равенство. Колку решенија има задачата?

31. На колку начини буквите може да се заменат со цифри (различни букви со различни цифри, исти букви со исти цифри) така што
$$\frac{R \cdot A \cdot Z}{L \cdot I \cdot C \cdot N \cdot A} = 1$$
е точно равенство?

32. На колку начини во записот
$$A + \overline{BC} + D = \overline{AB} + \overline{CD}$$
буквите може да се заменат со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што добиеното равенство ќе биде точно?

33. При вртењето на калкулаторот за 180° цифрите 0, 1 и 8 не се менуваат, цифрите 6 и 9 ги заменуваат улогите, а преостанатите цифри губат смисла. Определи го бројот на десетцифрените броеви кои не се менуваат при вртење на калкулаторот за 180°.

34. При вртењето на калкулаторот за 180° цифрите 0, 1 и 8 не се менуваат, цифрите 6 и 9 ги заменуваат улогите, а останатите цифри губат смисла. Определи го бројот на деветцифрените броеви кои не се менуваат при вртежето на калкулаторот за 180°.

35. Колку има:
    а) десетцифрени,
    б) единаесетцифрени,
    природни броеви деливи со 11, во чиј декаден запис се појавуваат само цифрите 0 и 5?

36. На таблата е запишана низа од 29 нули и 31 единица. Дозволено е да се изберат било кои два броја и наместо секој од нив да се запише број за 1 поголем. Дали со повторување на оваа операција може да се добијат 60 еднакви броеви.

37. На таблата е запишана низа од 29 нули и 31 единица. Дозволено е да се изберат било кои два броја, да се избришат и наместо нив да се запише 0 ако броевите се различни и единица ако броевите се еднакви. По 59 примени на оваа операција на таблата ќе остане еден број. Кој е тој број?

38. Во рамнината е даден произволен триаголник. Со произволни отсечки подели го триаголникот на 6 триаголника, а потоа некој од добиените триаголници подели го на нови 6 триаголника итн. Дали на овој начин може од почетниот триаголник да се добијат 2010 триаголника?

39. Џентлмените секогаш им ја говорат вистината на своите познаници, а луѓето кои не ги познаваат секогаш ги лажат. Во едно друштво од 50 џентлмени секој на секого од преостанатите му кажал една од следниве две реченици: „Во ова друштво јас имам парен број познаници“ или „Во ова друштво јас имам непарен број познаници“. Дали е можно првата реченица да е изговорена 2025 пати?

40. Даден е правилен десетаголник. Дали неговите темиња може да се означат со броевите 1, 2, 3, 4, 5 така што за секој пар различни броеви постои страна чии крајни точки се означени со овие броеви?

41. Даден е правилен седумнаесетаголник. Дали неговите темиња може да се означат со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 така што за секој пар различни броеви постои страна чии крајни точки се означени со овие броеви?

42. Определи го бројот на различните магични 3×3 квадрат составени од

девет последователни природни броеви, кај кои збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала, т.е. карактеристичниот збир е еднаков на 2007.

43. На колку начини можеме во полињата на 3×3 табела даги запишеме сите природни броеви од 1 до 9, по еден број во секое поле, така што збирот на броевите во секој ред е делив со 3, а збирот на броевите во секоја колона не е делив со 3?

44. Познато е дека меѓу 63 наизглед еднакви златници има 7 фалсификувани. Сите исправни златници имаат иста маса и сите фалсификувани златници имаат иста маса, но малку се полесни од исправните. Како со помош на три мерења на вага без тегови може да се одделат 7 исправни златници?

45. Меѓу 2009 наизглед еднакви топчиња 1005 топчиња се со маса од по 10 грама, а 1004 топчиња се со маса од по 9,9 грама. Колку најмалку мерења на вага со два таса, без тегови, се потребни за да се одделат две множества топчиња со различни маси и со еднаков број топчиња?

46. На пазарот се појавле фалсификувани златници кои на изглед не се разликуваат од вистинските, но се незначително полесни. Златарот Златко добил 20 златници и сака да провери дали меѓу нив има фалсификувани. Дали може на вага без тегови, со најмногу 11 мерења, да го определи бројот на фалсификувани златници? (Можно е сите златници да се исправни, но не се сите фалсификувани.)

47. Јован има тегови со маси $1\,g, 2\,g, 3\,g, ..., 100\,g, 101\,g$, но го загубил тегот од $19\,g$. Дали Јован може преостанатите тегови да ги подели во две групи од по 50 тегови така што масите во двете групи ќе бидат еднакви?

48. Дали е можно теговите со маси: $1^2\ gr, 2^2\ gr, 3^2\ gr, ..., 81^2\ gr$ да се поделат во три групи од по 27 тегови така што збирот на масите во трите групи ќе биде еднаков?

49. Тројца браќа наследиле m златни прачки со маси $1, 2, ..., m$ грамови.

Дали тие можат да ги поделат златните прачки на три купчиња со еднакви маси?

50. Горјан и Андреј пред себе имаат чинија со јаболка. Андреј избира едно јаболко, а потоа едно јаболко избира Горјан. Тие почнуваат да јадат истовремено. Јадат со иста брзина (изразена во грамови во секунда). Секој од нив кога ќе го изеде јаболкото зема ново јаболко (додека има). Кое јаболко прво треба да го земе Андреј за да изеде повеќе, ако масите на јаболката (во грамови) се:
а) 100, 200, 210, 300 и 310,
б) 201, 299, 400, 600 и 900?

51. Дадени се 2009 парчиња сирење со различни маси. Дали може едно од дадените парчиња сирење да се подели на два дела така што потоа сите парчиња сирење да се поделат во две групи со еднаква маса, така што во секоја група има еднаков број парчиња сирење.

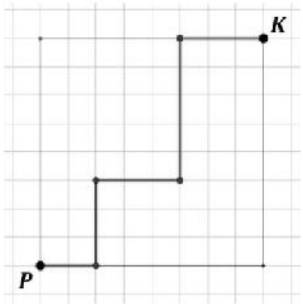
52. Болва скока долж права. Првиот скок е долг $1\,cm$, вториот $3\,cm$ во иста или спротивна насока, третиот $5\,cm$ во иста или спротивна насока итн секој следен е за $2\,cm$ подолг, а скокот може да биде во било која од двете насоки. Дали е можно болвата да се најде во почетната точка по 2016 скокови?

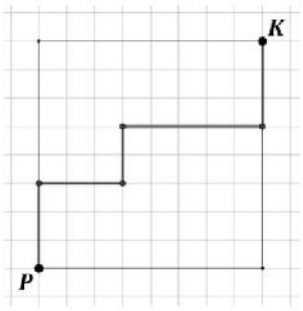
53. Болва скока долж права. Првиот скок е со должина $1\,cm$, вториот со должина $3\,cm$, во иста или спротивна насока, третиот со должина $5\,cm$ во иста или спротивна насока итн. секој следен скок е за $2\,cm$ подолг од претходниот, а скокот може да е во било која од двете насоки. Дали е можно болвата по 2014 скокови да се најде во почетната очка?

54. На колку начини мачка која се наоѓа во координатниот почеток на целобројна квадратна мрежа може да дојде до сирење кое е во точката $M(4,7)$, ако мачката се движи по линиите на решетката така што во секој момент е поблиску до сирењето отколку претходно?

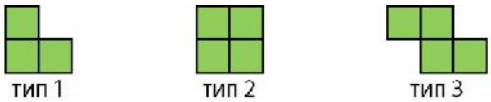
55. Во квадратна мрежа е нацртан квадрат со страна со должина 8. Точките P и K се спротивни темиња на тој квадрат. Мравка се движи

од точката P до точката K исклучиво одејќи горе и десно по страниците на единичните квадрати. На својот пат мравката прави точно четири промени на правецот. На долните цртежи се прикажани два можни примери на движењата на мравката од точката P до точката K. На колку различни начини мравката може да дојде од точката P до точката K на опишаниот начин?



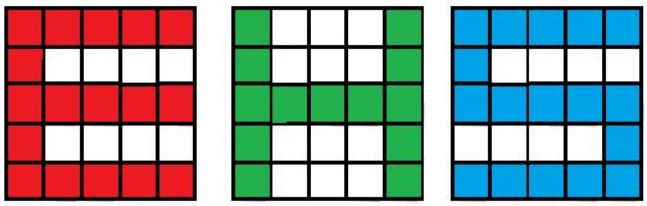


56. а) Докажи дека квадрат 2013×2013 може да се покрие со фигури од три типа:

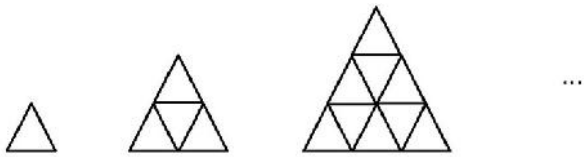


б) Докажи дека во секое покривање учествуваат најмалку 4027 фигури од типот (1).

57. Колку најмногу единечни коцки се потребни за да се состави тело чија слика од лево е буквата Е, од напред е буквата Н и од горе е буквата S (цртеж долу). (Коцките се лепат една до друга.)



58. Костадин прави фигури од еднакви чкорчиња на следниот начин:



На цртежот се прикажани фигури со еден, два и три „ката“. Колку чкорчиња се потребни за да се направи фигурата која ќе има 40 „катови“?

59. Лесно се гледа дека во правоагоник 6×8 може да се сместат 48 кругови со дијаметар 1 кои нема да се препокриваат. Дали може во правоаголник 8×6 да се сместат 50 кругови со дијаметар 1 кои нема да се препокриваат? Круговите може да се допираат и може да ги допираат страните на правоаголникот.

60. Секоја точка во внатрешност и секоја точка на страните на единичниот квадрат се обоени во една од две бои. Докажи дека постојат две точки обоени со иста боја меѓу кои растојанието е поголемо или еднакво на $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

61. На шест картички се напишани цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, на секоја по една цифра. Миле и Раде земаат наизменично по една картичка. Победник е тој што прв од своите картички ќе состави број кој е делив со 31. Миле почнува прв. Кој играч има победничка стратегија?

62. На седум картички се испишани цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 6 (на секоја по една цифра). Миле и Раде наизменично земаат по една картичка. Победник е играчот кој прв со земените картички ќе состави број кој е делив со 17. Миле почнува прв. Кој играч има победничка стратегија?

63. На 2015 картички се запишани броевите од 1 до 2015, на секоја картичка по еден број. Картичките се наредени во низа, во произволен редослед. Дозволено е две картички да ги заменат местата ако бројот запишан на едната картичка е делив со бројот запишан на другата картичка. Докажи дека со повеќекратна примена на дозволената операција картичките може да се наредат во растечки редослед.

64. Тргнувајќи од даден природен број, секоја секунда се додава 54 или 77. Докажи дека по извесно време ќе се добие број чии последни две цифри се еднакви.

65. Двајца играчи ја играат следнава игра. Првиот кажува произволен природен број, вториот на тој број му додава 54 или 77 и го кажува

добиениот збир. Во продолжение играчите наизменично додаваат еден од броевите 54 и 77 и го кажуваат збирот на поj број со претходниот збир. Вториот победува ако било кој од играчите каже број чиј остаток при делење со 100 е прост број. Дали може првиот играч да го оневозможи вториот да победи?

5. ГЕОМЕТРИЈА

5.1. ПЛАНИМЕТРИЈА

1. На правата p се дадени точките A и B и 2005 точки $C_1, C_2, ..., C_{2005}$ кои не припаѓаат на отсечката AB. Нека S_A и S_B се збировите на растојанијата на точките A и B до точките $C_1, C_2, ..., C_{2005}$. Докажи дека не постои распоред на точките $C_1, C_2, ..., C_{2005}$ за кој $S_A = S_B$.

2. На симетралата на правиот агол е избрана точка P. Низ точката е повлечена права l која на краците на аголот отсекува отсечки со должини a и b. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависи од изборот на правата l.

3. Даден е $\triangle ABC$. На правата AC е избрана точка D таква што $\overline{CD} = 3\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е избрана точка E, различна од B, таква што $\overline{CE} = \overline{BC}$. Ако $\overline{BD} = \overline{AE}$, докажи дека $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

4. Точката D е подножје на висината повлечена од темето C на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC. Ако $\overline{AD} = 8\,cm$, $\overline{AC} = 4\sqrt{5}\,cm$, определи го односот на растојанијата од точката D до страните AC и BC.

5. Точката D е подножје на висината повлечена од темето C кон хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC. Ако $\overline{AD} = 8\,cm$ и $\overline{DB} = 2\,cm$, определи ја должината на висината CD.

6. Висината над хипотенузата ја дели хипотенузата на отсечки со должини $12\,cm$ и $3\,cm$. Пресметај ги плоштината и периметарот на триаголникот.

7. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C. Точките D и E се соодветно пресекот на висината и пресекот на симетралата на внатрешниот агол во темето C со хипотенузата AB. Нека $AD = q, BD = p$ и $AE = n, BE = m$. Докажи дека:

   а) $a : b = m : n$ б) $p : q = m^2 : n^2$.

8. Ако тежишните линии на правоаголен триаголник може да се страни на правоаголен триаголник, тогаш должината на барем една катета на дадениот триаголник е ирационален број. Докажи!

9. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен и M и N се две точки од хипотенузата BC, такви што $\measuredangle MAN = 45^\circ$ и $M \in BN$. Докажи дека
$$\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2.$$

10. Даден е правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle ACB = 90^\circ$. Симетралата CD на правиот агол ја дели хипотенузата AB во однос $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 2$. Определи го односот во кој висината ја дели хипотенузата.

11. Симетралата CD на правиот агол во правоаголниот триаголник ја дели хипотенузата AB во однос $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 3$. Нека E е подножјето на висината повлечена од темето C. Определи го односот $\overline{CE} : \overline{AB}$.

12. Од средината S на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е подигната нормала која катетата AC ја сече во точката D. Ако $\overline{AD} = 25\,cm$ и $\overline{CD} = 7\,cm$, пресметај ја должината на отсечката DS.

13. Хипотенузата на правоаголниот триаголник е $25\,cm$, а разликата на катетите е $17\,cm$. Определи ја плоштината на тој триаголник.

14. Должината на хипотенузата на правоаголниот триголник е $41\,cm$, а збирот на должините на неговите катети е $49\,cm$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

15. Даден е правоаголен триаголник ABC. Точките P и M се редослед-

но средини на катетите BC и AC.Определи ги растојанијата на пресечната точка на отсечките AP и BM до катетите на триаголникот ABC ако $\overline{AP}=5\,cm$ и $\overline{BM}=\sqrt{40}\,cm$.

16. Од четири стапа со должина 1 составен е правоаголен триаголник и притоа само еден стап е скршен на два дела.Определи ја плоштината на овој триаголник.

17. Нека O е точка во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC таква што $\measuredangle AOB=113^\circ$ и $\measuredangle BOC=123^\circ$. Определи ги аглите на триаголникот со страни OA,OB и OC.

18. Во рамностран триаголник е впишана кружница k. Потоа се впишани кружници кои допираат по две страни на триаголникот и кружицата k. Определи го односот на плоштините на кругот k и збирот на плоштините на трите мали кругови.

19. Даден е рамностран триаголник ABC. Нормалата кон страната AB спуштена од темето A ја сече правата BC во точка D. Нека M е средна точка на отсечката AD, со N ќе ја означиме пресечната точка на правата MC со симетралата на аголот $\measuredangle BAC$. Докажи дека $AC\perp DN$

20. Даден е тапоаголен рамнокрак триаголник ABC со основа AB со должина 4. Нормалата на AC во точката C ја сече основата AB во точка D. Ако $\overline{AD}=3$, определи ја должината на отсечката CD.

21. Во рамнокрак триаголник ABC е впишана кружница. Ако должината на основата на триаголникот е $12\,cm$, а должината на висината повлечена кон оновата е $8\,cm$, пресметај ја плоштината на оној дел од триаголникот кој е надвор од кружницата.

22. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB,BC,Ca редоследно во точките E,F,G. Ако $GF\parallel AB$, тогаш E е средина на страната AB. Докажи!

23. Даден е агол со теме O и кружница која ги допира краците на тој агол во точките A и B. Од точката B паралелно со OA е повлечена полуправа која ја сече кружницата во точката C. Нека E е точката во која отсечката OC ја сече кружницата и нека правата BE и отсечката OA се сечат во точката K. Докажи дека K е средина на отсечката OA.

24. Симетралата на внатрешниот $\angle BAC$ ги сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката M и страната во точката D. Докажи дека
$$\overline{BM}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{DM}.$$

25. Нека D е точка на страната AB на триаголникот ABC таква што CD е симетралата на $\angle ACB$. Изрази ја должината на страната AB преку должините на страните AC и BC и симетралата CD.

26. Нека D и E се точки на страните AC и BC на триаголникот ABC, тави што отсечката DE ја допира впишаната кружница на триаголникот ABC и $DE \| AB$. Изрази ја должина на отсечката DE во функција од должините на страните на триаголникот ABC.

27. На страната AB на триаголникот ABC, $\overline{AB} > \overline{BC}$ се избрани точките D и E такви што $\overline{DE} = \overline{BC}$ и $\overline{AD} = \overline{BE}$ (D е меѓу A и E). Ако F е средината на страната AC, докажи дека $\measuredangle DFE = 90^\circ$.

28. Во остроаголниот $\triangle ABC$ должините на страните *a*, *b* и *c* се поврзани со релацијата $a + b = 2c$, каде што $a > b$. Од темето *C* се повлечени висина *CD* и тежишна линија *CE*. Докажи дека $\overline{DE} = a - b$.

29. Во триаголникот ABC се повлечени нормали BE и CF на симетралата AD на $\angle BAC$. Докажи дека $\overline{AE} \cdot \overline{DF} = \overline{AF} \cdot \overline{DE}$.

30. На страната BC на триаголникот ABC е дадена точка A_1 таква што $\overline{BA_1} : \overline{A_1C} = 2:1$. Определи во кој однос тежишната линија CC' ја дели отсечката AA_1.

31. Нека D и E се соодветно точки на страните AC и BC на триагол-

никот ABC такви, то $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{2}{3}$ и $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{2}{1}$. Отсечките AE и BD се сечат во точката S. Во кој однос точката S ја дели отсечката AE?

32. Нека D и E се точки редоследно на страните AC и BC на триаголникот ABC и S е пресек на отсечките AE и BD. Ако $\frac{\overline{AS}}{\overline{SE}}=\frac{2}{1}$ и $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{1}{3}$, во кој однос точката D ја дели страната AC?

33. Во триаголникот ABC е $\overline{BC}=a, \overline{AB}=\overline{AC}=b$ и $\angle BAC=108^\circ$. Докажи дека $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=1$.

34. Во триаголникот ABC е $\overline{BC}=a, \overline{AB}=\overline{AC}=b$ и $\angle ABC=\angle ACB=72^\circ$. Докажи дека $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$.

35. Правата која минува низ темето C и средината S на тежишната линија AD ја сече страната AB на триаголникот ABC во точката E. Во кој однос точката E ја дели страната AB?

36. На страната BC на триаголникот ABC е избрана точка D таква што $\overline{BD}:\overline{CD}=1:2$. Правата која минува низ темето C и средината S на отсечката AD ја сече страната AB во точката E. Во кој однос точката E ја дели станата AB?

37. Во триаголникот ABC тежишната линија AD е нормалана на тежишната линија BE. Ако $\overline{BC}=6$ и $\overline{AC}=8$, пресметај ја должината на страната AB.

38. Периметрите на триаголниците ABC и $A'B'C'$ се разликуваат за $6\,cm$, а соодветните страни на овие триаголници се однесуваат како $5:6$. Ако $\overline{AB}=8\,cm$ и $\overline{BC}=13\,cm$, определи ги страните на триаголникот $A'B'C'$.

39. Висините на триаголникот ABC се со должини $2,4\,cm, 3\,cm$ и $4\,cm$.

Определи го радиусот на впипаната кружница на триаголникот ABC.

40. Во внатрешноста на произволен триаголник ABC е избрана точка M. Должините на нормалите од точката M до страните BC, CA, AB да ги означиме соодветно со n_a, n_b, n_c. Докажи дека

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

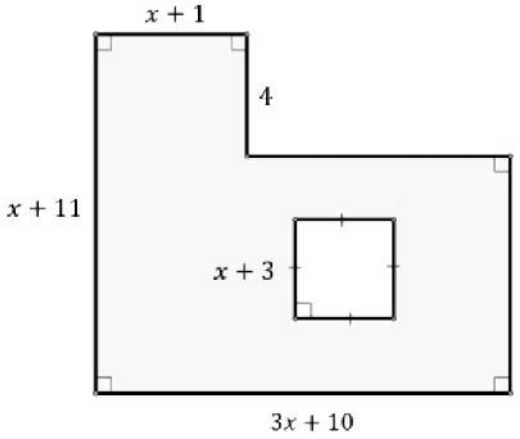
каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини во триаголникот.

41. Должината на едната страна на триаголникот е $36\,cm$, а збирот на должините на другите две страни е $60\,cm$. Колку треба да бид должините на секоја од двете страни, за да радиусот на впишаната кружница во овој триаголник биде најголем?

42. Произволна точка M во внатрешноста на триаголникот ABC е поврзана со темињата на триаголникот, со што триаголникот е поделен на три триаголника. Нека T_1, T_2, T_3 се тежиштата на овие триаголници. Колку пати плоштината на триаголникот ABC е поголема од плоштината на триаголникот $T_1T_2T_3$?

43. Даден е квадрат $ABCD$. На продолжението на дијагоналата AC е избрана точка E така што $\overline{DE}=\overline{AC}$. Одреди ја големината на аголот DEC.

44. Определи ја плоштината на обоената фигура на долниот цртеж и изрази ја во облик ax^2+bx+c.



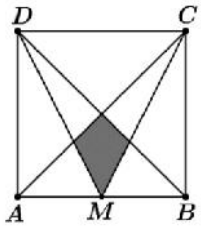
45. Над катетите AC и BC на правоаголен триаголник ABC надвор од триаголникот се нацртани квадрати $ACDE$ и $BFGC$. Отсечките AF и BE ги сечат катетите BC и AC соодветно во точките M и N. Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$.

46. Две темиња на квадрат припаѓаат на кружница со радиус $5\,cm$, а другите две на тангентата на таа кружница. Определи ја должината на страната на тој квадрат.

47. Даден е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Над хипотенузата AB како над страна, надвор од триаголникот ABC, е конструиран квадрат $ADEB$. АКо $\overline{AC} = 8$ и $\overline{BC} = 6$, пресметај ја должината на отсечката CE.

48. Произволна точка M во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е поврзана со отсечки со темињата на квадратот. На тој начин квадратот е поделен на четири триаголници. Нека T_1, T_2, T_3, T_4 се тежиштата на овие триаголници. Колку пати плоштината на квадратот $ABCD$ е поголема од плоштината на четириаголникот $T_1T_2T_3T_4$?

49. Должината на страната на квадратот прикажан на цртежот десно е $1\,m$. Точката M е средина на страната AB. Пресметај ја плоштината на осенчениот дел на квадратот.



50. Нека $ABCD$ е квадрат. Точките K, L, M и N лежат на страните AB, BC, CD и DA, соодветно и тие се темиња на квадрат. Правите DK и NM се сечат во точката E, а правите CK и LM се сечат во точката F. Докажи дека правите EF и AB се паралелни.

51. Од хартија е исечен правоаголник $ABCD$. На страната AB е избрана точка E таква што $\overline{AE} = 8$ и $\overline{BE} = 17$. На страната CD е избрана точка F таква што $\overline{CF} = 3$. По превиткување на хартијата по должината на отсечката EF темето B се поклошва со точка S на страната AD. Определи ја должината на страната BC на правоаголникот $ABCD$.

52. Точката M е средина на страната CD на квадратот $ABCD$ со страна со должина 4. Кружницата со центар во M и радиус 2 и кружницата со центар во A и радиус 4 се сечат во точките D и P. Определи ја оддалеченоста на точката P до правата AD.

53. Точките E и F припаѓаат редоследно на страните AB и AD на квадратот $ABCD$ и важи $\overline{AE} = \overline{DF}$. Точката G е пресек на отсечките CD и DE. Докажи дека $\angle CEF = \angle AGB$.

54. Во триаголникот ABC е впишан квадрат $PQRS$ така што темињата P и Q припаѓаат соодветно на страните AB и AC, а темињата R и S на страната BC. Изрази ја должината на страната на страната на квадратот преку должините a на страната BC и соодветната висина h_a.

55. Во правоаголен триаголник е впишан квадрат, така што на секоја страна на триаголникот лежи по едно теме од квадратот, а четвртото теме на квадратот е темето на правиот агол на триаголникот. Ако должината на едната катета на правоаголниот триаголник е $12\,cm$, а должината на хипотенузата е $15\,cm$, пресметај ја плоштината на квадратот.

56. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза $13cm$ и катета $5cm$.

57. Ако во правоаголникот страните се однесуваат како $\sqrt{2}:1$, тогаш нормалите спуштени од две спротивни темиња врз дијагоналата ја делат дијагоналата на три еднакви дела. Докажи!

58. Од темето C на паралелограмот $ABCD$ ($\overline{AC} > \overline{BD}$) повлечени се нормали CE и CF на продолженијата на страните AB и AD. Докажи дека $\overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF} = \overline{AC}^2$.

59. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека точката M е средина на страната CD, а точката N е средина на страната AD. Правите AM и BN се

сечат во точката P. Колкав дел од плоштината на паралелограмот $ABCD$ е плоштината на триаголникот ANP?

60. Даден е четириаголник $ABCD$, така што збирот на должините на страните AB и AC е $10\,cm$, $\overline{BC}=\overline{CD}$ и $\angle BAD=\angle ACD=90^\circ$. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

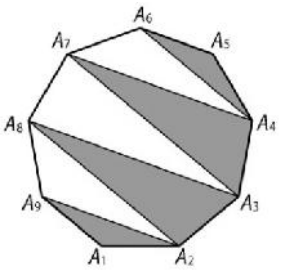
61. Основите на правоаголен трапез се $20\,cm$ и $30\,cm$, а висината е $40\,cm$. Определи ги растојанијата од пресекот на дијагоналите на тој трапез до неговите страни.

62. На страната AB на триаголникот ABC е земена произволна точка D. Нека правата p која минува низ точката D и е паралелна со BC ја сече AC во точката E, а правата q која минува низ точката D и е паралелна со AC ја сече BC во точката F. Докажи дека
$$P_{CEDF}=2\sqrt{P_{ADE}\cdot P_{BDF}}\ .$$

63. Даден е правилен петаголник $ABCDE$. Полуправите AB и DC се сечат во точката F. Докажи дека $\overline{FB}=\overline{AC}$.

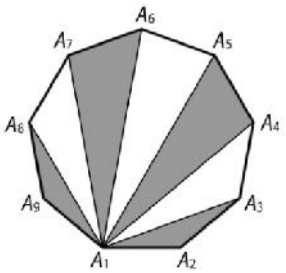
64. Нека P и Q се точки на страните DE и EF, соодветно, на правилниот шестаголник $ABCDEF$ за кои важи дека збирот $\overline{EP}+\overline{EQ}$ е еднаков на страната на шестаголникот. Нека R е пресекот на отсечките BP и CQ.
а) Определи ја мерката на $\angle BRC$.
б) Докажи дека плоштините на триаголникот BCR и четириаголникот $PRQE$ се еднакви.

65. Во правилен деветаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ е повлечена искршената линија $A_9A_2A_8A_3A_7A_4A_6$. Таа деветаголникот го дели на 7 делови (види цртеж). Секој триаголник е обоен во една од две бои – сива или бела, при што секои два триаголника со заедничка страна се обоени со различни бои.



Притоа се добиени четири сиви и три бели триаголници. Кој дел од многуаголникот има поголема плоштина – белиот или сивиот?

66. Во правилен деветаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ се повлечени сите дијагонали од темето A_1. Тие деветаголникот го делат на 7 делови (види цртеж). Секој триаголник е обоен во една од две бои – сива или бела, при што секои два триаголника со заедничка страна се обоени со различни бои. Притоа се добиени четири сиви и три бели триагол-ници. Кој дел од многуаголникот има поголема плоштина – белиот или сивиот?



67. Дадени се кружница $k(O,4\,cm)$ и негови тетиви AB и CD кои се сечат во точката S. Пресметај ја должината на отсечката DS ако $\overline{AS}=4\,cm,\ \overline{BS}=2\,cm$ и $\overline{CS}=3\,cm$.

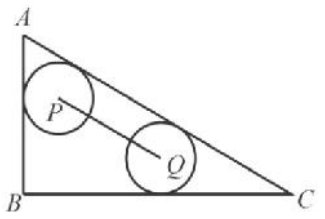
68. Дадена е кружница $k(O,r)$ и точки A,B,C,D на неа такви што правите AB и CD се сечат во точката S. Докажи дека

$$\overline{AS}\cdot\overline{BS}=\overline{CS}\cdot\overline{DS}. \qquad (1)$$

69. Тетивите AB и CD на една кружница се заемно нормални и се сечат во точката M. Докажи дека збирот $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2$ е константен за било кој избор на тетивите AB и CD.

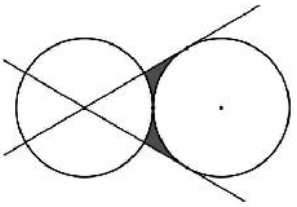
70. На кружница k се избрани три точки A,B,C и нека X,Y,Z соодветно се нивните дијаметрално спротивни точки во k. Нека A',B',C' се средините на тетивите YZ,ZX,XY соодветно. Докажи дека правите AA',BB',CC' се сечат во една точка.

71. Две кружници со радиус r и центри P и Q се впишани во правоаголен триаголник ABC како на цртежот десно, при што $\overline{AB}=6\,cm$ и $\overline{BC}=8\,cm$. Отсечката PQ со пресечните точки со кружниците е поде-



лена на три еднакви делови. Определи го радисуот r.

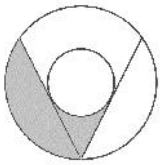
72. Две кружници со еднакви радиуси се допираат надворешно. Од центарот на едната кружница се повлечени тангенти на другата кружница (види цртеж). Определи ја плоштината на обоениот дел, ако радиусите на кружниците се еднакви на r.



73. Дадени се две концентрични кружници. Тетива со должина d на поголемата кружница ја допира помалата кружница. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен кој е определен со овие две кружници.

74. Правилен седумаголник и правилен 2014-аголник имаат еднакви должини на страни. Ги разгледуваме кружните прстени определени со опишаната и впишаната кружница на седумаголникот и на 2014-аголникот. Кој од овие два кружни прстени има поголема плоштина?

75. Радиусите на концентричните кружници кои формираат кружен прстен прикажан на цртежот десно имаат должини r и $2r$. Одреди го односот на плоштините на осенчениот и неосенчениот дел од кружниот прстен.



76. Дадени се две концентрични кружници. Тетивата AB на поголемата кружница со помалата кружница е поделена на три еднакви делови со точки C и D (C е меѓу A и D). Ако $\overline{AC} = m$, пресметај ја плоштината на прстенот определен со двете кружници, во зависност од m.

77. Во круг со радиус R се впишани шест еднакви мали кругови секој од кои надворешно допира два мали круга и сите внатрешно го допираат големиот круг. Определи го радиусот на еден таков мал круг.

78. Во кружница со радиус R се впишани 8 еднакви мали кружници така што секоја од нив надворешно допира по две мали кружници и сите внатрешно ја допираат големата кружница. Определи го радиусот на една таква мала кружница.

79. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b, аголот при врвот е еднаков на 20°. Докажи дека $b < 3a$.

80. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b, аголот при врвот е 9°. Докажи дека $b < 7a$.

81. Од сите правоаголни триаголници кои имаат збир на должините на катетите еднаков на S определи го триаголникот кој има најголема плоштина.

82. Од сите правоаголни триаголници со хипотенуза со должина c определи го оној кој има најголем збир на должините на катетите.

83. На страната AB на $\triangle ABC$ дадена е точка S таква што $\overline{AS} : \overline{SB} = m : n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Докажи дека
$$\overline{SC} < \frac{n}{m+n}\overline{AC} + \frac{m}{m+n}\overline{BC}.$$

84. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен триаголник со прав агол во темето C и M е произволна точка на хипотенузата AB. Нека точките E и D се ортогонални проекции на точката M врз катетите BC и AC, соодветно. Ако a, b се дожините на катетите на $\triangle ABC$ докажи дека
$$\overline{DE} \geq \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (*)$$
Кога важи знак за равенство?

5.2. СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. Дадена е рамнина ~ и точки A и B од различни страни на рамнината, така што правата која минува низ точките A и B не е нормална на рамнината. Ако растојанијата од точките A и B до рамнината ~ се $1\,cm$ и $5\,cm$, соодветно, колкаво е растојанието од средината на отсечката AB до рамнината ~ ?

2. Дадена е рамнина ~ и точки A и B од иста страна на ~ . Од другата страна на рамнината ~ е дадена точка C, при што точките A, B и C не се колинеарни. Ако точките A, B и C се на растојание од рамнината ~ редоследно $9\,cm, 8\,cm$ и $2\,cm$, определи го растојанието на тежиштето на триаголникот ABC од рамнината ~ .

3. Во рамнината ~ е даден рамностран триаголник ABC со должина на страна a. Точката S е надвор од рамнината ~ и од секоја од точките A, B и C е оддалечена $2a$. Определи го растојанието од точката S до рамнината ~ .

4. Во рамнината ~ е даден рамностран триаголник ABC со должина на страна a. Пресекот на рамнините ~ и е правата AB, при што аголот меѓу рамниниte ~ и е 45°. Определи го растојанието од тежиштето на триаголникот ABC до рамнината .

5. Точката A од едниот ѕид на прав диедар е оддалечена два пати повеќе отколку од другиот ѕид. Определи ја оддалеченоста на точката A од ѕидовите на диедарот ако таа од неговиот раб е оддалечена $8\,cm$.

6. На различните рабови на прав триедар се дадени точки A, B, C кои од темето S на триедарот се оддалечени редоследно $2\,cm, 3\sqrt{5}\,cm, 6\,cm$. Определи го периметарот на триаголникот ABC .

7. Точките A, B, C се наоѓаат на различни рабови на прав триедар со теме S. Ако $\overline{AB} = 5\,cm, \overline{CS} = 6\,cm, \overline{BC} = 7\,cm$, пресметај ги аглите на триаголникот ASC .

8. Правата p на која и припаѓаат точките A и B зафаќа со рамнината Σ агол од 30°. Должината на отсечката AB е еднаква на $12\,cm$. Ако едната крајна точка на отсечката од рамнината Σ е оддалечена $1\,cm$, пресметај колку од рамнината Σ е оддалечена другата крајна точка.

9. Должината на отсечката AB е $12\,cm$. Едниот крај на отсечката е оддалечен $8\,cm$, а другиот е оддалечен $2\,cm$ од рамнината Σ. Пресметај ја должината на проекцијата на отсечката AB врз рамнината Σ.

10. Рамнините ~ и зафаќаат агол од 60°. Нивната пресечна права е правата p. Во рамнината е даден рамнокрак трапез $ABCD$ таков што основите на трапезот AB и CD се паралелни со правата p. Ако плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на 2012, колкава е плоштината на четириаголникот $A'B'C'D'$ кој е проекција на трапезот $ABCD$ на рамнината ~.

11. Нека ABC е триаголник во рамнината ~ и M е точка надвор од рамнината ~ таква што $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$. Докажи дека нормалата повлечена од точката M на рамнината ~ минува низ центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

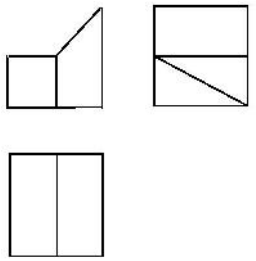
12. Рамнината ~ ја содржи хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC и со рамнината на триаголникот зафаќа агол од 30°. Определи го растојанието од темето на правиот агол до рамнината ~ ако должините на нателите се $3\,cm$ и $4\,cm$.

13. Катетата на правоаголниот триаголник ABC, со прав агол во темето C, припаѓа на рамнината ~, а рамнината на триаголникот ABC и рамнината ~ формираат диедар со агол 45°. Ако важи $\overline{AC}=2$ и $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$, определи го растојанието од точката B до рамнината ~.

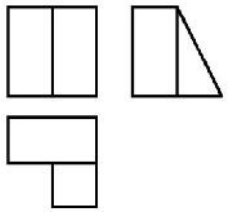
14. Рамнината на триаголникот ABC е во коса положба во однос на рамнината ~. Темињата A,B,C се на иста страна на рамнината ~ и се на

растојание $2\,cm, 4\,cm, 6\,cm$ од рамнината $\sim$, соодветно. Определи го растојанието од тежиштето на триаголникот ABC до рамнината $\sim$.

15. На цртежот десно се дадени цртежи на едно тело. Горе лево е цртежот на тоа тело кога се гледа од предната страна, горе десно е даден цртежот кога телото се гледа од левата страна и долу е даден цртежот на телото кога се гледа од горната страна. Нацртај го ова тело.



16. На цртежот десно се дадени цртежи на едно тело. Горе лево е цртежот на тоа тело кога се гледа од предната страна, горе десно е даден цртежот кога телото се гледа од левата страна и долу е даден цртежот на телото кога се гледа од горната страна. Нацртај го ова тело.



17. Дадена е коцка. Секој раб на коцката е поделен на три еднакви делови. Потоа секое ќоше на коцката е отсечено со рамнината која ги содржи трите точки на поделбата кои се најблиски до тоа ќоше. Нацртај ја мрежата на добиеното тело.

18. Односот на плоштините на ѕидовите на даден квадар е $2:3:5$. Определи го односот на должините на рабовите на овој квадар.

19. Определи го односот на должините на рабовите на квадар чии ѕидови со заедничко теме имаат плоштини P_1, P_2 и P_3.

20. Ако размерот на должините на рабовите на квадарот се $15:12:20$, во кој размер се плоштините на неговите различни ѕидови.

21. Плоштините на три ѕида на квадарот се $24\,cm^2, 28\,cm^2$ и $42\,cm^2$. Определи го волуменот на овој квадар.

22. Коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е пресечена со рамнините BDA_1, BDC_1, DA_1C_1 и BA_1C_1 на пет тристрани пирамиди. Определи ги должините на рабови-

те на тие пирамиди ако должината на работ на коцката е a.

23. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажи дека рамнините A_1BC_1 и ACD_1 се нормални на дијагоналата B_1D и дека ја делат таа дијагонала на три еднакви дела.

24. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рамнината ~ ги содржи дијагоналата AC на основата на коцката и темето D_1. Плоштината на пресекот на рамнината ~ и коцката е еднаква на S. Определи ги плоштината и волуменот на коцката.

25. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$. Растојанието од темето A до дијагоналата на коцката BD е еднакво на d. Определи ги плоштината и волуменот на дадената коцка.

26. Точките M, N, P се средини на три заемно разминувачки рабови на коцка (никои два раба не се сечат и не се паралелни). Должината на работ на коцката е $4\,cm$. Определи ја плоштината на триаголникот MNP.

27. Плоштините на три ѕида на дрвен квадар изнесуваат $6\,dm^2; 8\,dm^2$ и $12\,dm^2$. Кај секое од темињата изделкана и отстранета е коцка така што едно нејзино теме се совпаѓа со темето на квадарот, при што страната на коцката е 25% од најмалата страна на квадарот. Пресметај:
а) го бројот на темиња, рабови и ѕидови на добиеното тело,
б) ги плоштината и волуменот на квадарот и телото.
в) Процентот на плоштината и процентот на волуменот на телото во однос на соодветната мерка на квадарот.

28. Дијагоналата на правилна четиристрана призма е $16\sqrt{3}\,cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата ако дијагоналата на призмата е наклонета кон рамнината на основата под агол од 30°.

29. Должината на дијагоналата на правилна четиристрана призма е $16\,cm$. Определи ја плоштината на призмата, ако дијагоналата со рамнината

на основата зафаќа агол од 60°.

30. Дијагоналата на правилна четиристрана призма со рамнината на основата зафаќа агол од 30°. Ако волуменот на призмата е $324cm^3$, пресметај ја должината на дијагоналата.

31. Рабовите на квадарот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ се $\overline{AB}=3, \overline{BC}=1, \overline{CC_1}=2$. Нека M е средина на работа B_1C_1. Определи го волуменот на четиристраната пирамида BCD_1A_1M со основа BCD_1A_1 и врв M.

32. Дијагоналата на еден бочен ѕид на правилна тристрана призма е еднаква на $8\sqrt{3}\,cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата ако дијагоналата на бочниот ѕид со размнината на основата зафаќа агол од 60°.

33. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб со должина a. Рамнината ~ која минува низ дијагоналата AC_1 и темето B ја дели дадената коцка на две геометриски тела. Определи ги плоштините и волумените на добиените геометриски тела.

34. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со раб a. Рамнината Σ која ја содржи дијагоналата на коцката AC' и средината B'' на работ BB', ја дели дадената коцка на две геометриски тела. Пресметај ги плоштините и волумените на добиените геометриски тела.

35. Од коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб a е исечена права тристрана призма $EFCE_1F_1C_1$, каде E е средина на работ AB и F е средина на работ AD. Определи го волуменот на оваа призма.

36. Должината на бочниот раб на правилна чеиристрана пирамида е $5\sqrt{3}\,cm$, а апотемата со рамнината на основата зафаќа агол од 60°. Определи го волуменот на оваа пирамида.

37. Основниот раб и висината на правилна четириаголна пирамида се однесуваат како $5:6$, а волуменот на пирамидата е $400\,cm^3$.

Пресметај ја плоштината на оваа пирамида.

38. Дали постои правилна шестстрана еднакворабна призма кај која збирот на сите дијагонали е еднаков на збирот на сите рабови?

39. Основниот раб на правилна шестстрана призма е зголемен за 200%, а висината е намалена за $p\%$. Ако волуменот на таа призма се зголемил за $p\%$, определи дали плоштината на омотачот се зголемила или се намалила и за колку проценти?

40. Основниот раб на правилна шестстрана призма е четири пати пократок од нејзината висина, а збирот на должината на висината и основниот раб е $30\,cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на оваа призма.

41. Квадрат со страна $a = 30$ е заедничка долна основа на правилна четиристрана призма и правилна четиристрана пирамида при што врвот на пирамидата е во центарот на горната основа на призмата. Определи го волуменот на пирамидата ако се знае дека плоштината на омотачот на пирамидата е два пати поголема од плоштината на омотачот на призмата.

42. Бочните рабови на правилна тристрана пирамида меѓусебно градат агли од по 90°. Определи ја плоштината на оваа пирамида ако должината на бочниот раб е $6\sqrt{2}\,cm$.

43. Трите бочни рабови на тристрана пирамида се со должини $5\,cm$, $9\,cm$ и $12\,cm$, при што два по два се заемно нормални. Пресметај ја плоштината на оваа пирамида.

44. Бочните рабови на правилна тристрана пирамида меѓусебно зафаќаат прави агли. Определи ја плоштината на пирамидата, ако должината на основниот раб на пирамидата е $4\,cm$.

45. Спротивните рабови на даден тетраедар $ABCD$ се еднакви, односно $\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{BC} = \overline{AD}, \overline{AC} = \overline{BD}$. Шесте рамнини, од кои секоја содржи

еден раб на тетраедарот и е паралелна на спротивнот раб на тој тетраедар, определуваат паралелопипед. Докажи дека вака добиениот паралелопипед е квадар, чиј волумен е три пати поголем од волуменот на тетраедарот.

46. Спротивните рабови на даден тетраедар се еднакви и нивните должини се a,b и c. Изрази го волуменот на овој тетраедар во функција од a,b и c.

47. Основата на пирамидата е триаголник со страни $13\,cm, 14\,cm, 15\,cm$, а нејзините бочни рабови се по $8,75\,cm$. Определи го волуменот на оваа пирамида.

48. Основата на пирамидата е правоаголен триаголник со катети $5\,cm$ и $12\,cm$. Бочните ѕидови со основата зафаќаат агли по 60°. Определи и плоштината и волуменаот на оваа пирамида.

49. Бочниот ѕид OAB на тристрана пирамида $OABC$ е рамностран триаголник со страна $\overline{AB} = 6\sqrt{3}\,cm$. Рабовите CA, CB и CO се меѓусебно еднакви. Висината на пирамидата е $\overline{OO_1} = 4,5\sqrt{3}\,cm$. Определи го волуменот на пирамидата $OABC$.

50. Од правилна четиристрана пирамида $ABCDS$ отсечена е правилна четиристрана пирамида $EFGHS$. Темињата E, F, G, H припаѓаат редоследно на рабовите AB, BC, CD, DA, а основните рабови на пирамидата $EFGHS$ со основните рабови на пирамидата $ABCDS$ формираат агли од 30°. Определи го односот на волумените на овие две пирамиди.

51. Пресметај го растојанието меѓу средините на два спротивни раба на тристрана еднакворабна пирамида.

52. Даден е правилен тетраедар со должина на раб a. Во внатрешноста на тетраедарот определи точка S која е еднакво оддалечена од сите четири темиња на тетраедарот. Докажи дека точката S ја дели висината на тетраедарот во однос $3:1$ одејќи од темето на тетраедарот кон

подножјето на висината.

53. Должината на висината на правилна четиристрана пирамида е $5\sqrt{3}\,cm$, а апотемата со рамнината на основата формира агол од 60°. Определи ја должината на бочниот раб на оваа пирамида.

54. Во правилна четиристрана пирамида со основен раб 24 и висина 16 е впишана правилна четиристрана призма со максимален волумен. Определи го односот на волумените на пирамидата и впишаната призма.

55. Во тристрана еднакворабна пирамида со раб $6\,cm$ е впишана четиристрана призма чиј основен раб е два пати пократок од нејзината висина. Пресметај го основниот раб на оваа призма.

56. Дадена е коцка со раб $5\,cm$. Да ги земеме шесте точки кои се средини на ѕидовите на коцката. Секоја од овие шест точки да ја поврземе со средините на четирите соседни ѕида на коцката. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

57. На октаедарот од претходната задача да ги означиме точките на тежиштата на ѕидовите. Секоја од овие точки да ја поврземе со тежиштата на соседните ѕидови. На овој начин се добива коцка. Пресметај ја плоштината на оваа коцка и односот на волумените на новодобиената и почетната коцка од претходната задача.

58. Дадена е правилна шестстрана пирамида $ABCDEFS$ со врв S. Висината и основниот раб на пирамидата се со должина $4\,cm$. Пирамидата е пресечена со рамнините BDS и DFS. Определи ги плоштината и волуменот на новодобиената четиристрана пирамида.

59. Дадени се две еднакви прави призми, чии основи се рамнокраки правоаголни триаголници со катети $5\,cm$. Висините на призмите се по $10\,cm$. Колку различни призми можеме да составиме од овие две еднакви призми? Спореди ги нивните плоштини.

60. Определи го односот на волумените на два цилиндри, ако радиусите

на основите се однесуваат како $2:3$, а висините како $3:4$.

61. Радиусите на основите на два цилиндри се однесуваат како $1:2$, а волумените како $1:12$. Определи го односот на нивните висини.

62. Вкупната должина на дијаметарот и висината на цилиндарот е еднаква на $14\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на овој цилиндар ако односот на висината и радиусот на цилиндарот е $5:1$.

63. Конус и цилиндар имаат еднакви плоштини, а нивните оскини пресеци се редоследно рамностран триаголник и квадрат. Определи го односот на волумените на двете тела.

64. Рамнина паралелна со оската на цилиндарот го сече така што од основата отсекува отсечок соодветен на централен агол од 120°. Должината на оската е $10\,cm$, а нејзиното растојание од пресечната рамнина е $2\,cm$. Определи ја плоштината на пресекот.

65. Рамнина паралелна на оската на цилиндарот го сече цилиндарот така што од основите отсекува отсечоци на кои им соодветствува централен агол од 120°. Оската на цилиндарот од таа рамнина е оддалечена $3\,cm$. Ако плоштината на пресекот е $54\sqrt{3}\,cm^2$, пресметај го волуменот на цилиндарот.

66. Даден е конус со плоштина $P = 324\pi\ cm^2$, чија изводница s е $9\,cm$ пократка од дијаметарот на основата. Определи го волуменот на овој конус.

67. Плоштината на конусот е $36\pi\ cm^2$, а плоштината на омотачот е три пати поголема од плоштината на основата. Пресметај го волуменот на конусот.

68. Волуменот на еден конус е $12\pi\ cm^3$, а должината на изводницата е 3,5 пати поголема од должината на дијаметарот на основата. Определи ја плоштината на овој конус.

69. Плоштината на конусот е $200® \, cm^2$, а должината на дијаметарот на основата е за $1\,cm$ помала од должината на изводницата. Пресметај го волуменот на овој конус.

70. Правоаголен трапез ротира околу подолгата основа. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело ако основите на трапезот се долги $13\,cm$ и $17\,cm$, а висината на трапезот е долга $3\,cm$.

71. Ромб со плоштина $15\,cm^2$ се врти околу својата страна за 360°. Определи ја плоштината на добиеното ротационо тело.

72. Правоаголен трапез, со основи $1\,cm$ и $13\,cm$ и висина $5\,cm$, ротира околу помалата основа. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

73. Правоаголен трапез ротира околу права на која лежи пократкиот крак. Опреели ги волуменот и плоштината на добиеното тало ако должините на основите се $10\,cm$ и $6\,cm$, а остриот агол на трапезот е 60°.

74. Во конус со радиус на основата $6\,cm$ е впишан цилиндар со радиус на основата $3\,cm$ и висина $5\,cm$. Основата на цилиндарот лежи на основата на конусот. Определи го волуменот на делот од конусот кој е надвор од цилиндарот.

75. Сад во облик на цилиндар, со радиус на основата $4\,cm$ и висина $12\,cm$, наполнет е со вода до $\frac{2}{3}$ од својата висина. Матеј во садот уфрлил 30 оловни топчиња со радиус $1\,cm$. Дали по ставањето на топчињата дошло до прелевање на водата од сдот?

76. Во цилиндричен сад со радиус на основата $8\,cm$ и висина $14\,cm$ се ставени 35 метални топки со радиус $3\,cm$. Потоа во садот се турени $300\,ml$ течност. Колку најмногу литри вода може да се тури во садот, а водата да не се прелее? (Земи $® \approx \frac{22}{7}$.)

77. Од конус со радиус на основата $4\,cm$ исечен е впишан цилиндар со радиус на основата $2\,cm$ и висина $3\,cm$. Пресметај ја плоштината на вака добиеното тело.

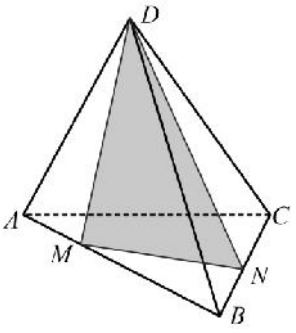
78. Рамнокрак трапез ротира околу права на која лежи еден од краците. Определи ги плоштината и волуменот на настанатото тело ако должините на основите на трапезот се $10\,cm$ и $4\,cm$, а остриот агол на трапезот е 30°

79. Определи ги плоштината и волуменот на топката која е впишана во коцка со плоштина $216\,cm^2$.

80. Определи ги плоштината и волуменот на топка опишана околу коцка со волумен $24\sqrt{3}\,cm^3$.

81. Дадена е тристрана пирамида $ABCD$ и S е тежиштето на триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{SD} < \frac{\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}}{3}$.

82. Даден е правилен тетраедар $ABCD$ чиј раб има должина a. Рамнината ¢ ја содржи точката D и ги сече рабовите AB и BC редоследно во точките M и N така што пресекот на тетраедарот и рамнината ¢ е триаголникот DMN (цртеж десно). Докажи дека периметарот на пресечниот триаголник DMN е поголем од $2a$.



6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Определи четирицифрен природен број кој се зголемува 4 пати кога неговите цифри ќе се запишат во обратен редослед.

2. Дали постои трицифрен број кој ќе се зголеми четири пати ако неговите цифри се запишан во обратен редослед?

3. Колку цифри има најмалиот природен број n таков што збирот на цифрите на бројот n и збирот на цифрите на бројот $n+1$ е делив со 1990?

4. а) Марко испишува низа броеви според следново правило: како прв член го запишува бројот 1, а секој следен член се добива така што претходниот член се зголемува за најголемата цифра од неговиот запис, т.е. за соодветниот едноцифрен број. Дали е можно во низата да се појави бројот 2012?
   б) Истото прашање ако наместо 1 за прв член се земе било кој број помал од 1000?

5. На колку начини бројот 2010 може да се запише како збир на последователни природни броеви?

6. На колку начини можеме бројот 2013 да го запишеме како збир на последователни непарни природни броеви?

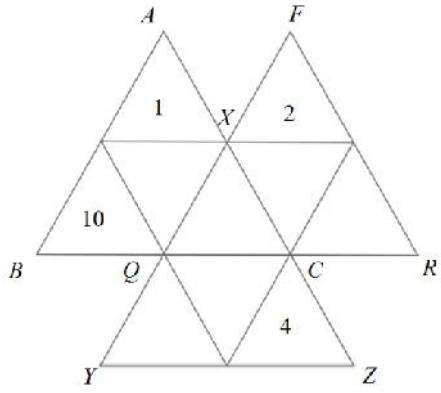
7. На колку начини бројот 2013 можеме да го запишеме како збир на последователни природни броеви?

8. Во земјата на математичарите треба да направат монетарна реформа. Целта е да има најмал можен број банкноти (според вредностите), а притоа секоја сума од 1 до 25 да може да се плати со најмногу 2 банкноти (со иста или различна вредност). Колку типови банкноти треба да се отпечатат?

9. На еден натпревар во риболов, победникот (кој уловил најмногу риби) уловил точно 4 пати помалку риби од сите останати натпреварувачи заедно. Натпреварувачот кој го освоил третото место уловил точно 9 пати помалку риби од сите останати натпреварувачи заедно, а натпреварувачот кој го освоил последното место уловил точно 10 пати помалку риби од останатите натпреварувачи. Колку луѓе учествувале на натпреварот?

10. На шаховски турнир учествувале осум шахисти (секој играл по една партија со секој од преостанатите шахисти). По завршувањето на турнирот се покажало дека не постојат двјца шахисти кои освоиле еднаков број поени. Шахистот кој го освоил второто место имал исто толку поени колку што имале заедно четворицата последнопласирани шахисти. Со кој резултат завршила партијата меѓу шахистите кои го освоиле третото и седмото место? (Во шахот за победа се добива 1 поен, за пораз 0 поени и за нерешен резултат секој шахист добива по 0,5 поени.)

11. На дијаграмот се прикажани три триаголници ABC, PQR и XYZ, така што секој од нив е разделен на четири помали триаголници. Во помалите триаголници запиши ги броевите од 1 до 10, така што збирот на броевите запишани во секој од триаголниците ABC, PQR и XYZ ќе биде еднаков. Броевите 1, 2, 4 и 10 се веќе запишани. На колку начини може да се пополни дијаграмот?



12. Два камиони превезуваат песок од местото A во местото B. Ако првиот камион направи 4 тури, а вториот 3 тури, тие вкупно ќе превезат помалку 42 тони песок. Меѓутоа, ако првиот направи 7 тури, а вториот 4 тури, тие ќе превезат повеќе од 66 тони песок. Кој камион има поголема носивост?

13. Венко во подрумот има определен број буриња полни со вино. Волуменот на секое буре е 1100 литри. Ако виното се претури во буриња со волумен 900 литри, ќе бидат потребни 6 буриња повеќе и едно буре нема да биде полно. Ако виното се претури во буриња со волумен 800 литри, ќе бидат потребни 9 буриња повеќе и повторно едно буре нема да биде полно. Колку хектолитри вино има Венко во своите буриња?

14. Во една зграда живеат неколку брачни парови со деца. Познато е дека деца има повеќе од возрасни, возрасни повеќе од момчиња, момчиња повеќе од девојчиња, девојчиња повеќе од семејства. Во секое семејство има најмалку едно дете, а броевите на децата во сите семејства се меѓусебно различни. Секое девојче има најмалку еден брат и најмногу една сестра. Во едно семејство има повеќе деца отколку во сите останати. Колку семејства живеат во зградата и колку девојчиња има во секое семејство?

15. Должината на еден правоаголник е зголемена за $p\%$, а ширината е намалена за $p\%$. Ако плоштината на правоаголникот се намалила за 16%, определи го p.

16. Плоштината на правоаголникот е $\overline{3xx3}$, а должините на неговите соседни страни се x^2 и $\overline{xx}$. Определи ја цифрата x.

17. Определи го бројот на правоаголните триаголници чии темиња се воедно и темиња на даден правилен 2023-аголник.

18. Андреј ги измерил должините на четирите страни и едната дијагонала на четириаголникот и добил: $1\,cm$, $2\,cm$, $2{,}8\,cm$, $5\,cm$, $7{,}5\,cm$.

    а) Која е должината на измерената дијагонала?

    б) Колку има четириаголници кои не се складни за кои наведените броеви се должини на страните и една од дијагоналите на четириаголник?

19. а) Колку најмногу страни може да има конвексен многуаголник кај кој сите агли се со различна големина, а мерниот број на секој агол е цел број степени?

    б) За колку најмногу може да се разликуваат најголемиот и најмалиот

агол на тој многуаголник?

20. Определи го најмалиот број квадрати со целобројни должини на страни (во сантиметри) на кои може да се исече правоаголник со плоштина $2009\,cm^2$, ако должините на страните на правоагоникот се исто така целобројни.

21. Од квадрат 5×5 е исечено централното поле. Расечи ја добиената фигура на два дела од кои може да се состави коцка со должина на раб 2.

22. Дали коцка може да се расечи на 2014 помали коцки?

23. Колку рабови има телото кое е ограничено со шест осумаголници, осум шестаголници и дванаесет четириаголници?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Определи ја цифрата на единиците на броевите од видот $4^n+5^n+6^n$, $n\in\mathbb{N}$.

   Решение. Цифрата на единиците на бројот 4^n е 4, ако n е напарен број, односно 6 ако n е парен број. Цифрата на единиците на бројот 5^n е 5 за секој природен број n, а цифрата на единиците на бројот 6^n е 6 за секој природен број n. Според тоа, цифрата на единиците на збирот $4^n+5^n+6^n$ е еднаква на цифрата на единиците на збирот $4+5+6=15$, т.е. на 5 ако n е непарен број и е еднаква на цифрата на единиците на збирот $6+5+6=17$, т.е. на 7 ако n е парен број.

2. Определи ја цифрата на единиците на збирот

   $$1^n+2^n+3^n+\ldots+2010^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

   Решение. Во долната табела е прикажана цифрата на единиците на степенот во зависност од цифрата на единиците на основата и обликот на степеновиот показател. Бидејќи цифрата на единиците периодично се повторува, а постојат најмногу четири различни последни цифри, табелата има четири редови. Во првиот ред се степени со степенов показател $n=4k+1$, во вториот со степенов пиказател $n=4k+2$, во третиот со степенов показател $n=4k+3$ и во четвртиот со степенов показател $n=4k$.

	Последна цифра на бројот									
	1^n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n	10^n
$n=4k+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$n=4k+2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
$n=4k+3$	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
$n=4k$	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0

   Сега лесно се гледа дека за $n=4k+1$ збирот $1^n+2^n+3^n+\ldots+10^n$ има цифра на единици 5, па како имаме 201 група, добиваме дека и збирот $1^n+2^n+3^n+\ldots+2010^n$ има цифра на единици 5. Слично, за $n=4k+2$ збирот $1^n+2^n+3^n+\ldots+2010^n$ има цифра на единици 5, а исто така и

за $n = 4k + 3$ збирот $1^n + 2^n + 3^n + ... + 2010^n$ има цифра на единици 5. Конечно, на потполно идентичен начин се добива дека за $n = 4k$ збирот $1^n + 2^n + 3^n + ... + 2010^n$ има цифра на единици 3.

3. Определи ја цифрата на единиците на бројот од видот $3^m + 7^n$, каде $m, n \in \mathbb{N}$.

Решение. За $m \in \mathbb{N}$ добиваме степени со основа 3: $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, ...$ чии цифри на единиците 3, 9, 7 , 1 циклично се менуваат.

За $n \in \mathbb{N}$ добиваме степени со основа 7: $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, ...$ чии цифри наединиците 7, 9, 3, 1 циклично се менуваат.

Да ги разгледаме сите можни комбинации на цифрите на единицте на собирците:

Цифра на единиците		
Собирците		Збирот $3^m + 7^n$
1	1	2
1	3	4
1	7	8
1	9	0
3	3	6
3	7	0
3	9	2
7	7	4
7	9	6
9	9	8

Според тоа, цифрите на единицте на збирот $3^m + 7^n$ може да се 0, 2, 4, 6 и 8.

4. Секој природен број припаѓа на едно од множествата A и B. Докажи дека за барем едно од овие множества важи дека за секој природен број n во него постојат бесконечно многу броеви кои се деливи со n.

Решение. Да претпоставиме дека множеството A има само конечно многу броеви деливи со природниот број a, а множеството B има само конечно многу броеви деливи со природниот број b. Според тоа, во секое од овие множества постојат само конечно многу броеви деливи со ab, па и во нивната унија, т.е. во множеството природни броеви,

постојат само конечно многу броеви деливи со ab, што е противречност.

5. Секој природен број му припаѓа точно на едно од множествата A, B и C. Познато е дека во множеството A има само конечно многу парни броеви, а во множеството B само конечно многу броеви деливи со 3. Докажи дека во множеството C има бесконечно многу броеви деливи со 2015.

   Решение. Ако во множеството A има само конечно многу парни броеви, а во множеството B само конечно многу броеви деливи со 3, тогаш во $A \cup B$ има само конечно многу броеви деливи со 6. Тогаш Тогаш од претходната задача следува дека за секој природен број n во множеството C постојат бесконечно многу броеви деливи со n, па тоа важи и за бројот 2015.

6. Определи ги сите природни броеви n запишани со најмалку три цифри такви што и бројот n и неговиот квадрат завршуваат со истите три цифри.

   Решение. За бараниот број n важи дека $n^2 - n = n(n-1)$ е делив со 1000. Броевите n и $n-1$ се заемно прости, па затоа едниот од нив е делив со $2^3 = 8$, а другиот е делив со $5^3 = 125$, или пак едниот од нив е делив и со 8 и со 125. Меѓу броевите кои не се поголеми од 1000, со 125 се деливи броевите 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 и 1000. Проверувајќи ја деливоста со 8 на соседните на овие броеви (помал и поголем), ги добиваме следниве четири пара трицифрени броеви $n-1$ и n: $(375,376), (624,625), (999,000)$ и $(000,001)$. Според тоа, условот го задоволува секој број n кој завршува на 000, 001, 376 и 625.

7. За еден природен број ќе велиме дека е *несреќен* ако збирот на неговите цифри е делив со 13.

   а) Дали постојат два последователни несреќни броја?

   б) Докажи дека постојат бесконечно многу парови последователни природни броеви кои се несреќни.

   Решение. а) Бројот $67\underbrace{00...0}_{n}$ има збир на цифри кој е делив со 13. Јасно, неговиот следбеник нема збир на цифри кој е делив со 13, а

неговиот претходник е од видот $66\underbrace{99...9}_{n}$. Затоа доволно е да најдеме природен број n таков што $12+9n$ е делив со 13. Најмалиот таков број е $n=3$, при што добиваме $12+9\cdot 3=39=3\cdot 13$. Според тоа, два последователни броја чиј збир на цифри е делив со 13 се: 66999 и 67000.

б) Едно решение се паровите природни броеви $67\underbrace{00...0}_{3+13k}$ и $66\underbrace{99...9}_{3+13k}$, за $k\geq 0$ чии збирови на цифри се 13 и $13\cdot(3+9k)$. Друго решение се паровите броеви $66\underbrace{00..0}_{k}000$ и $66\underbrace{00...0}_{k}999$, за $k\geq 0$.

8. Ако a е цел број, докажи дека или a^3-a или a^3+a е делив со 10.

Решение. За цифирте на единиците на броевите a и a^3 добиваме:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Забележуваме дека за секој a или цифрите на единиците на броевите a и a^3 се еднакви или нивниот збир е еднаков на 10. Според тоа, за секој a или a^3-a или a^3+a е делив со 10.

9. Ако ab не е делив со 5, докажи дека a^4-b^4 е делив со 5.

Решение. Бидејќи ab не е делив со 5, добиваме дека a не е делив со 5 и дека b не е делив со 5. Лесно се добивам дека цифрата на единиците на бројот a^4, т.е. на бројот b^4 е 1 или 6. Според тоа, циврата на единиците на бројот a^4-b^4 е 5 или 0, што значи дека бројот a^4-b^4 е делив со 5. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

10. Докажи, дека за секој непарен број n бројот n^3+3n^2-n-3 е делив со 48.

Решение. Имаме

$$n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n+3)(n^2-1)=(n+3)(n-1)(n+1).$$

Бидејќи n е непарен број, можеме да земеме $n=2k-1$, па затоа

$$\begin{aligned} n^3+3n^2-n-3&=(2k-1+3)(2k-1-1)(2k-1+1)\\ &=8(k-1)k(k+1). \end{aligned}$$

Бројот $(k-1)k(k+1)$ е делив со 2 и со 3, па значи е делив со 6. Според тоа, n^3+3n^2-n-3 е делив со $8\cdot 6=48$.

11. Нека m и n се природни броеви и нека m не е делив со 3. Докажи дека разликата n^3-m^2n е делива со 3.

Решение. Ако природниот број a не е делив со 3, тогаш $a=3k\pm 1$, па затоа $a^2=9k^2\pm 6k+1=3k(3k\pm 2)+1$, што значи дека бројот a^2 при делење со 3 дава остаток 1.

Ако n е делив со 3, тогаш од $n^3-m^2n=n(n^2-m^2)$ следува дека n^3-m^2n е делив со 3.

Ако n не е делив со 3, тогаш n^2 при делење со 3 дава остаток 1. Но, и бројот m не е делив со 3, па затоа m^2 при делење со 3 дава остаток 1. Тоа значи дека n^2-m^2 е делива со 3, па затоа бројот $n(n^2-m^2)=n^3-m^2n$ е делив со 2.

12. Докажи дека дропката $\frac{1+5^{k+1}\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^{k+1}}$ е скратлива за секој број $k=0,1,2,\ldots$.

Решение. За $k=0$ дропката гласи $\frac{1+5^1\cdot 2^0}{1+5^0\cdot 2^1}=\frac{1+5\cdot 1}{1+1\cdot 2}=\frac{6}{3}$, па таа е скратлива. Нека $k\geq 1$. Тогаш

$$\frac{1+5^{k+1}\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^{k+1}}=\frac{1+5^k\cdot 5^1\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^k\cdot 2^1}=\frac{1+5\cdot(5\cdot 2)^k}{1+2\cdot(5\cdot 2)^k}=\frac{1+5\cdot 10^k}{1+2\cdot 10^k}.$$

Збирот на цифрите на бројот во броителот е еднаков на 6, а збирот на цифрите на бројот во именителот е еднаков на 3. Значи и двата броеви се деливи со 3, па следува дека дропката може да се скрати. Значи, за секој цел број k, дропката е скратлива.

13. Која цифра треба да се запише на местото на буквата x за да бројот $\underbrace{444..44}_{2014}x\underbrace{111..11}_{2014}$ е делив со 37?

Решение. Имаме

$$\underbrace{444..44}_{2014}x\underbrace{111..11}_{2014}=\underbrace{444..44}_{2013}\cdot 10^{2016}+\overline{4x1}\cdot 10^{2013}+\underbrace{111..11}_{2013}.$$

Понатаму броевите $\underbrace{444..44}_{2013}$ и $\underbrace{111..11}_{2013}$ се деливи со $111=3\cdot 37$, па

затоа бројот $\underbrace{444..44}_{2014}x\underbrace{111..11}_{2014}$ е делив со 37 ако и само ако бројот $\overline{4x1}\cdot 10^{2013}$ е делив со 37, те. Бројот $\overline{4x1}$ е делив со 37. Броеви од петтата стотка кои се деливи со 37 се 407, 444 и 481. Оттука следува дека $\overline{4x1}=481$, односно $x=8$.

14. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш бројот p^2-1 е делив со 12. Докажи!

Решение. *Прв начин*. Секој прост број p поголем од 3 е од видот $p=6k\pm 1$. Ако $p=6k+1$, тогаш

$$p^2-1=(p-1)(p+1)=(6k+1-1)(6k+1+1)=12k(3k+1),$$

а ако $p=6k-1$, тогаш

$$p^2-1=(p-1)(p+1)=(6k-1-1)(6k-1+1)=12k(3k-1),$$

што значи дека $12\mid p^2-1$.

Втор начин. Бидејќи p е прост број поголем од 3, тој е непарен број, па затоа $p-1$ и $p+1$ се парни броеви, т.е. $p^2-1=(p-1)(p+1)$ е делив со 4. Понатаму, броевите $p-1, p, p+1$ се три последователни природни броја, па затоа еден од нив е делив со 3. Но, p е прост број поголем од 3, па затоа тој не е делив со 3. Значи, еден од броевите $p-1$ или $p+1$ е делив со 3. Значи, $p^2-1=(p-1)(p+1)$ е делив со 3, па како тој е делив со 4, делив е со 12.

15. Определи го најголемиот природен број кој е делив со 11, а чии цифри се различни.

Решение. Збирот на сите цифри е еднаков на 45. За да бројот е делив со 11 потребно е разликата на збировите на парните и непарните места да е делива со 11. Бидејќи оваа разлика мора да е непарна (збирот е непарен), лесно се гледа дека таа мора да е 11. Последното значи дека едниот збир мора да е 28, а другиот 17. Притоа цифрата 0 не влијае на збирот, па затоа таа може да се стави на крајното можно парно или непарно место. Ако ги запишеме првите шест цифри во опаѓачки редослед го добиваме бројот 987654, во кој збирот на цифрите на непарните места е $9+7+5=21$, а збирот на цифрите на парните места е $8+6+4=18$. Според тоа, во случајов со допишување

на преостанатите цифри не може да добиеме збир на цифри на парните места 17. Затоа да ги запишеме првите пет цифри во опаѓачки редослед: 98765, при што едниот збир е 21, а другиот е 14. Оттука следува дека при запишување на цифрите 4, 3, 2, 1 и 0 збирот на двете цифри на непарните места треба да е 7, а на трите цифри на парните места тој збир треба да е 3. Сега, бидејќи $4+3=7$ и $2+1+0=3$ заклучуваме дека бараниот број се добива ако вака распределените цифри ги допишеме на соодветите места во опаѓачки редослед. Така го добиваме бројот 987524130.

16. Определи го најмалиот десетцифрен број кој е делив со 11 и кој е запишан со различни цифри.

Решение. Збирот на сите цифри на бараниот број е 45. Според тоа, разликата на збирот на цифрите на парните и збирот на цифрите на непарните места мора да е непарен број. Но, оваа разлика треба да е делива со 11, па затоа таа е еднаква на 11 или 33. Ако разликата е еднаква на 33, тогаш бидејќи збирот е еднаков на 45, двата збира се еднакви на 6 и 39. Но, збирот на било кои пет цифри е поголем или еднаков на 10, т.е. не може да е 6. Затоа ќе се обидеме да најдеме број кај кои таа разлика е еднаква на 11. Бидејќи се бара најмалиот број, да се обидеме цифрите од лево кон десно да се 1023. Но, тогаш преостанатите цифри не може да се распоредат така да разликата ќе биде 11 (Провери!). Ако земеме цифрите од лево кон десно да се 1024, тогаш го добиваме бараниот најмал број 1024275869.

17. На таблата е запишан природен број a. Дозволено е на бројот да му се додаде еден негов делител, различен од самиот број и бројот 1. На добиениот број може да се примени претходната постапка итн. Дали тргнувајќи од бројот 4, со повеќекратна примена на наведената постапка, може да се добие бројот:

а) 2010, б) 2011.

Решение. а) На бројот 4 може да му се додаде бројот 2, по што се добива парен број. Сега на овој број повторно може да му се додаде бројот 2 итн. На овој начин може да се добие секој парен број, што значи и бројот 2010.

б) Ако p е прост број, тогаш не може да се добие на опишаниот начин. Нека го претпоставиме спротивното. Нека во последниот чекор на некој број m е додаден негов делител d со што е добиен бројот p,

т.е. $m+d=p$. Тоа значи дека d е делител на p, што противречни на тоа што p е прост број. Сега, бидејќи 2011 е прост број (Провери!), заклучуваме дека бројот 2011 не може да се добие на опишаниот начин.

18. Дали постои број од видот 11...1100...0 запишан само со помош на определен број единици, а потоа со определен број нули, кој е делив со 2010.

Решение. Да ги разгледаме броевите

$$1, 11, 111, 1111, ..., \underbrace{11111...111}_{2011 \text{ цифри}}.$$

Овие 2011 броеви при делење со бројот 2010 даваат 2010 остатоци кои припаѓаат на множеството {0, 1, 2, ..., 2009}, па од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку два броја кои при делење со 2010 даваат ист остаток. Јасно, нивната разлика е делива со 2010 и е број од видот 11...100...0.

19. Во триесетцифрен број сите цифри се различни од нула. Докажи дека од записот на овој број може да се избришат неколку цифри така што добиениот број ќе биде делив со 101.

Решение. Бидејќи $30=3\cdot 9+3$, од принципот на Дирихле следува дека во записот на број се појавуваат најмалку четири исти цифри. Оставајќи ги само овие четири исти цифри ќе добиеме број од видот $\overline{xxxx}=x\cdot 1111$ кој е делив со 101, бидејќи $1111=11\cdot 101$.

20. Во 50-цифрен број сите цифри се различни од нула. Докажи дека од записот на овој број може да се избришат некои цифри така што добиениот број ќе биде делив со 2849?

Решение. Бидејќи $50=5\cdot 9+5$ од принципот на Дирихле следува дека во записот на даденият број постојат најмалку шест еднакви цифри. Ако од записот избришеме 44 цифри и оставиме шест еднакви цифри добиваме број од видот

$$\overline{xxxxxx}=x\cdot 111111=x\cdot 111\cdot 1001=x\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$$
$$=(7\cdot 11\cdot 37)\cdot x\cdot 3\cdot 13=39x\cdot 2849,$$

од каде следува тврдењето на здачата.

21. Се формираат сите различни производи од по два различни множи-

тели од првите пет прости броеви. Пресметај го квадратниот корен од производот на квадратните корени на добиените производи.

Решение. Нека a,b,c,d,e се пет различни позитивни броеви. Сите производи од по два различни множители на овие броеви се:

$$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.$$

Нивните квадратни корени се:

$$\sqrt{ab}, \sqrt{ac}, \sqrt{ad}, \sqrt{ae}, \sqrt{bc}, \sqrt{bd}, \sqrt{be}, \sqrt{cd}, \sqrt{ce}, \sqrt{de},$$

а квадратниот корен од производот на добиените квадратни корени е:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{ad}\sqrt{ae}\sqrt{bc}\sqrt{bd}\sqrt{be}\sqrt{cd}\sqrt{ce}\sqrt{de}} \\ &= \sqrt{\sqrt{(ab)(ac)(ad)(ae)(bc)(bd)(be)(cd)(ce)(de)}} \\ &= \sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4e^4} = \sqrt[4]{(abcde)^4} = abcde. \end{aligned}$$

Во случајов имаме $a=2, b=3, c=5, d=7, e=11$, па затоа

$$A = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 2310.$$

22. Докажи дека има бесконечно многу природни броеви кои не може да се запишат во вид на збир на квадрати на два природни броја.

Решение. При делење на квадрат на природен број со 4 можни остатоци се 0 и 1 (Докажи!). Според тоа, при делење на збир на два квадрати на природни броеви со 4 можни остатоци се 0, 1 или 2, но никогаш не може да се добие 3. Последното значи дека ниту еден природен број од видот $4k+3$ не може да се запише како збир на квадрати на два природни броја.

23. а) Определи ги сите остатоци кои се добиваат при делење на куб на природен број со бројот 9.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви кои не може да се запишат како збир на кубови на три природни броја.

Решение. а) Секој природен број може да се запише во видот $3k, 3k+1$ и $3k+2$. Омаме:

$$\begin{aligned} (3k)^3 &= 9\cdot 3k^3 \\ (3k+1)^3 &= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1, \\ (3k+8)^3 &= 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 9(3k^3 + 6k^2 + 6k) + 8. \end{aligned}$$

Според тоа, при делење на куб природен број со 9 можни остатоци се 0, 1 и 8, односно остатоците 0, 1 и -1.

б) Бидејќи при делење на куб на природен број со 9 се добива еден од

остатоците $0,1,-1$, при делење на збир на три куба со природен број може да се добие еден од остатоците $-3,-2,-1,0,1,2,3$. Значи, остатоците не може да бидат 4 и 5. Според тоа, секој природен број од видот $9m+4$ или од видот $9m+5$ не може да е збир на три куба на природни броеви. Но, броевите од видовите $9m+4$ и $9m+5$, $m\in\mathbb{N}$ се бесконечно многу, од што следува тврдењето на задачата.

24. Нека се a,b,c природни броеви и $a\neq b$. Ако важи $\frac{a}{b}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$, докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не е прост број.

Решение. Равенството од условот на здачата последователно е еквивалентно со равенствата

$$\begin{aligned} ab^2+ac^2 &= ba^2+bc^2,\\ ab^2-ba^2-bc^2+ac^2 &= 0,\\ ab(b-a)-c^2(b-a) &= 0,\\ (b-a)(ab-c^2) &= 0. \end{aligned}$$

Сега, бидејќи $a\neq b$ од последното равенство следува $c^2=ab$. Според тоа,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= a^2+b^2+ab\\ &= (a+b)^2-ab\\ &= (a+b)^2-c^2\\ &= (a+b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

Единствена можност е бројот $a^2+b^2+c^2$ да е прост е да важи

$$a+b-c=1 \text{ и } a^2+b^2+c^2=a+b+c.$$

Но, тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$c+1=a+b\geq 2\sqrt{ab}=2c,$$

па како c е природен број важи $c=1$. Но, тоа значи $a+b=c+1=2$, од каде бидејќи a и b се природни броеви добиваме $a=b=1$, што е противречност.

25. Определи осумцифрен број запишан со различни цифри и кој е делив се секоја своја цифра, т.е. со соодветниот едноцифрен број.

Решение. Бараниот број не смее да ја содржи цифрата 0, а не смее да

ја содржи и цифрата 5. Имено, ако ја содржи цифрата 5, тогаш бидејќи е делив со парен број то ќе биде делив со 10, па ќе ја содржи цифрата 0. Останууваат цифрите 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Бидејќи бројот треба да е делив со секоја цифра, тој мора да е делив со 9, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 9. Но, збирот на преостанатите осум цифри е еднаков на $1+2+3+4+6+7+8+9=40$ и тој не е делив со 9. Според тоа, не постои осумцифрен број со саканото својство.

Коментар. Интересно е прашањето дали постои седумцифрен број со наведеното својство. Ако постои, тогаш треба збирот на седум од цифрите 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9 да е делив со 9, па затоа не треба да се содржи цифрата 4. Значи, бараниот број е запишан со цифрите 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9, од каде добиваме седумцифрениот број е содржател на бројот $\mathrm{NZS}(9,8,7,6,3,2)=504$. Понатаму, ако се искористи деливоста со 8 и со 7, по разгледување на поголем број случаи може да се добие дека таков е бројот 9176328.

26. Определи го најмалиот природен број n кој има точно 2013 делители. Докажи дека $\sqrt{n}$ е природен број.

Решение. Бидејќи $2013=3\cdot 671=3\cdot 11\cdot 61$ и како броевите 3, 11 и 61 се прости, заклучуваме дека баранот најмал природен број n може да има најмногу три различни прости множители и затоа има облик $n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$, при што $a\geq b\geq c$. Бидејќи бараниот број $n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$ има $(a+1)(b+1)(c+1)=2013$ делители и бидејќи $a+1\geq b+1\geq c+1$, можни се само следниве комбинации:

$a+1$	$b+1$	$c+1$	Прои.	a	b	c	$n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$
2013	1	1	2013	2012	0	0	2^{2012}
671	3	1	2013	670	2	0	$2^{670}\cdot 3^2$
183	11	1	2013	182	10	0	$2^{182}\cdot 3^{10}$
61	33	1	2013	60	32	0	$2^{60}\cdot 3^{32}$
61	11	3	2013	60	10	2	$2^{60}\cdot 3^{10}\cdot 5^2$

Според тоа, најмалиот таков број е $n=2^{60}\cdot 3^{10}\cdot 5^2$, бидејќи

$$\frac{2^{2012}}{2^{670}\cdot 3^2}=\frac{2^{1442}}{3^2}>\frac{2^{670}\cdot 3^2}{2^{182}\cdot 3^{10}}=\frac{2^{488}}{3^8}>\frac{2^{182}\cdot 3^{10}}{2^{60}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{122}}{3^{22}}>\frac{2^{60}\cdot 3^{32}}{2^{60}\cdot 3^{10}\cdot 5^2}=\frac{3^{22}}{5^2}>1.$$

Имаме, $\sqrt{n}=2^{30}\cdot 3^5\cdot 5^1$, што значи дека и вториот дел од тврдењето е точен.

27. Кој е најмалиот број броеви кои треба да се избришат од множеството $\{1,2,3,...,27,28\}$ за да производот на преостанатите броеви биде точен квадрат?

Решение. Ако сите броеви од 2 до 28 ги разложиме на прости множители, добиваме дека производот на броевите од 1 до 28 е еднаков на

$$2^{25}\cdot 3^{13}\cdot 5^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23.$$

Секако треба да ги избришеме броевите 17, 19 и 23. Понатаму, уште само броевите 2 и 3 се појавуваат на непарен степен, па за истите се појават на парен степен треба да избришеме најмал можен број броеви. Значи треба да избришеме барем еден еден број и тоа е бројот 6. Конечно, треба да избришеме само 4 броја и тоа се броевите: 6, 17, 19 и 23.

28. За кои парни природни броеви n изразот е $2^n+3^n+4^n$ е точен квадрат?

Решение. Ако $n=2k$, $k\geq 1$, тогаш $2^n+3^n+4^n=4^k+3^{2k}+4^{2k}$ дава остаток 2 при делење со 3. Имено, $3\,|\,3^{2k}$, а од $4\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ следува $4^m\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Но, квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1, што следува од

$(3s)^2=3\cdot 3s^2$, $(3s+1)^2=3\cdot(3s^2+2s)+1$, $(3s+2)^2=3\cdot(3s^2+4s+1)+1$.

Затоа дадениот израз не може да е точен квадрат.

29. За кои непарни природни броеви n бројот $2^n+3^n+4^n$ е точен квадрат?

Решение. За $n=1$ имаме $2+3+4=9=3^2$. Ако $n=2k+1$, $k\geq 1$, тогаш

$$2^n+3^n+4^n=2^{2k+1}+3^{2k+1}+4^{2k+1}=2^{2k+1}+3\cdot 9^k+4^{2k+1}\equiv 3(\mathrm{mod}\,8).$$

Меѓутоа, $2^{2k+1}+3\cdot 9^k+4^{2k+1}$ е непарен природен број, па ако е точен квадрат, тогаш тој е точен квадрат на непарен број, што не е можно бидејќи непарен природен број е конгруентен со 1 по модул 8. Докажи!

30. Најди најмал природен број n кој е 2015 пати поголем од збирот на сите свои прости делители.

Решение. Од $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, следува дека бараниот број е од видот $5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot m$, каде $m > 49$ (бидејќи збирот на делителите на бараниот број е поголем од 49). Испитувајќи ги редоследно броевите поголеми од 49, добиваме дека броевите 50, 51, 52 и 53 не ги задоволуваат словите на задачата, додека бројот $54 = 2 \cdot 3^3$ ги задоволува условоте на задачата, односно збирот на сите прости делители на бројот $2015 \cdot 54 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ е еднаков на 54. Според тоа, бараниот број $2015 \cdot 54 = 108810$.

31. Нека x и y се природни броеви такви што $\frac{2024!}{7^x 11^y}$ е природен број. Определи ја најголемата можна вредност на збирот $x + y$.

Решение. За да ја определиме најголемата можна вредност на збирот $x + y$ треба да ги определиме најголемите можни степени на 7 и на 11 кои се делители на 2024!.

Од $2024 = 7 \cdot 289 + 1$ следува дека 289 броеви помали од 2024 се деливи со 7. Понатаму, од $2024 = 49 \cdot 41 + 15$ следува дека 41 броеви помали од 2024 се деливи со 7^2, $2024 = 343 \cdot 5 + 309$ следува дека 5 броја помали од 2024 се деливи со 7^3 и нема броеви кои се помали од 2024 и се деливи со повисок степен на бројот 7. Значи, највисокиот степен на бројот 7 кој е делител на 2024! е $7^{289+41+5} = 7^{335}$.

Слично, од $2024 = 11 \cdot 184$, $2024 = 121 \cdot 16 + 88$ и $2024 = 1331 \cdot 1 + 673$ следува дека највисокиот степен на бројот 11 кој е делител на 2024! е $11^{184+16+1} = 11^{201}$.

Оттука најголемата можна вредност на збирот $x + y$ е $335 + 201 = 536$.

32. Определи го природниот број x за кој $\sqrt{\frac{x+36}{x-36}}$ е природен број.

Решение. Корен на некој број е природен број, ако тој број е квадрат на некој природен број. Имаме, $\sqrt{\frac{x+36}{x-36}} = \sqrt{\frac{x-36+72}{x-36}} = \sqrt{1 + \frac{72}{x-36}}$. Значи, $1 + \frac{72}{x-36}$ прима вредности квадрати на природни броеви кои се помали од 73, односно $1 + \frac{72}{x-36} \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$. Според тоа, треба да важи $\frac{72}{x-36} \in \{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63\}$, каде x е природен број и $x - 36$ е

делител на 72. Значи, $x-36\in\{24,9,3\}$, односно $x\in\{60,45,39\}$.

33. Тетратка чини 110, а молив 50 денари. На колку начини за точно 20120 денари може да се купат определен број тетратки и моливи?
Решение. Нека x е бројот на моливите, а y е бројот на тетратките. Тогаш $50x+110y=20120$, т.е. $5x+11y=2012$. Бидејќи цифрата на единиците на бројот $5x$ е 0 или 5, потребно е цифрата на единиците на бројот $11y$ да е 2, што значи дека цифрата на единиците на бројот y треба да е 2. За $y_0=2$ добиваме $5x_0+22=2012$, т.е. $x_0=398$. Оттука следува дека сите решенија на Диофантовата равенка се дадени со $x=398-11k$, $y=2+5k$, каде k е цел број. Но, x и y треба да се природни броеви, па затоа мора да важи $0<x=398-11k<2012$ и $0<y=2+5k<2012$, од каде добиваме $-146\le k\le 36$ и $0\le k\le 402$. Според тоа, $0\le k\le 36$, што значи дека постојат 37 начини за точно 20120 денари да се купат определен број тетратки и моливи

34. Ванчо во својата каса има само монети од 2 и 5 денари. На колку начини може да купи топка која чини 2024 денари, ако ја користи само заштедата во касата? Се подразбира дека во касата има доволно монети за секоја комбинација?
Решение. Нека со x и y го означиме соодветно бројот на монетите од 2 и 5 денари потребни да се плати топката. Тогаш $2x+5y=2024$, при што x и y се ненегативни цели броеви. Од $5y=2\cdot(1012-x)$, бидејќи десната страна е парен број следува дека и левата треба да е делива парен број, т.е. $y=2k, k\in\mathbb{N}_0$. Според тоа, $10k=2(1012-x)$, $k\in\mathbb{N}_0$, односно $x=1012-5k, k\in\mathbb{N}_0$. Значи, секое решение на равенката е од видот $(1012-5k,2k)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Бидејќи треба да е $x\ge 0$, добиваме $1012-5k\ge 0$, од каде следува $k\le 202$, па како $k\ge 0$ имаме 203 решенија на почетната Диофантова равенка, т.е. Ванчо топката може да ја плати на 203 начина.

35. Определи ги сите природни броеви n за кои постои цел број x, таков што важи

$$\frac{|...|||x|+x+1|+x+2|+...+x+n|-67}{\sqrt{x+3}}=0.$$

Решение. Заради именителот мора да важи $x>-3$. Ако $x=-2$, тогаш

последователно добиваме:

$$1+0+1+2+\ldots+n-2=67,$$
$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}=66,$$
$$(n-2)(n-1)=132,$$
$$(n-2)(n-1)=11\cdot 12,$$

па бидејќи n е природен број добиваме $n=13$.

Ако $x=-1$, тогаш последователно добиваме

$$1+0+1+2+\ldots+n-1=67,$$
$$\frac{(n-1)n}{2}=66,$$
$$(n-1)n=132,$$
$$(n-1)n=11\cdot 12,$$

па бидејќи n е природен број добиваме $n=12$.

Ако $x\geq 0$, тогаш последователно добиваме:

$$x+x+1+x+2+\ldots+x+n=67,$$
$$(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}=67,$$
$$(n+1)(2x+n)=2\cdot 67.$$

Од последното равенство следува или $n+1=2, 2x+n=67$ или $n+1=67, 2x+n=2$ или $n+1=2\cdot 67, 2x+n=1$. Од сите три случаи можен е само првиот случај и притоа $n=1, x=33$.

Конечно, решенија се $n=1, n=12, n=13$

36. Определи го најмалиот природен број n таков што во множеството природни броеви равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ има точно:

а) 2019 решенија,

б) 2020 решенија.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-n)(y-n)=n^2, \qquad (1)$$

која исто така ја решаваме во множеството природни броеви. Бројот на решенијата на равенката е еднаков на бројот на делителите на бројот n^2 (сметајќи ги 1 и n^2). Ако $n=p_1^{\tilde{}1}p_2^{\tilde{}2}\ldots p_k^{\tilde{}k}$ е факторизацијата на бројот n на прости множители, тогаш бројот n^2 има $(2\tilde{}_1+1)(2\tilde{}_2+1)\ldots(2\tilde{}_k+1)$ делители, што е непарен број.

а) Имаме $2019 = 3 \cdot 673 = (2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 336 + 1)$, па затоа најмалиот природен број за кој дадената равенка има точно 2019 решенија е од видот $n = p_1^1 p_2^{336}$, каде p_1 и p_2 се најмалите можни прости броеви и важи $p_2 < p_1$. Јасно, тоа е бројот $n = 3 \cdot 2^{336}$.

б) Таков број n не постои, бидејќи равенката (1) која е еквивалентна на дадената равенка има непарен број решенија, а бројот 2020 е парен број.

37. Во множеството прости броеви реши ја равенката $5p^2 - 5p = 208 + q$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$5p(p-1) = 208 + q.$$

Броевите $p-1$ и p се последователни природни броеви, па затоа нивниот производ е парен број. Според тоа, $208 + q$ е парен број, па затоа $q = 2$. Значи, $5p(p-1) = 210$, од каде добиваме $p(p-1) = 42$, односно $p = 7$.

38. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$3p^2 + 3p - q - 1138 = 0.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3p(p+1) = q + 1138.$$

Левата страна на последната равенка е парна, па затоа мора да е $q = 2$. Значи, $3p(p+1) = 1140$, од каде следува $p(p+1) = 380$, т.е. $p = 19$. Според тоа, единствено решение на равенката е $p = 19, q = 2$.

39. Производот на два броја е двапати поголем од нивниот збир. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека x и y се природни броеви такви што $xy = 2(x + y)$. Последната равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned} xy - 2x - 2y &= 0, \\ xy - 2x - 2y + 4 &= 4, \\ x(y-2) - 2(y-2) &= 4, \\ (x-2)(y-2) &= 4. \end{aligned}$$

Од последната равенка следува $x - 2 = 4, y - 2 = 1$ или $x - 2 = y - 2 = 2$. Според тоа, едно решение е $x = 6, y = 3$, а друго решение е $x = y = 4$.

Конечно, задачата има две решенија, а бараните броеви се 6 и 3, или 4 и 4.

40. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + x - xy - y = 2010.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+1)(x-y) = 2010.$$

Имаме $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ и како во множеството $\mathbb{N}$ важи $x+1 > x-y$, добиваме

$x+1$	2010	1005	670	402	335	201	134	67
$x-y$	1	2	3	5	6	10	15	30

односно

x	2009	1004	669	401	334	200	133	66
y	2008	1002	666	396	328	1900	118	36

41. Определи ги сите тројки природни броеви a,b,c за кои важи

$$a+b+c = 2007, \quad 3(a^2+b^2+c^2) = 2007^2.$$

Решение. Од дадените равенства следува

$$3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2$$
$$2a^2+2b^2+2c^2 = 2ab+2bc+2ca,$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0.$$

Сега, од последното равенство следува $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$, па затоа $a=b=c$. Со замена во $a+b+c=2007$ добиваме $a=b=c=669$ и тоа е единственото решение на задачата.

42. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-y)^2 + x^2 + y^2 = 2.$$

Бидејќи збир на три квадрати е еднаков на 2 ако и само ако еден од квадратите е еднаков на 0, а другите два се еднакви на 1, добиваме дека $(x,y) \in \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),(1,1),(-1,-1)\}$.

43. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 - xy + y^2 + x + y = 2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2x - y + 1)^2 + 3(y + 1)^2 = 12.$$

Оттука следува дека $(y+1)^2 \le 4$. Можн се два случаја:

1) Ако $(y+1)^2 = 1$ и $(2x - y + 1)^2 = 9$, тогаш или $y = 0$ или $y = -2$. За $y = 0$ добиваме $x = 1$ или $x = -2$, а за $y = -2$ добиваме $x = 0$ или $x = -3$.
2) Ако $(y+1)^2 = 4$ и $(2x - y + 1)^2 = 0$, тогаш или $y = 1$ или $y = -3$. За $y = 1$ добиваме $x = 0$, а за $y = -3$ добиваме $x = -2$.

44. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 = 2y + 1.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2,$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Од последната равенка следува

$$x^2 = 0, (y-1)^2 = 2 \text{ или } x^2 = 2, (y-1)^2 = 0 \text{ или } x^2 = 1, (y-1)^2 = 1.$$

Во првите два случаи немаме решение, а од третиот случај ги добиваме решенијата: $(x, y) = (-1, 0), (1, 0), (-1, 2), (1, 2)$.

45. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33.$$

Решение. Десната страна на равенката е делива со 3, па затоа мора и левата страна да е делива со 3. Тоа значи дека $3 \mid z^2$ и како 3 е прост број добиваме дека $3 \mid z$. Понатаму, $2z^2 \le 33$, односно $z^2 \le 16$, па затоа $z = -3$ или $z = 0$ или $z = 3$. Ако $z = -3$ или $z = 3$, тогаш равенката се сведува на $3(x-3)^2 + 33y^2 = 15$. Оттука следува дека мора да е $y = 0$ и добиваме $(x-3)^2 = 5$, што не е можно во множеството цели броеви. Ако $z = 0$, тогаш равенката се сведува на $3(x-3)^2 + 6y^2 = 33$, од каде добиваме $(x-3)^2 + 2y^2 = 11$. Оттука следува $y^2 \le 5$, па затоа

$y=-2$ или $y=-1$ или $y=0$ или $y=1$ или $y=2$. Лесно се гледа дека за $y=\pm 2$ и $y=0$ последната равенка нема решенија, а за $y=\pm 1$ решенија на почетната равенка се подредените тројки $(0,-1,0)$, $(0,1,0)$, $(6,-1,0)$ и $(6,1,0)$.

46. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3-3y^3-9z^3=0. \qquad (1)$$

Решение. Двата собирци на левата страна на (1) се деливи со 3, па затоа мора да е $3\mid x^3$, од што следува $3\mid x$. Нека $x=3k, k\in\mathbb{Z}$. Со замена во (1) добиваме $27k^3-3y^3-9z^3=0$, т.е. $9k^3-y^3-3z^3=0$. Сега аналогно како претходно заклучуваме дека $y=3m, m\in\mathbb{Z}$. Со замена во претходната равенка добиваме $9k^3-27m^3-3z^3=0$, т.е. $3k^3-9m^3-z^3=0$, па затоа $z=3n, n\in\mathbb{Z}$. Заменуваме во претходната равенка и добиваме $3k^3-9m^3-27n^3=0$, т.е. $k^3-3m^3-9n^3=0$. Последната равенка е всушност равенката (1), па продолжувајќи ја постапката добиваме дека 3^p е делител на x,y,z за секој $p\in\mathbb{N}$. Последното е единствено можно ако и само ако $x=y=z=0$.

47. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2=xy+x+y.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1=2,$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

Бидејќи квадрат на цел број не може да е 2, од последната равенка добиваме

$$(x-y)^2=0,\ (x-1)^2=1,\ (y-1)^2=1 \text{ или}$$
$$(x-y)^2=1,\ (x-1)^2=0,\ (y-1)^2=1 \text{ или}$$
$$(x-y)^2=1,\ (x-1)^2=1,\ (y-1)^2=0.$$

Според тоа, решенијата на дадената равенка се:
$x=0, y=0$; $x=2, y=2$; $x=1, y=0$; $x=0, y=1$; $x=1, y=2$; $x=2, y=1$.

48. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2b^2 + 2ab - b^2 + 2b = 2022 .$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned} &a^2b^2 + 2ab + 1 - b^2 + 2b - 1 = 2022, \\ &(ab+1)^2 - (b-1)^2 = 2022, \\ &(ab + 1 - b + 1)(ab + 1 + b - 1) = 2022, \\ &b(a+1)(ab - b + 2) = 2022. \end{aligned}$$

Понатаму, ако b е парен број, левата страна на последната равенка е делива со 4, а десна страна не е делива со 4, што е противречност. Затоа b мора да е непарен број. Сега, ако a е парен број, тогаш бидејќи b е непарен, добиваме дека левата страна е непарен број, а десната е парен број, што не е можно. Значи, a мора да е непарен број. Но, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4, што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

49. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^2 - a = 4b^2 - 2b + 2024 .$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned} &a^2 - 4b^2 - a + 2b = 2024, \\ &(a-2b)(a+2b) - (a-2b) = 2024, \\ &(a-2b)(a+2b-1) = 2024. \end{aligned}$$

Броевите $a-2b$ и $a2b-1$ се со различна парност, па затоа можни се следниве случаи:

1) $a-2b=1, a+2b-1=2024$, од каде добиваме $a=1013, b=506$,
2) $a-2b=8, a+2b-1=253$, од каде добиваме $a=131, b=61{,}5$ и ова не е решение,
3) $a-2b=11, a+2b-1=184$, од каде добиваме $a=98, b=43{,}5$ и ова не е решение,
4) $a-2b=23, a+2b-1=88$, од каде добиваме $a=56, b=16{,}5$ и ова не е решение.

Значи,единствено решение на равенката е $a=1013, b=506$.

50. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 = 2009^2 .$$

Решение. Бидејќи $x^2 + y^2 = 2009^2$, заклучуваме дека x, y и 2009 се Питагорова тројка. Тоа значи дека постојат природни броеви m и n такви што $x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ 2009 = m^2 + n^2$. Ќе ја решиме равенката $m^2 + n^2 = 2009$. Бидејќи $2009 = 41 \cdot 7^2$, добиваме $m^2 + n^2 = 41 \cdot 7^2$. Од следната таблица следува дека $m^2 + n^2$ е делив со 49 ако и само ако m и n се деливи со 7.

		m	0	1	2	3	4	5	6
		m^2	0	1	4	9	16	25	36
n	n^2	+							
0	0		0	1	4	9	16	25	36
1	1		1	2	5	10	17	26	37
2	4		4	5	8	13	20	29	40
3	9		9	10	13	18	25	34	45
4	16		16	17	20	25	32	41	52
5	25		25	26	29	34	45	50	61
6	36		36	37	40	45	52	61	72

Според тоа, $m = 7a$ и $n = 7b$, па затоа равенката $m^2 + n^2 = 41 \cdot 7^2$ го добива видот $a^2 + b^2 = 41$. Единствено решение на последната равенка при кое $a > b$ е $a = 5, b = 4$, па затоа $m = 7a = 35, n = 7b = 28$. Според тоа, $x = 2mn = 1960$ и $y = m^2 - n^2 = 441$ е единствено решение на равенката $x^2 + y^2 = 2009^2$.

51. Докажи дека равенката $x^2 + y^2 - z^2 = 2008$ има бесконечно многу целобројни решенија.

Решение. Да ставиме $y = z + 2$. Тогаш последователно добиваме

$$x^2 + (z+2)^2 - z^2 = 2008,$$
$$x^2 + z^2 + 4z + 4 - z^2 = 2008,$$
$$x^2 + 4z = 2004.$$

Ако сега земеме $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$, добиваме $4k^2 + 4z = 2004$, од каде

наоѓаме $z = 501 - k^2$. Според тоа, за секој $k \in \mathbb{Z}$ броевите

$$x = 2k,\ y = 503 - k^2,\ z = 502 - k^2$$

се решение на дадената равенка. Навистина,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (2k)^2 + (503 - k^2)^2 - (501 - k^2)^2 \\ &= 4k^2 + 503^2 - 1008k^2 + k^4 - 501^2 + 1004k^2 - k^4 \\ &= 503^2 - 501^2 = (503 - 501)\cdot(503 + 501) \\ &= 2 \cdot 1004 = 2008. \end{aligned}$$

Значи, дадената равенка има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

52. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1.$$

Решение. Ниту еден од броевите a, b, c, d не може да е еднаков на 1, бидејќи тогаш левата страна ќе биде поголема од 1. Понатаму, ниту еден од броевите a, b, c, d не може да поголем од 2, бидејќи тогаш левата страна ќе биде помала од 1. Значи, единствео решение на задачата е $a = b = c = d = 2$.

53. Во множеството природни броеви реши ја равенката $n! + 1 = (10n + 1)^2$.

Решение. Ќе докажеме дека единствено решение е $n = 7$. За $n \le 7$ непосредно проверуваме дека само $n = 7$ е решение. Ако $n \ge 8$, тогаш

$$\begin{aligned} n^2 - 8n + 1 &> 0, \\ n^2 - 3n + 2 &> 5n + 1, \\ (n-1)(n-2) &> 5n + 1, \end{aligned}$$

па како за $n \ge 8$ важи $(n-3)! > 20$, добиваме дека

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2)\cdot(n-3)! &> 20(5n+1) \\ n! &> 10n(10n+2), \\ n! &> (10n+1)^2 - 1, \\ n! + 1 &> (10n+1)^2, \end{aligned}$$

што значи дека равенката нема решение $n \ge 8$.

54. Докажи дека равенката $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} = 1$ нема решенија во множеството

природни броеви.

Решение. Јасно, $a,b\geq 1$, бидејќи во спротивно на левата страна збирот ќе биде поголем од 1. Оттука следува $a^2\geq 4, ab\geq 4, b^2\geq 4$, па затоа важи $\frac{1}{a^2}\leq\frac{1}{4}$, $\frac{1}{ab}\leq\frac{1}{4}$, $\frac{1}{b^2}\leq\frac{1}{4}$, што значи $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\leq\frac{3}{4}<1$. Значи, равенката $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}=1$ нема решение во множеството природни броеви.

55. Докажи дека равенката $3m^2-7n^2=9$ нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Имаме, $7n^2=3(m^2-3)$, па како 3 и 7 се заемно прости и 3 е прост број, добиваме дека $3\mid n$, т.е. $n=3k$. Со замена во равенката добиваме $3m^2-7\cdot(3k)^2=9$,од каде следува $m^2-21k^2=3$, па затоа $m=3t$. Со замена во последната равебка добиваме $(3t)^2-21k^2=3$, од каде следува $3t^2-7k^2=1$. Понатаму, ќе искористиме дека квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Значи, $7k^2$ при делење со 3 дава остаток 0 или 1 и како $3t^2$ при делењесо 3 дава остаток 0, добиваме $3t^2-7k^2$ при делење со 3 дава остаток 0 или -1, а како 1 при делење со 3 дава остаток 1, заклучуваме дека не постојат t и k такви што важи $3t^2-7k^2=1$.

56. Докажи дека не постојат природни броеви x и y за кои важи

$$5^x=y^2+2012.$$

Решение. Ако $x=0$ добиваме

$$5^0=y^2+2012, \text{ т.е. } 1=y^2+2012,$$

што не е можно бидејќи десната страна на равенството е поголема од 1.

Ако $x\neq 0$, тогаш последната цифра на бројот 5^x е 5. За да биде исполнето равенството треба последната цифра на збирот y^2+2012 да биде 5, односно последната цифра на бројот y^2 треба да биде 3. Но, точен квадрат не може да има последна цифра 3, па следува дека не

постојат природни броеви x и y кои се решенија на дадената равенка.

57. Во множеството природн броеви реши го системот

$$\begin{cases} x + yz = 2024z, \\ y + zx = 2024x, \\ z + xy = 2024y. \end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x = z(2024 - y), \\ y = x(2024 - z), \\ z = y(2024 - x). \end{cases}$$

Бидејќи x, y, z се природни броеви од првата равенка следува $z \mid x$, од втората следува $x \mid y$ и од третата следува $y \mid z$. Од $z \mid x$ и $x \mid y$ следува $z \mid y$ и како $y \mid z$, добиваме $y = z$. Аналогно се докажува дека $x = y$, што значи дека $x = y = z$. Според тоа, $x + x^2 = 2024x$ и како $x \neq 0$ од последната равенка добиваме $1 + x = 2024$, т.е. $x = 2023$. Конечно, решението на системот е $x = y = z = 2023$.

58. Во множеството природни броеви реши го системот

$$\begin{cases} x + yz = 59, \\ xy + z = 46. \end{cases}$$

Решение. Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $x - z + y(z - x) = 13$, т.е. $(z - x)(y - 1) = 13$. Но, $y - 1 \geq 0$, па затоа од последната равенка следуваат системите:

$$\begin{cases} y - 1 = 1, \\ z - x = 13, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y - 1 = 14, \\ z - x = 1. \end{cases}$$

Во првиот случај имаме $y = 2$ и со замена во првата равенка на почетниот систем добиваме $x + 2z = 59$. Но, $z - x = 13$, па затоа важи $3z = 72$, односно $z = 24$ и оттука $x = 11$.

Во вториот случај имаме $y = 14$ и со замена во првата равенка на почетниот систем добиваме $x + 14z = 59$. Но, $z - x = 1$, па затоа важи $15z = 60$, односно $z = 4$ и оттука $x = 3$.

59. Определи ја цифрата на единиците на бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$.

Решение. Од $9 \equiv 9(\mathrm{mod}10)$, $9^2 \equiv 1(\mathrm{mod}10)$, $9^3 \equiv 9(\mathrm{mod}10)$, следува дека $9^{2k+t} \equiv 9^t(\mathrm{mod}10), k \in \mathbb{N}_0, t \in \{0,1\}$. Но, било кој степен на бројот 8 е парен број, па затоа цифрата на единиците на дадениот број е еднаква на 1.

60. Определи го двоцифрениот завршеток на бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$.

Решение. Било кој степен на бројот 6 е парен број, а

$$7^1 \equiv 3(\mathrm{mod}\,4), \quad 7^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,4), \quad 7^3 \equiv 3(\mathrm{mod}\,4), \ldots,$$

т.е. парен степен на бројот 7 е од видот $4k+1, k \in \mathbb{N}_0$. Сега, од

$$8^1 \equiv 8(\mathrm{mod}10), \quad 8^2 \equiv 4(\mathrm{mod}10), \quad 8^3 \equiv 2(\mathrm{mod}10),$$
$$8^4 \equiv 6(\mathrm{mod}10), \quad 8^5 \equiv 8(\mathrm{mod}10), \quad 8^6 \equiv 4(\mathrm{mod}10),$$

следува дека бројот $8^{7^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$ е од видот $10t+8, t \in \mathbb{N}_0$. Конечно, бидејќи

$$9^1 \equiv 9(\mathrm{mod}100), \quad 9^2 \equiv 81(\mathrm{mod}100), \quad 9^3 \equiv 29(\mathrm{mod}100),$$
$$9^4 \equiv 61(\mathrm{mod}100), \quad 9^5 \equiv 49(\mathrm{mod}100), \quad 9^6 \equiv 41(\mathrm{mod}100),$$
$$9^7 \equiv 69(\mathrm{mod}100), \quad 9^8 \equiv 21(\mathrm{mod}100), \quad 9^9 \equiv 89(\mathrm{mod}100),$$
$$9^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}100), \quad 9^{11} \equiv 9(\mathrm{mod}100), \quad 9^{12} \equiv 81(\mathrm{mod}100),$$

заклучуваме дека бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$ е од видот $10s+21, s \in \mathbb{N}_0$, односно двоцифрениот завршеток на бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$ е 21.

61. Нека p е прост број поголем од 3. Определи го остатокот при делењето на бројот 2^{p^2} со 13.

Решение. Бидејќи p е прост број поголем од 3, тој е од видот $p = 6k \pm 1$. Според тоа,

$$p^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12(3k^2 \pm 1) + 1 = 12m + 1.$$

Оттука следува дека $2^{p^2} = 2^{12m+1} = 2 \cdot 4096^m$, па како $4096 \equiv 1(\mathrm{mod}13)$ добиваме $2^{p^2} = 2 \cdot 4096^m \equiv 2 \cdot 1 = 2(\mathrm{mod}13)$. Според тоа, за секој прост

број p поголем од 3 остатокот при делење на бројот 2^{p^2} со 13 е 2.

62. Докажи дека $3^{2009}+4^{2009}$ е делив со 7, но не е делив со 5.

Решение. Од $3^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$ следува

$$3^{2007} = (3^3)^{669} \equiv (-1)^{669} = -1 (\mathrm{mod}\, 7),$$

па затоа

$$3^{2009} = 3^{2007} \cdot 3^2 \equiv -1 \cdot 3^2 = -9 \equiv -2 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Слично $4^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$, па затоа

$$4^{2007} = (4^3)^{669} \equiv 1^{669} = 1 (\mathrm{mod}\, 7),$$

од каде добиваме

$$4^{2009} = 4^{2007} \cdot 4^2 \equiv 1 \cdot 4^2 = 16 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Според тоа,

$$3^{2009} + 4^{2009} \equiv -2 + 2 = 0 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Од $3^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 5)$, следува

$$3^{2008} = (3^2)^{1004} \equiv (-1)^{1004} = 1 (\mathrm{mod}\, 5),$$

па затоа

$$3^{2009} = 3^{2008} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 = 3 (\mathrm{mod}\, 5).$$

Слично $4^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$, па затоа

$$4^{2008} = (4^2)^{1004} \equiv 1^{1004} = 1 (\mathrm{mod}\, 7),$$

од каде добиваме

$$4^{2009} = 4^{2008} \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 = 4 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Според тоа,

$$3^{2009} + 4^{2009} \equiv 3 + 4 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5),$$

па затоа 5 не е делител на $3^{2009}+4^{2009}$.

63. Определи го остатокот при делењето на бројот $19^{61}+87^{87}$ со 44.

Решение. Да забележиме дека $87 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 44)$, па затоа важи $87^{87} \equiv (-1)^{87} (\mathrm{mod}\, 44)$, т.е. $87^{87} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 44)$. Понатаму, да забележиме дека $19^5 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 44)$, па затоа

$$19^{61} = 19^{60} \cdot 19 = (19^5)^{12} \cdot 19 \equiv (-1)^{12} \cdot 19 = 19 (\mathrm{mod}\, 44).$$

Конечно, $19^{61}+87^{87}\equiv 19+(-1)=18(\mathrm{mod}\,44)$.

64. Докажи дека $1^{2023}+2^{2023}+\ldots+998^{2023}+999^{2023}$ е деливо со 1000.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
&999\equiv -1(\mathrm{mod}1000),\\
&998\equiv -2(\mathrm{mod}1000),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&502\equiv -498(\mathrm{mod}1000),\\
&501\equiv -499,(\mathrm{mod}1000),
\end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned}
&999^{2023}\equiv -1^{2023}(\mathrm{mod}1000),\\
&998^{2023}\equiv -2^{2023}(\mathrm{mod}1000),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&502^{2023}\equiv -498^{2023}(\mathrm{mod}1000),\\
&501^{2023}\equiv -499^{2023}(\mathrm{mod}1000),
\end{aligned}$$

од каде следува

$$\begin{aligned}
&1^{2023}+2^{2023}+\ldots+499^{2023}+500^{2023}+501^{2023}+\ldots+998^{2023}+999^{2023}\equiv\\
&\equiv 1^{2023}+2^{2023}+\ldots+499^{2023}+500^{2023}-499^{2023}-\ldots-2^{2023}-1^{2023}\\
&=500^{2023}\equiv 0(\mathrm{mod}1000),
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

65. Докажи дека $A=3^{2013}+4^{2013}$ е сложен број.

Решение. *Прв начин*. Ако искористиме дека за секои реални броеви x и y и за секој природен број k важи

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-\ldots-xy^{2k-1}+y^{2k}),$$

за $x=3$ и $y=4$ добиваме

$$\begin{aligned}
A&=3^{2013}+4^{2013}\\
&=(3+4)(3^{2012}-3^{2011}\cdot 4+3^{2010}\cdot 4^2-3^{2009}\cdot 4^3+\ldots-3\cdot 4^{2011}+4^{2012})\\
&=7\cdot(3^{2012}-3^{2011}\cdot 4+3^{2010}\cdot 4^2-3^{2009}\cdot 4^3+\ldots-3\cdot 4^{2011}+4^{2012})
\end{aligned}$$

и фактот дека $3^{2013}+4^{2013}>7$, добиваме дека A е број кој е поголем од 7 и е делив со 7, што значи дека е сложен број.

Втор начин. Од $3^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$ следува $3^{2013} \equiv (3^3)^{671} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$. Слично, од $4^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ следува $4^{2013} \equiv (4^3)^{671} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$. Според тоа, $A = 3^{2013} + 4^{2013} \equiv (-1) + 1 = 0 (\mathrm{mod}\, 7)$. Значи. $A = 3^{2013} + 4^{2013}$ е број поголем од 7 кој е делив со 7, па затоа е сложен број.

66. Дали бројот $2013^{2012} + 2014$ е прост или сложен.

Решение. Имаме, $2013 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 5)$, па затоа $2013^4 \equiv 3^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$, од каде следува $(2013^4)^{503} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$, т.е. $2013^{2012} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$. Според тоа, $2013^{2012} + 2014 \equiv 2015 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$. Конечно, $2013^{2012} + 2014 > 5$ и како $2013^{2012} + 2014$ е делив со 5, заклучуваме дека тој е сложен број.

67. Докажи дека бројот $B = 3^{2013m} + 4^{2013n}$, каде m и n се непарни природни броеви е делив со 91.

Решение. Имаме $3^3 = 27 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$, па затоа

$$3^{2013m} = (3^3)^{671m} \equiv (-1)^{671m} = -1 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Од друга страна, $4^3 = 64 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$, па затоа

$$4^{2013n} = (4^3)^{671n} \equiv 1^{671n} = 1 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Според тоа, $B = 3^{2013m} + 4^{2013n} \equiv -1 + 1 = 0 (\mathrm{mod}\, 7)$, т.е. $7 \mid B$. Понатаму, $3^3 = 27 \equiv 1 (\mathrm{mod} 13)$, па затоа

$$3^{2013m} = (3^3)^{671m} \equiv 1^{671m} = 1 (\mathrm{mod} 13),$$

а како $4^3 = 64 \equiv -1 (\mathrm{mod} 13)$, добиваме

$$4^{2013n} = (4^3)^{671n} \equiv (-1)^{671n} = -1 (\mathrm{mod} 13).$$

Значи, $B = 3^{2013m} + 4^{2013n} \equiv -1 + 1 = 0 (\mathrm{mod} 13)$, т.е. $13 \mid B$. Од досега изнесеното имаме дека бројот B е делив со 7 и со 13, па како овие броеви се заемно прости, заклучуваме дека B е делив со $7 \cdot 13 = 91$.

68. Определи го збирот на цифрите од збирот на цифрите од збирот на цифрите на бројот 2015^{2015}.

Решение. Со $S(n)$ да го означиме збирот на цифрите на бројот n. Познато е дека бројот n има k цифри ако $10^{k-1} \le n < 10^k$. Нека

$a = 2015^{2015}$. Од

$$a = 2015^{2015} < (10^4)^{2015} < 10^{9000}$$

следува дека бројот a нема повеќе од 9000 цифри. Затоа

$$S(a) \le 9000 \cdot 9 = 81000 < 10^5 .$$

Според тоа, бројот $S(a)$ нема повеќе од 5 цифри, па затоа важи $S(S(a)) \le 5 \cdot 9 = 45$. Ако број не е поголем од 45, тогаш збирот на неговите цифри не е поголем од $3 + 9 = 12$, па затоа важи

$$S(S(a)) \le 12 . \qquad (1)$$

Но, секој природен број при делење со 9 дава ист остаток како и збирот на неговите цифри, па затоа

$$a \equiv S(a) \equiv S(S(a)) \equiv S(S(S(a)))(\mathrm{mod}\,9) .$$

Но, $2015 \equiv -1(\mathrm{mod}\,9)$, па затоа

$$a = 2015^{2015} \equiv (-1)^{2015} = -1(\mathrm{mod}\,9) .$$

Според тоа, $S(S(S(a))) \equiv -1(\mathrm{mod}\,9)$, па од (1) следува $S(S(S(a))) = 8$.

2. АЛГЕБРА

1. Во неточното равенство $84 = 65$ допиши знаци на операции, без да користиш загради и да допишуваш нови цифри, така што ќе добиеш точно равенство.

   Решение. Две решенија на задачата се:

   $$8 + 4 = \sqrt{6! : 5} \text{ и } 8 - \sqrt{4} = 6! : 5!.$$

2. Определи ја цифрата на единиците на бројот $((((3^2)^3)^4)^5)^6$.

   Решение. Имаме

   $$((((3^2)^3)^4)^5)^6 = 3^{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 3^{4\cdot(2\cdot3\cdot5\cdot6)} = (3^4)^{2\cdot3\cdot5\cdot6} = 81^{180},$$

   од каде следува дека цифрата на единиците на бројот $((((3^2)^3)^4)^5)^6$ е 1.

3. Со колку нули завршува збирот $98! + 99! + 100!$.

   Решение. Имаме

   $$98! + 99! + 100! = 98!(1 + 99 + 99 \cdot 100) = 98! \cdot 10^4.$$

   Затоа треба да определиме на колку нули завршува бројот $98!$. Бидејќи $98 = 19 \cdot 5 + 3$, постојат 19 броеви кои се помали од 98 и деливи со 5, од кои броевите 25, 50 и 75 се деливи со 25. Значи, бројот $98!$ е делив со $5^{19+3} = 5^{22}$, па затоа бројот $98!$ завршува на 22 нули, што значи дека бројот $98! \cdot 10^4$ завршува на 26 нули.

4. Нека n е природен број и $a = \frac{10^{2n} - 1}{3(10^n + 1)}$ е цел број. Ако збирот на цифрите на бројот a е 567, определи го бројот n.

   Решение. Бидејќи $10^n + 1 \neq 0$ имаме

   $$a = \frac{10^{2n} - 1}{3(10^n + 1)} = \frac{(10^n + 1)(10^n - 1)}{3(10^n + 1)} = \frac{10^n - 1}{3}.$$

   Бројот $10^n - 1$ е запишан со n цифри еднакви на 9, па затоа бројот $a = \frac{10^n - 1}{3}$ е запишан со n цифри еднакви на 3. Според тоа, збирот на

цифрите на бројот $a=\frac{10^n-1}{3}$ е $3n$, па затоа $n=567:3=189$.

5. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{2^{7n+3}\cdot 2^{6n-5}}{2^{12n}:2^{9n}}:\frac{2^{7n-9}\cdot 2^{5n-4}}{2^{2n-3}\cdot 2^3}-3\cdot 2^3.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{2^{7n+3}\cdot 2^{6n-5}}{2^{12n}:2^{9n}}:\frac{2^{7n-9}\cdot 2^{5n-4}}{2^{2n-3}\cdot 2^3}-3\cdot 2^3&=\frac{2^{13n-2}}{2^{3n}}:\frac{2^{12n-13}}{2^{2n}}-3\cdot 2^3\\&=2^{10n-2}:2^{10n-13}-3\cdot 2^3\\&=2^{11}-3\cdot 2^3=2^3(2^8-3)\\&=8\cdot 253=2024.\end{aligned}$$

6. Спореди ги по големина броевите

$$1679616^{1679616}\cdot 2985984^{2985984}\ \text{и}\ 4478976^{4478976}.$$

Решение. Имаме:

$$1679616=2^8\cdot 3^8,\quad 2985984=2^{12}\cdot 3^6\ \text{и}\ 4478976=2^{11}\cdot 3^7.$$

Од

$$\begin{aligned}(2^8)^{2^8\cdot 3^8}\cdot(2^{12})^{2^{12}\cdot 3^6}&=2^{8\cdot 2^8\cdot 3^8}\cdot 2^{12\cdot 2^{12}\cdot 3^6}=2^{2^{11}\cdot 3^8}\cdot 2^{2^{14}\cdot 3^7}=2^{2^{11}\cdot 3^8+2^{14}\cdot 3^7}\\&=2^{3\cdot 2^{11}\cdot 3^7+8\cdot 2^{11}\cdot 3^7}=2^{11\cdot 2^{11}\cdot 3^7}=(2^{11})^{2^{11}\cdot 3^7}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(3^8)^{2^8\cdot 3^8}\cdot(3^6)^{2^{12}\cdot 3^6}&=3^{8\cdot 2^8\cdot 3^8}\cdot 3^{6\cdot 2^{12}\cdot 3^6}=3^{2^{11}\cdot 3^8}\cdot 3^{2^{13}\cdot 3^7}=3^{2^{11}\cdot 3^8+2^{13}\cdot 3^7}\\&=3^{3\cdot 2^{11}\cdot 3^7+4\cdot 2^{11}\cdot 3^7}=3^{7\cdot 2^{11}\cdot 3^7}=(3^7)^{2^{11}\cdot 3^7},\end{aligned}$$

добиваме

$$\begin{aligned}1679616^{1679616}\cdot 2985984^{2985984}&=(2^8\cdot 3^8)^{2^8\cdot 3^8}\cdot(2^{12}\cdot 3^6)^{2^{12}\cdot 3^6}\\&=(2^8)^{2^8\cdot 3^8}\cdot(2^{12})^{2^{12}\cdot 3^6}\cdot(3^8)^{2^8\cdot 3^8}\cdot(3^6)^{2^{12}\cdot 3^6}\\&=(2^{11})^{2^{11}\cdot 3^7}\cdot(3^7)^{2^{11}\cdot 3^7}\\&=(2^{11}\cdot 3^7)^{2^{11}\cdot 3^7}\\&=4478976^{4478976}.\end{aligned}$$

Значи, броевите се еднакви.

7. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$\begin{aligned}A&=(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2\\&=(\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2+2\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}+(\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2\\&=7+2\sqrt{10}+2\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}+7-2\sqrt{10}\\&=14+2\sqrt{49-40}\\&=14+2\cdot 3=20.\end{aligned}$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}A&=(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2\\&=(\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2})^2\\&=(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{2})^2\\&=(2\sqrt{5})^2=20.\end{aligned}$$

8. Ако $x^2+y^2+xy=39$ и $10x-14y+xy=113$, пресметај ја вредноста на изразот $2x+3y$.

Решение. Од второто равенство добиваме $xy=113-10+14y$, па ако замениме во првото равенство наоѓаме $x^2+y^2-10x+14y+74=0$, односно $(x-5)^2+(y+7)^2=0$. Збир на квадрати е еднаков на 0 ако и само ако двата квадрати се еднакви на 0, па од последното равенство следува $x=5,\ y=-7$. Конечно, $2x+3y=2\cdot 5+3\cdot(-7)=10-21=11$.

9. Нека a и b се реални броеви такви што $a>b>0$ и $a^2+b^2=6ab$. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{a+b}{a-b}$.

Решение. Равенството $a^2+b^2=6ab$ е еквивалентно со равенствата

$$(a+b)^2=8ab \text{ и } (a-b)^2=4ab.$$

Сега, бидејќи $a>b>0$ добиваме $\frac{a+b}{a-b}>0$, па затоа

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}}=\sqrt{\frac{8ab}{4ab}}=\sqrt{2}.$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот $R(a,b,c)=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\frac{\frac{a-b-c}{abc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$, за $a=1,5$, $b=0,25$ и $c=-3,75$.

Решение. Имаме:

$$R(a,b,c)=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\frac{\frac{a-b-c}{abc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}:\frac{\frac{a-b-c}{abc}}{\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{b+c-a}{b+c+a}:\frac{2(a-b-c)}{a((b+c)^2-a^2)}=\frac{b+c-a}{b+c+a}:\frac{-2(b+c-a)}{a(b+c-a)(b+c+a)}$$

$$=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{a(b+c-a)(b+c+a)}{-2(b+c-a)}=\frac{a(b+c-a)}{-2}=\frac{a(a-b-c)}{2}.$$

Значи,

$$R(1,5;0,25;-3,75)=\frac{1,5\cdot(1,5-0,25+3,75)}{2}=\frac{1,5\cdot 5}{2}=\frac{7,5}{2}=3,75.$$

11. Дали постојат различни природни броеви a,b,c,d такви што

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1?$$

Решение. Ако равенството $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ го помножиме со $\frac{1}{2}$, добиваме $\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 6}=\frac{1}{2}$, односно $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$. Според тоа, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$ односно постојат природни броеви a,b,c,d со саканото својство.

12. Дали постојат различни природни броеви a,b,c,d такви што важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2014}.$$

Решение. Според претходната задача имаме $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$. Сега, ако последното равенство го поделиме со 2014, добиваме

$$\frac{1}{2\cdot 2014}+\frac{1}{4\cdot 2014}+\frac{1}{6\cdot 2014}+\frac{1}{12\cdot 2014}=\frac{1}{2014}.$$

Според тоа, постојат различни броеви со саканото својство и тие се

$$a=2\cdot 2014,\ b=3\cdot 2014,\ c=6\cdot 2014,\ d=12\cdot 2014.$$

13. Нека a,b,c се ненулти реални броеви такви што

$$a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1.$$

Определи ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

Решение. Бидејќи броевите a,b,c се ненулти, од равенствата

$$a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1$$

добиваме

$$ac+b=c,\ ab+c=a,\ bc+a=b.$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$ac+b+ab+c+bc+a=c+a+b$, т.е $ab+bc+ca=0$.

14. На таблата се запишани неколку позитивни реални броеви така што секој од нив е 2009 пати помал од збирот на преостанатите броеви. Определи колку броеви има и докажи дека сите броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. Нека на таблата се запишани броевите $x_1, x_2, ..., x_k$ и нека $x_1+x_2+...+x_k=S$. Од условот на задачата следува

$$2009x_1=S-x_1,\ 2009x_2=S-x_2,...,\ 2009x_k=S-x_k.$$

Од добиените равенства следуваат равенствата

$$2010x_1=2010x_2=...=2010x_k=S,$$

што значи дека $x_1=x_2=...=x_k$ и $k=2010$.

15. Дадени се k природни броеви $a_1, a_2, ..., a_k$, $k\geq 7$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на k, ако збирот на сите броеви е 100, а збирот на било кои 7 дадени броеви е помал од 15.

Решение. Најголемата можна вредност за k е 100, бидејќи за $a_1=a_2=...=a_{100}=1$ важи $a_{i_1}+a_{i_2}+...+a_{i_7}=7<15$ за било која комбинација од седум од стоте броеви.

За да ја определиме најмалата можна вредност за k да забележиме дека:

$a_1+a_2+...+a_7\leq 14, a_8+a_9+...+a_{14}\leq 14, ..., a_{43}+a_{44}+...+a_{49}\leq 14$,

па затоа $a_1+a_2+...+a_{49}\leq 7\cdot 14=98$, што значи дека $k>49$. Затоа најмалата можна вредност за k е 50, при што $a_1=a_2=...=a_{50}=2$ и $a_{i_1}+a_{i_2}+...+a_{i_7}=14<15$.

16. Ако a и b се два последователни природни броја, докажи дека $a^2+b^2+a^2b^2$ е точен квадрат.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $b=a+1$. Тогаш

$$\begin{aligned} a^2+b^2+a^2b^2 &= a^2+(a+1)^2+(a(a+1))^2 \\ &= a^2+a^2+2a+1+(a(a+1))^2 \\ &= 1+2a(a+1)+(a(a+1))^2 \\ &= (1+a(a+1))^2, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

17. Ако a,b,c,d се четири последователни природни броеви, докажи дека $abcd+1$ е точен квадрат.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a, b=a+1, c=a+2, d=a+3$ се четирите последователни броеви. Имаме

$$\begin{aligned} abcd+1 &= a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \\ &= (a^2+3a)(a^2+2a+a+2)+1 \\ &= (a^2+3a)((a^2+3a)+2)+1 \\ &= (a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1 \\ &= (a^2+3a+1)^2, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

18. Во изразот

$$(x^3-2)^2+(x^2+*)^2$$

замени го знакот * со некој моном така што по квадрирањето и средувањето се добива полином кој е збир на четири мономи.

Решение. Ако на местото на * ставиме ax^k, добиваме

$$(x^3-2)^2+(x^2+ax^k)^2 = x^6-4x^3+4+x^4+2ax^{k+2}+a^2x^{2k}.$$

За $a=2$ и $k=1$ добиваме

$$(x^3-2)^2+(x^2+2x)^2 = x^6-4x^3+4+x^4+4x^3+4x^2 = x^6+x^4+4x^2+4.$$

Значи, * треба да се замени со $2x$.

19. Во изразот

$$(x^4-3)^2+(x^3+*)^2$$

на местото на знакот * стави моном така што по средувањето се добие поли-ном кој е збир на четири мономи.

Решение. Ако на местото на * ставиме ax^k, добиваме

$$(x^4-3)^2+(x^3+ax^k)^2=x^8-6x^4+9+x^6+2ax^{k+3}+a^2x^{2k}.$$

За $a=3$ и $k=1$ добиваме

$$\begin{aligned}x^8-6x^4+9+x^6+2ax^{k+3}+a^2x^{2k}&=x^8-6x^4+9+x^6+6x^4+9x^2\\&=x^8+x^6+9x^2+9.\end{aligned}$$

Значи, на местото на * треба да се стави мономот $3x$.

20. Нека a,b,c се броеви различни од нула, такви што $b(c+a)$ е аритметичка средина на броевите $a(b+c)$ и $c(a+b)$. Ако $b=\frac{2019}{2020}$, пресметај ја аритметичката средина на броевите $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

Решение. Од условот на задачата имаме $2b(c+a)=a(b+c)+c(a+b)$, што е еквивалентно со $2ac=ab+bc$. Но, $abc\neq 0$, па од последното равенство следува равенството $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$. Користејќи го последното равенство, за бараната аритметичка средина се добива

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=\tfrac{1}{3}((\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{c})+\tfrac{1}{b}))=\tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{b}+\tfrac{1}{b})=\tfrac{1}{b}=\tfrac{2020}{2019}.$$

21. На кружница во насока на движењето на стрелките на часовникот се испишани реалните броеви $x_1,x_2,...,x_{12}$ такви што секој број е еднаков на аритметичката средина на броевите меѓу кои се наоѓа. Определи ги броевите $x_1,x_2,...,x_{12}$ ако нивниот збир е еднаков на 2012.

Решение. Нека $x_1=a,\ x_2=b$. Тогаш $\frac{x_1+x_3}{2}=x_2$, од каде добиваме $x_3=2x_2-x_1=2b-a$. Слично, последователно добиваме

$$\begin{aligned}x_4&=2x_3-x_2=3b-2a,\\x_5&=2x_4-x_3=4b-3a,\\x_6&=2x_5-x_4=5b-4a,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\x_{11}&=2x_{10}-x_9=10b-9a,\\x_{12}&=2x_{11}-x_{10}=11b-10a.\end{aligned}$$

Сега,од $x_{11}+x_1=2x_{12}$ следува $10b-9a+a=2(11b-10a)$, од каде добиваме $a=b$. Тоа значи дека $x_i=a$, за $i=1,2,...,12$. Конечно, имаме $x_1+x_2+...+x_{12}=2012$, од каде доиваме $12a=2012$, односно $a=\frac{503}{3}=167\frac{2}{3}$.

22. За броевите a,b,c,d е познато дека

$$ac+ad+bc+db=68 \text{ и } c+d=4.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c+d$.

Решение. Од $ac+ad+bc+db=68$ добиваме дека

$$a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=68$$

односно

$$(a+b)\cdot(c+d)=68.$$

Од тоа што $c+d=4$ дибиваме $4(a+b)=68$. Значи, $a+b=17$.

Според тоа, $a+b+c+d=17+4=21$.

23. Определи ги позитивните броеви a, b и c за кои важи:

$$a^2+ab+ac=20,$$
$$ab+b^2+bc=30 \text{ и}$$
$$ac+bc+c^2=50.$$

Решение. Дадените равенства ги запишуваме во облик

$$a(a+b+c)=20,$$
$$b(a+b+c)=30 \text{ и}$$
$$c(a+b+c)=50.$$

Со нивно собирање добиваме

$$a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)=100,$$
$$(a+b+c)(a+b+c)=100,$$

т.е.

$$(a+b+c)^2=100.$$

Имајќи во предвид дека a, b и c се позитивни броеви, оттука следува дека $a+b+c=10$. Од ова равенство и дадените услови во задачата добиваме дека бараните броеви се $a=2$, $b=3$ и $c=5$.

24. Нека x,y,z се реални броеви такви што броевите xy,yz,zx се рационални и се различни од нула. Докажи дека:

а) бројот $x^2+y^2+z^2$ е рационален,

б) ако бројот $x^3+y^3+z^3$ е рационален и е различен од нула, тогаш и броевите x,y,z се рационални.

Решение. а) Од $xy, zx\in\mathbb{Q}$ следува $xyzx=x^2yz\in\mathbb{Q}$. Од условот

$yz \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ следува $\frac{x^2 yz}{yz} = x^2 \in \mathbb{Q}$. На ист начин се докажува дека $y^2, z^2 \in \mathbb{Q}$, па затоа $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$.

б) Од доказот на тврдењето под а) следува

$$x(x^3 + y^3 + z^3) = x^2 \cdot x^2 + (xy)y^2 + (xz)z^2 \in \mathbb{Q},$$

па ако $x^3 + y^3 + z^3 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, добиваме $x \in \mathbb{Q}$. На ист начин се докажува дека $y, z \in \mathbb{Q}$.

25. Ако a, b, c и $\frac{a - b\sqrt{2015}}{b - c\sqrt{2015}}$ се рационални броеви, докажи дека $b^2 = ac$.

Решение. Нека $\frac{a - b\sqrt{2015}}{b - c\sqrt{2015}} = r$. Тогаш $a - b\sqrt{2015} = r(b - c\sqrt{2015})$, од каде добиваме $a - rb = (b - rc)\sqrt{2015}$. Сега, бројот $\sqrt{2015}$ е ирационален, па затоа последното равенство е исполнето ако и само ако $a - rb = b - rc = 0$, односно $r = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, од каде штоследува $b^2 = ac$.

26. Нека a, b, c, x, y, z се реални броеви такви што $\frac{ay - bx}{c} = \frac{cx - az}{b} = \frac{bz - cy}{a}$. Докажи дека $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Решение. Ако $\frac{ay - bx}{c} = \frac{cx - az}{b} = \frac{bz - cy}{a} = t$, тогаш

$$ay - bx = tc, cx - az = tb, bz - cy = ta.$$

Ако првото равенство го помножиме со c, второто со b и третото со a добиваме

$$acy - bcx = tc^2, cbx - abz = tb^2, baz - cay = ta^2.$$

Бидејќи збирот на левите страни на овие равенства е еднаков на 0, добиваме

$$t(a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Но, од условот следува дека $abc \neq 0$, па затоа $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Според тоа, од последното равенство добиваме $t = 0$. Тоа значи

$$ay = bx, ax = az, bz = cy,$$

односно

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \ \frac{x}{a} = \frac{z}{c}, \ \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Конечно $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

27. Нека $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Докажи дека

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

Решение. Ако $\frac{x}{a}=t$, тогаш $x=at,\ y=bt,\ z=ct$, па затоа

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{a^3t^3}{a^2}+\frac{b^3t^3}{b^2}+\frac{c^3t^3}{c^2}=t^3(a+b+c)$$
$$=\frac{t^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(at+bt+ct)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2},$$

што и требаше да се докаже.

28. Ако за реалните броеви x,y,z важи $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$, докажи дека $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

Решение. Ако првото равенство редоследно го помножиме со x,y,z и од добиените три равенства ги изразиме $\frac{x^2}{y+z},\frac{y^2}{z+x},\frac{z^2}{x+y}$ добиваме

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=x-(\frac{xy}{x+z}+\frac{xz}{x+y})+y-(\frac{xy}{y+z}+\frac{yz}{x+y})+z-(\frac{xz}{y+z}+\frac{yz}{x+z})$$
$$=x+y+z-\frac{xy+xz}{y+z}-\frac{xy+yz}{x+z}-\frac{xz+yz}{x+y}$$
$$=x+y+z-\frac{x(y+z)}{y+z}-\frac{y(x+z)}{x+z}-\frac{x(x+y)}{x+y}$$
$$=x+y+z-x-y-z=0.$$

29. Ако е $x+\frac{1}{x}=a$, изрази го $x^4+\frac{1}{x^4}$ со помош на a.

Решение. Со квадрирање на двете страни на равенството $x+\frac{1}{x}=a$, по средувањето го добиваме равенството $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$. Повторно со квадрирање на двете страни на последното равенство, по средувањето го добиваме равенството $x^4+\frac{1}{x^4}=a^4-4a^2+2$.

30. Ако $\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}}=a$, со помош на a пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}$.

Решение. Од $\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}}=a$ добиваме $\frac{x^4+1}{x^4-1}=a$, од каде наоѓаме

$$x^4+1=ax^4-a, \text{ т.е. } x^4=\frac{a+1}{a-1}.$$

Според тоа,

$$\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}=\frac{\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}}{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}}=\frac{(a+1)^2+(a-1)^2}{(a+1)^2-(a-1)^2}$$
$$=\frac{a^2+2a+1+a^2-2a+1}{a^2+2a+1-a^2+2a-1}$$
$$=\frac{2(a^2+1)}{4a}=\frac{a^2+1}{2a}.$$

31. Ако $x+y=0$ и $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, пресметај x^8+y^8.

Решение. *Прв начин*. Од $x+y=0$ следува $x=-y$, па затоа $x^2=y^2$. Со замена во $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ добиваме $2y^2=\frac{1}{2}$, односно $y^2=\frac{1}{4}$. Според тоа, $x^2=y^2=\frac{1}{4}$, па затоа

$$x^8+y^8=(x^2)^4+(y^2)^4$$
$$=(\tfrac{1}{4})^4+(\tfrac{1}{4})^4$$
$$=\frac{1}{256}+\frac{1}{256}$$
$$=\frac{2}{256}=\frac{1}{128}.$$

Втор начин. Од $x+y=0$ следува $(x+y)^2=0$, т.е. $x^2+2xy+y^2=0$, од каде добиваме $xy=-\frac{x^2+y^2}{2}$. Но, $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, па затоа $xy=-\frac{1}{4}$. Оттука последователно добиваме

$$x^8+y^8=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4$$
$$=((x^2+y^2)^2-2x^2y^2)^2-2(xy)^4$$

$$= ((x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2)^2 - 2(xy)^4$$
$$= ((\tfrac{1}{2})^2 - 2(-\tfrac{1}{4})^2)^2 - 2(-\tfrac{1}{4})^4$$
$$= (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8})^2 - \tfrac{2}{256}$$
$$= (\tfrac{1}{8})^2 - \tfrac{1}{128}$$
$$= \tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{128} = \tfrac{1}{128}.$$

32. Реши ја равенката

$$x + \tfrac{1}{x-2011} = 2011 + \tfrac{1}{x-2011}.$$

Решение. Јасно, $x \neq 2011$. Понатаму, дадената равенка е еквивалентна на равенката $x = 2011$, што противречи на $x \neq 2011$. Конечно, од добиената противречност следува дека равенката нема решение.

33. Реши ја равенката

$$|3x-1| - 2 = 2x - |1-x|.$$

Решение. Имаме два изрази под знакот за апсолутна вредност кои ја содржат непозната x. Од $3x-1=0$ добиваме $x=\tfrac{1}{3}$, а од $1-x=0$ добиваме $x=1$. Затоа решенијата на дадената равенка ќе ги побараме на интервалите $(-\infty, \tfrac{1}{3})$, $[\tfrac{1}{3}, 1)$ и $[1, +\infty)$.

1) На интервалот $(-\infty, \tfrac{1}{3})$ равенката е: $-(3x-1) - 2 = 2x - (1-x)$, од каде добиваме $x = 0$ и ова е решение бидејќи $0 \in (-\infty, \tfrac{1}{3})$.
2) На интервалот $[\tfrac{1}{3}, 1)$ равенката е: $3x - 1 - 2 = 2x - (1-x)$, од каде добиваме $0 \cdot x = 2$ и оваа равенка нема решение, што значи дека и почетната равенка нема решение.
3) На интервалот $[1, +\infty)$ равенката е: $3x - 1 - 2 = 2x - (-1+x)$, од каде добиваме $x = 2$ и ова е решение бидејќи $2 \in [1, +\infty)$.

34. Реши ја равенката

$$||x-2| - |3-x|| = |x+1|.$$

Решение. Изразите под апсолутните вредности се анулираат за $-1, 2$ и 3, па затоа решенијата на дадената равенка ќе ги побараме на интервалите $(-\infty, -1)$, $[-1, 2)$, $[2, 3)$ и $[3, +\infty)$.

Ако $x \in (-\infty,-1)$, равенката го добива видот $|2-x-3+x|=-x-1$, од каде добиваме $1=-x-1$, т.е. $x=-2$. Бидејќи $-2 \in (-\infty,-1)$, тоа е решение на почетната равенка.

Ако $x \in [-1,2)$, равенката го добива видот $|2-x-3+x|=x+1$, од каде добиваме $1=x+1$, т.е. $x=0$. Бидејќи $0 \in [-1,2)$, тоа е решение на почетната равенка.

Ако $x \in [2,3)$, равенката го добива видот $|x-2-3+x|=x+1$, од каде добиваме $|2x-5|=x+1$, па мораме да разгледаме два случаја. Ако $2 \le x < \frac{5}{2}$, добиваме $5-2x=x+1$, односно $x=\frac{4}{3}$ и ова не е решение бидејќи $\frac{4}{3}<2$. Ако $\frac{5}{2} \le x < 3$, добиваме $2x-5=x+1$, т.е. $x=6$ и ова не е решение бидејќи $6>3$.

Ако $x \in [3,+\infty)$, равенката го добива видот $|x-2+3-x|=x+1$, од каде добиваме $1=x+1$, т.е. $x=0$, а тоа во овој случај не е решение.

Конечно, решенија на почетната равенка се $x=-2$ и $x=0$.

35. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2-8x+16}+|x+3|=25.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенката

$$\sqrt{(x-4)^2}+|x+3|=25,$$
$$|x-4|+|x+3|=25.$$

Ако $x<-3$, тогаш $|x-4|=-(x-4)$ и $|x+3|=-(x+3)$, па равенката го добива видот $4-x-x-3=25$, од каде добиваме $x=-12$ и ова е едно решение на почетната равенка.

Ако $-3 \le x < 4$, тогаш $|x-4|=-(x-4)$ и $|x+3|=x+3$, па равенката го добива видот $4-x+x+3=25$. Последната равенка нема решение, па значи и почетната равенка нема решение за кое $-3 \le x < 4$.

Ако $x \ge 4$, тогаш $|x-4|=x-4$ и $|x+3|=x+3$, па равенката го добива видот $x-4+x+3=25$, од каде добиваме $x=13$ и ова е уште едно решение на почетната равенка.

36. Реши ја равенката

$$|(\sqrt{7-x})^2+1|=13.$$

Решение. Заради определеност на коренот мора да е $7-x\geq 0$, т.е. $x\leq 7$. Според тоа, $(\sqrt{7-x})^2=7-x$, па затоа дадената равенка е еквивалентна со равенката $|7-x+1|=13$, односно $|8-x|=13$. Од последната равенка следува $8-x=13$ или $8-x=-13$. Решенијата на овие равенки се $x=-5$ и $x=21$. Јасно, заради условот $x\leq 7$ единствено решение на почетната равенка е $x=-5$.

37. За кои вредности на бројот a равенката

$$(3x-a)^2+(4x+1)^2=(5x-1)^2,$$

а) има решение,

б) има решение 4,

в) нема решение?

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$9x^2-6ax+a^2+16x^2+8x+1=25x^2-10x+1,$$
$$6ax-18x=a^2,$$
$$6x(a-3)=a^2.$$

а) Последната равенка, која е еквивалентна на дадената, има решение $x=\frac{a^2}{6(a-3)}$, за $a\neq 3$.

б) Решението на равенката е 4, ако $4=\frac{a^2}{6(a-3)}$, односно ако

$$a^2=24(a-3),$$
$$a^2-24a+72=0,$$
$$a^2-2\cdot 12a+12^2-12^2+72=0$$
$$(a-12)^2=72,$$
$$a-12=\pm 6\sqrt{2},$$
$$a=12\pm 6\sqrt{2}.$$

Значи, решението на равенката е 4 ако $a=12-6\sqrt{2}$ или $a=12+6\sqrt{2}$.

в) Равенката $6x(a-3)=a^2$ нема решение ако $a=3$. За $a=3$ равенката го добива видот $0\cdot x=9$ и не постои ниту еден реален број x за кое последното равенство е точно.

38. За кои вредности на бројот a равенката

$$(3x-a)^2+4(x+1)^2=(x-2)^2+4(x-1)(x+1),$$

а) има решение,

б) има решение 2,

в) нема решение?

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$9x^2-6ax+a^2-4x^2-8x-1=x^2-4x+4+4x^2-4,$$

$$-6ax-4x=4-a^2,$$

$$2x(3a+2)=a^2-4.$$

а) Последната равенка, која е еквивалентна на дадената има решение $x=\frac{a^2-4}{2(3a+2)}$, ако $3a+2\neq 0$, односно $a\neq -\frac{2}{3}$.

б) Дадената равенка има решение 2 ако

$$2=\frac{a^2-4}{2(3a+2)},$$

$$4(3a+2)=a^2-4,$$

$$a^2-12a-12=0,$$

$$a^2-2\cdot 6a+6^2-6^2-12=0,$$

$$(a-6)^2=48,$$

$$a-6=\pm\sqrt{48},$$

$$a=6\pm 4\sqrt{3}.$$

Според тоа, дадената равенка има решение 2 ако $a=6+4\sqrt{3}$ или $a=6-4\sqrt{3}$.

в) Равенката $2x(3a+2)=a^2-4$ нема решение ако $a=-\frac{2}{3}$. За $a=-\frac{2}{3}$ равенката го добива видот $0\cdot x=-\frac{32}{9}$ и не постои реален број x за кој ова равенство е точно.

39. Определи ги реалните броеви x,y,z,t за кои важи

$$x^2+y^2+z^2+t^2+1=x(y+z+t+1).$$

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно на равенствата

$$(\frac{x^2}{4}-x+1)+(\frac{x^2}{4}-xy+y^2)+(\frac{x^2}{4}-xz+z^2)+(\frac{x^2}{4}-xt+t^2)=0,$$
$$(\frac{x}{2}-1)^2+(\frac{x}{2}-y)^2+(\frac{x}{2}-z)^2+(\frac{x}{2}-t)^2=0.$$

Бидејќи збирот на четири квадрати е еднаков на нула само ако собирците се еднакви на нула, добиваме

$$\frac{x}{2}-1=\frac{x}{2}-y=\frac{x}{2}-z=\frac{x}{2}-t=0,$$

од каде следува $x=2,\ y=z=t=1$.

40. Определи ги сите можни вредности на позитивниот реален број a за кој неравенката $|x-2|<a$ има точно 4 решенија во множеството цели броеви.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со

$$2-a<x<2+a.$$

Бројот 2 секогаш припаѓа на множеството решенија, а ако припаѓа 3, тогаш припаѓа и 1, ако припаѓа 4, тогаш припаѓа и 0 итн. Очигледно во множеството цели броеви оваа неравенка секогаш има непарен број решенија, па затоа не постои позитивен реален број a за кој дадената неравенка има точно 4 решенија во множеството цели броеви.

41. Определи ги сите можни вредности на позитивниот реален број a за кој неравенката $|x-2{,}1|<a$ има точно 4 решенија во множеството цели броеви.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со

$$2{,}1-a<x<2{,}1+a.$$

Ако оваа неравенка има точно 4 решенија во множеството цели броеви, тогаш тоа мора да се броевите 1, 2, 3 и 4. Според тоа, $a\in(1{,}9;\ 2{,}1)$.

42. Реши ја неравенката:

$$||x-|x+|x-|x+|x||||\le 2012. \qquad (1)$$

Решение. Ако $x<0$, тогаш $|x|=-x$, па затоа од (1) последователно следува

$$||x-|x+|x-|x-x||||\le 2012,$$
$$||x-|x+|x|||\le 2012,$$
$$||x-|x-x||\le 2012,$$
$$|x|\le 2012,$$

што значи дека решенија на (1) се сите реални броеви x такви што $-2012 \le x < 0$.

Ако $x \ge 0$, тогаш $|x| = x$, па затоа од (1) последователно следува

$$\begin{aligned}
&|x-|x+|x-|x+x||| \le 2012,\\
&|x-|x+|x-2x||| \le 2012,\\
&|x-|x+|x||| \le 2012,\\
&|x-|x+x|| \le 2012,\\
&|x-2x| \le 2012,\\
&|x| \le 2012,
\end{aligned}$$

што значи дека решенија на (1) се сите реални броеви x такви што $0 \le x \le 2012$.

Конечно, решенија на (1) се сите реални броеви од интервалот $[-2012, 2012]$.

43. Определи го збирот на целобројните решенија на неравенката

$$|x-|x-|x-|x-|x|||| \le 2008.$$

Решение. Ако $x < 0$, тогаш $x-|x| = x-(-x) = 2x$, па дадената неравека го добива видот $|5x| \le 2008$, односно $-5x \le 2008$, што значи дека $x \ge -\frac{2008}{5} = -401\frac{3}{5}$. Значи, во овој случај целобројните решенија на почетната неравена се $-401, -400, -399, ..., -2, -1$.

Ако $x > 0$, тогаш $x-|x| = x-x = 0$, па дадената неравенка го добива видот $|x| \le 2008$, односно $x \le 2008$ и во овој случја целобројните решенија се $0, 1, 2, 3, ..., 400, 401, 402, ..., 2007, 2008$. Според тоа, збирот на сите цело-бројни решенија на почетната равенка е

$$\begin{aligned}
S &= (-401) + (-400) + ... + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + 2007 + 2008\\
&= 402 + 403 + 404 + ... + 2008\\
&= 1607 \cdot 401 + (1 + 2 + 3 + ... + 1607)\\
&= 647407 + 1292028\\
&= 1936435.
\end{aligned}$$

44. Определи го збирот на сите целобројни решенија на неравенката

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} \le 9.$$

Решение. Дадената неравека последователно е еквивалентна на неравенките

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+1)^2}\le 9,$$
$$|x-1|+|x|+|x+1|\le 9.$$

Ако $x<-1$, ја добиваме неравенката $1-x-x-1-x\le 9$, па е $x\ge -3$. Значи, во овој случај целобројни решенија на неравенката се -3 и -2.
Ако $-1\le x<0$, ја добиваме неравенката $1-x-x+1+x\le 9$, па е $x\ge -7$. Значи, во овој случај целобројно решение е -1.
Ако $0\le x<1$, ја добиваме неравенката $1-x+x+1+x\le 9$, па е $x\le 7$. Значи, во овој случај целобројно решение е 0.
Ако $x\ge 1$, ја добиваме неравенката $x-1+x+x+1\le 9$, па е $x\le 3$. Значи,целобројни решенија се 1, 2 и 3.
Конелно,збирот на сите целобројни решенија на дадената неравенка е

$$(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3=0.$$

45. Дадена е линеарната функција

$$f(x)=(2a-3b)x+a-2b,\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Ако

$$f(x-1)+f(2x+1)=3x+1,$$

определи ги коефициентите a и b.

Решение. Имаме:

$$f(x-1)+f(2x+1)=(2a-3b)(x-1)+a-2b+(2a-3b)(2x+1)+a-2b$$
$$=(6a-9b)x+2a-4b,$$

па затоа

$$(6a-9b)x+2a-4b=3x+1, \qquad (1)$$

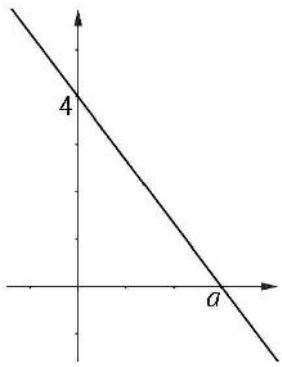
за секој реален број x. Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме $2a-4b=1$, а ако ставиме $x=1$, добиваме $8a-13b=4$. Тако го добиваме системот

$$\begin{cases}2a-4b=1,\\ 8a-13b=4.\end{cases}$$

Ако првата равенка ја помножиме со 4 и добиената равенка ја одземеме од втората равенка добиваме $3b=0$, односно $b=0$. Со замена во првата равенка добиваме $2a=1$, т.е. $a=\frac{1}{2}$.

46. Определи ја линеарната функција $y=kx+n$ чиј график ја содржи точката $A(0,4)$ и со позитивните делови на координатните оски формира триаголник со плоштина 6.

Решение. Графикот на функцијата ја сече $y-$оската во точката $A(0,4)$, па затоа $n=4$, т.е. функцијата е $y=kx+4$. Бидејќи функцијата со позитивните делови на координатните оски формира триаголник, да земеме дека таа ја сече $x-$оската во точка $B(a,0)$. Тогаш плоштината на добиениот триаголник е $\frac{4a}{2}=2a$, па затоа $2a=6$, односно $a=3$. Бидејќи графикот ја содржи точката $B(3,0)$, добиваме $0=3k+4$, односно $k=-\frac{4}{3}$ и бараната функција е $y=-\frac{4}{3}x+4$.



47. Во координатна рамнина се дадени точките $A(2,3)$ и $B(10,11)$.

а) Определи ја должината на отсечката AB.

б) Определи ги должините на ортоголналните проекции на отсечката AB на координатните оски.

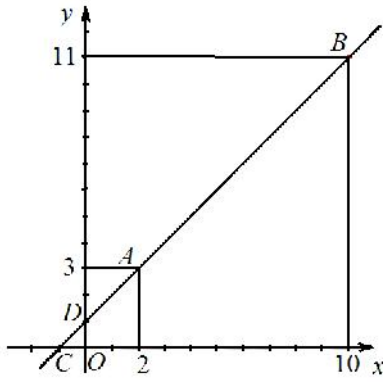
в) Определи го аголот кој отсечката AB го зафаќа со својата ортогонална проекција на $x-$оската.

Решение. а) Должината на отсечката AB е

$$\overline{AB}=\sqrt{(10-2)^2+(11-3)^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}.$$

б) Должините на ортоголналните проекции на отсечката AB на координатните оски се: на $x-$оската $10-2=8$ и на $y-$оската $11-3=8$.

в) Нека $y=kx+n$ е правата која минува низ точките A и B. Тогаш $3=2k+n$ и $11=10k+n$. Ако од втората ја одземеме првата равенка добиваме $8k=8$, односно $k=1$. Значи, $n=1$, па правата низ точките A и B е $y=x+1$. Оваа права ја сече $x-$оската во точката $C(-1,0)$ и ја сече $y-$оската во точката $D(1,0)$. Според тоа, триаголникот COD, каде O е координатниот поеток, е рамнокрак правоаголен, што значи дека отсечката AB со $x-$оската зафаќа агол од 45°.



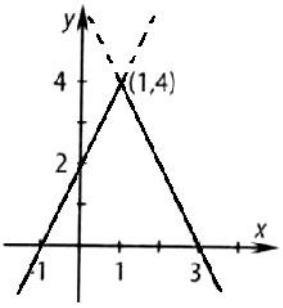
48. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со графикот на функцијата $y=-2|x-1|+4$ и $x-$ оската.

Решение. Бидејќи

$$|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq 1,\\ -(x-1), & x<1,\end{cases}$$

графикот на функцијата ќе има две гранки

$$y=\begin{cases}-2x+6, & x\geq 1,\\ 2x+2, & x<1.\end{cases}$$

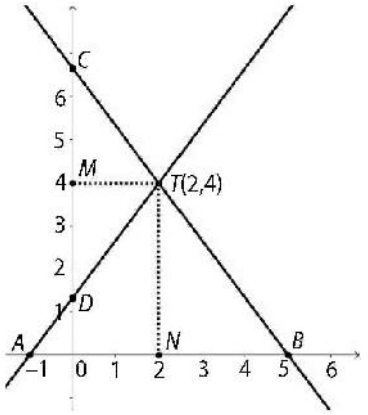


Графикот на функцијата со $x-$ оската формира триаголник. Две темиња на овој триаголник се на $x-$ оската, а нивните координати се $(-1,0)$ и $(3,0)$. Третото теме на триаголникот е во пресекот на правите $y=-2x+6$ и $y=2x+2$, а тоа е точката $(1,4)$. Значи, основата на триаголникот е со должина 4, а на неа соодветната висина има должина 4. Значи, плоштината на триаголникот е $P=\frac{ah}{2}=8$.

49. Во координатен систем во рамнината е дадена точка $T(2,4)$. Низ точката T се повлечени прави p и q. Правата p ја сече $x-$ оската во точката A, а $y-$ оската во точката D. Правата q ја сече $x-$ оската во точката B, а $y-$ оската во точката C. Определи ги равенките на правите p и q ако триаголниците ABT и CDT се рамнокраки со основи AB и CD, соодветно, а односот на нивните плоштини е $P_{ABT}:P_{CDT}=9:4$.

Решение. Триаголникот ABT е рамнокрак, па подножјето N на висината повлечена од темето T на основата AB е средина на отсечката AB. Да означиме $\overline{AB}=a$. Тогаш од $\overline{TN}=4$ следува $P_{ABT}=2a$. Слично, триаголникот CDT е рамнокрак, па подножјето на висината повлечена од темето T на основата CD е средина на отсечката CD. Да означиме $\overline{CD}=b$. Тогаш од $\overline{TM}=2$ следува $P_{CDT}=b$. Сега, од условот $P_{ABT}:P_{CDT}=9:4$ следува $b=\frac{8}{9}a$. Бидејќи $TM\parallel NB$ и $CM\parallel TN$, добиваме дека триаголниците CMT и TNB се слични, па затоа $\overline{CM}:\overline{MT}=\overline{TN}:\overline{NB}$, од каде добиваме $ab=32$. Сега, ако во последната равенка замениме $b=\frac{8}{9}a$, добиваме дека $a=6$.

Кординатите на точката N се $(2,0)$, па затоа $A(-1,0)$ и $B(5,0)$. Правата p минува низ точките A и T, па со замена на нивните координати во $y=kx+n$ и решавање на систем од две равенки со две непознати ја добиваме равенката на правата p: $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$. Аналогно, правата q минува низ точките B и T, па решавајќи го соодветниот систем равенки добиваме дека равенката на правата q е $y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$.



50. Пресметај ја плоштината на триаголникот чии темиња се пресечните точки на правите:

$$y=x,\ y=-x+4,\ y=3x-12.$$

Решение. Со решавање на следните системи равенки

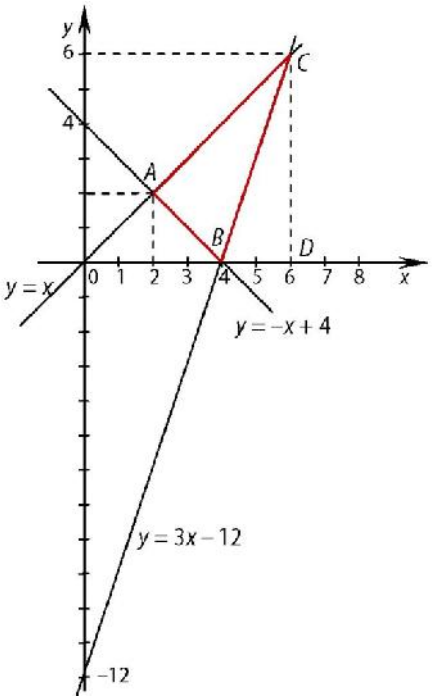
$$\begin{cases} y=x, \\ y=-x+4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3x-12, \\ y=-x+4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x, \\ y=3x-12, \end{cases}$$

ги добиваме темињата $A(2,2)$, $B(4,0)$ и $C(6,6)$ на бараниот триаголник.

Плоштината на триаголникот ABC може да ја пресметаме кога од плоштината на триаголникот OBC ги одземеме плоштините на триаголниците OAB и BCD. Имаме



$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ODC}-P_{\triangle OAB}-P_{\triangle BCD}=\frac{6\cdot 6}{2}-\frac{4\cdot 2}{2}-\frac{2\cdot 6}{2}=8.$$

51. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со правата $y=4$ и графикот на функцијата

$$y=|x+1|+|x-1|.$$

Решение. Од

$$|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq 1,\\ -(x-1), & x<1,\end{cases} \text{ и } |x+1|=\begin{cases}x+1, & x\geq -1,\\ -(x+1), & x<-1,\end{cases}$$

следува дека графикот на функцијата ќе има три гранки

$$y=\begin{cases}-2x, & x<-1,\\ 2, & -1\leq x<1,\\ 2x, & x\leq 1.\end{cases}$$

Графикот на функцијата $y=|x+1|+|x-1|$ со правата $y=4$ фурмира рамнокрак трапез (направи цртж). Темињата на трапезот се точките со координати $(-1,2),(1,2),(2,4)$ и $(-2,4)$. Основите на трапезот се отсечки со должини 2 и 4, а висината на трапезот е со должина њ. Значи, бараната плоштина е

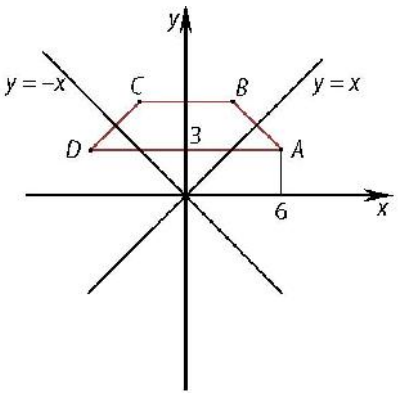
$$P=\tfrac{a+b}{2}h=\tfrac{4+2}{2}\cdot 2=6.$$

52. Определи ги сите прави паралелни со $y-$оската кои со правата $y=\frac{1}{2}x+1$ и $x-$оската формираат триаголник со плоштина 16.

Решение. Нека бараната права е $x=a$. Триаголникот кој го формираат дадените прави е правоаголен со темиња $A(-2,0), B(a,0)$ и $C(a,\frac{1}{2}a+1)$, а правиот агол е во темето B. Според тоа, плоштината на триаголникот е $\frac{1}{2}|a+2|\cdot|\frac{1}{2}a+1|=\frac{1}{4}(a+2)^2$. Значи, $\frac{1}{4}(a+2)^2=16$, од каде добиваме $a+2=\pm 8$, т.е. $a=-10$ и $a=6$. Според тоа, бараните прави се $x=-10$ и $x=6$.

53. Пресликај ја точката $A(6,3)$ со осна симетрија во однос на графикот на функцијата $y=x$ и означи ја сликата со B. Потоа пресликај ја точката B со осна симетрија во однос на y-оската и означи ја сликата со C. Точката C пресликај ја со осна симетрија во однос на графикот на функцијата $y=-x$ и сликата означи ја со D. Пресметај ги периметарот и плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Четириаголникот кој се добива е рамнокрак трапез, чии темиња се $A(6,3)$, $B(3,6)$, $C(-3,6)$ и $D(-6,3)$. Јасно, основите на овој трапез се $\overline{DA}=12$ и $\overline{CB}=6$, а висината е $h=3$. Сега, од Питагоровата теорема следува дека должината на кракот е

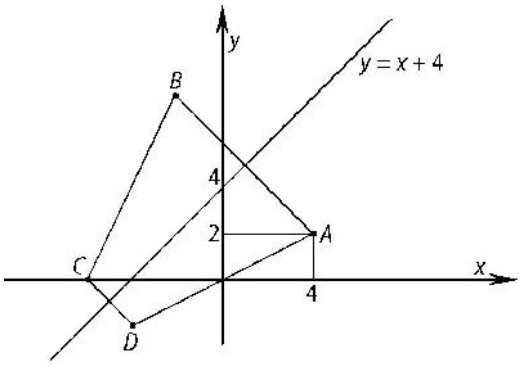


$$\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{(\tfrac{a-b}{2})^2+h^2}$$
$$=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

Конечно, плоштината на четириаголникот $ABCD$ е $P=\frac{12+6}{2}\cdot 3=27$, а неговиот периметар е $L=12+6+3\sqrt{2}=18+3\sqrt{2}$.

54. Пресликај ја точката $A(4,2)$ со централна симетрија во однос на координатниот почеток и добиената точка означи ја со D. Потоа двете точки пресликај ги со осна симетрија во однос на графикот на функцијата $y=x+4$. Сликата на точката A означи ја со B, а сликата на точката D означи ја со C. Пресметај го периметарот на добиениот четириаголник $ABCD$.

Решение. Добиениот четириаголник е осносиметричен во однос на правата $y=x+4$, па затоа е рамнокрак трапез. Сега, $D(-4,-2)$ и за координатите на другите две темиња, од осната симетрија лесно се добива дека $C(-6,0)$ и $B(-2,8)$. Значи, должините на стра-ните се:



$$\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-8)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2},$$
$$\overline{AD}=\overline{BC}=\sqrt{(-6+2)^2+(0-8)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5},$$
$$\overline{CD}=\sqrt{(-4+6)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Конечно, периметарот на трапезот $ABCD$ е:

$$L = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 2 \cdot 4\sqrt{5} = 8(\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

Забелешка. Плоштината на трапезот може да се пресмета ако ја определиме неговата висина, но може да се пресмета и како збир на плоштини на четири триаголници. На читателот му препорачуваме истата самостојно да ја пресмета на двата начина.

55. Права $3x + 4y = k, k > 0$ ги сече координатните оски Ox и Oy во точките A и B, соодветно. Ако плоштината на триаголникот OAB е еднаква на 216, колку е оддалечена точката O од правата AB?

Решение. Имаме $A(\frac{k}{3}, 0)$ и $B(0, \frac{k}{4})$, па затоа $\overline{OA} = \frac{k}{3} = a$ и $\overline{OB} = \frac{k}{4} = b$. Според тоа, $216 = P = \frac{ab}{2} = \frac{k^2}{24}$, од каде добиваме дека $k = 72$. Според тоа, $a = 24$ и $b = 18$. Сега, од Питагоровата теорема следува дека хипотенузата на триаголникот OAB е $c = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$. Конечно, за плоштината на триаголникот имаме $216 = \frac{ch}{2} = 15h$, каде h е висината повлечена кон хипотенузата, т.е. растојанието од координатниот почеток до правата. Значи, бараното растојание е $d = 14,4$.

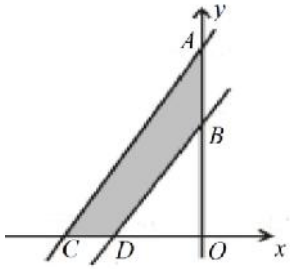
56. Во координатната рамнина Oxy е дадена права $4x + 3y = n$, $n > 0$ која од координатниот почеток O е оддалечена 12. Определи ја плоштината на триаголникот кој таа права го формира со координатните оски Ox и Oy.

Решение. Нека $A(\frac{n}{4}, 0)$ и $B(0, \frac{n}{3})$ се пресечните точки на правата $4x + 3y = n$ со координатните оски Ox и Oy. Од правоаголниот триаголник OAB имаме $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \frac{n^2}{16} + \frac{n^2}{9} = \frac{25n^2}{144}$, па затоа $\overline{AB} = \frac{5n}{12}$. Сега, за плоштината на триаголникот OAB добиваме дека $P = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2}$, каде $h = 12$, па затоа $\frac{5n}{12} \cdot 12 = \frac{n^2}{12}$. Значи, $n = 60$ и $P = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150$.

57. Во линеарната функција $y = \frac{m-1}{2}x + \frac{m+1}{2}, m \in \mathbb{R}$, определи го параметарот m така што нејзиниот график ќе биде паралелен со графикот на

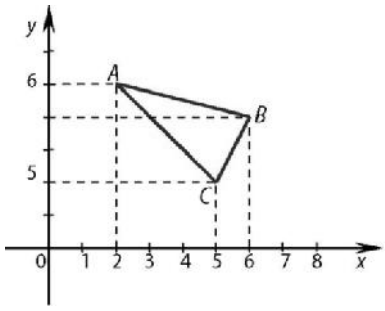
функцијата $2x-y+5=0$. Определи ја плоштината на делот од рамнината ограничен со овие паралелни прави и координатните оски.

Решение. Дадената права $2x-y+5=0$ ја запишуваме во видот $y=2x+5$. За да двете прави се паралелни потребно е да важи $\frac{m-1}{2}=2$, од каде добиваме $m=5$. Со замена во $y=\frac{m-1}{2}x+\frac{m+1}{2}$ добиваме дека равенката на втората права е $y=2x+3$. Фигурата ограничена со двете паралелни прави и координатните оски е четириаголникот $ABDC$. Лесно се добиваме дека: $A(0,5), B(0,3), C(-\frac{5}{2},0)$ и $D(-\frac{3}{2},0)$. Според тоа, бараната плоштина е

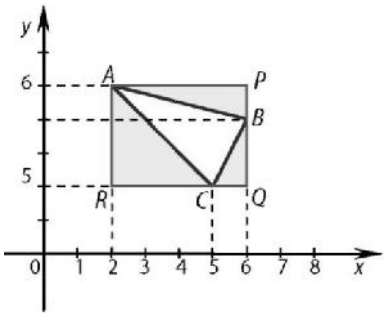


$$P=P_{ACO}-P_{BDO}=\frac{5\cdot\frac{5}{2}}{2}-\frac{3\cdot\frac{3}{2}}{2}=\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=4.$$

58. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC прикажан на цртежот десно.



Решение. Да го воочиме правоаголникот $APQR$ (види цртеж). Плоштината на триаголникот ABC можеме да ја пресметаме како разлика на плоштината на правоаголникот $APQR$ и збирот на плоштините на правоаголните триагоници ABP, BCQ и CAR. Според тоа:



$$\begin{aligned}P&=P_{APQR}-(P_{ABP}+P_{BCQ}+P_{CAR})\\&=\overline{AR}\cdot\overline{RQ}-(\frac{\overline{AP}\cdot\overline{PB}}{2}+\frac{\overline{BQ}\cdot\overline{QC}}{2}+\frac{\overline{CR}\cdot\overline{AR}}{2})\\&=4\cdot3-(\frac{4\cdot1}{2}+\frac{2\cdot1}{2}+\frac{3\cdot3}{2})\\&=12-(2+1+4{,}5)=4{,}5.\end{aligned}$$

59. Определи ги сите парови реални броеви k и n, такви што графикот на функцијата $y=kx+n$ го сече под прав агол графикот на функ-

цијата $y=\frac{1}{2}x+1$ во точката $C(6,4)$.

Решение. Точката $A(-2,0)$ е пресечната точка на графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x+1$ и $x-$оската. Нека $B(b,0)$ е пресечната точка на графикот на функцијата и $x-$оската, а D е подножјето на висината повлечена од темето C на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC. Тогаш $D(6,0)$. Бидејќи должината на висината повлечена над хипотенузата е 4, а должината на отсечката AD е 8, добиваме дека должината на отсечката DB е 2. Според тоа, $b=8$, односно $B(8,0)$. Графикот на функцијата која минува низ точките B и C е $y=-2x+16$, па решението на задачата е $k=-2$ и $n=16$.

60. Докажи го неравенството

$$2^{2015}+3^{2015}<4^{2015}.$$

Решение. Имаме $2^{2015}+3^{2015}<2\cdot 3^{2015}$, па затоа доволно е да докажеме дека $2\cdot 3^{2015}<4^{2015}$. Последното неравенство следува од

$$2=\frac{54}{27}<\frac{64}{27}=(\frac{4}{3})^3<(\frac{4}{3})^3(\frac{4}{3})^{2012}=\frac{4^{2015}}{3^{2015}}.$$

61. Докажи го неравенството

$$3^{2016}+4^{2016}<6^{2016}.$$

Решение. Имаме $3^{2016}+4^{2016}<2\cdot 4^{2016}$, па затоа доволно е да докажеме дека $2\cdot 4^{2016}<6^{2016}$, односно $2\cdot 2^{2016}<3^{2016}$. Сега, од $\frac{2}{3}<1$ и $\frac{8}{9}=\frac{2^3}{3^2}<1$ следува $(\frac{2}{4})^{2014}\frac{2^3}{3^2}<1$, односно $2\cdot 2^{2016}<3^{2016}$.

62. Докажи дека

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)}>\frac{674}{1011}.$$

Решение. Користејќи ги идентитетите

$$x^3\pm 1=(x\pm 1)(x^2\mp x+1)$$

имаме:

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2020}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2022}\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\ldots(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)\ldots(2021^2-2021+1)} \quad (1)$$

За првата од двете дропки на десната страна од добиеното равенство (1), со кратење, добиваме:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2020}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2022}=\frac{2}{2021\cdot 2022}=\frac{1}{2021\cdot 1011}.$$

За да ја пресметаме втората дропка на десната страна на (1), ќе го користиме идентитетот:

$$x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1.$$

Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2020}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2022}\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\ldots(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)\ldots(2021^2-2021+1)}&=\frac{2021^2+2021+1}{2^2-2+1}\\&=\frac{2021\cdot 2022+1}{3}\\&>\frac{2021\cdot 2022}{3}=2021\cdot 674\end{aligned}$$

Конечно,

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)}>\frac{1}{2021\cdot 1011}\cdot 2021\cdot 674=\frac{674}{1011}.$$

63. Докажи дека

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}<8.$$

Решение. Од $\sqrt{6}<3$ следува

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}}=3,$$

а од $\sqrt{20}<5$ следува

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}<\sqrt{20+\sqrt{20+5}}=5,$$

па затоа

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}<3+5=8.$$

64. Докажи дека

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}<10.$$

Решение. Од $\sqrt{12}<4$ следува

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}<\sqrt{12+\sqrt{12+4}}=4,$$

а од $\sqrt{30}<6$ следува

$$\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}<\sqrt{30+\sqrt{30+6}}=6.$$

Конечно,

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}<4+6=10.$$

65. Докажи дека за секој реален број x важи

$$x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16>0.$$

Решение. Ако $x<0$, тогаш секој собирок $x^{10},-2x^3,4x^2,-8x,16$, па затоа и нивниот збир $x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16$ е позитивен.

Ако $0\le x<2$, тогаш $2-x>0$, па затоа

$$x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16=x^{10}+2x^2(2-x)+8(2-x)>0.$$

Ако $x\ge 2$, тогаш $x-2>0$, па затоа

$$x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16>x^4-2x^3+4x^2-8x+16$$
$$=x^3(x-2)+4x(x-2)+16>0,$$

бидејќи сите собирци $x^3(x-2),4x(x-2),16$ се позитивни.

66. Определи број x така што збирот $x+x^2$ ќе биде минимален.

Решение. Имаме

$$x^2+x=x^2+2x\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}=(x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}\ge-\tfrac{1}{4}.$$

Според тоа, најмалата можна вредност на збирот $x+x^2$ ќе биде еднаква на $-\frac{1}{4}$ и таа се достигнува за $x=-\frac{1}{2}$.

67. Нека x и y се реални броеви такви што $2x+3y=10$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $4x^2+9y^2$.

Решение. Од $2x+3y=10$ следува $y=\frac{10-2x}{3}$, па затоа

$$4x^2+9y^2=4x^2+9\cdot\tfrac{100-40x+4x^2}{9}=8x^2-40x+50+50$$
$$=2(4x^2-20x+25)+50=2(2x-5)^2+50\ge 50.$$

Според тоа, најмалата можна вредност на дадениот израз е 50 и истата се достигнува за $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{5}{3}$.

68. За кои вредности на реалните броеви x и y изразот

$$x^2 - 8xy + 19y^2 - 6y + 3$$

прима најмала вредност.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} x^2 - 8xy + 19y^2 - 6y + 3 &= x^2 - 8xy + 16y^2 + 3y^2 - 6y + 3 \\ &= (x-4y)^2 + 3(y-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x - 4y = y - 1 = 0$, т.е. ако и само ако $y = 1$ и $x = 4$. Значи, најмалата можна вредност на дадениот израз е 0 и истата се достигнува за $y = 1$ и $x = 4$.

69. Ако x и y се ненегативни реални броеви такви што $x^2 + y^2 = 18$, тогаш $x + y \leq 6$. Докажи!

Решение. *Прв начин*. Од $(x-y)^2 \geq 0$ следува $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Оттука следува дека

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 36,$$

па затоа $x + y \leq 6$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3, \text{ т.е. } x + y \leq 6.$$

70. Ако x, y, z се ненегативни реални броеви такви што $x + y + z = 6$, докажи дека $xy + yz + zx \leq 12$.

Решение. Ако искористиме дека за секои ненегативни реални броеви a, b важи $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, добиваме

$$\begin{aligned} 36 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{y^2+z^2}{2} + \frac{z^2+x^2}{2} + 2xy + 2yz + 2zx \\ &\geq xy + yz + zx + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= 3(xy + yz + zx), \end{aligned}$$

од каде добиваме $xy + yz + zx \leq 12$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 2$.

71. Докажи дека за секој реален број x важи

$$(x^2+1)^8-(x^2+1)^5 \geq \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^4}.$$

Решение. Воведуваме смена $y=x^2+1$. Од $x^2 \geq 0$, за секој реален број x следува $y \geq 1$. Оттука, бидејќи $y>0$, последователно добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$y^8-y^5 \geq \frac{1}{y}-\frac{1}{y^4},$$
$$y^{12}-y^9 \geq y^3-1,$$
$$y^9(y^3-1)-(y^3-1) \geq 0,$$
$$(y^3-1)(y^9-1) \geq 0.$$

Но, од $y \geq 1$ следува $y^3 \geq 1$ и $y^9 \geq 1$, па затоа $y^3-1 \geq 0$ и $y^9-1 \geq 0$, што значи дека е точно последното неравенство, т.е. точно е даденото неравенсво.

72. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$. Докажи дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} \leq \frac{1}{abc}. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството $(a+b-c)^2 \geq 0$ следува дека

$$a^2+b^2+c^2+2(ab-bc-ca) \geq 0,$$

односно

$$ac+bc-ba \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}<1.$$

Ако последното неравенство го поделиме со abc, го добиваме неравенството (1).

73. Ако $a+b>0$, докажи дека $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

Решение. Ако $a+b>0$,тогаш последователно добиваме

$$(a+b)(a-b)^2>0,$$
$$(a+b)(a-b)(a-b)>0,$$
$$(a^2-b^2)(a-b)>0,$$
$$a^3+b^3-a^2b-ab^2>0,$$
$$a^3+b^3>a^2b+ab^2,$$

што и требаше да се докаже.

74. Докажи дека за секој реален број a важи неравенството

$$3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2 .$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквиваленто со неравенсвото

$$\begin{aligned}
&3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2, \\
&3+3a^2+3a^4 \geq 1+a^2+a^4+2a+2a^2+2a^3, \\
&2a^4-2a^3-2a+2 \geq 0, \\
&2a^3(a-1)-2(a-1) \geq 0, \\
&2(a-1)(a^3-1) \geq 0, \\
&(a-1)(a-1)(2a^2+2a+2) \geq 0, \\
&(a-1)^2(a^2+1+(a+1)^2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Конечно, од точноста на последното неравенство следува точноста на даденото неравенство.

75. Докажи дека за произволни реални броеви x, y и z важи неравенството:

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 .$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 &= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz \\
&= x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2 \\
&= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

т.е.

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

76. Нека a и b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи дека важи неравенстото

$$a^4+a^2b^2+b^4 \geq \tfrac{3}{4}c^4 . \qquad (1)$$

Решение. Според Питагоровата теорема имаме $a^2+b^2=c^2$. Последното равенство го квадрираме и го добиваме равенството

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4 .$$

Според тоа, неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \tfrac{3}{4}(a^4 + 2a^2b^2 + b^4),$$
$$4(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 3(a^4 + 2a^2b^2 + b^4),$$
$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0,$$
$$(a^2 - b^2)^2 \geq 0.$$

Последното неравенство е точно бидејќи квадрат на секој реален број е ненегативен број, па затоа точно е и неравенството (1).

77. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

Решение. За секои $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи

$$\frac{x^3}{y^2} \geq 3x - 2y .$$

Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $x = y$. Множејќи со y^2 и користејќи дека

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) ,$$

заклучуваме дека споменатото неравенство е еквивалентно со неравенството:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) \geq 3y^2(x - y) . \qquad (1)$$

Разгледуваме три случаи:

1) Ако $x > y$, тогаш (1) е еквивалентно со неравенството

$$x^2 + xy + y^2 \geq 3y^2 ,$$

кое очигледно е исполнето.

2) Ако $x = y$, тогаш (1) преминува во равенство.

3) Ако $x < y$, тогаш (1) е еквивалентно со неравенството

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3y^2 ,$$

кое очигледно е исполнето.

Од досега изнесеното следува

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq 3a-2b+3b-2c+3c-2a=a+b+c\,.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

78. Нека за целите броеви a,b и n важи $b\neq 0$ и $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$. Докажи дека геометриската средина на броевите a и b е цел број.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$ab^2+an^2=ba^2+bn^2,$$
$$ab^2-a^2b+an^2-bn^2=0,$$
$$ab(b-a)-n^2(ab-n^2)=0,$$
$$(b-a)(ab-n^2)=0.$$

Според тоа, $b-a=0$ или $ab-n^2=0$. Ако $b-a=0$, тогаш $a=b$, па затоа $\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}=|a|$ е цел број, а ако $ab-n^2=0$, тогаш $ab=n^2$, па затоа $\sqrt{ab}=\sqrt{n^2}=|n|$ е цел број, што и требаше да се докаже.

79. Докажи дека за ненегативни реални броеви x,y,z и t важи неравенството

$$\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4\geq xyzt\,. \qquad (1)$$

Решение. За секои ненегативни реални броеви a и b е исполнето $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$, од каде добиваме $a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$, т.е. $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. Притоа знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, т.е. ако и само ако $a=b$.

Ако во последното неравенство земеме $a=\frac{x+y}{2}$, $b=\frac{z+t}{2}$, добиваме

$$\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+t}{2}}{2}\geq\sqrt{\frac{x+y}{2}\cdot\frac{z+t}{2}}\geq\sqrt{\sqrt{xy}\cdot\sqrt{zt}}=\sqrt[4]{xyzt}\,,$$

од каде по средувањето и степеувањето на степен 4 следува неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{x+y}{2}=\frac{z+t}{2}$ и $x=y$, $z=t$, т.е. ако и само ако $x=y=z=t$.

80. Докажи дека за ненегативните реални броеви a,b и c важи неравенството

$$(\tfrac{a+b+c}{3})^3 \geq abc\,. \qquad (1)$$

Решение. Ако во неравенството $(\tfrac{x+y+z+t}{4})^4 \geq xyzt$ ставиме $x=a$, $y=b$, $z=c$ и $t=\tfrac{a+b+c}{3}$, последователно добиваме

$$(\tfrac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4})^4 \geq abc\tfrac{a+b+c}{3},$$
$$(\tfrac{1}{4}\tfrac{4(a+b+c)}{3})^4 \geq abc\tfrac{a+b+c}{3},$$
$$(\tfrac{a+b+c}{3})^4 \geq abc\tfrac{a+b+c}{3},$$
$$(\tfrac{a+b+c}{3})^3 \geq abc.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\tfrac{a+b+c}{3}$,т.е. $a=b=c$.

81. Дадена е низа броеви таква што секој нејзин член почнувајќи од вториот е еднаков на производот на двата негови соседни члена. Производот на првите десет членови на оваа низа е еднаков на 18, а производот на првите 20 нејзини члена е еднаков на 12. Определи го производот на првите 2013 членови на оваа низа.

Решение. Нека x е првиот член на низата, а y е нејзиниот втор член. Тогаш лесно се гледа дека низата е:

$$x, y, \tfrac{y}{x}, \tfrac{1}{x}, \tfrac{1}{y}, \tfrac{x}{y}, x, y, \ldots .$$

Според тоа, низата е периодична со период еднаков на 6. Производот на првите 6 члена на низата е 1. Производот на првите 10 членови е еднаков на производот на првите четири, а производот на првите 20 е еднаков на производот на првите два. Според тоа, важи $\tfrac{y^2}{x}=18$ и $xy=12$, од каде добиваме $y^3=12\cdot 18=6^3$. Според тоа, $y=6$ и $x=2$. Сега, бидејќи $2013=6\cdot 335+3$, добиваме дека производот на првите 2013 членови на низата е еднаков на производот на првите три члена, т.е. тој е еднаков на $2\cdot 6\cdot 3=36$.

82. Нека $1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, 1000$ е најдолгата можна низа природни броеви такви што почнувајќи од третиот член, секој следен член е еднаков на збирот на сите претходни членови. Определи го членот x_2.

Решение. Според условот имаме:

$x_3 = 1 + x_2$,

$x_4 = 1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_3 = 2x_3 = 2(1 + x_2)$,

$x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_4 = 2 \cdot 2(1 + x_2) = 2^2(1 + x_2)$,

$x_6 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_4 + x_4 = 2x_5 = 2 \cdot 2^2(1 + x_2) = 2^3(1 + x_2)$

.....

$x_n = 1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-2} + x_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-1} = 2x_{n-1} = 2^{n-3}(1 + x_2)$.

Според тоа, $1000 = x_{n+1} = 2^{n-2}(1 + x_2)$ и како според условот низата треба да биде најдолга можна, потребно е да се определи најголемиот n за кој $2^{n-2} \mid 1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Јасно, $n - 2 = 3$, од каде добиваме $n = 5$ и притоа важи $x_2 = \frac{1000}{2^{5-2}} - 1 = 124$.

3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Збирот на првите n природни броеви е за 10000 помал од збирот на следните n природни броеви. Определи го бројот n.

   Решение. Имаме, $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ и

   $$(n+1)+(n+2)+...+(n+n)=n^2+1+2+...+n=n^2+\frac{n(n+1)}{2},$$

   па затоа $\frac{n(n+1)}{2}+10000=n^2+\frac{n(n+1)}{2}$, од каде добиваме $n^2=10000$, т.е. $n=100$.

2. Производот на три последователни броја е 65 пати поголем од нивниот збир. Кои се тие броеви.

   Решение. *Прв начин*. Нека $n, n+1, n+2$ се трите последователни броја. Имаме

   $$\begin{aligned}
   &n(n+1)(n+2)=65(n+n+1+n+2)\\
   &n(n+1)(n+2)=65\cdot 3(n+1),\\
   &n(n+2)=65\cdot 3,\\
   &n^2+2n=5\cdot 13\cdot 3,\\
   &n^2+15n-13n-13\cdot 15=0,\\
   &n(n+15)-13(n+15)=0,\\
   &(n+15)(n-13)=0.
   \end{aligned}$$

   Од последната равенка следува $n+15=0$ или $n-13=0$, т.е. $n=-15$ или $n=13$. Но, n е природен број, па затоа $n=13$ и бараните броеви се 13, 14 и 15.

   Втор начин. Нека $n-1, n, n+1$ се трите последователни броја. Имаме

   $$\begin{aligned}
   &(n-1)n(n+1)=65(n-1+n+1)\\
   &n(n-1)(n+1)=65\cdot 3n,\\
   &(n-1)(n+1)=65\cdot 3,\\
   &n^2-1=195,\\
   &n^2=196.
   \end{aligned}$$

   Од последната равенка следува $n=14$ или $n=-14$ и како n е при-

роден број, добиваме $n=14$. Конечно, бараните броеви се 13, 14 и 15.

3. Определи го збирот на сите природни броеви помали од 1000 кај кои збирот на цифрите е непарен.

Решение. Низата 0, 1, 2, 3, ..., 999 да ја поделиме на поднизи од по 20 последователни членови. Во рамките на секоја таква подниза збирот на броевите со парен збир на цифрите е еднаков на збирот на броевите со непарен збир на цифрите. Навистина, ако е a парна цифра и $a'=a+1$, тогаш збировите

$$\overline{xa0}+\overline{xa2}+\overline{xa4}+\overline{xa6}+\overline{xa8}+\overline{xa'1}+\overline{xa'3}+\overline{xa'5}+\overline{xa'7}+\overline{xa'9}$$

и

$$\overline{xa1}+\overline{xa3}+\overline{xa5}+\overline{xa7}+\overline{xa9}+\overline{xa'0}+\overline{xa'2}+\overline{xa'4}+\overline{xa'6}+\overline{xa'8}$$

се еднакви. Имено, и двата збира се еднакви на

$$1000x+50(a+a')+(1+2+\ldots+9).$$

Според тоа, бараниот збир е еднаков на

$$\tfrac{1}{2}\cdot(1+2+\ldots+999)=249750.$$

4. Определи два последователни природни броја такви што едниот може да се запише како производ $2(a-3)(a+1)$, а другиот како производ $(a-2)(2a-1)$, каде a е природен број.

Решение. Можни се два случаја и тоа:

1) $2(a-3)(a+1)-(a-2)(2a-1)=1$, од каде добиваме $a=9$, па бараните броеви се 120 и 119.
2) $(a-2)(2a-1)-2(a-3)(a+1)=1$, од каде добиваме $a=7$, па бараните броеви се 65 и 64.

5. Определи двоцифрен број за кој количникот на тој број и збирот на неговите цифри е минимален.

Решение. Ако бараниот двоцифрен број е $\overline{ab}$, тогаш количникот на тој број и збирот на неговите цифри е $\frac{10a+b}{a+b}=1+\frac{9a}{a+b}=1+\frac{9}{1+\frac{b}{a}}$. Според тоа, разгледуваниот количник е минимален кога $\frac{b}{a}$ е најголемиот можен број, односно кога $b=9$ и $a=1$. Конечно, бараниот број е $\overline{ab}=19$.

6. Определи го тригцифрениот природен број за кој количникот на тој број и збирот на неговите цифри е најмал можен број.

Решение. Ако бараниот број е $\overline{abc}$, тогаш количникот на овој број и збирот на неговите цифри е $\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=1+\frac{99a+9b}{a+b+c}$. Бидејќи броителот на дропката не зависи од c, целиот израз е најмал кога c е најголем, т.е. за $c=9$. Со замена во изразот добиваме $1+\frac{99a+9b}{a+b+9}=10+\frac{90a-81}{a+b+9}$. Бидејќи броителот на дропката на левата страна во последното равенство не зависи од b, целиот израз е најмал кога b е најголем, т.е. за $b=9$. Со замена о изразот добиваме $10+\frac{90a-81}{a+9+9}=100-\frac{1701}{a+18}$. Овој израз е најмал кога намалителот е најголем, односно кога именителот на намалителот е најмал. Ова се постигнува за $a=1$, па бараниот број е 199.

7. Определи ги сите вредности на променливата x за кои производот на дропките $\frac{x+1}{x+3}$ и $\frac{2}{x+5}$ ќе биде еднаков на нивната разлика.

Решение. Од условот на здачата следува дека бараните вредности на применливата x всушност се решенијата на равенката

$$\frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{2}{x+5}=\frac{x+1}{x+3}-\frac{2}{x+5}.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$\frac{2(x+1)}{(x+3)(x+5)}=\frac{x^2+4x-1}{(x+3)(x+5)},$$

од каде добиваме $2x+2=x^2+4x-1$, при услов $x\neq -3, x\neq -5$. Според тоа, $x^2+2x+1=4$, односно $(x+1)^2=4$, од каде добиваме $x+1=2$ или $x+1=-2$, односно $x=1$ или $x=-3$. Но, по услов $x\neq -3$, па затоа единствено решение е $x=1$.

8. Определи го природниот број $\overline{abcdef}$ кој е запишан со различни цифри и за за кој се исполнети условите

$$a\cdot d\neq 0,\ a+d=b+e=c+f=9$$

и количникот $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}}$ е природен број.

Решение. Нека $A=\overline{abcdef}$ и $B=\overline{defabc}$. Бидејќи количникот е природен број важи $a\geq d$. Понатаму, од равенствата

$$a+d=b+e=c+f=9$$

следува $\overline{abcdef}+\overline{defabc}=999999$, т.е. $A+B=999999$. Но, $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}}\in\mathbb{N}$ па затоа постои $k\in\mathbb{N}$ таков што $A=kB$. Според тоа, $kB+B=999999$ односно $(k+1)B=999999$ и како $B=\overline{defabc}\geq 100000$, добиваме дека $k+1\in\{1,3,7,9\}$. За $k+1=1, k+1=3$ и $k+1=9$, соодветно добиваме $B=999999$, $B=333333$ и $B=111111$, што противречи на тоа дека цифрите се различни. За $k+1=7$, добиваме $B=999999:7=142857$ $A=6\cdot 142857=857142$

9. Филип запишал 500 последователни природни броеви и притоа запишал 2012 цифри. Кои броеви ги запишал Филип?

Решение. Бидејќи $4\cdot 500<2012<5\cdot 500$, меѓу запишаните броеви има четирицифрени и петцифрени. Нека x е бројот на четирицифрените и y е бројот на петцифрените броеви. Тогаш

$$\begin{cases} x+y=500, \\ 4x+5y=2012. \end{cases}$$

Ако првата равенка ја помножиме со 4 и ја одземеме од втората добиваме $y=12$. Значи, $x=488$. Според тоа, Филип ги запишал последните 488 четирицифрени и првите 12 петцифрени броеви, т.е. тој ги запишал броевите од 9512 до 10011.

10. На таблата се три различни двоцифрени броја. Пабло треба производот на два броја да го подели со третиот број. Но, тој згрешил, па количникот на првите два броја го помножил со третиот број и така наместо точниот резултат 96 го добил вториот од тие два броја. Кои броеви биле запишани на таблата?

Решение. Ако x,y,z се дадение броеви, тогаш од условот на задачата следува $(x\cdot y):z=96$ и $(x:y)\cdot z=y$, т.е. $xy=96z$ и $xz=y^2$. Од првата равенка имаме $z=\frac{xy}{96}$, па со замена во втората наоѓаме $x^2=96y$. Сега, од $x^2=3\cdot 2^5 y$ за да десната стррана биде точен квадрат добиваме дека $y=6k^2$. Но, y е двоцифрен број, па затоа $k\in\{2,3,4\}$. За $k=2$, добиваме $y=24$, па затоа $x=48$ и $z=12$. За $k=3$ добиваме $y=54$, па затоа $x=72$ и $z=40{,}5$, што не е решение бидејќи z не е

природен број. За $k=4$ добиваме $y=96$, па затоа $x=96$ и во овој случај немаме решение бидејќи по услов $x \neq y$.

Значи, на таблата се запишани броевите $x=48$, $y=24$ и $z=12$.

11. На таблата се запишани неколку позитивни реални броеви секој од кои е еднаков на една шестина од збирот на преостанатите броеви. Колку броеви се запишани на таблата?

Решение. Нека запишаните броеви се $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k$. Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned} 6x_1 &= x_2 + x_3 + ... + x_{k-1} + x_k, \\ 6x_2 &= x_1 + x_3 + ... + x_{k-1} + x_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6x_k &= x_1 + x_2 + ... + x_{k-2} + x_{k-1}. \end{aligned}$$

Ако ги собереме овие равенства, добиваме

$$6(x_1 + + x_2 + ... + x_{k-1} + x_k) = (k-1)(x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_k),$$

од каде следува $6 = k-1$, односно $k=7$. Значи, на таблата се запишани седум броеви.

12. Неколку деца јаделе бомбони. Секое дете изело 10 бомбони помалку отколку што изеле сите преостанати деца заедно. Колку деца биле и колку бомбони изеле?

Решение. Нека имаме k деца кои изеле редоследно $x_1, x_2, ..., x_k$ бомбони. Нека $x_1 + x_2 + ... + x_k = X$. Тогаш од условот на задачата следува

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + x_3 + ... + x_{k-1} + x_k - 10 = X - x_1 - 10, \\ x_2 &= x_1 + x_3 + ... + x_{k-1} + x_k - 10 = X - x_2 - 10, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= x_1 + x_2 + ... + x_{k-2} + x_{k-1} - 10 = X - x_k - 10. \end{aligned}$$

Ако ги собереме добиените равенства, наоѓаме

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = kX - (x_1 + x_2 + ... + x_k) - 10k,$$

од каде добиваме $X = kX - X - 10k$, т.е. $(k-2)X = 10k$. Според тоа, $X = \frac{10k}{k-2} = 10 + \frac{20}{k-2}$. Значи, $k-2$ треба да е делител на 20, од каде следува $k-2 \in \{1,2,4,5,10,20\}$, па затоа $k \in \{3,4,6,7,12,22\}$, што значи $X \in \{30,20,15,14,12,11\}$. Со непосредна проверка добиваме дека се можни следниве случаи: три деца по 10 бомбони, четири деца по 5

бомбони, седум деца по 2 бомбони и дванаесет деца по 1 бомбона.

13. Бактерија се размножува бесполово така што на секои десет минути се дели на две бактерии. Колку бактерии биле на почетокот ако по 2 часа имало 2^{17} бактерии?
Решение. Два часа имаат 120 минути, што значи дека за 2 часа бројот на бактериите $120:10=12$ пати се удвостручувал. Значи, по 2 часа имаме 2^{12} пати повеќе бактерии отколку на почетокот. Конечно, на почетокот имало $2^{17}:2^{12}=2^5=32$ бактерии.

14. Горјан започнал да ја копа градината меѓу 9 и 10 часот, а целата ја окопал меѓу 15 и 16 часот. Колку време ја копал градината Горјан, ако и во моментот кога почнал да копа и во моментот кога завршил со копањето минутната и часовната стрелка биле заемно нормални?
Решение. Нека часовната стрелка минува агол φ. За тоа време минутната стрелка минува агол 12φ. Бидејќи во 9 и во 15 часот стрелките на часовникот се под прав агол, за да повторно се под прав агол минутната трелка треба да помине 180° повеќе од часовната стрелка. Значи, аголот меѓу нив ќе биде $12\varphi-\varphi=180^\circ$, од каде добиваме $\varphi=\frac{180^\circ}{11}$ и како во секоја минута минутната стрелка поминува по 6°, добиваме $\varphi=\frac{180^\circ}{11}:6^\circ=\frac{30}{11}$ минути. Според тоа, часовната и минутната стрелка по 9 часот повторно ќе бидат за прв пат заемно нормални во $9\,h\,\frac{12\cdot 30}{11}\,\min=9\,h\,32\frac{8}{11}\,\min$. На потоплно ист начин се добива дека часовната и минутната стрелка по 15 часот повторно ќе бидат за прв пат заемно нормални во $15\,h\,\frac{12\cdot 30}{11}\,\min=15\,h\,32\frac{8}{11}\,\min$. Значи, Горјан градината ја копал $15\,h\,32\frac{8}{11}\,\min-9\,h\,32\frac{8}{11}\,\min=6\,h$.

15. Еден концерт почнал меѓу 18 и 19 часот, а завршил меѓу 21 и 22часот. Определи колку време траел коцертот, ако за тоа време минутната и часовната стречка си ги замениле местата.
Решение. Нека концертот почнал во 18 часот и x минути, а завршил во 21часот и y минути.Од положбата на малата стрелка на почетокот и големата стрелка на крајот на концертот следува равенката

$$\frac{x}{2} = 6y - 180,$$

а од положбата на големата стрелка на почетокот и малата стрелка на крајот на коцертот следува равенката

$$\frac{y}{2} = 6x - 270.$$

Решението на добиениот систем од две равенки со две непознати е $x = 47\frac{119}{143}$ и $x = 33\frac{141}{143}$. Според тоа, концертот траел 2 часа и $46\frac{2}{13}$ минути.

16. На две свеќи со иста должина, но различна дебелина потребно им е различно време за целосно да изгорат. На подебелата свеќа ѝ се потребни 4 часа за целосно да изгори, а на потенката свеќа ѝ се потребни 2 часа. Свеќите биле запалени во исто време, одредено време гореле, а потоа двете биле изгаснати. Откако биле изгаснати, остатокот од подебелата свеќа бил три пати подолг од остатокот од потенката свеќа. Колку време гореле свеќите?

Решение. Нека x е должината на свеќите и нека свеќите гореле t часови. Од подебелата свеќа за еден час ќе изгори дел со должина $\frac{x}{4}$, а по време t ќе остане дел со должина $x - \frac{x}{4}t$. Од потенката свеќа за еден час ќе изгори дел со должина $\frac{x}{2}$, а по време t ќе остане дел со должина $x - \frac{x}{2}t$. Бидејќи остатокот од подебелата свеќа е три пати подолг од остатокот од потенката свеќа, ја добиваме равенката

$$x - \frac{x}{4}t = 3(x - \frac{x}{2}t)$$

чие решение е $t = \frac{8}{5}h$. Свеќите гореле 1 час и 36 минути, односно гореле 96 минути.

17. Таткото, мајката, синот и ќерката заедно имаат 130 години. Мајката и синот заедно имаат 2 години помалку отколку што заедно имаат таткото и ќерката. Таткото е пет пати постар од ќерката, а пред 2 години мајката била пет пати постара од ќерката. Колку години има секој член на ова семејство?

Решение. Нека со t, m, s, c ги означиме годините на таткото, мајката, синот, ќерката, соодветно. Од условот на зачата следува системот равенки:

$$\begin{cases} t+m+s+c=130, \\ m+s+2=t+c, \\ t=5c, \\ m-2=5(c-2), \end{cases}$$

чие решение е $t=55, m=47, s=17, c=11$.

18. Баба Рада го прашала дедо Младен колку години има. Тој и одговорил: „Пред педесет години бев два пати постар од тебе, а по шеесет години ќе бидам единаесеттина од твоите години постар од тебе“. Колку години има дедо Младен, а колку баба Рада?

Решение. Нека дедо Младен има x години, а баба Рада има y години. Пред 50 години тие имале $x-50$ и $y-50$ години, па затоа важи $x-50=2(y-50)$. По 60 години ќе имаат $x+60$ и $y+60$ години. Бидејќи дедо Младен ќе има за една единаесеттина години повеќе добиваме $x+60=\frac{12}{11}(y+60)$. Го решаваме ситемот составен од последните две равенки и добиваме $x=72$ и $y=61$. Значи, дедо Младен има 72 години, а баба Рада има 61 година.

19. Јован го прашал Климе колку години има. Климе му одговорил: „Јас сум два пати постар отколку што ти беше кога имав толку години колку што имаш ти сега. А кога ќе имаш толку години колку што јас имам сега, збирот на нашите години ќе биде 63.“ Колку години има Јован, а колку Климе?

Решение. Нека Климе има x години, а Јован има y години. Значи, разликата на нивните години е $x-y$. Кога Климе имал y години, Јован имал $y-(x-y)=2y-x$ години, па затоа $x=2(2y-x)$, т.е. $3x=4y$. Од друга страна, кога Јован ќе има x години, Климе ќе има $x+(x-y)=2x-y$ фодини и затоа $x+2x-y=63$, т.е. $3x-y=63$. Со решавање на системот

$$\begin{cases} 3x=4y, \\ 3x-y=63, \end{cases}$$

добиваме $y=21, x=28$. Значи, Јован има 21 година, а Климе има 28 години.

20. На прашањето колку години има Ирина одговорила дека има толку

години колку што родендени прославил нејзиниот дедо. Ирина и нејзиниот помлад брат Јанко се родиле меѓу два родендени на нивниот дедо, а тие тројца заедно имаат 107 години. Колку години има Ирина?

Решение. За да Ирина има толку години колку што незиниот дедо прославил родендени, дедото мора да е роден на 29-ти февруари. Сега, ако Ирина има x години, тогаш нејзиниот брат има $x-1, x-2$ или $x-3$ години, а дедото има $4x, 4x+1, 4x+2$ или $4x+3$ години. Според условот на здачата $x+(x-3)+4x \le 107 \le x+(x-1)+(4x+3)$, од каде добиваме $6x-3 \le 107 \le 6x+2$, т.е. $105 \le 6x \le 110$, односно $17\frac{1}{2} \le x \le 18\frac{1}{3}$. Бидејќи x е природен број добиваме $x=18$.

21. Годините на таткото и неговите две деца (не се близнаци) се степени на ист прост број. Пред една година бројот на годините на секој од нив бил прост број. Колку години има сега таткото, а колку има секое од неговите деца? (Познато е дека такото има помалку од сто години)

Решение. Нека p^a, p^b, p^c се бараните броеви на годините, каде што p е прост број, а a, b и c се природни броеви. По услов на задачата имаме дека пред една година броевите на годините p^a-1, p^b-1, p^c-1 се прости броеви. Ако $p=2$, тогаш степените на бројот 2 се: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... Од нив ги избираме оние од кои кога ќе се одземе 1 се добива прост број. Тоа се броевите 4, 8 и 32 (бидејќи $4-1=3$, $8-1=7, 32-1=31$). Бидејќи таткото има помалку од 100 години, единствена можност е таткото да има 32 години, едното дете 8 години и другото 4 години.

Ако $p \ge 3$, тогаш p^a, p^b, p^c се непарни броеви. Кога од нив ќе се одземе бројот 1 се добиваат различни парни броеви, па затоа сите три не може да се прости броеви.

22. Марко бил роден меѓу 1300 и 1400 година, а Дарко меѓу 1400 и 1500 година. И двајцата биле родени на 6-ти април, во години кои што се точни квадрати на природни броеви. Двајцата живееле по 110 години. Во која година, додека биле живи, нивните години на 7-ми април биле точни квадрати на природни броеви.

Решение. Бидејќи $36^2=1296, 37^2=1369, 38^2=1444, 39^2=1521$, јасно

е дека единствен точен квадрат меѓу 1300 и 1400 година е 1369, а меѓу 1400 и 1500 е 1444. Значи, Марко бил роден во 1369 година, а Дарко во 1444 година.

Да претпоставиме дека на 7-ми април во некоја година, Марко имал $m^2 < 111$, а Дарко имал $n^2 < 111$ години, каде $m, n \in \mathbb{N}$. Марко наполнил m^2 години во $1369 + m^2$ година, а Дарко наполнил n^2 години во $1444 + n^2$ година. Од условот на задачата следува дека тие во иста година треба да имаат години кои се точни квадрати на природни броеви, па затоа

$$1369 + m^2 = 1444 + n^2, \text{ т.е. } m^2 - n^2 = 75.$$

Точни, квадрати помали од 11 се 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100 и единствени чија разлика е 75 се $m^2 = 100$ и $n^2 = 25$. Оттука следува дека во $1369 + 10^2 = 1469$ година Марко имал 100, а Дарко имал 25 години.

Забелешка. Во множеството природни броеви равенката $m^2 - n^2 = 75$ може да се реши ако се искористи разложувањето

$$(m-n)(m+n) = 1 \cdot 75 = 3 \cdot 25 = 5 \cdot 15,$$

при што, бидејќи $0 < m-n < m+n$, се добиваат три системи линеарни равенки, чии решенија се $m = 38, n = 37$, $m = 14, n = 11$ и $m = 10, n = 5$, од кои само во решението $m = 10, n = 5$ квадрати на најдените броеви се помали од 111.

23. Мајсторот Ламбе може за еден ден да направи 65 дрвени лажици, или да лакира 104 лажици. Колку лажици Ламбе може да направи и лакира во еден ден?

Решение. За изработка на една лажица е потребно $\frac{1}{65}$ од денот, а за лакирање на една лажица е потребно $\frac{1}{104}$ од денот. Според тоа, за изработка и лакирање на една лажица е потребно $\frac{1}{65} + \frac{1}{104} = \frac{8+5}{5 \cdot 8 \cdot 13} = \frac{1}{40}$ од денот. Значи,Ламбе за 1 ден може да направи и излакира 40 дрвени лажици.

24. Ацо, Бојан и Симон заедно работат на училишен проект. Ако Ацо не работи, тогаш проектот ќе биде завршен за 2 часа, ако Бојан не работи, тогаш проектот ќе биде завршен за 3 часа. Ако Симон не

работи, тогаш проектот ќе биде завршен за 4 часа. Дарко решил да им помогне и тој сам проектот може да го заврши за 12 часа. Определи го најкраткото време за кое проектот може да се заврши.

Решение. Нека a,b,c и d се времината изразени во часови кои се потребни Ацо, Бојан, Симон и Дарко самостојно да го завршат проектот. Тогаш за 1 час Ацо ќе заврши $\frac{1}{a}$ од проектот, Бојан ќе заврши $\frac{1}{b}$ од проектот, Симон ќе заврши $\frac{1}{c}$ од проектот и Дарко ќе заврши $\frac{1}{d}$ од прокетот. Од условот на задачата следува:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{12},\ \ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3},\ \ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4},\ \ \frac{1}{d}=\frac{1}{12}.$$

Ако ги собереме првите три равенства добиваме

$$2\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{12}.$$

Најкраткото време x за кое ќе се заврши проектот е кога сите четири деца работат на проектот. Притоа за 1 час ќе се сработи

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{8}$$

од проектот. Според тоа, $x=\frac{8}{5}=1\,h\,36\,\min$ е најкраткото време за кое може проектот да заврши.

25. Кравата испасува толку трева од ливадата колку козата и гуската заедно. Кравата и козата заедно ја испасуваат ливадата за 45 дена, кравата и гуската за 60 дена, а козата и гуската за 90 дена. Тревата на ливадата постојано и рамномерно расте. За колку дена кравата, козата и гуската заедно ќе ја испасат целата ливада?

Решение. *Прв начин*. Кравата јаде исто колку козата и гуската заедно. Според тоа, ако кравата и козата ја испасуваат целата трева за 45 дена, земајќи го предвид и прирастот на тревата, тогаш две кози и една гуска ќе испасат исто количество трева за 45 дена. Бидејќи козата и гуската ја испасуваат целата трева за два пати подолго време (90 дена), заклучуваме дека една коза може да ја изеде целата трева од ливадата, ако тревата не расте, за 90 дена, а притоа гуската го јаде само прирастот на тревата. Од тоа следува дека кравата изедува $\frac{1}{60}$ од почетната залиха за еден ден, а козата $\frac{1}{90}$. Значи, кравата и козата за

еден ден јадат $\frac{1}{60}+\frac{1}{90}=\frac{1}{36}$ од почетната залиха, а гуската го јаде дневниот прираст на тревата. Последното значи дека кравата, козата и гуската целата ливада ќе ја испасат за 36 дена.

Втор начин. Нека почетната залиха на тревата на ливадата е b, дневниот прираст на тревата е a и кравата, козата и гуската редоследно дневно испасуваат x, y и z трева. Тогаш од условот на задачата следува дека

$$\begin{cases} x = y + z, \\ 45(x+y) = b + 45a \\ 60(x+z) = b + 60a, \\ 90(y+z) = b + 90a. \end{cases} \qquad (*)$$

Ако од првата равенка во (*) замениме во четвртата, добиваме

$$90x = b + 90a\,. \qquad (1)$$

Понатаму, ако втората равенка ја помножиме со 2 и од неа ја одземеме равенката (1), добиваме $y=\frac{b}{90}$. Сега, ако втората равенка во (*) ја помножиме со 4, третата ја помножиме со 3, добиените равеки ги оземеме и замениме $y=\frac{b}{90}$ наоѓаме $180\cdot\frac{b}{90}-180z=b$, т.е. $z=\frac{b}{180}$. Значи, од првата равенка во (*) добиваме $x=\frac{b}{60}$, а од втората равенка во (*) наоѓаме $a=\frac{b}{180}$. Конечно, ако за t денови кравата, козата и гуската ја испасуваат ливадата, тогаш важи $t(x+y+z)=b+ta$, од каде добиваме $t(\frac{b}{60}+\frac{b}{90}+\frac{b}{180})=b+t\frac{b}{180}$, односно $t(\frac{1}{60}+\frac{1}{90})=1$, па затоа $t=36$.

26. Одреден број на момчиња и девојчиња отишле на кампување за време на летниот распуст. Тие испланирале еколошка акција, што би ја завршиле за 29 дена ако секое дете работи рамномерно – во кои било денови сработува ист дел од работата. Момчињата работеле нешто побрзо; за исто време 2 момчиња работат исто колку што работат 3 девојчиња. За среќа, по три дена од почнување со работата, им се придружила поголема група деца, и тоа: момчиња – 8 пати повеќе од првичниот број на девојчиња, и девојчиња – 18 пати повеќе од првичниот број на момчиња. Новодојдените деца работат со иста динамика како и прводојдените. Колку вкупно денови биле работни?

Решение. Да претпоставиме дека на почетокот биле a момчиња и b

девојчиња. Дневно тие завршуваат $\frac{1}{29}$-тина од работата. Затоа, првите три дена е завршено $\frac{3}{29}$-тини од работата. Бидејќи момчињата работат 1,5 пати побрзо, ситуацијата е иста како наместо овие a момчиња да имало $1{,}5a$ девојчиња, т.е. вкупно $1{,}5a+b$ девојчиња. Значи, секое девојче дневно завршува $\frac{1}{29(1{,}5a+b)}$ дел од работата.

Потоа дополнително доаѓаат $8b$ момчиња, што е исто како да работат $1{,}5\cdot 8b=12b$ девојчиња и $18a$ девојчиња. Сега сите деца дневно завршуваат работа како да има

$$1{,}5a+b+12b+18a=19{,}5a+13b=13(1{,}5a+b)$$

девојчиња. Оттука, ако по трите дена се потребни уште x денови за да се заврши акцијата, тогаш добиваме $\frac{3}{29}+\frac{13(1{,}5a+b)}{29(1{,}5a+b)}x=1$, од каде добиваме $3+13x=29$, т.е. $x=2$. Според тоа, целата акција траела $3+2=5$ дена.

27. Секоја од трите сести Маја, Ема и Филимена си купила материјал за фустан. Маја купила за третина повеќе од Ема, а Филимена купила за 1,6 метри помалку од Маја. Ако Маја даде четвртина од својот материјал на Филимена, а Ема третина од својот материјал и даде на Филимена, тогаш Филимена ќе има материјал колку двете нејзини сестри заедно. Колку материјал купила секоја сестра?

Решение. Нека Ема купила y метри материјал. Тоа значи дека Маја купила $\frac{4}{3}y$ метри, а Филимена купила $\frac{4}{3}y-1{,}6$ метри. Кога Маја и Ема даваат дел од својот материјал се добива равенката

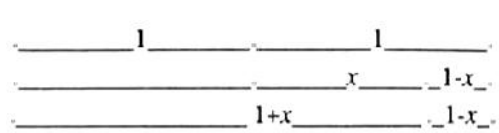
$$\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{4}{3}y+\tfrac{2}{3}y=\tfrac{4}{3}y-1{,}6+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4}{3}y+\tfrac{1}{3}y.$$

Решението на последната равенка е $y=4{,}8\,m$. Значи, Ема купила $4{,}8\,m$ материјал, Маја купила $6{,}4\,m$ и Филимена купила $4{,}8\,m$.

28. Војничка колона има должина $1\,km$ и се движи рамномерно. Курир од челото на колоната дотрчува до крајот на колоната, предава порака и трчајќи се враќа на челото на колоната. За тоа време колоната поминала $1\,km$. Колкав пат поминал курирот?

Решение. Нека патот кој го поминал курирот до крајот на колоната е x. Додека курирот поминал пат x колоната поминала пат $1-x$. По-

натаму, додека курирот поминал пат $1+x$, колоната поминала пат x. Тоа значи дека $\frac{x}{1-x}=\frac{1+x}{x}$, од каде добиваме $2x^2=1$, односно $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Патот



кој курирот го поминал е еднаков на $1+2x=(1+\sqrt{2})\ km$.

29. Половината од патот коњаник го поминал со брзина од 12 километри на час, а остатокот од патот одел пешки со брзина 4 километри на час. Определи ја средната брзина на коњот на тој пат.

Решение. *Прв начин*. Првата половина од патот коњот ја поминал за $\frac{1}{2}:12=\frac{1}{24}$ единици време, а втората половина за $\frac{1}{2}:4=\frac{1}{8}$ единици време. За целиот пат тој потрошил $\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$ единици време. Според тоа, средната брзина на коњот била $1:\frac{1}{6}=6\ km/h$.

Втор начин. Со x да го означиме половина од патот изразена во километри. Тогаш коњот целиот пат го поминал за $\frac{x}{12}+\frac{x}{4}=\frac{x}{3}$ часови. Според тоа, средната брзина на коњот била $\frac{2x}{\frac{x}{3}}=2:\frac{1}{3}=6\ km/h$.

30. За време на летувањето Андреј со другарите тргнал на излет. Еден дел од патот до целта го поминале со автомобил, другиот дел на велосипеди и третиот дел пешачеле. Брзините на движење на трите начини биле пропорционални со броевите 9, 5 и 1. Познато е дека со автомобил патувале половина час подолго отколку со велосипеди, а половина час пократко отколку што пешачеле. Од излет се вратиле со велосипеди. Дали подолго време патувале кога оделе на излет или кога се враќале?

Решение. Нека брзината при пешачењето е $x\ km/h$, а y е времето на возење со велосипед. Тогаш поминатиот пат во една насока е

$$s=9(y+\tfrac{1}{2})x+5yx+(y+1)x=15xy+5{,}5x\ km,$$

а времето на стигнување до целта е $3y+1{,}5$ часови. Времето потрошено при враќање е $\frac{s}{5{,}5}=3y+1{,}1$ часови, што значи дека тоа е $0{,}4\ h=24\ \min$ покатко од времето потрошено за одење до целта.

31. Станко и Бојана тргнале еден кон друг со велосипеди. Кога Станко поминал петтина од патот, а Бојана 1300 метри им останало до средбата да поминат три пати подолг пат од патот што дотогаш го поминал Станко. Колку еден од друг биле оддалечени на почетокот Станко и Бојана?

Решение. Со x да ја означиме должината на патот што требало да го поминат. Патот кој го поминале е еднаков на $\frac{x}{5}+1300$. Значи, им останало да поминат пат долг $x-(\frac{x}{5}+1300)$. Ова растојание три пати поголемо од патот што дотогаш го поминал Станко, што значи дека е еднакво на $\frac{3x}{5}$. Според тоа, $x-(\frac{x}{5}+1300)=\frac{3x}{5}$, од каде добиваме $x=6,5\,km$.

32. Соња и Милан тргнале истовремено од местото A кон местото B. Оддалеченоста на овие места е $7,5\,km$. Соња оди со брзина $4\,km/h$, а Милан со брзина $5\,km/h$. Кога Милан пристигнал во местото B без задржување тргнал назад. На која оддалеченост од местото A Милан ќе ја сретне Соња?

Решение. Милан стасува во местото B за $7,5:5=1,5\,h$. За тоа време Соња од местото A ќе биде оддалечена $4\cdot 1,5=6\,km$. Бидејќи потоа тие се движат во спротивни насоки, а треба да поминат пат од $7,-6=1,5\,km$, добиваме дека $4t+5t=1,5$, односно дека ќе се сретнат по $t=\frac{1}{6}\,h$. Тоа значи дека од местото A Соња ќе биде оддалечена $6+4\cdot\frac{1}{6}=6\frac{2}{3}\,km$.

33. Двајца велосипедисти Андреј и Горјан тргнале истовремено од Прилеп за Битола. Андреј се движи со брзина од $16\,km/h$, а Горјан со брзина од $20\,km/h$. Горјан стигнал во Битола и таму се задржал 15 минути, а потоа со велосипедот тргнал назад повторно со истата брзина. На кое растојание од Битола ќе го сретне Андреј, ако патот од Прилеп до битола е долг $38\,km$?

Решение. Горјан во Битола ќе стигне по $38:20=1,9\,h$, од каде назад тргнува по $\frac{15}{60}=0,25\,h$. За тоа време од $1,9+0,25=2,15\,h$ Андреј ќе

помине $16 \cdot 2{,}15 = 34{,}4\ km$. Ако до средбата дојде по t часови,тогаш треба да важи $20t + 16t = 38 - 34{,}4$, од каде добиваме $t = 0{,}1\ h$. За тоа време Горјан ќе помине $20 \cdot 0{,}1 = 2\ km$, што значи дека Горјан и Андреј ќе се сретнат на $2\ km$ пред Битола.

34. На патот кој поврзува две планински села A и B нема рамни делови. Велосипедист на угорнина оди со брзина од $20\ km/h$, а на удолнина со брзина од $40\ km/h$. Определи го растојанието меѓу овие две села ако се знае дека на велосипедистот му се потребни 3 часа да го помине патот од A до B и назад, без да застанува.
Решение. На патот од едното до другото село и назад велосипедистот возејќи на угорнина поминал исто растојание како и возејќи на удолнина. Бидејќи $40 = 2 \cdot 20$ велосипедистот два пати подолго време возел на угорнина отколку на угорнина. Но, вкупното време е 3 часа, што значи дека 2 часа возел на угорнина и 1 час на удолнина. Конечно, растојанието меѓу двете села е $1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 40\ km$.

35. Филип вози автомобил на угорнина со брзина од 65 километри на час, а на удолнина со брзина 104 километри на час. Кое е растојанието до кое Филип може да отиде и да се врати за еден час? На патот нема рамни делови, туку секогаш се вози или на угорнина или на удолнина.
Решение. Ако растојанието до кое се оддалечил Филип е x. Тоа значи дека x километри Климе возел на угорнина и x километри возел на удолнина. Бидејќи тој вкупно возел 1 час, тој возел на угорнина $\frac{x}{65}$ часа и $\frac{x}{104}$ часа на удолнина. Значи, имаме $\frac{x}{65} + \frac{x}{104} = 1$, од каде наоѓаме $x = 40$. Значи, Филип се оддалечил точно $40\ km$.

36. Киро и Рампо тргнале истовремено, Киро од местото A во местото B, а Рампо од местото B во местото A. Секој се движи со своја постојана брзина. Од моментот кога се сретнале, на Киро му биле потребни 16 часа за да стигне во B, а на Рампо 9 часа за да стигне во A. Колку часови секој од нив патувал од едното до другот место?
Решение. Брзините на Киро и Рампо да ги означиме соодветно со u и v, а времето до нивната средба со t. За минување на целиот пат на Киро му биле потребни $t + 16$ часа, а на Рампо $t + 9$ часа. Должината

на патот меѓу A и B може да се изрази на три начини и тоа: $(t+16)u$, $(t+9)v$ и $t(u+v)$. Затоа $(t+16)u=t(u+v)$, од каде добиваме $t=\frac{16u}{v}$, односно $(t+9)v=t(u+v)$ од каде добиваме $t=\frac{9v}{u}$. Според тоа, $\frac{16u}{v}=\frac{9v}{u}$, односно $(\frac{u}{v})^2=(\frac{3}{4})^2$. Значи, $\frac{u}{v}=\frac{3}{4}$, односно $t=16\cdot\frac{3}{4}=12$ часа. Значи, Киро патот го поминал за $12+16=28$ часа, а Рампо за $12+9=21$ час.

37. Во 7 часот еден велосипедист тргнал од местото A во местото B, а во исто време друг велосипедист тргнал од местото B кон местото A. Велосипедистите се движеле секој со своја постојана брзина. Растојанието меѓу двете места било $171\,km$. Велосипедистите се сретнале по 3 часа возење. Ако велосипедистот од местото A тргнел 1 час и 54 минути порано, ќе го сретнел велосипедистот од местото B по 4 часа возење. Со која брзина се движел секој од велосипедистите?

Решение. Со v' да ја означиме брзината на првиот велосипедист (од A) и со v'' на вториот велосипедист (од B). До средбата во првиот случај првиот велосипедист поминал пат $3v'$, а вториот пат $3v''$. Во вториот случај до средбата првиот велосипедист ќе помине пат $4v'$, а вториот пат $2{,}1v''$. Според тоа, $3v'+3v''=4v'+2{,}1v''$, од каде добиваме $v'=0{,}9v''$. Но, $3v'+3v''=171$, односно $v'+v''=57$, па затоа $1{,}9v''=57$, што значи $v''=30\,km/h$. Конечно, $v'=0{,}9v''=27\,km/h$.

38. На кружна патека долга $1650\,m$ се движат два моторциклисти со различни, но константни брзини. Ако се движат во спротивни насоки се среќаваат по една минута, а ако се движат во иста насока тогаш побрзиот ќе го стигне поспориот по 11 минути. Определи ја брзината на секој моторциклист.

Решение. Нека брзината на побрзиот моторциклист е x, а брзината на поспорито моторциклист е y. Бидејќи за 1 минута моторциклистите ќе поминат точно еден круг добиваме $x+y=1650$. Бидејќи по 11 минути побрзиот ќе го стигне поспориот, по 11 минути разликата во поминатите патишта ќе биде еден круг, па затоа $11x-11y=1650$. Значи, $x+y=1650$ и $x-y=150$, од каде добиваме $x=900\,m/\min$ и $y=750\,m/\min$. Конечно, брзината на побрзиот моторциклис е еднак-

ва $900 \cdot 60 = 54\ km/h$, а на поспориот е еднаква на $750 \cdot 60 = 45\ km/h$.

39. Растојанието од Скопје до Гевгелија Раде го поминал така што првата половина од времето возел велосипед со брзина v_1, а втората половина од времето возел со автомобил v_2. Станко пак истото растојание го поминал така што првата половина од патот ја поминал возејќи велосипед со брзина v_1, а втората половина од патот возел автомобил со брзина v_2. Кој стигнал побрзо во Гевгелија: Раде или Станко?

Решение. Нека растојанието од Скопје до Гевгелија е s и нека Раде тој пат го поминал за време t_1. Тогаш $s = \frac{v_1 t_1}{2} + \frac{v_2 t_1}{2} = \frac{(v_1+v_2)t_1}{2}$, од каде добиваме $t_1 = \frac{2s}{v_1+v_2}$. Станко истиот тој пат го поминал за време

$$t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} + \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{s}{2} \cdot \frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}.$$

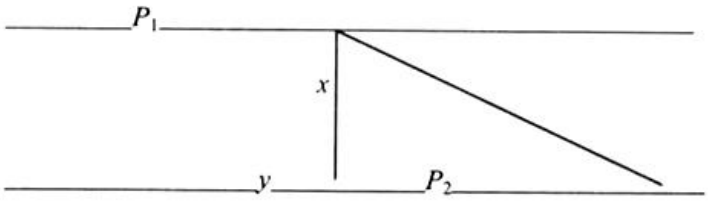
Сега, бидејќи $v_1 < v_2$, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$v_1 v_2 < \left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2,$$
$$\frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2} < \frac{v_1+v_2}{2},$$
$$\frac{2}{v_1+v_2} < \frac{v_1+v_2}{2v_1 v_2},$$
$$\frac{2s}{v_1+v_2} < \frac{s}{2} \cdot \frac{v_1+v_2}{v_1 v_2},$$
$$t_1 < t_2.$$

Значи, Раде потрошил помалку време од Станко, па тој прв ќе стигне во Гевгелија.

40. Два параброда се движат рамномерно во ист правец по две паралелни патеки. Растојанието меѓу нив во 6:00 часот било $200\ km$, во 13:00 часот било $150\ km$ и во 17:00 часот било $130\ km$. Определи го најмалото растојание меѓу парабродите во текот на денот.

Решение. Нека побрзиот параброд има брзина v_1, а поспориот v_2 и нека $z = v_1 - v_2$. Нека растојанието меѓу паралелните патеки на двата параброда е x, а предноста која ја има поспориот параброд е y (види цртеж).



Тогаш

$$x^2 + y^2 = 200^2,$$

$$x^2 + (y - 7z)^2 = x^2 + y^2 - 14yz + 49z^2 = 200^2 - 14yz + 49z^2 = 150^2,$$

$$x^2 + (y - 11z)^2 = x^2 + y^2 - 22yz + 121z^2 = 200^2 - 22yz + 121z^2 = 130^2.$$

Од втората и третата равенка добиваме

$$14yz - 49z^2 = 17500,$$

$$22yz - 121z^2 = 23100.$$

Ако првата равенка ја помножиме со 11, а втората со 7 добиваме

$$154yz - 539z^2 = 17500 \cdot 11,$$

$$154yz - 847z^2 = 23100 \cdot 7.$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората, добиваме $308z^2 = 30800$, од каде следува $z^2 = 100$, односно $z = 10$. Според тоа, $y = 160$ и $x = 120$, па најкраткото растојание меѓу парабродите е нормалното растојание и тоа е еднакво на $x = 120\ km$.

41. Летајќи низ ветер, авион го прелетува растојанието од точката A до точката B за 15 минути, а летајќи наспроти ветерот за 18 минути и 45 секунди. Колкава е брзината на авионот и колкава е брзината на ветерот ако растојанието меѓу точките A и B е 100 km?

Решение. Нека v' е брзината на ветерот, а v'' е брзината на авионот. Бидејќи $15 \min = 0,25\ h$ и $18 \min 45\ s = \frac{18,75}{60}\ h = 0,3125\ h$, добиваме $0,25(v' + v'') = 100$ и $0,3125(v'' - v') = 100$, односно $v'' + v' = 400$ и $v'' - v' = 320$. Ако последните две равенки ги собереме наоѓаме $v'' = 360\ km/h$, а ако ги одземеме наоѓаме $v' = 40\ km/h$.

42. Во иста вреќа се наоѓаат грав и грашок кои Пепелашка треба да ги раздели. Односот на масите на грашокот и гравот е 2:3. Маќеата на Пепелашка сметала дека е малку грашок во вреќата, па додала уште

$2\,kg$. Сега размерот на масите на гравот спрема грашакот е ист како што бил размерот на почетокот размерот на масите на грашокот спрема гравот. Колку килограми грашок и колку килограми грав треба да раздели Пепелашка?

Решение. Со x да ја означиме масата на гравот, а со y масата на грашокот. Од условот следува дека $y:x=2:3$ и $x:(y+2)=2:3$. Оттука добиваме $2x=3y$ и $3x=2y+4$. Од последниот систем следува $x=2,4\,kg$ и $y=1,6\,kg$. Според тоа, Пепелашка треба да раздели $2,4\,kg$ грав и $3,6\,kg$ грашок.

43. Свежо грозје содржи 80%, а суво грозје содржи 12% вода. Колку килограми свежо грозје се потребни за да се добие 15 килограми суво грозје?

Решение. Во $15\,kg$ суво грозје има 88% сува материја, односно $15\cdot 0,88=13,2\,kg$ сува материја. Оваа сува материја е $20\%=\frac{1}{5}$ од вкупната маса на сувото грозје. Значи, за добивање $15\,kg$ суво грозје се потребни $5\cdot 13,2=66\,kg$ свежо грозје.

44. Свежите сливи содржат 90% вода, а сушените 12%. Колку суви сливи се добиваат од $110\,kg$ свежи сливи?

Решение. Во $110\,kg$ свежи сливи со влажност 90% има 10% сува материја, односно $110\,kg\cdot 10\%=11\,kg$ сува материја. По сушењето на сливите, $11\,kg$ сува материја е $100\%-12\%=88\%$ од вкупната маса сливи. Ако со x ја означиме масата на сливите по сушењето, добиваме $0,88x=11$, односно $x=12,5\,kg$.

45. Матеј добил џепарлак за определен број денови. Требало да троши по 120 денари дневно, но бидејќи тој трошел по 150 денари дневно, последните три дена останал без пари. Колку пари добил Матеј и за колку дена било предвидено да ги потроши парите?

Решение. *Прв начин*. Бидејќи последните три дена останал без пари Матеј предвреме потрошил $3\cdot 120=360$ денари. Но, тој дневно трошел 30 денари повеќе од предвиденото, па затоа овие 360 денари ги потрошил за $360:30=12$ дена. Значи, Матеј добил $12\cdot 150=1800$ денари и требало да ги потроши за $12+3=15$ дена.

Втор начин. Матеј за x дена требало да троши по 120 денари, но тој во $x-3$ дена трошел по 150 денари и ги потрошил сите пари. Затоа $120x=150(x-3)$, од каде добиваме $120x=150x-450$, т.е. $30x=450$. Значи, Матеј парите требало да ги потроши за $x=15$ дена и тој добил $120\cdot 15=1800$ денари.

46. Пабло добил џепарлак од родителите за определен број денови. Првиот ден потрошил 10 денари и $\frac{1}{12}$ од преостанатите пари, вториот ден потрошил 20 денари и $\frac{1}{12}$ од преостанатите пари, третиот ден потрошил 30 денари и $\frac{1}{12}$ од преостанатите пари и така се додека имал пари. На крајот Пабло констатирал дека секој ден трошел иста сума пари. Колку пари добил Пабло и за колку дена ги потрошил?
Решение. Нека со x ја означиме сумата која ја добил Пабло. Прво ден тој потршил $10+\frac{1}{12}(x-10)$, а вториот ден потрошил

$$20+\tfrac{1}{12}(x-10-\tfrac{1}{12}(x-10)-20)=20+\tfrac{1}{12}(\tfrac{11}{12}x-\tfrac{350}{12}).$$

Бидејќи Пабло секој ден трошел иста сума пари, добиваме

$$10+\tfrac{1}{12}(x-10)=20+\tfrac{1}{12}(\tfrac{11}{12}x-\tfrac{350}{12}).$$

Последната равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$10+\tfrac{x}{12}-\tfrac{10}{12}=20+\tfrac{11x}{144}-\tfrac{350}{144},$$
$$1440+12x-120=2880+11x-350,$$
$$x=1210.$$

Според тоа, Пабло добил 1210 денари и секој ден тој трошел по $10+\frac{1}{12}(1210-10)=110$ денари.

47. Душко живее во Росоман. Денес од својата градина берел лубеници и дињи. Секоја лубеница ја продавал за 80 денари, а секоја диња за 60 денари. За да уплати летување за својот син Павел, потребно е да продаде четвртина од лубениците и половина од дињите, но истата сума ќе ја заработи и ако продаде три четвртини од дињите и дванаесеттина од лубениците. Колку лубеници и колку дињи набрал Душко, ако вкупната вредност на лубениците е за 1920 денари поголема од вкупната вредност на дињите?
Решение. Нека Душко набрал x лубеници и y дињи. Од условот на

задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x}{4}\cdot 80+\frac{y}{2}\cdot 60=\frac{x}{12}\cdot 80+\frac{3y}{4}\cdot 60, \\ 80x-60y=1920. \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $8x=9y$, па ако замениме во втората равенка наоѓаме $30y=1920$, односно $y=64$. Значи, $8x=9\cdot 64$, односно $x=72$. Конечно, Душко набрал 72 лубеници и 64 дињи.

48. Ана, Бранко и Вера играат карти. На почетокот секој од нив имал определен број жетони и тоа редоследно во однос $11:10:9$. На крајот на играта броевите на нивните жетони се во однос $11:7:3$. Колку жетони имале поединечно на крајот на играта, ако знаеме дека некој изгубил 363 жетони?

Решение. Бројот на жетоните е природен број и тој е еднаков на почетокот и на крајот на играта. Бранко на почетокот има $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ од вкупниот број жетони и на крајот има $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$ од вкупниот број жетони, т.е. тој има еднаков број жетони на почетокот и на крајот на играта. Ана на почетокот имала $\frac{11}{30}$, а на крајот имала $\frac{11}{21}$ од вкупниот број жетони. Тоа значи дека Ана ги добила жетоните кои ги изгубила Вера. Според тоа, $\frac{11}{21}-\frac{11}{30}=\frac{11}{70}$ од вкупниот број жетони е еднаков на 363. Оттука добиваме дека вкупниот број жетони е $363\cdot\frac{70}{11}=2310$.

Значи, на крајот на играта Ана имала $\frac{11}{21}\cdot 2310=1210$, Бранко имал $\frac{7}{21}\cdot 2310=770$ и Вера имала $\frac{3}{21}\cdot 2310=330$ жетони.

49. Петар имал 100 книги. Еден ден ги преуредил своите книги. Половината од средната полица ги префрлил на долната полица. Од првобитниот број книги од долната полица зел една третина и од тоа една третина ставил на средната полица, а остатокот на горната полица. Потоа од горната полица зел 10 книги и половината од нив ги ставил на средната, а половината на долната полица. По сите преместувања на секоја полица имало толку книги колку што имало на почетокот. Колку книги има на секоја полица?

Решение. Пред преместувањето бројот на книгите на горната, средната и долната полица да го означиме со x, y и z соодветно. Според

условот $x+y+z=100$. Петар од средната на долната полица преместил $\frac{y}{2}$. Од долната полица зел третина од книгите и од горната на долната полица ставил 5 книги, по што на долната полица иало онолку книги колку што биле пред преместувањето. Значи $z+\frac{y}{2}+5-\frac{z}{3}=z$ од каде добиваме $z=\frac{3y}{2}+15$. На сличен начин за преместувањата на средната полица добиваме $y-\frac{y}{2}+\frac{z}{9}+5=y$, т.е. $z=\frac{9y}{2}-45$. Значи, $\frac{3y}{2}+15=\frac{9y}{2}-45$, од каде добиваме $y=20$. Според тоа,

$$z=\frac{3\cdot 20}{2}+15=45 \text{ и } x=100-(20+45)=35.$$

50. За потребите на спортската секција наставникот Кирил купил 3 фудбалски и 7 ракометарски топки, по што му преостанале дел од парите кои ги имал. Тој пресметал дека ако купел 7 фудбалски и 1 ракометарски топка, тогаш нема да имал доволно пари. Дали на Кирил ќе му преостанат или ќе му недостасуваат пари ако купи 11 ракоментарски топки?

Решение. Нека Кирил има s денари. Ако цената на фудбалска топка е x, а цената на ракометарска топка е y, тогаш $3x+7y<s$ и $s<7x+y$. Значи, $3x+7y<7x+y$, односно $y<\frac{2}{3}x$. Според тоа, $4y<\frac{8}{3}x$, па затоа $11y=4y+7y<\frac{8}{3}x+7y<3x+7y<s$. Значи, по купувањето на 11 ракометарски топки на Кирил ќе му останат пари.

51. На еден натпревар организаторот сака на учесниците да им подели определен број чоколади. Се покажало дека има доволно чоколади секое девојче да добие по две, а секое момче да добие по една чоколада, но нема доволно секое момче да добие по две, а секое девојче да добие по една чоколада. Ако момчињата џентлменски се откажат од својот дел, дали ќе има доволно чоколади за секое девојче да добие по три чиколади:

Решение. Со x да го означиме бројот на момчињата, со y бројот на девојчињата и со n бројот на чоколадите. Од условот на задачата имаме $x+2y\le n$ и $2x+y>n$. Според тоа, $x+2y\le n<2x+y$, од каде добиваме $y<x$. Според тоа, $3y<x+2y\le n$, што значи дека ќе има

доволно чоколади за секое девојче да добие по три чоколади.

52. Над земјата Недојдија летале јато од четириесетножни едноглави нетопири и триглави змејови. Петар Пан ги броел нозете, а Svончица главите. Вкупно избројале 658 нозе и 39 глави. Колку нозе има еден змеј?

Решение. Нека n е бројот на нетопирите, z е бројот на змејовите и x е бројот на нозете на еден змеј. Според условот на здачата $n+3z=39$ и $40n+xz=658$. Од првата равенка добиваме $n=39-3z$, па со замена во втората наоѓаме $(120-x)z=902$. Со разложување на прости множители имаме $902=2\cdot 11\cdot 41$ и имајќи предвид дека $0<z<13$ и $0<x<120$ добиваме $z=11$ и $120-x=82$, односно $x=38$.

53. При првата средба на делегациите на Земјата и Марс се покажало дека марсовците имаат нозе како и луѓето, но се разликуваат по бројот на рацете и бројот на прстите на рацете. На средбата имало 6 марсовци повеќе од луѓе, но вкупниот број прсти (на рацете и на нозете) кај марсовците бил за 1 помал отколку кај луѓето. Колку учесници имало на средбата?

Решение. Нека има n прсти на рацете на еден марсовец, а нека k е бројот на луѓето на средбата (n и k се природни броеви). Тогаш на средбата имало $k+6$ марсови, секој со 10 прсти на нозете и n прсти на рацете и k луѓе со по 20 прсти (на рацете и нозете). Од условот на задачата следува $(k+6)(10+n)+1=20k$. Последната равенка е еквивалентна со равенката $(k+6)(10+n)+121=20k+120$, односно со равенката $121=(k+6)(10-n)$. Значи, $10-n$ е некој позитивен делител на 121, кој не е поголем од 10. Овој услов го задоволува само бројот 1, па затоа $n=9, k=115, k+6=121$.

Значи, на средбата имало $115+121=236$ учесници.

54. Пабло и Матео учествуваат на трка. Бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта пред Пабло е еднаков на бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта по него. Бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта пред Матео е три пати поголем од бројот на натпреварувачите кои стигнале на целта по него. Сите натпреварувачи стигнале на целта и не постојат двајца кои постигнале исто време. Во конечното рангирање има точно 10 натпреварувачи меѓу Пабло и

Матео. Колку луѓе учествувале на натпреварот?

Решение. Нека n е бројот на натпреварувачите. Без Пабло се $n-1$ натпреварувач, па затоа $\frac{n-1}{2}$ стигнале пред Пабло. Пред Матео стигнале $\frac{3(n-1)}{4}$ натпреварувачи. Овој број се добива кога на бројот на натпреварувачите кои стигнале пред Пабло додадеме $10+1=11$. Според тоа, $\frac{3(n-1)}{4}=\frac{n-1}{2}+11$, од каде добиваме $n=45$. Значи, на натпреварот учествувале 45 натпреварувачи.

55. Раде, Глигор и Ванчо меѓу себе поделиле џамлии. Прво раде зел третина од сите џамлии, Глигор зел третина од остатокот и Ванчо третина од џамлиите кои останале по Раде и Глигор. Остатокот од џамлиите го поделиле на три еднакви дела, при што Глигор добил 130 џамлии. Колку вкупно џамлии поделиле Раде, Глигор и Ванчо?

Решение. Нека вкупниот број џамлии е x. Раде зел $\frac{x}{3}$ џамлии, по што останале $\frac{2x}{3}$ џамлии. Глигор зел $\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{2x}{9}$ џамлии, по што останале $\frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{4x}{9}$ џамлии. Ванчо зел $\frac{1}{3}\cdot\frac{4x}{9}=\frac{4x}{27}$ џамлии, по што останале $\frac{2}{3}\cdot\frac{4x}{9}=\frac{8x}{27}$ џамлии. Според тоа, Глигор $\frac{2x}{9}+\frac{8x}{81}=\frac{26x}{81}$ џамлии, па затоа $\frac{26x}{81}=130$, од каде добиваме $x=405$. Значи, Раде, Глигор и Ванчо поделиле 405 џамлии.

56. Тројца работници од еден заеднички куп треба да распоредат исти сандаци на три купа. Прво Крсте од заедничкиот куп зел определено количество сандаци, $\frac{3}{4}$ ставил на купот K, а остатокот рамноправно на куповите L и M. Потоа Ласте од заедничкиот куп зел определено количество сандаци, $\frac{1}{4}$ ставил на купот L, а остатокот рамноправно го поделил на куповите K и M. На крајот Матеј од заедничкиот куп ги зел преостанатите сандаци, $\frac{1}{12}$ ставил на купот M, а остатокот рамноправно го поделил на куповите K и L. На крајот бројот на сандаците на куповите K,L,M бил во однос $3:2:1$. Определи го најмалиот можен број сандаци.

Решение. Нека Крсте, Матеј и Ласте од заедничкиот куп соодветно зеле k,l,m сандаци, при што $k,l,m\in\mathbb{N}$ и нека е x бројот на санда-

ците на купот M . Треба да ја определиме најмалата можна вредност на $k+l+m$. Од условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}k+\frac{3}{8}l+\frac{11}{24}m=3x, \\ \frac{1}{8}k+\frac{1}{4}l+\frac{11}{24}m=2x, \\ \frac{1}{8}k+\frac{3}{8}l+\frac{1}{12}m=x. \end{cases} \qquad (1)$$

Ако го изразиме x од трите равенки, добиваме

$$x=\frac{1}{8}k+\frac{3}{8}l+\frac{1}{12}m=\frac{1}{4}k+\frac{1}{8}l+\frac{11}{72}m=\frac{1}{16}k+\frac{1}{8}l+\frac{11}{48}m,$$

од каде наоѓаме

$$\begin{cases} \frac{1}{4}k+\frac{1}{8}l+\frac{11}{72}m=\frac{1}{16}k+\frac{1}{8}l+\frac{11}{48}m, \\ \frac{1}{4}k+\frac{1}{8}l+\frac{11}{72}m=\frac{1}{8}k+\frac{3}{8}l+\frac{1}{12}m, \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} 27k-11m=0, \\ 18k-36l+10m=0. \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $k=\frac{11}{27}m$, па со замена во втората наоѓаме $l=\frac{13}{27}m$. Значи, m мора да е делив со 27. Понатаму, од системот (1) следува дека m мора да е делив со 24, па затоа m мора да е делив со $\mathrm{NZD}(27,24)=216$. Но, $k+l+m=\frac{11}{27}m+\frac{13}{27}m+m=\frac{51}{27}m$, па најмалата вредност се добива за $m=216$ и таа е еднаква на $\frac{51}{27}\cdot 216=408$.

4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Во едно одделение има n ученици, меѓу кои k учат англиски, а l учат руски јазик. Можно е некои ученици да не учат ниту еден од овие два јазика. Колку најмалку ученици ги учат двата јазици (во зависност од n,k,l)?

   Решение. Нека x ученици учат само англиски јазик, y ученици учат само руски јазик, z ученици ги учат и двата јазика и t ученици не учат ниу еден јазик. Тогаш $k = x + z, l = y + z, n = x + y + z + t$. Ако од збирот на првите две равенки ја одземеме третата, добиваме

   $$z = k + l + t - n \geq k + l - n .$$

   Според тоа, ако $k + l > n$, одговорот е $z_{\min} = k + l - n$ и се постигнува за $t = 0$. Во спротивно е $z_{\min} = 0$ и се постигнува кога $x = k$ и $y = l$.

2. Во едно одделение има 20 момчиња. Меѓу нив 14 имаат сини очи, 15 имаат црна коса, 17 имаат повеќе од $60\,kg$ и 18 имаат повеќе од $165\,cm$. Докажи дека најмалку четири момчиња ги имаат сите наведени својства.

   Решение. Од условот на задачата следува дека $14 + 15 - 20 = 9$ момчиња имаат сини очи и црна коса. Понатаму, $9 + 17 - 20 = 6$ момчиња имаат сини очи, црна коса и повеќе од $60\,kg$. Според тоа, најмалку $6 + 18 - 20 = 4$ момчиња имаат сини очи, црна коса, повеќе од $60\,kg$ и се повисоки од $165\,cm$

3. На островот на лажливците и витезите постојат четири фудбалски екипи: АХА, ЕХЕ, ОХО и УХУ. Во анкетата на секој островјанин му се поставени четири прашања:
   1) Дали навиваш за АХА?
   2) Дали навиваш за ЕХЕ?
   3) Дали навиваш за ОХО?
   4) Дали навиваш за УХУ?

   Според одговорите на анкетата, процентите на навивачите за одделната екипа се:
   АХА: 40%,

ЕХЕ: 70%,
ОХО: 50%,
УХУ: 0%.
Колку остројани навистина навиваат за АХА?

Решение. Според условот на задачата никој не се изјаснил како навивач за екипата УХУ. Оттока следува дека сите лажливци навиваат за екипата УХУ, а секој витез навива за некоја од другите три екипи. Ако во анкетата секој жител на островот одговорил со ДА точно еднаш, тогаш збирот на процентите на гласовите за трите екипи би бил 100%. Меѓутоа секој лажливец три пати рекол ДА, па затоа

$$(40+50+70-100)\%=100\%$$

е еднакво на двократниот процент на лажливците на островот. Според тоа, 30% од жителите на островот се лажливци и во секоја од трите екипи се 30% повеќе гласови од вистинскиот процент на навивачите. Екипата АХА има само $40-30=10\%$ навивачи.

4. По еден фудбалски натпревар три момчиња, кои биле стрелци на сите постигнати голови на натпреварот, искажале по две тврдења:
Ацо. Јас дадов три гола. Илија даде само еден гол.
Илија. Јас дадов четири гола. Марко даде пет гола.
Марко. Јас дадов шест гола. Ацо даде само два гола.
Познато е дека секој од нив кажал едно висинито и едно невситинито тврдење. Стојан, кој бил само навивач, рекол: *На натпреварот без постигнати* 10 *голови*.
Дали тврдењето на Стојан е точно.

Решение. *Прв начин*. Не. Бидејќи во шесте искажани тврдења едно е точно, а едно неточно, заклучуваме дека: Ацо дал 3 или 2 гола, Илија дал 1 или 4 гола, Марко дал 5 или 6 гола. Ако тврдењето на Стојан е точно, тогаш земајќи по еден од двата можни броја добиваме дека единствена можност е $3+1+6=10$, т.е. Ацо дал 3 гола, Илија дал 1 гол и Марко дал 6 гола. Но, тоа значи дека двете тврдења на Ацо се точни, што противречи на условот на задачата.
Втор начин. Можни се два случаја:

1) Првото тврдење на Ацо е точно, т.е. тој постигнал 3 гола. Сега, добиваме дека второто тврдење на Марко не е точно, па затоа точно е неговото прво тврдење, т.е. тој дал 6 гола. Но, тоа значи дека второто тврдење на Илија не е точно, па точно е неговото прво тврдење, т.е. тој дал 4 гола. Значи, на натпреварот се постиг-

нати $3+6+4=12$ голови, па изјавата на Стојан не е точна.

2) Точна е втората изјава на Ацо, т.е. Илија дал 1 гол. Тоа значи дека не е точна првата изјава на Илија, па затоа точна е втората, т.е. Марко дал 5 гола. Сега, не е точна првата изјава на Марко, т.е. точна е неговата втора изјава, што значи дека Ацо дал 2 гола. Значи, на натпреварот се постигнати $1+5+2=8$ голови, па изјавата на Стојан не е точна.

5. На еден симпозиум учествувале 100 луѓе – хемичари и алхемичари. Познато е дека хемичарите секогаш ја говорат вистината, а алхемичарите секогаш лажат. На секој од нив му е поставено прашањето: „Ако не те сметаме тебе, дали меѓу преостанатите има повеќе хемичари или алхемичари“. Кога првите 51 испитаници дале одговор дека има повеќе алхемичари, анкетирањето е прекинато. Колку хемичари имало меѓу учесниците на симпозиумот?

Решение. Ако меѓу присутните има повеќе хемичари (барем 51), тогаш меѓу анкетираните ќе има барем еден кој мора да одговорил дека има повеќе хемичари. Ако има повеќе алхемичари (барем 51), тогаш меѓу анкетираните ќе има барем еден кој мора да одговорил дека има повеќе хемичари. Значи, на симпозиумот има 50 хемичари и 50 алхемичари.

6. Симона првиот вторник во месецот го поминала во Неготино, а првиот вторник по првиот понеделник истиот месец го поминала во Битола. Следниот месец, Симона првата среда ја поминала во Кратово, а првата среда по првиот вторник ја поминала во Скопје. Каде таа година била Симона на 8. март?

Решение. Симона во Неготино го поминала првиот ден во месецот, бидејќи ако тој вторник не е прв ден во месецот тогаш би бил и прв вторник по првиот понеделник, а Симона не можела истовремено да биде и во Неготино и во Битола. На ист начин заклучуваме дека Симона го поминала во Кратово првиот ден следниот месец. Два последователни месеца може да почнуваат во вторник и среда редоследно само ако бројот на деновите во првиот месец при делење со 7 дава остаток 1. Тоа е можно само ако тој месец е февруари во престапна година, т.е. кога има 29 дена. Според тоа, Симона на 8. март (првата среда по првиот вторник) била во Скопје.

7. Едно момче во среда и петок секогаш ја говори вистината, во вторник секогаш лаже, а во другите денови може и да лаже и да говори вистина. Во текот на седум последователни денови, му го поставувале истото прашање: „Како се викаш?“. Првите шест одгвори биле:

   АЦО, БОРО, ВАСКО, ВАСКО, ПЕТРЕ, БОРО

   Кој бил неговиот одговор седмиот ден?

   Решение. Да ги запишеме сите 7 одговори на кружница (еден одговор не ни е познат и ќе го означиме со X): А, Б, В, В, П, Б, X. Меѓу овие одговори сигурно има два еднакви точни одговори меѓу кои има еден неточен одговор (одговорите од среда, четврток и петок). Во спротивно би имале три последователни еднакви одговори, што очигледно не е случај. Според тоа, X е точен одговор и истиот е даден во среда или во петок. Ако е среда, тогаш вчера во вторник е БОРО, а и претходниот петок е БОРО. Но, во вторник и петок не може да се одговорите еднакви, бидејќи момчето во вторник лаже, а во петок говори вистина. Значи, седмиот ден бил во петок, што значи дека во среда, петтиот ден момчето кажало вистина и неговото име е ПЕТРЕ. Значи, седмиот ден одговорот е ПЕТРЕ.

8. Невена, Билјана и Снежана седат една до друга така што Невена ги гледа Билјана и Снежана, Билјана ја гледа само Снежана, а Снежана не ја гледа ниту Билјана, ниту Невена. Потоа од кутија во која имало два бели и три црни шешири (содржината на кутијата им била позната на девојките), се земени три шешири и се ставени на главите на девојките, а два шешира останале во кутијата. Тогаш Невена и Билјана редоследно изјавиле:

   Невена: *Јас не ја знам бојата на мојот шешир.*

   Билјана: *Ниту јас не ја знам бојата на мојот шешир.*

   Дали Снежана врз основа на нивните изјави може да ја определи бојата на својот шешир.

   Решение. Невена може да ја определи бојата на својот шешир, само ако види дека и на Билјана и на Снежана се бели шешири. Бидејќи таа не можела да ја определи бојата на својот шешир, заклучуваме дека и на Бисера и на Снежана се црни шешири, или на едната е бел, а на другата е црн шешир. Ако на Снежана бил бел шешир, Бисера по изјавата на Невена, можела да заклучи дека таа има црн шешир. Но, Бисера тоа не го кажала, па затоа Снежана може да биде сигурна дека на нејзината глава е црн шешир.

9. На дворот на Цар Соломон има 100 мудреци. Царот врши проверка на нивната остроумност на следниот начин: ги постројува во колона еден по друг и на секој на главата му става бела или црна капа. Секој мудрец ги гледа капите на сите мудреци кои во колоната се пред него, но не ја гледа својата капа, ниту капите на мудреците кои се зад него. Потоа мудреците еден по друг изговараат само еден збор: црна или бела (секој може да говори само еднаш). Потоа Цар Соломон и казнува сите мудреци кои не ја погодиле бојата на својата капа.
   Пред проверката мудреците се договориле и смислиле како бројот на казнетите да биде најмал можен број. Колку од нив сигурно нема да бидат казнети?
   Решение. Јасно е дека мудрецот кој е последен во колоната, може да се спаси само случајно, бидејќи неговата капа не ја гледа ниту еден мудрец. Меѓутоа, тој може да ги спаси сите други мудреци, соопштувајќи ја парноста на бројот на белите капи, кои се наоѓаат на нивните глави (по договор ќе каже бела за непарен, а црна за парен број капи). Сега на преостанатите мудреци им останува да пресметаат и да ја соопштат бојата на својата капа во редослед од претпоследниот кон првиот на следниот начин: прво претпоследниот мудрец, кои гледа се пред себа и ја знае парноста на бројот на белите капи (на својата плус сите пред него), лесно ја определува бојата на својата капа и му ја соопштува на Цар Самоил. Потоа мудрецот кој е пред него, знаејќи ги боите на сите капи, освен на својата (сите пред себе ги гледа, а на таа зад него само што ја дознал), според парноста може да определи бојата на својата капа и да ја соопшти. Сега се продолжува опишаната постапка, се додека првиот мудрец во колоната не ја соопшти бојата на својата капа. Значи, казната може да ја избегнат сите мудеци, освен последниот во колоната, односно 99 мудреци.

10. На дворот на Цар Соломон има 100 мудреци. Царот врши проверка на нивната остроумност на следниот начин: ги постројува во колона еден по друг и на секој на главата му става бела, сина или црна капа. Секој мудрец ги гледа капите на сите мудреци кои во колоната се пред него, но не ја гледа својата капа, ниту капите на мудреците кои се зад него. Потоа мудреците еден по друг изговараат само еден збор: црна, сина или бела (секој може да говори само еднаш). Потоа Цар Соломон и казнува сите мудреци кои не ја погодиле бојата на својата капа.

Пред проверката мудреците се договориле и смислиле како бројот на казнетите да биде најмал можен број. Колку од нив сигурно нема да бидат казнети?

Решение. Јасно е дека мудрецот кој е последен во колоната, може да се спаси само случајно, бидејќи неговата капа не ја гледа ниту еден мудрец. На белата,сината и црната капа да им ги придружиме броевите 0, 1 и 2 редоследно. Прво мудрецот кој е последен во колоната, ќе каже боја која соодветствува на остатокот при делењето со 3 на збирот на сите броеви, кои соодветствуваат на боите на капите на мудреците кои се пред него. Тогаш мудрецот, кој е одма пред него, може да ја определи бојата на својата капа, бидејќи ги гледа боите на капите на сите 98 мудреци кои се пред него и тој ја кажува бојата на својата капа. Потоа бојата на својата капа, врз основа на сознанието за боите на сите 98 капи и податокот од делењето со 3 на збирот на броевите придружени на овие 98 капи и неговата капа, ја соопшува третиот мудрец. Сега се продолжува опишаната постапка, се додека првиот мудрец во колоната не ја соопшти бојата на својата капа. Значи, казната може да ја избегнат сите мудеци, освен последниот во колоната, односно 99 мудреци.

11. На еден меѓународен натпревар се поделени 7 медали. Се покажало дека секој добитник на медал зборува два јазика и дека меѓу секои тројца добитници на медали постојат двајца кои зборуваат ист јазик. Докажи дека постојат три добитници на медали кои зборуваат ист јазик.

    Решение. Нека X е добитник на медал и нека Y е добитник на медал кој не зборува ниту еден од двата јазика кои ги зборува X. Според тоа, X и Y заедно говорат 4 јазика. Секој од преостанатите пет добитници на медали зборува барем еден од овие четири јазика (во спротивно ќе постојат три добитника меѓу кои нема двајца кои зборуваат ист јазик). Од принципот на Дирихле следува дека двајца од овие пет добитници на медали зборуваат еден од споменатите 4 јазици. Според тоа, овие двајца и еден од X или Y зборуваат ист јазик.

12. Дадени се 6 точки во рамнината кои определуваат 15 отсечки и 20 триаголници (сите отсечки имаат различни правци), при што должините на сите отсечки се различни. Докажи дека една од овие отсечки е најголема страна на некој од овие триаголници и истовремено е нај-

кратка страна на некој друг триаголник.

Решение. Нека A, B, C, D, E, F се дадените точки. Секој од 20-те триаголници има најкратка, средна и најдолга страна. Да ги обоиме отсечките со две бои, на пример со жолта ако отсечката е најкратка страна на некој триаголник, а со сина во спротивно. Бидејќи секој триаголник има најкратка страна, не постои триаголник кај кој сите страни се сини. Ќе докажеме дека постои триаголник кај кој сите страни се жолти. Од принципот на Дирихле следува дека меѓу отсечките AB, AC, AD, AE, AF постојат најмалку три кои се обоени во иста боја, на пример отсечките AB, AD, AE. Ако овие отсечки се сини, тогаш сите страни на триаголникот BDE се жолти (во секој триаголник постои барем една жолта страна). Нека AB, AD, AE се жолти. Бидејќи во секој триаголник има барем една страна жолта, тоа важи и за триаголникот BDE. Нека, на пример, страната BD е жолта. Тогаш сите страни на триаголникот ABD се жолти. Од претходините разгледувања следува дека навистина постои триаголник кај кој сите страни се жолти. Овој триаголник има најголема страна и таа е жолта. Истовремено, бидејќи оваа страна е жолта, таа е и најкратка страна на некој друг триаголник.

13. Сите темиња на правилен стоаголник се обоени во 10 различни бои. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се обоени во најмногу две бои.

Решение. Нека k е опишаната кружница околу правилниот стоаголник. Неговите темиња определуваат 50 различни дијаметри. Да забележиме дека секој дијаметар со било кое теме од правилниот стоаголник, различно од крајните точки на тој дијаметар, според Талесова теорема формира прав агол. Значи, било кои два дијаметри формираат правоаголник. Ако постојат два дијаметри чии крајни точки се обоени во иста боја, тогаш тоа би бил правоаголникот чии темиња се обоени во најмногу две бои. Нека не постојат два дијаметри чии крајни точки се обоени во иста боја односно постои само еден дијаметар чии крајни точки се обоени во иста боја. Бидејќи боењето е можно со 10 различни бои, постојат $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ различни начини на боење на крајните точки на дијаметрите со различни бои. Но постојат 50 дијаметри, па според принципот на Дирихле постојат два дијаметри чии крајни точки се обоени на ист начин со две различни бои, и тоа би бил бараниот

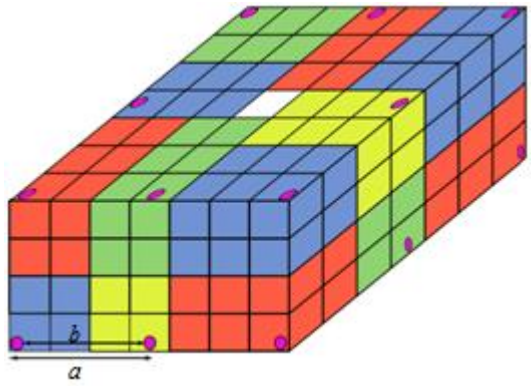
правоаголник чии темиња се обоени во најмногу две бои.

14. Една истражувачка лабораторија има специјална (бестежинска) просторија во која предметите лебдат онаму каде што се оставени. Просторијата има форма на квадар со висина 4 *m* и со основа квадрат со страна 7 *m*. Во центарот на основата е поставен носечки столб во форма на квадар со основа квадрат со страна 1 *m* и висина 4 m.
а) Во просторијата се расфрлани 16 балони во форма на топки со дијаметар 10 *cm*, кои лебдат. Дали мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и 2 *m* и ѕидови паралелни на ѕидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него?
б) Што ќе се случи кога би биле 17 балони? Дали, во овој случај, мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и 2 *m* и ѕидови паралелни на ѕидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него?

Решение. Волуменот на просторијата е еднаков на

$$7 \cdot 7 \cdot 4 - 4 = 192\ m^3.$$

Таа може да се подели на $192 : 12 = 16$ квадари со димензии 2 *m*, 3 *m* и *2 m*, а ѕидови паралелни на ѕидовите на просторијата (цртеж десно).



а) Да ги поставиме балоните како на цртежот. Тие се наоѓаат на долната и горната основа на просторијата. Притоа $a = 3{,}5\ m$, а растојанието меѓу било кои два соседни балони е

$$b = 3{,}5m - 10cm - 5cm = 3{,}35\ m.$$

Според тоа, не мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и 2 *m* и ѕидови паралелни на ѕидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него.
б) Ако имаме 17 балони, тогаш нивните центри се 17 точки. Сега, од принципот на Дирихле следува дека барем во еден од дадените 16 квадари ќе имаме два центри на балоните. Балоните со овие два центри ќе имаат делови во еден ист квадар.

15. На колку начини можеме секое теме на правилен осумаголник да го

обоиме со сина или црвена боја така што не постојат четири истобојни темиња кои се темиња на правоаголник?

Решение. Да забележиме дека четири темиња на правилен осумаголник воедно се и темиња на правоаголник ако и само ако дијагоналите на тој правоаголник се и дијаметри на опишаната кружница околу осумаголникот. Меѓу четири дијаметри, бидејќи ги боиме со 2 бои, најмногу два може да имаат крајни точки со иста боја (ако има три дијаметри чии крајни точки се еднобојни, тогаш од принципот на Дирихле следува дека два мораат да имаат истобојни крајни точки, па ќе постои правоаголник со истобојни темиња, што е противречност). Затоа ги разликуваме следниве случаи:

1) Ако нема дијаметар чии крајни точки се еднобојни, тогаш крајните точки на секој дијаметар можеме да ги обоиме на 2 начина, па во овој случај имаме $2^4 = 16$ боења.
2) Ако на еден дијаметар крајните точки се истобојни, тогаш тој дијаметар можеме да го избереме на 4 начина, истиот можеме да го обоиме на 2 начина, а секој од преостанатите три дијаметри можеме да о обоиме на 2 начина. Во случајов имаме $4 \cdot 2 \cdot 2^3 = 64$ боења.
3) Ако два дијаметри имаат еднобојни крајни точки (секој во различна боја), тогаш овие два дијаметри можеме да ги избереме на $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ начини, двата можеме да ги обоиме на 2 начини, а секој од преостанатите два дијаметри можеме да го обоиме на 2 начини. Значи, во овој случај имаме $6 \cdot 2 \cdot 2^2 = 48$ боења.

Конечно, вкупниот број боења кои го задоволуваат условот на задачата е $16 + 64 + 48 = 128$.

16. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои првата и последната цифра се еднакви.

Решение. Бидејќи првата и последната цифра се еднакви, тоа значи дека на првото и последното место може да биде било која цифра освен цифрата 0. Значи, за првата и последната цифра имаме 9 можности. На местото на десетките и на местото на стотките може да биде

било која цифра, па за секое од овие две места имаме по 10 можности. Конечно, од принципот на производ следува дека бараниот број броеви е $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

17. Определи го бројот на петцифрените броеви, кај кои сите цифри се различни, а збирот на првата и последната цифра е 8.
Решение. Првата и последната цифра може да бидат 8 и 0, 7 и 1, 6 и 3, 5 и 3, 3 и 5, 2 и 6, 1 и 7. Според тоа, имаме 7 можности. Ако се дадени првата и последната цифра, тогаш втората цифра можеме да ја избереме на 8 начини, потоа третата цифра можеме да ја избереме на 7 начини и четвртата цифра можеме да ја избереме на 6 начини. Конечно, бараниот број броеви е $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2352$.

18. На тениски турнир учествуваат 10 тенисери и 6 тенисерки. На колку начини нив може да се изберат 4 мешовити парови кои ќе играат мечови по системот првиот пар против четвртиот, а вториот против третиот?
Решение. Тенисерот кој ќе игра во првиот пар можеме да го избереме на 10 начини, во вториот на 9, во третиот на 8 и во четвртиот на 7 начини. Слично тенисерката која ќе игра во првиот пар може да се избере на 6, во вториот на 5, во третиот на 4 и во четвртиот на 3 начини. Вкупно 4 мешовити парови можеме да избереме на
$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1814400 \text{ начини.}$$

19. На тениски турнир учествуваат 10 тенисери и 6 тенисерки. На колку начини нив може да се изберат 4 мешовити парови кои ќе играат мечови по системот првиот пар против четвртиот, а вториот против третиот, ако се знае дека Елена и Бојан никогаш не играат во заеднички мешовит пар?
Решение. Од вкупниот број начини за формирање 4 мешовити парови треба да го одземеме бројот на оние начини за формирање 4 мешовити парови меѓу кои е и парот во кој се Елена и Бојан. Вакви парови во кои еден пар се Елена и Бојан има $4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120960$, бидејќи имаме 4 начини да го избереме редниот број на парот кои го формираат Елена и Бојан, а преостанатите ги пополнуваме со тенисери на $9 \cdot 8 \cdot 7$, односно со тенисерки на $5 \cdot 4 \cdot 3$ начини.
Според претходната задача имаме 1814400 начини за формирање на четири мешовити парови, па затоа бараниот број начини за форми-

рање на 4 мешовити парови е еднаков на $1814400 - 120960 = 1693440$.

20. Фрламе три коцки коцки за играње, на чии ѕидови се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6. Определи го бројот на случаите во кои броевите кои се на ѕидовите на горната страна може да бидат должини на страни на триаголник изразени во сантиметри.

Решение. Нека a,b,c се паднатите бреови при фрлањето на трите коцки. Од сите можни $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ случаи, паднатите броеви не може да се должини на страни ако $a \geq b + c$ или $b \geq c + a$ или $c \geq a + b$. Случаи кога $a \geq b + c$ се вкупно 35 (за $a = 1$ има 0, за $a = 2$ има 1, за $a = 3$ има 3, за $a = 5$ има 10 и за $a = 6$ има 15 случаи). Слично, за $b \geq c + a$ и за $c \geq a + b$ имаме по 35 е неповолни случаи. Конечно, бараниот број слуачи е $216 - 3 \cdot 35 = 111$.

21. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои ниту една цифра не е 0, а производот на цифрите е делив со 20?

Решение. Една од цифрите мора да е 5, а производот на другите две мора да е делив со 4. Можни се два случаја:

1) Ако другите две цифри се парни, тогаш такви броеви има $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$, бидејќи цифрата 5 можеме да ја распоредиме на 3 начини, а на преостанатите две места можеме да ја запишеме било која од цифрите 2, 4, 6, 8.
2) Ако една од преостанатите две цифри е делива со 4, а другата е непарна, тогаш такви броеви има $2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$, бидејќи цифрата делива со 4 можеме да ја избереме на два начина и да ја распоредиме на 3 начина, а потоа цифрата 5 и другата непарна цифра да ја распоредиме на 9 начина. На пример, кога цифрата 4 е на првото место, распоредувањето на другите две цифри е: 451, 453, 455, 457, 459, 415, 435, 475, 495.

Според тоа, имаме $48 + 54 = 102$ броеви со саканите својства.

22. Колку има:

а) петцифрени парни природни броеви чиј производ на цифри е парен број,

б) петцифрени парни природни броеви чиј производ на цифри е непарен број,

в) петцифрени непарни природни броеви чиј производ на цифри е парен број,

г) петцифрени непарни природни броеви чиј производ на цифри е непарен број?

Решение. Ако петцифрениот број е парен, тогаш неговата последна цифра е парна, па затоа производот на неговите цифри е секогаш парен. Затоа бројот на петцифрените парни природни броеви чиј производ на цифри е парен е еднаков на $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 5 = 45000$, а бројот на петцифрените парни природни броеви чиј производ на цифри е непарен е еднаков на 0.

Ако пецифрениот број е непарен, тогаш неговата последна цифра е непарна, па затоа производот на неговите цифри е парен или непарен во зависност од преостанатите цифри. Производот на цифрите ќе биде непарен ако сите негови цифри се непарни, па затоа бројот на непарните броеви со непарен производ на цифри е $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 3125$. Конечно, имаме $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 5 = 45000$ непарни петцифрени броеви, па затоа непарни петцифрени броеви чиј производ на цифри е парен број се $45000 - 3125 = 41875$.

23. Колку има:

а) петцифрени парни природни броеви чиј збир на цифри е парен број,

б) петцифрени парни природни броеви чиј збир на цифри е непарен број,

в) петцифрени непарни природни броеви чиј збир на цифри е парен број,

г) петцифрени непарни природни броеви чиј збир на цифри е непарен број?

Решение. Бараните броеви се од видот ****П или ****Н.

а) Ако петцифрениот број е парен и ако збирот на неговите цифри е парен, тогаш во бројот ****П збирот на преостанатите 4 цифри е парен број, што е можно само ако: сите 5 цифри се парни, 3 се парни и 2 се непарни, 4 се непарни и последната е парна. Такви броеви има:

$$4\cdot 5^4 + 3\cdot(4\cdot 5^4 + 5^5) + 5^5 = 16\cdot 5^4 + 4\cdot 5^5 = 36\cdot 5^4 = 22500.$$

б) Ако петцифрениот број е парен и ако е збирот на неговите цифри е непарен, тогаш во бројот збирот на преостанатите 4 цифри е непарен, што е можно само ако: 4 цифри се парни и една е непарна или 2 цифри се парни и 3 се непарни. Такви броеви има:

$$3\cdot 4\cdot 5^4 + 5^5 + 4\cdot 5^4 + 3\cdot 5^5 = 16\cdot 5^4 + 4\cdot 5^5 = 36\cdot 5^4 = 22500.$$

в) Случајот е сличен на случајот б) и петцифрени непарни природни броеви чиј збир на цифри е парен има 22500.

г) Случајот е сличен на случајот а) и петцифрени непарни природни броеви чиј збир на цифри е непарен има 22500.

24. Во рамнината се дадени 20 различни точки, меѓу кои има 8 тројки колинеарни точки. Колку различни прави се определени со овие точки?

Решение. Ако меѓу точките нема три колинеарни точки, тогаш вкупниот број прави се $\frac{20\cdot 19}{2}=190$. Три колинеарни точки определуваат една права, а ако не се колинеарни, определуваат три прави. Тоа значи дека секоја тројка колинеарни точки определува $3-1=2$ прави помалку. Според тоа, имаме $8\cdot 2=16$ прави помалку, односно вкупниот број прави е $190-16=174$.

25. Во просторот се дадени 20 различни точки, меѓу кои има 8 петорки компланарни точки. Колку различни рамнини се определени со вие точки?

Решение. Ако не постојат повеќе од три компланарни точки, тогаш секои три точки определуваат рамнина, па затоа вкупно би имале $\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2}=1140$ рамнини. Пет компланарни точки определуваат една рамнина, а ако не се компланарни тогаш определуваат $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}=10$ рамнини. Според тоа, секоја петорка компланарни точки помалку определува $10-1=9$ рамнини. Но, имаме 8 петорки компланарни точки, па затоа бројот на рамнините е помал за $8\cdot 9=72$ и тој е еднаков на $1140-72=1068$.

26. Во просторот се дадени n точки такви што меѓу нив не постојат три колинеарни точки. Овие точки определуваат 2024 различни рамнини. Определи го најмалиот можен број n.

Решение. Најмалиот можен број n е во случајот кога никои черири од дадените точки не се компланарни. Во овој случај точките определуваат $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ рамнини. Според тоа, , од каде добиваме

$$n(n-1)(n-2)=6\cdot 2024,$$
$$n(n-1)(n-2)=2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23,$$
$$n(n-1)(n-2)=24\cdot 23\cdot 22,$$

па затоа $n=24$.

27. Колку има рамнокраки триаголници со периметар $2011\,cm$ чии должини на страни изразени во сантиметри се целобројни?
Решение. Нека должините на страните се a,b,b. Периметарот на триаголникот е $a+2b=2011$, па затоа a е непарен природен број. Според тоа, треба да ги определиме сите природни броеви a и b такви што $a+2b=2011$ и $a<2b$. Заклучуваме дека должината a на основата на триаголникот може да биде било кој непарен број помал од 1006. Тоа се броевите 1, 2, 5, ..., 1005, т.е. има 503 такви броеви. Значи, бројот на бараните триаголници е 503.

28. На колку различни начини може да се распоредат сите букви од зборот $ANAGRAM$ така што никои две букви A не се една до друга?
Решение. Посебно ќе го определиме бројот на начините на распоредување на буквите N,G,R,M и бројот на начините на распоредување на три букви A на преостанатите три места. Потоа овие броеви ќе ги помножиме.
Буквите N,G,R,M на зборот $ANAGRAM$ можеме да ги распоредиме на $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ начини. За секој таков распоред треба да ги распоредиме трите букви A така што две букви нема да се една до друга. Ова може да го постигнеме ако $\_\,X\,\_\,X\,\_\,X\,\_$ ако на местата на буквите X ги распоредиме булвите N,G,R,M, а потоа за распоредување на трите букви A избереме 3 од можни 5 цртички и на нив ја запишеме буквата A. Ова може да се направи на $\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$ начини.
Конечно, сите букви на зборот $ANAGRAM$ на саканиот наин може да се распоредат на $24\cdot10=240$ начини.

29. Воденичарот Марко во својата воденица денес има многу работа. Треба да сомеле 6 вреќи пченка од по $20\,kg$, 4 вреќи од по $30\,kg$ и 4 вреќи од по $40\,kg$. На колку начини Марко може да ја сомеле пченката, ако решил да не меле пченка едно по друго од две вреќи со иста маса?
Решение. Вреќите од $20\,kg$ да ги означиме со A, од $30\,kg$ со B и од $40\,kg$ со C. Ако вреќите A ги фиксираме, потребно е да определиме на колку начини можеме да ги распоредиме вреќите B и C покрај вреќите A, така што на местата на подолгите цртички има најмалку

по една вреќа:

$$\_\,A\,\_\_\,A\,\_\_\,A\,\_\_\,A\,\_\_\,A\,\_\_\,A\,\_\,.$$

Бројот вреќи B и C на празните места можеме да ги представиме како збир на 5, 6 и 7 собирци и тоа на следниве начини:

1) $2+1+1+1+1+1+1$ (на едно место 2 вреќи, а на преостаните по 1). Две вреќи можеме да избереме на 2 различни начина (BC или CB) и тоа на 7 различни места. На останатите шест места три вреќи B и три вреќи C можеме да ги распоредиме на 20 начини. Значи, во овој случај имаме $2\cdot 7\cdot 20=280$ распоредувања.
2) $2+2+1+1+1+1$ (на две места по 2 вреќи, а на преостанатите по 1). Да го разгледаме распоредот на вреќите од 1-вото до 6-тото место. По две вреќи на две места можеме да избереме на 4 начини. Два пати по две вреќи шест места можеме да избереме на 15 начини, додека на преостанатите 4 места две вреќи B и две вреќи C можеме да распоредиме на 6 начини. Според тоа, бројот на распоредите во овој случај е $4\cdot 15\cdot 6=360$. Бидејќи на ист начин може да се распоредат вреќите и од 2-рото до 7-мото место, заклучуваме дека во овој случај имаме вкупно 720 распореди.
3) $3+1+1+1+1+1$. Со аналогни размислувања како под 2) добиваме дека во овој случај имаме 240 распореди.
4) $2+2+2+1+1$. По две вреќи на три места може да распоредиме на 8 начини. Овие три позиции може да ги избереме на 10 начини. На преостанатите две места по една вреќа B и C можеме да распоредиме на 2 начина. Според тоа, во овој случај вкупно имаме $8\cdot 10\cdot 2=160$ распореди.
5) $3+2+1+1+1$. Со аналогни размислувања како под 2) добиваме дека во овој случај имаме 240 распореди
6) $4+1+1+1+1$. Со аналогни размислувања како под 1) добиваме дека во овој случај имаме 60 распореди

Конечно, водеичарот Марко има

$$280+720+240+160+240+60=1700$$

можности да ги распореди вреќите на саканиот начин.

30. Во записот

$$O\cdot S\cdot T\cdot E\cdot N=S\cdot T\cdot O\cdot L\cdot I\cdot C\cdot A$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што ќе добиеш точно равенство. Колку решенија има задачата?

Решение. Прво ќе го определиме бројот на решенијата кај кои сите цифри се различни од нула. Постојат две можности. На левата страна се цифрите 2, 5, 7, 8 и 9 или се цифрите 4, 5, 7, 8 и 9. Во првиот случај едно решение е $2\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 5\cdot 7\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 4\cdot 6$. Цифрите 2, 5 и 7 може да се пермутираат на 6 начини, цифрите 8 и 9 на 2 начина и цифрите 1, 3, 4 и 6 на 24 начина. Значи, во овој случај имаме $6\cdot 2\cdot 24 = 288$ решенија. О вториот случај едно решение е $8\cdot 7\cdot 5\cdot 4\cdot 9 = 7\cdot 5\cdot 8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 6$. Од него, на потополно идентичен начин добиваме дека имаме нови 288 решенија.

Ако меѓу цифрите се појавува 0, тогаш таа мора да е наместо една од буквите S,T,O. Преостанатите 8 букви може да се заменат со ненулти цифри на $9\cdot 8\cdot ...\cdot 3\cdot 2 = 362880$ начини. Бидејќи буквата која ќе биде 0 може да се избере на 3 начини, добиваме дека во случајов имаме 1088640 решенија.

Значи,задачата вкупно има $1088640 + 2\cdot 288 = 1089216$ решенија.

31. На колку начини буквите може да се заменат со цифри (различни букви со различни цифри, исти букви со исти цифри) така што

$$\frac{R\cdot A\cdot Z}{L\cdot I\cdot C\cdot N\cdot A} = 1$$

е точно равенство?

Решение. Јасно A е цифра различна од 0 и $A \notin \{R,Z,L,I,C,N\}$. Дадено равенство е еквивалентно со равенството $R\cdot Z = L\cdot I\cdot C\cdot N$. Решенијата на равенството се: $9\cdot 8 = 1\cdot 3\cdot 4\cdot 6$ и $9\cdot 4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 6$. Во првиот случај A може да се избере од множеството $\{2,5,7\}$, во вториот од $\{8,5,7\}$. За секои три избора на цифрата A имаме по 48 пермутации на цифрите различни од A, па затоа вкупно имаме $2\cdot 3\cdot 48 = 288$ решенија.

32. На колку начини во записот

$$A + \overline{BC} + D = \overline{AB} + \overline{CD}$$

буквите може да се заменат со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што добиеното равенство ќе биде точно?

Решение. Цифрите A,B,C се јавуваат како први цифри на двоцифрени броеви, па затоа се различни од 0. Даденото равенство е еквивалентно со равенството $B = A + C$. Според тоа, решенија се сите

четворки (A,B,C,D) кои ги задоволуваат условите: $B=A+C$, каде A,B,C се цифри различни од 0 и D е цифра различна од A,B,C. Така, за секоја тројка броеви (A,B,C) која го задоволува условот $B=A+C$, цифрата D може да прима 7 вредности. Лесно се добива дека $B>2$, па испитувајќи ги сите можности за цифрата B од 3 до 9, добиваме дека тројките (A,B,C) може да ги избереме на 32 начини:

$(3,1,2),(3,2,1),(4,1,3),(4,3,1),(5,1,4),(5,2,3),(5,3,2),(5,4,1),$
$(6,1,5),(6,2,4),(6,4,2),(6,5,1),(7,1,6),(7,2,5),(7,3,4),(7,4,3),$
$(6,5,2),(7,6,1),(8,1,7),(8,2,6),(8,3,5),(8,5,3),(8,6,2),(8,7,1),$
$(9,1,8),(9,2,7),(9,3,6),(9,4,5),(9,5,4),(9,6,3),(9,7,2),(9,8,1).$

Значи, вкупно имаме $7\cdot 32=224$ можности.

33. При вртењето на калкулаторот за 180° цифрите 0, 1 и 8 не се менуваат, цифрите 6 и 9 ги заменуваат улогите, а преостанатите цифри губат смисла. Определи го бројот на десетцифрените броеви кои не се менуваат при вртење на калкулаторот за 180°.

Решение. Такви броеви може да се запишуваат само со цифрите 0, 1, 8, 6 и 9 и се определени со првите пет цифри. Притоа првата цифра не може да биде 0. Значи, за првата цифра имаме 4 можности, а за секоја од преостанатите четири цифри имаме по 5 можности. Значи, бараниот број броеви е $4\cdot 5^4=2500$.

34. При вртењето на калкулаторот за 180° цифрите 0, 1 и 8 не се менуваат, цифрите 6 и 9 ги заменуваат улогите, а останатите цифри губат смисла. Определи го бројот на деветцифрените броеви кои не се менуваат при вртежето на калкулаторот за 180°.

Решение. Во записот на бараните броеви може да се содржат само цифрите 0, 1, 8, 6 и 9 и истите се определени со првите 5 цифри. Притоа првата цифра не смее да биде 0, а петтата цифра не може да е 6 или 9. Значи, за првата цифра имаме 4 можности, за петата 3 можности, а за преостанатите три цифри имаме по 5 можности. Конечно, бараниот број броеви е $4\cdot 5^3\cdot 3=1500$.

35. Колку има:
а) десетцифрени,

б) единаесетцифрени,
природни броеви деливи со 11, во чиј декаден запис се појавуваат само цифрите 0 и 5?

Решение. а) Разликата на збирот на парните места и збирот на непарните места треба да биде делива со 11. Бидејќи сите цифри се 0 или 5, оваа разлика мора да е делива со 11, што значи со 55. Последното значи дека бројот на петките на парните места мора да е еднаков на бројот на петките на непарните места. Бројот на начините k петки да се распоредат на n места е еднаков на $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Бидеќи цифрата на првото непарно место мора да е 5 (во спротивно бројот нема да е десетцифрен), бројот на начините петките да се разпоредат на парни и непарни места е еднаков на

$$A=\binom{4}{0}\cdot\binom{5}{1}+\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{4}+\binom{4}{4}\cdot\binom{5}{5}$$
$$=1\cdot 5+4\cdot 10+6\cdot 10+4\cdot 5+1\cdot 1=126.$$

б) Во случајов имаме 5 парни и шест непарни места, при што на првото непарно место е цифрата 5, па затоа бараниот број е:

$$B=1\cdot 5+5\cdot 10+10\cdot 10+10\cdot 5+5\cdot 1=210\,.$$

36. На таблата е запишана низа од 29 нули и 31 единица. Дозволено е да се изберат било кои два броја и наместо секој од нив да се запише број за 1 поголем. Дали со повторување на оваа операција може да се добијат 60 еднакви броеви.

Решение. Збирот на запишаните броеви е непарен, Со примена на дадената операција овој збир се зголемува за 2, што значи дека останува непарен број. Но, збирот на 60 еднакви броеви е парен број, па затоа од дадените броеви со примена на дадената операција не може да се добијат еднакви броеви.

37. На таблата е запишана низа од 29 нули и 31 единица. Дозволено е да се изберат било кои два броја, да се избришат и наместо нив да се запише 0 ако броевите се различни и единица ако броевите се еднакви. По 59 примени на оваа операција на таблата ќе остане еден број. Кој е тој број?

Решение. Наместо 0 и 1 запишуваме 0, а наместо 0 и 0, односно 1 и 1, запишуваме 1. Значи со примена на оваа операција за еден е намалува вкупниот број нули и единици, а бројот на нулите или останува ист или се намалува за 2, што значи дека не ја менува парноста. На

почетокот имаме непарен број нули, па и на крајот ќе имаме непарен број нули, што значи дека по 59 примени на дадената операција на таблата ќе остане бројот 0.

38. Во рамнината е даден произволен триаголник. Со произволни отсечки подели го триаголникот на 6 триаголника, а потоа некој од добиените триаголници подели го на нови 6 триаголника итн. Дали на овој начин може од почетниот триаголник да се добијат 2010 триаголника?
Решение. Во првиот чекор добиваме 6 триаголници, што значи дека бројот на триаголниците се зголемува за 5. Понатаму, во секој следен чекор бројот на триаголниците се зголемува за 5, што значи дека по k чекори ќе добиеме $1+5k$ триаголници. Но, од $1+5k=2010$ добиваме $5k=2009$, што не е можно бидејќи бројот 2009 не е делив со 5. Значи, со опишаната постапка не може да се добијат 2010 триаголници.

39. Џентлмените секогаш им ја говорат вистината на своите познаници, а луѓето кои не ги познаваат секогаш ги лажат. Во едно друштво од 50 џентлмени секој на секого од преостанатите му кажал една од следниве две реченици: „Во ова друштво јас имам парен број познаници“ или „Во ова друштво јас имам непарен број познаници“. Дали е можно првата реченица да е изговорена 2025 пати?
Решение. За секој џентлмен збирот на неговите познаници и непознаници е еднаков на 49. Тоа значи дека ако некој има непарен број познаници, тој има парен број непознаници и обратно. Ако џентлменот има парен број познаници, тој првата реченица ја изговара парен број пати (бидејќи само нив има ја изговара првата реченица). Ако има непарен број познаници, тој на познаниците им ја изговара втората реченица, а на непознаниците (чиј број е парен) им ја изговара првата реченица. Значи, и во двата случаи првата реченица е изговорена парен број пати, што значи дека секој џентлмен првата реченица ја изговорил парен број пати, без разлика колку познаници има. Според тоа, сите заедно првата реченица ја изговориле парен број пати, па затоа не е можно да е изговорена 2025 пати.

40. Даден е правилен десетаголник. Дали неговите темиња може да се означат со броевите 1, 2, 3, 4, 5 така што за секој пар различни броеви постои страна чии крајни точки се означени со овие броеви?
Решение. Да. На пример, едно вакво означување е: 1, 2, 3, 5, 1, 3, 4, 2,

5 и 4.

41. Даден е правилен седумнаесетаголник. Дали неговите темиња може да се означат со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 така што за секој пар различни броеви постои страна чии крајни точки се означени со овие броеви?
Решение. Да разгледаме еден број. Тој треба да се граничи со уште 5 броја. Ако бројот е запишан еднаш во теме на многуаголникот тој се граничи со два броја, па како $5 = 2 \cdot 2 + 1$, тој мора да е запишан во теме на многуаголникот барем 3 пати. Но, имаме шест броја, што значи дека многуаголникот треба да има најмалку $6 \cdot 3 = 18$ темиња. Конечно, дадениот многуаголник е седумнаесетаголник, па затоа не е можно броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 да се запишат така што ќе биде исполнет условот на задачата.

42. Определи го бројот на различните магични 3×3 квадрат составени од девет последователни природни броеви, кај кои збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала, т.е. карактеристичниот збир е еднаков на 2007.
Решение. Бидејќи $2007 : 3 = 669$, средниот од деветте последователни броеви е 669, па затоа деветте броеви се: 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672 и 673. Еден од можните распореди е прикажан на цртежот десно.

672	665	670
667	669	671
668	673	666

Бројот 669 е во централното поле, а положбите на преостанатите броеви се определени со симетрично пресликување на добиениот магичен квадрат во однос на секоја од неговите 4 оски на симетрија. Конкретно, можни се следниве случаи:

672	**665**	670
667	669	671
668	673	666

670	**665**	672
671	669	667
666	673	668

666	671	670
673	669	**665**
668	667	672

668	667	672
673	669	**665**
666	671	670

668	673	666
667	669	671
672	**665**	670

666	673	668
671	669	667
670	**665**	672

670	671	666
665	669	673
672	667	668

668	667	672
665	669	673
666	671	670

43. На колку начини можеме во полињата на 3×3 табела даги запишеме сите природни броеви од 1 до 9, по еден број во секое поле, така што збирот на броевите во секој ред е делив со 3, а збирот на броевите во секоја колона не е делив со 3?

Решение. Треба да го определиме бројот на табелите кои ги задоволуваат условите на задачата. Овие табели да ги наречеме вистински.

Во табелите за кои е исполнет условот на задачата, наместо броевиет 1, 2, ..., 9 ќе ги запишуваме остатоците при делење со 3, односно броевите 0, 1 и 2. Овие табели ќе ги наречеме табели на остатоци.

Бидејќи при делење со 3 броевите 3, 6, 9 даваат остаток 0, броевите 1, 4, 7 даваат остаток 1 и броевите 2, 5, 8 даваат остаток 2, во секоја табела на остатоци ќе имаме по три броја 0, три броја 1 и три броја 2.

Притоа на местото на бројот 0 броевите 3, 6 и 9 можеме да ги запишеме на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини, а исто толку начини имаме за на местото на бројот 1 да ги запишеме броевиет 1, 4 и 7, и на местото на бројот 2 да ги запишеме броевите 2, 5 и 8. Значи, од една таблица остатоци можеме да добиеме $6\cdot 6\cdot 6=216$ вистински таблици.

Збирот на броевите во еден ред е делив со 3 ако и само ако:

1) Сите три броја даваат ист остаток при делење со 3 (три нули, три едици или три двојки во ред),
2) Сите три броја даваат различни остатоци при делење со 3 (во редот има точно една 0, една единица и една двојка).

Збирот на броевите во колна не е делив со 3 ако точно два броја даваат ист остаток при делење со 3 (точно по две нули, по две единици и по две двојки).

Понатаму, ако во еден ред сите три броја даваат ист остаток при делење со 3, тогаш тоа мора да важи и за другите два реда. Но, тогаш во секоја колона има по три различни остатоци при делење со 3, па нивниот збир е делив со 3, што значи дека овој случај не е можен.

Затоа единствен можен случај е кога во таблицата на остатоците ги задоволува условите:

3) во секој ред има точно една нула, една единица и една двојка,
4) во секоја колона има точно по две нули, две единици или две двојки.

До замена на местата на рдовите и колоните имаме само две можности:

0	1	2
0	1	2
1	2	0

0	1	2
0	1	2
2	0	1

Бидејќи погоре прикажаната трета колонаво двата случаја може да е прва или втора, а другите два реда се исти, за секој од овие два случаја имаме по 3 нови таблици, а за секоја од овие таблици, колоните можеме да ги распоредиме на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини. Затоа вкупниот број различни таблици на остатоци е еднаков на $2\cdot 3\cdot 6=36$. Конечно, вкупниот број вистински таблици е еднаков на $36\cdot 216=7776$.

44. Познато е дека меѓу 63 наизглед еднакви златници има 7 фалсификувани. Сите исправни златници имаат иста маса и сите фалсификувани златници имаат иста маса, но малку се полесни од исправните. Како со помош на три мерења на вага без тегови може да се одделат 7 исправни златници?

Решение. Отстрануваме еден златник, а преостанатите златници ги делиме на две купчиња со по 31 златник во секое купче. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш отстранетиот златник е неисправен и на секој тас на вагата има по 3 неисправни златници. Ако едната група е потешка, тогаш во таа група има најмногу 3 неисправни златници.

Од купче со најмногу 3 неисправни златници (во случај на рамнотежа можеме да го земеме било кое купче) отстрануваме еден златник, а преостанатите ги делиме на две купчиња со по 15 златници. Да ги споредиме овие две купчиња. Ако вагата е во рамнотежа, отстранетиот златник е неисправен, а на секој тас на вагата има најмногу по еден неисправен златник. Ако едната група е потешка, тогаш во таа група има најмногу еден неисправен златник. Во секој случај имаме купче од 15 златници со најмногу 1 неисправен златник. Од ова купче земаме 1 златник и преостанатите златници ги делиме на две купчиња со по 7 златници и ги споредуваме на вагата. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш сите златници во двете купчиња се исправни, а ако не е во рамнотежа, тогаш се исправни оние 7 златници во потешкото купче.

45. Меѓу 2009 наизглед еднакви топчиња 1005 топчиња се со маса од по 10 грама, а 1004 топчиња се со маса од по 9,9 грама. Колку најмалку мерења на вага со два таса, без тегови, се потребни за да се одделат две множества топчиња со различни маси и со еднаков број топчиња?

Решение. Очигледно едно мерење не е доволно. Ќе докажеме дека

целта сигурно може да се постигне со две мерења. Топчињата ќе ги поделиме на три множества A, B и C така што во A и B се содржат по 1004 топчиња, а во C има едно топче. Ги споредуваме множествата A и B. Ако имаат различни маси, тогаш тоа се бараните множества, а ако имаа еднакви маси, тогаш секое множество содржи по 502 топчиња од 10 грапа и 502 топчиња од 9,9 грама (топчето C има 10 грама). Сега множеството A го делиме на две множества од по 502 топчиња и истите ги споредуваме. Ако масите им се различни, тогаш тоа се бараните множества, а ако имаат еднакви маси, тогаш секое од нив содржи по 251 топче од 10 грама и 251 топче од 9,9 грама. Било кое од овие две множества поделено на две множества со по 251 топче е решение на задачата.

46. На пазарот се појавле фалсификувани златници кои на изглед не се разликуваат од вистинските, но се незначително полесни. Златарот Златко добил 20 златници и сака да провери дали меѓу нив има фалсификувани. Дали може на вага без тегови, со најмногу 11 мерења, да го определи бројот на фалсификувани златници? (Можно е сите златници да се исправни, но не се сите фалсификувани.)

Решение. Прво на секој тас става по еден златник. Нека се тоа златниците a и b. Ако при првото мерење вагата не е во рамнотежа, тогаш наоѓаме еден фалсификуван златник (полесниот) и еден исправен (потешкиот). Во следните девет мерења, на едниот тас ги ставаме златниците a и b, а на другиот по два златника од преостанатите 18. При секое такво мерење можеме да констатираме колку меѓу двата златника на другиот тас има фалсификувани (0, 1 или 2). На тој начин го определуваме бројот на фалсификуваните златници по 10 мерења.

Ако при првото мерење вагата е во рамнотежа, заклучуваме дека или двата златника се исправни или двата се фалсификувани.Во следните мерења ги споредуваме масите на првите два златника (a и b) и парови од преостанатите златници се додека не се појави нерамнотежа.

Ако нерамнотежа воопшто несе појави, тогаш заклучуваме дека сите златници се исправни, бидејќи масите на сите се исти, а според претпоставката сите златници не се фалсификувани. Значи, и во овој случај се доволни 10 мерења.

Ако нерамнотежата прв пат се појави при споредување на масите на златниците a и b со масите на златнците c и d, тогаш во следното

мерење ги споредуваме златниците c и d.

Ако масите на златниците c и d се различни, тогаш едниот е исправен, а другиот е фалсификуван, па во натамошните мерења ги споредуваме овие два златника со паровите преостанати златници и наоѓаме колку во секој таков пар има фалсификувани златници. Покрај тоа, врз база на резултатот од претходните споредувања на златниците a и b со другите парови златници, заклучуваме колку меѓу нив имало фалсификувани. Значи, во овој случај имаме 11 мерења.

Ако масите на златниците c и d се еднакви, тогаш постојат две можности: златниците c и d се исправни, а сите златници кои учествувале во претходните мерења се фалсификувани, или златниците c и d се фалсификувани, а оние другите се исправни. Кој случај е во прашање заклучуваме врз основа на претходниот резултат од споредувањео на масите на парот a и b со парот c и d. Покрај тоа, врз основа на досегашните мерења можеме да определиме и колку меѓу досега разгледуваните златници се исправни, а колку се фалсификувани, како и да одделиме два златника e и f од кои едниот е исправен, а едниот е фалсификуван. Понатаму, продолжуваме да споредуваме нови парови златници со парот златници e и f. И во овој случај вкупниот број мерења е 11.

47. Јован има тегови со маси $1\,g, 2\,g, 3\,g, ..., 100\,g, 101\,g$, но го загубил тегот од $19\,g$. Дали Јован може преостанатите тегови да ги подели во две групи од по 50 тегови така што масите во двете групи ќе бидат еднакви?

Решение. Може. Во првата група ќе ги стави теговите од 18 и 20 грама, а во втората група ќе ги стави теговите од 17 и 21 грам. Имаме $18+20=17+21=38$. Сега преостанатите тегови ќе ги подели во две низи парови и тоа во првата низа се паровите $(1,16), (2,15), ..., (8,9)$ и во втората низа се паровите $(22,101), (23,100), (24,99), ..., (61,62)$. Конечно, доволно е во првата група да стави било кои 4 парови од првата низа и било кои 20 парови од втората низа, а преостанатите парови да ги стави во втората група.

На овој начин, во двете групи ќе имаме по $2+2\cdot 4+2\cdot 20=50$ тегови со вкупна маса: $38+4\cdot 17+20\cdot 123=2566\,g$.

48. Дали е можно теговите со маси: $1^2\ gr, 2^2\ gr, 3^2\ gr, ..., 81^2\ gr$ да се поделат во три групи од по 27 тегови така што збирот на масите во трите групи ќе биде еднаков?

Решение. Тегови со маси (во грамови) $n^2, (n+1)^2, ..., (n+8)^2$ може да се поделат на три групи од по три тега така што масите на двете групи се еднакви, а масата на третата група е за $18\,g$ помала од масата на првата (и втората) група. Последното следува од равенствата

$$n^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 = (n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+8)^2$$
$$= (n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 + 18.$$

Затоа 27 тегови со маси од n^2 до $(n+26)^2$ можеме да ги поделиме на 3 групи со по 9 тегови кои имаат еднакви маси:

$$A: \quad n^2, (n+5)^2, (n+7)^2, (n+11)^2, (n+13)^2,$$
$$(n+15)^2, (n+18)^2, (n+23)^2, (n+25)^2;$$
$$B: \quad (n+1)^2, (n+3)^2, (n+8)^2, (n+9)^2, (n+14)^2,$$
$$(n+16)^2, (n+20)^2, (n+22)^2, (n+24)^2;$$
$$C: \quad (n+2)^2, (n+4)^2, (n+6)^2, (n+10)^2, (n+12)^2,$$
$$(n+17)^2, (n+19)^2, (n+21)^2, (n+26)^2.$$

Понатаму, тврдењето лесно се покажува за секој број од видот $n = 27k$. Во нашиот случај $n = 81$ и $k = 3$.

49. Тројца браќа наследиле m златни прачки со маси $1, 2, ..., m$ грамови. Дали тие можат да ги поделат златните прачки на три купчиња со еднакви маси?

Решение. Задачата се сведува на тоа дали множеството $\{1, 2, ..., m\}$ може да се разбие на три подмножества така што збировите на елементите во сите три ќе бидат еднакви.

За да бројот $1 + 2 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$ е делив со 3, потребно е $3 \mid m$ или $3 \mid m+1$. Ќе докажеме дека ова е и доволен услов ако $m > 3$. За $m = 5$ тврдењето е јасно, бидејќи

$$5 = 1 + 4 = 3 + 2, \tag{1}$$

а за $m = 8$ имаме:

$$1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7. \tag{2}$$

Ќе користиме дека

$$n+n+5=n+1+n+4=n+2+n+3 \qquad (3)$$

и

$$n+n+5+n+7=n+1+n+3+n+8=n+2+n+4+n+6 \qquad (4)$$

Посебно ќе ги разгледаме случаите $m=6k, m=6k+3, m=6k+5$ и $m=6k+8$, за $k\geq 1$.

За $m=6k$, ги групираме броевите во груупи од по 6 последователни броеви и го применуваме (3).

За $m=6k+3$, првите 9 броеви ги делиме според (4), а преостанатите ги делиме во групи од по 6 последователни броеви и го применуваме (3).

За $m=6k+5$, првите 5 броја ги делиме според (1), преостанатите ги групираме во групи од 6 последователни броеви и го применуваме (3).

За $m=6k+8$ првите 8 броеви ги делиме според (2), преостанатите ги групираме во групи од 6 последователни броеви и го применуваме (3).

50. Горјан и Андреј пред себе имаат чинија со јаболка. Андреј избира едно јаболко, а потоа едно јаболко избира Горјан. Тие почнуваат да јадат истовремено. Јадат со иста брзина (изразена во грамови во секунда). Секој од нив кога ќе го изеде јаболкото зема ново јаболко (додека има). Кое јаболко прво треба да го земе Андреј за да изеде повеќе, ако масите на јаболката (во грамови) се:

а) 100, 200, 210, 300 и 310,

б) 201, 299, 400, 600 и 900?

Решение. а) Андреј прво треба да го земе јаболкото од 100 грама. Потоа било кое јаболко да земе Горјан, Андреј ќе изеде уште две јаболка. Значи, вкупно три. Притоа барем едно од двете најтешки јаболка ќе ги добие Андреј. Така Андреј ќе успее да изеде најмалку 600 грама јаболка.

Ако Андреј на почетокот се полакоми и го земе најтешкото јаболко, тогаш Горјан земјаќи го јаболкото од 100 грама, ќе изеде три јаболка, меѓу кои и една од двете најтешки. Тоа значи дека повеќе ќе изеде Горјан.

б) Андреј прво треба да го земе јабокот од 400 грама. Натамошното разгледување е како во случајот под а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

51. Дадени се 2009 парчиња сирење со различни маси. Дали може едно од

дадените парчиња сирење да се подели на два дела така што потоа сите парчиња сирење да се поделат во две групи со еднаква маса, така што во секоја група има еднаков број парчиња сирење.

Решение. Нека масите на дадените 2009 парчиња сирење се редоследно $m_1, m_2, ..., m_{2009}$ при што важи

$$m_1 \le m_2 \le m_3 \le ... \le m_{2008} \le m_{2009}.$$

Тогаш

$$M_1 = m_1 + m_3 + m_5 + ... + m_{2007} \le m_2 + m_4 + m_6 + ... + m_{2008} = M_2,$$

но и

$$M_1 + m_{2009} = m_1 + m_3 + ... + m_{2007} + m_{2009} > m_2 + m_4 + ... + m_{2008} = M_2.$$

Значи, $M_1 \le M_2$ и $M_1 + m_{2009} > M_2$. Според тоа, парчето сирење со маса m_{2009} треба да се подели на два дела со маси x и $m_{2009} - x$ така што $M_1 + x = M_2 + m_{2009} - x$, односно $x = \frac{M_2 + m_{2009} - M_1}{2}$. Тогаш секоја група ќе има маса $M_1 + \frac{M_2 + m_{2009} - M_1}{2} = \frac{M_2 + m_{2009} + M_1}{2}$ и во секоја група ќе има по 1005 парчиња сирење.

52. Болва скока долж права. Првиот скок е долг $1\,cm$, вториот $3\,cm$ во иста или спротивна насока, третиот $5\,cm$ во иста или спротивна насока итн секој следен е за $2\,cm$ подолг, а скокот може да биде во било која од двете насоки. Дали е можно болвата да се најде во почетната точка по 2016 скокови?

Решение. а) Должината на k – тиот скок изнесува $(2k-1)\,cm$. Вкупниот број скокови е делив со 4, а збирот на должините на првиот и последниот скок е еднаков збирот на должините на вториот и претпоследниот скок: $1 + 4031 = 3 + 4029$. Понатаму, $5 + 4027 = 7 + 4025$ итн. Така имаме:

$$A = 1 + 3 + ... + 1005 + 1007 + 3025 + 3027 + ... + 4029 + 4031$$
$$= 1009 + 1011 + ... + 2013 + 2015 + 2017 + 2019 + ... + 3021 + 3023.$$

Затоа за да болвата се врати во почетната положба доволно е првите 504 скока и последните 504 скока да се во една насока, а средните 1008 скока да се во спротивна насока.

53. Болва скока долж права. Првиот скок е со должина $1\,cm$, вториот со должина $3\,cm$, во иста или спротивна насока, третиот со должина

$5\,cm$ во иста или спротивна насока итн. секој следен скок е за $2\,cm$ подолг од претходниот, а скокот може да е во било која од двете насоки. Дали е можно болвата по 2014 скокови да се најде во почетната очка?

Решение. Вкупниот број скокови е од видот $4k+2$, т.е. $4\cdot 503+2$. Бидејќи $1+3+5-7+9-11=0$, болвата по првите 6 скока може да се најде во почетната точка. Сега и останувааат да направи уште $2008=4\cdot 502$ скокови. Сега применувајќи ја стратегијата од претходната задача, т.е. првите и последните 502 скока во една насока, а средни 1004 скока во спротивна насока, болвата може да се врати во почетната точка.

54. На колку начини мачка која се наоѓа во координатниот почеток на целобројна квадратна мрежа може да дојде до сирење кое е во точката $M(4,7)$, ако мачката се движи по линиите на решетката така што во секој момент е поблиску до сирењето отколку претходно?

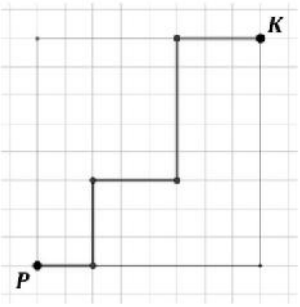
Решение. Очигледно бараното движење подразбира комбинации на движења десно и горе.

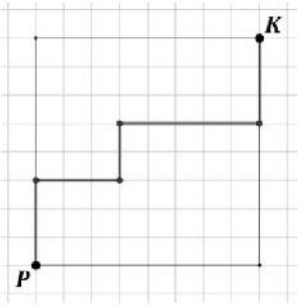
Во сите точки на x – оската од координатниот почеток може да се стигне само на еден начин – со одење десно. Во сите точки на y – оската од координатниот почеток може да се стигне само на еден начин со одење горе. Во точката $(1,1)$ може да се стигне на 2 начина (десно па горе или горе па десно). Јасно, во секој следен јазол на квадратната решетка може да се стигне на онолку начини колку што е збирот на начините на кои може да се стигне во јазлите кои непосредно лево и долу му претходат. Имајќи го предвид ова правило на цртежот десно последователно се пресметани броевите на начините на стугнувањата во секој од јазлите. Според тоа, мачката до сирењето може да стигне на 330 начини.

	1	8	36	120	330
7	1	7	28	84	210
6	1	6	21	56	126
5	1	5	15	35	70
4	1	4	10	20	35
3	1	3	6	10	15
2	1	2	3	4	5
1		1	1	1	1
	0	1	2	3	4

55. Во квадратна мрежа е нацртан квадрат со страна со должина 8.

Точките P и K се спротивни темиња на тој квадрат. Мравка се движи од точката P до точката K исклучиво одејќи горе и десно по страниците на единичните квадрати. На својот пат мравката прави точно четири промени на правецот. На долните цртежи се прикажани два можни примери на движењата на мравката од точката P до точката K. На колку различни начини мравката може да дојде од точката P до точката K на опишаниот начин?





Решение. Прво ќе ги определиме патиштата во кои првиот чекор е десно. Бидејќи патиштата во кои првиот чекор е горе се добиваат на симетричен начин, вкупниот број патишта го добиваме со множење на добиениот број со 2.

Нека x и y се должните на првиот и вториот чекор нагоре при што $x, y \in \mathbb{N}$. Должините на првиот вториот и третиот чекор десно да ги означиме со a,b,c, при што $a,b,c \in \mathbb{N}$. Имаме

$$x + y = 8,$$
$$a + b + c = 8.$$

Да го разгледаме бројот на подредените парови (x, y) и бројот на подредените тројки (a,b,c) со кои може да се опишат различните начини на кои мравката може да стигне од точката P до точката K. Подредени парови (x, y) за кои $x + y = 8$ се: $(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),$ $(5,3),(6,4),(7,1)$,т.е. имаме 7 парови.

Да ги испишеме сите решенија на $a + b + c = 8$. Имаме:

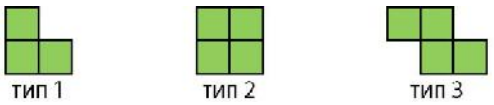
- Ако $a = 1$, тогаш имаме 6 подредени тројки и тоа: $(1,1,6),(1,2,5),$ $(1,3,4),(1,4,3),(1,5,2),(1,6,1)$.
- Ако $a = 2$, тогаш имаме 5 подредени тројки и тоа: $(2,1,5),(2,2,4)$, $(2,3,3),(2,4,2),(2,5,1)$.
- Ако $a = 3$, тогаш имаме 4 подреди тројки и тоа $(3,1,4),(3,2,3),$

$(3,3,2),(3,4,1)$.

- Ако $a=4$, тогаш имаме 3 подрдени тројки и тоа: $(4,1,3),(4,2,2),$ $(4,3,1)$.
- Ако $a=5$, тогаш имаме 2 подредени тројки и тоа: $(5,1,2),(5,2,1)$.
- Ако $a=6$, тогаш имаме 1 подредена тројка и тоа: $(6,1,1)$.

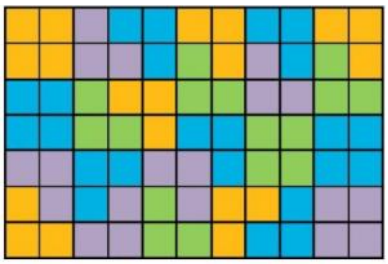
Според тоа, вакви подрдени тројки имаме: $6+5+4+3+2+1=21$.
Значи, бројот на различните патишта за кои мравката може да дојде од точката P до точката K, ако првиот чекор е десно е еднаков на $7\cdot 21=147$. Затоа, вкупниот број патишта е еднаков на $2\cdot 147=294$.

56. а) Докажи дека квадрат 2013×2013 може да се покрие со фигури од три типа:



б) Докажи дека во секое покривање учествуваат најмалку 4027 фигури од типот (1).

Решение. а) Квадратот 2013×2013 да го поделиме на 1003 хоризонтални ленти 2×2013 и една лента 7×2013. Секоја лента 2×2013 може да се покрие со фигури од типот (1), така што ќе се подели на 671 правоаголници 2×3 кои може да се покријата со две фигури од типот (1).



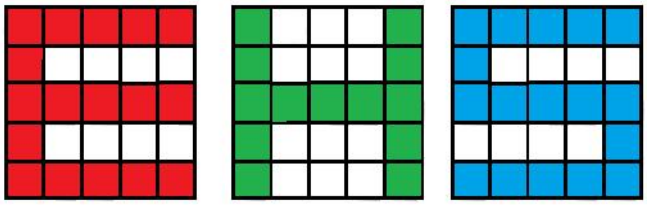
Лентата 7×2013 ќе ја поделиме на 183 правоаголници 7×11 и секој таков правоаголник може да се покрие со дадените фигури. Едно такво покривање е прикажано на долниот цртеж.

б) Ќе го разгледаме општиот случај. Нека треба да покриеме квадрат $(2n-1)\times(2n-1)$. Со ѕвездички да ги означиме полињата од видот $(2m-1,2k-1)$, за $m,k=1,2,...,n$. Бројот на означените полиња е n^2. Со x да го означиме бројот на фигурите од типот (1), а со y вкупниот број фигури од типот (2) и (3). Тогаш $3x+4y=(2n-1)^2$. Лесно се гледа дека секоја фигура содржи најмногу една ѕвездичка, па затоа $x+y\geq n^2$, односно $4x+4y\geq 4n^2$. Според тоа,

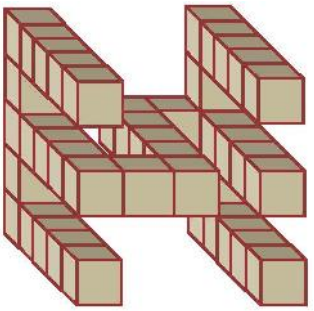
$$x=4x+4y-(3x+4y)\geq 4n^2-(2n-1)^2=4n-1.$$

Во нашиот случај $n = 1007$,па е $4n - 1 = 4027$.

57. Колку најмногу единечни коцки се потребни за да се состави тело чија слика од лево е буквата Е, од напред е буквата Н и од горе е буквата S (цртеж долу). (Коцките се лепат една до друга.)

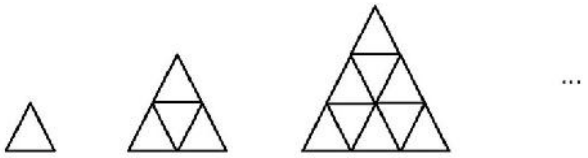


Решение. Соодветното тело еприкажано на цртежот десно. Од левата и од десната страна е буквата Е, која содржи $2 \cdot 17 = 34$ коцки, а меѓи овие делови има уште 7 коцки (за да се дополни горната слика до буквата S и предната до буквата Н). Тоа се вкупно 41 коцка. Ако ставиме само уште една коцка тоа ќе расипе најмалку една слика.



Забелешка. Сликите може да се добијат и со помалку коцки. На пример, на едната буква Е да се отстранат по 4 коцки од два хоризонтални реда, па сликите ќе се добијат со 33 коцки.

58. Костадин прави фигури од еднакви чкорчиња на следниот начин:



На цртежот се прикажани фигури со еден, два и три „ката“. Колку чкорчиња се потребни за да се направи фигурата која ќе има 40 „катови“?

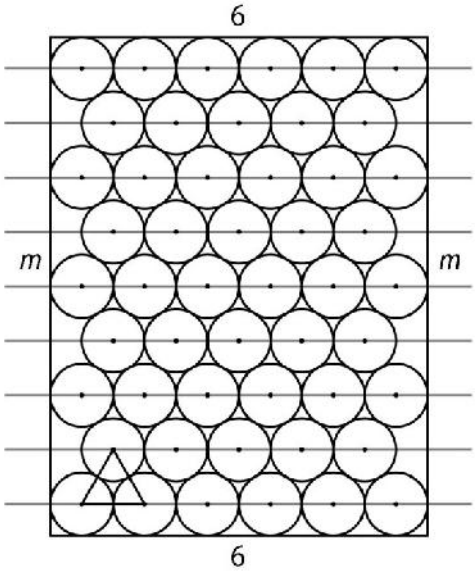
Решение. Фигурата со еден кат има $1 \cdot 3$ чкорчиња. Фигурата со два ката се добива кога на фигурата со еден кат се додадат 2 триаголника, односно $2 \cdot 3$ чкорчиња, па таа има $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = (1 + 2) \cdot 3$ чкорчиња. Фигурата со три ката се добива кога на фигурата со два ката се додадат $3 \cdot 3$ чкорчиња, па таа има $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = (1 + 2 + 3) \cdot 3$ чкорчиња. Според тоа, фигурата со n катови се добива кога на фигурата со

$n-1$ катови се додадат $3n$ чкорчиња. Оттука следува дека за правење на фигура со 40 катови на Костадин му се потребни

$$1\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot 3+\ldots+39\cdot 3+40\cdot 3=(1+2+3+\ldots+39+40)\cdot 3$$
$$=\frac{40\cdot 41}{2}\cdot 3=2460 \text{ чкорчиња.}$$

59. Лесно се гледа дека во правоагоник 6×8 може да се сместат 48 кругови со дијаметар 1 кои нема да се препокриваат. Дали може во правоаголник 8×6 да се сместат 50 кругови со дијаметар 1 кои нема да се препокриваат? Круговите може да се допираат и може да ги допираат страните на правоаголникот.

Решение. Да ставиме прв ред од 6 кругови кои ја допираат помалата страна на правоаголникот. Потоа да ставиме ред од 5 кругови така што секој од нив допира два соседни круга од првиот ред (види цртеж). Потоа продолжуваме да ставаме наизменично редови од 6 и 5 кругови. На тој начин добиваме 9 реда – пет со по 6 круга и четири со по 5 круга, односно 50 кругови.



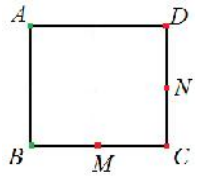
Центрите на три круга кои меѓусебно се допираат формираат рамностран триаголник со страна 1. Висината на тој триаголник е $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, растојанието меѓу најгорната и најдолната хоризонтална тангента на поставените кругови е $1+8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+4\sqrt{3}$. Оттука следува дека во правоаголник $(1+4\sqrt{3})\times 6$ може да се постават 50 кругови со дијаметар 1. Но, $1+4\sqrt{3}<1+4\cdot 1{,}74<8$, па затоа и бараниот распоред е можен.

60. Секоја точка во внатрешност и секоја точка на страните на единичниот квадрат се обоени во една од две бои. Докажи дека постојат две точки обоени со иста боја меѓу кои растојанието е поголемо или

еднакво на $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Нека $ABCD$ е единичниот квадрат, а боите нека се црвена и сина. Да ги разгледаме боите на точките на границата на квадратот. Спротивните темиња на квадратот мора да се обоени во различни бои (во спротивно доказот е завршен).

Да забележиме дека отсечките определени со едно теме на квадратот и средините на страните на квадратот кли не го содржат тоа теме се долги точно $\frac{\sqrt{5}}{2}$, па затоа нивните крајни точки мора да се обоени со различни бои.



Нека M и N се средините на страните BC и CD, и нека без ограничување на општоста темето A е сино. Од претходните разгледувања следува дека темето C мора да е црвено (заради дијагоналата AC), како и точките M и N (заради отсечките AM и AN). Понатаму, темето B мора да е сино (заради отсечката BN), па темето D мора да е црвено (заради дијагоналата BD). Сега двете крајни точки на отсечката DM се црвени и тие се на растојание $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (види цртеж).

61. На шест картички се напишани цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, на секоја по една цифра. Миле и Раде земаат наизменично по една картичка. Победник е тој што прв од своите картички ќе состави број кој е делив со 31. Миле почнува прв. Кој играч има победничка стратегија?

Решение. Бројот кој секој играч може да го состави има најмногу три цифри. Да ги изпишиме сите броеви кои се деливи со 31 и се помали од 700 (бидејќи преостанатите трицифрени броеви содржат цифри поголеми од 6). Да ги прецртаме оние броеви кои ги содржат цифрите 0, 7, 8 и 9, како и оние кај кои имаме повторување на цифрите. Ни пресотануваат броевите: 31, 62, 124, 341, 465 и 651. Миле може да победи играјќи на следниов начин: прво ја зема картичката со број 6. Ако Раде потоа не ја земе картичката со број 2, во следниот потег Миле ја зема оваа картичка и победува. Значи, Раде мора да ја земе картичката со број 2. Во вториот потег Миле ја зема картичката со број 5. На Раде му остануваат картичките со броевите 1, 4 и 3, па затоа било која картичка да ја земе останува една од картичките 1 или 4, по што Миле ја зема таа картичка и го формира едниот од броевите 465

или 651, со што победува.

62. На седум картички се испишани цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 6 (на секоја по една цифра). Миле и Раде наизменично земаат по една картичка. Победник е играчот кој прв со земените картички ќе состави број кој е делив со 17. Миле почнува прв. Кој играч има победничка стратегија?
Решение. Нека Миле ја земе картичката на која е запишан бројот 3. Ако Раде потоа не го земе бројот 4, Миле во вториот потез ќе го земе и ќе го состави бројот 34. Значи, Раде го зема бројот 4. Тогаш Миле во вториот потез го зема бројот 6. Сега, без разлика што ќе земе Раде, Миле во третиот потез може да состави еден од броевите 136 или 306 (барем една од цифрите 0 и 1 ќе остане) по потегот на Раде. Значи, Миле има победничка стратегија.

63. На 2015 картички се запишани броевите од 1 до 2015, на секоја картичка по еден број. Картичките се наредени во низа, во произволен редослед. Дозволено е две картички да ги заменат местата ако бројот запишан на едната картичка е делив со бројот запишан на другата картичка. Докажи дека со повеќекратна примена на дозволената операција картичките може да се наредат во растечки редослед.
Решение. *Прв начин*. Картичката со бројот 1 може да го замени местото со било која картичка. Затоа со трите операции

$$1 \leftrightarrow m,\ n \leftrightarrow 1,\ m \leftrightarrow 1$$

може да се заменат местата на било кои две картички. Меѓу картичките кои не се на своите места, ја наоѓаме картичката со најголем број. Во еден чекор, со примена на горната низа операции, истата ја поставуваме на нејзиното место. Сега е јасно дека целта може да се постигне со повторување на постапката, која завршува по конечен број чекори. Навистина, со секој чекор најмалку за еден се намалува бројот на картичките кои не се на своето место, а картичките кои се веќе на своето место, совен картичката со број 1 веќе не учествуваат во постапката.
Втор начин. Прво картичката со 1 ја заменуваме со картичката на последното место, ако на тоа место не е картичката со број 2015, а потоа картичката со број 1 ја заменуваме со картичката со број 2015. Така картичката со број 2015 ја доведуваме на последното место. Сега, на ист начин картичката со број 2014 ја доведуваме на претпоследното место итн. Постапката се продолжува и притоа со секои два

пшотези неподредениот дел од низата карички се намалува за 1. Ниту оваа посапка не е најекономична, но обезбедува преуредување со најмногу 4029 замени.

64. Тргнувајќи од даден природен број, секоја секунда се додава 54 или 77. Докажи дека по извесно време ќе се добие број чии последни две цифри се еднакви.

Решение. Во темињата на 100-аголник во насоката на движењето на стрелките на часовникот да ги распоредиме остатоците при делењето на броевите

$$00, 77, 77+77, 77+77+77, ..., 99\cdot 77$$

со 100 во овој редослед. Бидејќи 77 и 100 се заемно прости броеви, сите остатоци ќе бидат различни. Понатаму, бидејќи $77+77\equiv 54 \pmod{100}$, добиваме дека случајот на додавање на 54 се сведува на две додавања на 77. Според тоа, додавањето на бројот 77, односно 54, значи премин од едно теме во првото следно, односно во второто за случај 54, во насока на движењето на стрелката на часовникот. Јасно, движејќи се на овој начин не можеме да го прескокнеме парот последователни темиња означени со 00 и 77.

65. Двајца играчи ја играат следнава игра. Првиот кажува произволен природен број, вториот на тој број му додава 54 или 77 и го кажува добиениот збир. Во продолжение играчите наизменично додаваат еден од броевите 54 и 77 и го кажуваат збирот на пој број со претходниот збир. Вториот победува ако било кој од играчите каже број чиј остаток при делење со 100 е прост број. Дали може првиот играч да го оневозможи вториот да победи?

Решение. Не. Како во претходната задача, да ги испишеме остатоците при делење со 100 во темињата на правилен 100-аголник во следниот редослед:

$$\begin{aligned} &00, 77, \\ &77+77\equiv 54 \pmod{100}, \\ &77+77+77\equiv 31 \pmod{100}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &99\cdot 77\equiv 23 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Сите остатоци се различни, па кога ќе се појави остатокот 2, следниот остаток е 79. Значи, во оваа низа остатоци еден по друг се појавуваат

два прости броја 2 и 79. Според тоа, како и да играат играчите, еден од нив ќе мора да изговори број чиј остаток при делење со 100 е еднаков на 2 или 79 (доколку пред тоа некој од нив не изговорил број чиј остаток при делење со 100 е некој друг прост број).

5. ГЕОМЕТРИЈА

5.1. ПЛАНИМЕТРИЈА

1. На правата p се дадени точките A и B и 2005 точки $C_1, C_2, ..., C_{2005}$ кои не припаѓаат на отсечката AB. Нека S_A и S_B се збировите на растојанијата на точките A и B до точките $C_1, C_2, ..., C_{2005}$. Докажи дека не постои распоред на точките $C_1, C_2, ..., C_{2005}$ за кој $S_A = S_B$.

   Решение. Нека $\overline{AB} = a$. Нека на правата p се дадени точките во следниот редослед $C_1, C_2, ..., C_k, A, B, C_{k+1}, ..., C_{2005}$. Ако растојанијата на точките $C_1, C_2, ..., C_k$ до точката A се редоследно $x_1, x_2, ..., x_k$, а растојанијата на точките $C_{k+1}, ..., C_{2004}, C_{2005}$ до точката B се редоследно $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{2005}$, тогаш

   $$\begin{aligned} S_A &= x_1 + x_2 + ... + x_k + a + x_{k+1} + a + x_{k+2} + ... + a + x_{2005} \\ &= x_1 + x_2 + ... + x_{2005} + (2005 - k)a \end{aligned}$$

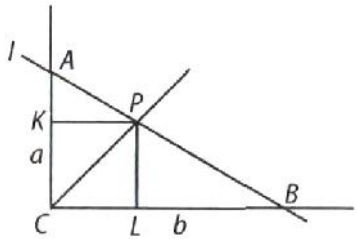
   и

   $$\begin{aligned} S_B &= a + x_1 + a + x_2 + ... + a + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + ... + x_{2005} \\ &= x_1 + x_2 + ... + x_{2005} + ka. \end{aligned}$$

   Значи, $S_A = S_B$, ако $(2005 - k)a = ka$, од каде добиваме $2k = 2005$, што не е можно бидејќи 2005 е непарен број.

2. На симетралата на правиот агол е избрана точка P. Низ точката е повлечена права l која на краците на аголот отсекува отсечки со должини a и b. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависи од изборот на правата l.

   Решение. Нека C е теме на правиот агол, а A и B се пресечните точки на правата l со неговите краци. Нека $\overline{AC} = a, \overline{BC} = b$ и нека K и L се соодветно подножјата на нормалите повлечени од P на AC и BC.



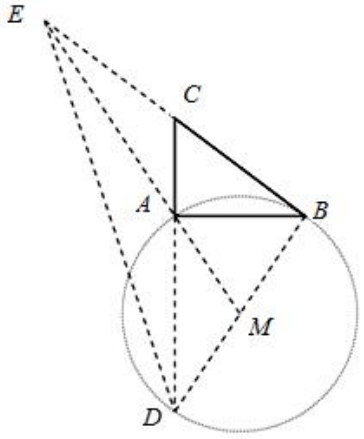
Тогаш триаголниците AKP и PLB се слични, па затоа важи $\frac{\overline{AK}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{PL}}{\overline{LB}}$, односно $\frac{a-h}{h} = \frac{h}{b-h}$, каде $h = \overline{PK} = \overline{PL}$. Според тоа, $(a-h)(b-h) = h^2$, од каде добиваме $ab = ah + bh$, односно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{h}$, па дадениот збир не зависи од изборот на правата l.

3. Даден е $\triangle ABC$. На правата AC е избрана точка D таква што $\overline{CD} = 3\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е избрана точка E, различна од B, таква што $\overline{CE} = \overline{BC}$. Ако $\overline{BD} = \overline{AE}$, докажи дека $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

Решение. Точката C е средина на BE, па затоа во $\triangle BED$ отсечката DC е тежишна линија и како по услов $\overline{CD} = 3\overline{CA}$, заклучуваме дека A е тежиште на $\triangle BED$. Нека $M = BD \cap AE$. Тогаш EM е тежишна линија во $\triangle BED$, па затоа M е средина на отсечката BD. Имаме

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AE}}{2} = \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{BM} = \overline{DM},$$

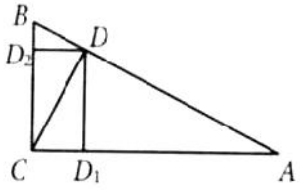
што значи дека M е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$.



Според тоа, $\measuredangle BAD = 90^\circ$, како периферен агол над дијаметар, па затоа $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

4. Точката D е подножје на висината повлечена од темето C на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC. Ако $\overline{AD} = 8\,cm$, $\overline{AC} = 4\sqrt{5}\,cm$, определи го односот на растојанијата од точката D до страните AC и BC.

Решение. Нека D_1 и D_2 се подножјата на нормалите повлечени од точката D кон катетите AC и BC (види цртеж). Од правоаголниот триаголник ACD

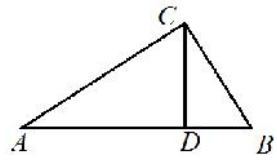


следува $\overline{CD} = 4\,cm$. Понатаму, бидејќи $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$, добиваме $4^2 = 8 \cdot \overline{BD}$, т.е. $\overline{BD} = 2\,cm$. Сега, од правоаголниот триаголник BCD следува $\overline{BC} = 2\sqrt{5}\,cm$. Бидејќи бараните растојанија од точката D до страните AC и BC се соодветните висини DD_1 и DD_2 на сличните триаголници ADC и CDB, заклучуваме дека

$$\overline{DD_1} : \overline{DD_2} = \overline{AC} : \overline{BC} = 2:1.$$

5. Точката D е подножје на висината повлечена од темето C кон хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC. Ако $\overline{AD} = 8\,cm$ и $\overline{DB} = 2\,cm$, определи ја должината на висината CD.

Решение. Триаголниците ADC и CDB се правоаголни и имаат по еден заеднички остар агол со правоаголниот триаголник ABC. Оттука следува $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ и $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, па затоа $\triangle ACD \sim \triangle CBD$. Од оваа сличност имаме

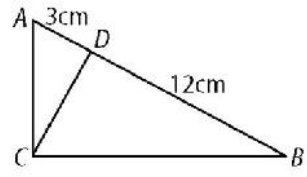


$$\overline{AD} : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{DB},$$

односно $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{DB}} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4\,cm$.

6. Висината над хипотенузата ја дели хипотенузата на отсечки со должини $12\,cm$ и $3\,cm$. Пресметај ги плоштината и периметарот на триаголникот.

Решение. Нека триаголникот е ABC со прав агол во темето C, CD е висината над хипотенузата, $\overline{AD} = 3\,cm$ и $\overline{BD} = 12\,cm$ (цртеж десно). Триаголниците CDA и BDC се слични, па затоа



$$\overline{CD} : \overline{AD} = \overline{BD} : \overline{CD},$$

од каде добиваме $\overline{CD} = 6\,cm$. Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците CDA и BDC добиваме $\overline{AC} = 3\sqrt{5}\,cm$ и $\overline{BC} = 6\sqrt{5}\,cm$. Според тоа,

$$P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = 45\,cm^2, \quad L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 3(5 + 3\sqrt{5})\,cm.$$

7. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C. Точките D и E се соодветно пресекот на висината и пресекот на симетралата на внатрешниот агол во темето C со хипотенузата AB. Нека $AD = q, BD = p$ и $AE = n, BE = m$. Докажи дека:

а) $a : b = m : n$ б) $p : q = m^2 : n^2$.

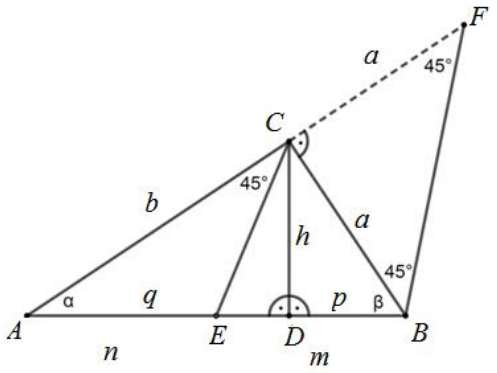
Решение. а) Имаме

$\triangle AEC \sim \triangle ABF \Rightarrow$

$(m+n) : n = (a+b) : b \Rightarrow$

$m : n + 1 = a : b + 1 \Rightarrow$

$a : b = m : n.$



б) Имаме:

$\triangle CDB \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$p : a = a : c \quad \Rightarrow \quad p = \frac{a^2}{c}$,

$\triangle ADC \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$q : b = b : c \quad \Rightarrow \quad q = \frac{b^2}{c}.$

Добиваме, $p : q = \frac{a^2}{c} : \frac{b^2}{c} \quad \Rightarrow \quad p : q = a^2 : b^2$.

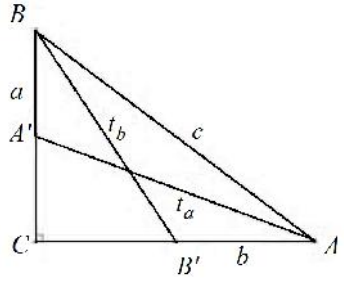
8. Ако тежишните линии на правоаголен триаголник може да се страни на правоаголен триаголник, тогаш должината на барем една катета на дадениот триаголник е ирационален број. Докажи!

Решение. Имаме:

$t_a^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2, t_b^2 = a^2 + (\frac{b}{2})^2, t_c = \frac{c}{2}$

Од

$$t_c^2 = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4} = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2$$



следува дека t_c е помала и од t_a и од t_b. Нека со тежишните линии на дадениот триаголник може да се формира правоаголен триаголник. Тогаш една од нив е најголема, т.е. е хипотенуза, а тоа може да е t_a или t_b. Без губење на општоста, нека е тоа t_b. Тогаш според Питагоровата теорема важи: $t_b^2 = t_a^2 + t_c^2$. Оттука и од горните равенства следува

$$a^2+(\tfrac{b}{2})^2=b^2+(\tfrac{a}{2})^2+\tfrac{c^2}{4}\text{, т.е. } 3a^2=3b^2+c^2.$$

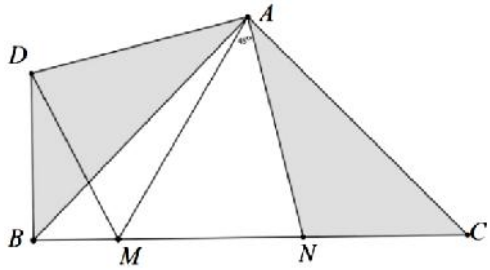
Но, $a^2+b^2=c^2$, и со замена во последното равенство добиваме $a^2=2b^2$, т.е. $a=b\sqrt{2}$. Ако b е ирационален број, доказот е завршен. Ако b е рационален број, тогаш a е ирационален број и доказот е завршен.

9. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен и M и N се две точки од хипотенузата BC, такви што $\measuredangle MAN=45^\circ$ и $M\in BN$. Докажи дека

$$\overline{BM}^2+\overline{CN}^2=\overline{MN}^2.$$

Решение. Над страната AB, надвор од $\triangle ABC$, конструираме $\triangle ABD$ складен со $\triangle ACN$, таков што $\overline{BD}=\overline{NC}$ и $\overline{AD}=\overline{AN}$. Тогаш,

$$\measuredangle MBD=\measuredangle MBA+\measuredangle ABD=\measuredangle ABM+\measuredangle ACN=\measuredangle ABC+\measuredangle BCA=90^\circ.$$



Уште повеќе,

$$\measuredangle DAM=\measuredangle DAB+\measuredangle BAM=\measuredangle NAC+\measuredangle BAM$$
$$=\measuredangle BAC-\measuredangle MAN=90^\circ-45^\circ=45^\circ=\measuredangle MAN.$$

Бидејќи $\overline{DA}=\overline{AN}$ и AM е заедничка страна, триаголниците DAM и MAN се складни (САС). Заклучуваме дека $\overline{DM}=\overline{MN}$. Сега ја применуваме Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник MBD и добиваме

$$\overline{MN}^2=\overline{DM}^2=\overline{BM}^2+\overline{BD}^2=\overline{BM}^2+\overline{CN}^2$$

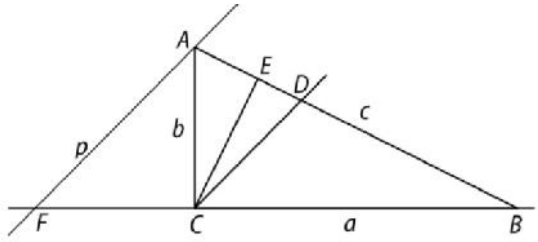
што требаше да се докаже.

10. Даден е правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle ACB=90^\circ$. Симетралата CD на правиот агол ја дели хипотенузата AB во однос $\overline{AD}:\overline{DB}=1:2$. Определи го односот во кој висината ја дели хипотенузата.

Решение. Нека $\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$. Низ точката A повлекуваме

права p која е паралелна на CD. Нека F е пресечната точка на правите p и BC (види цртеж). Триаголникот ACF е рамнокрак, бидејќи

$$\measuredangle AFB = \measuredangle BCD = \frac{1}{2}\measuredangle ACB \text{ и } \measuredangle ACF = \measuredangle ACD = \frac{1}{2}\measuredangle ACB,$$



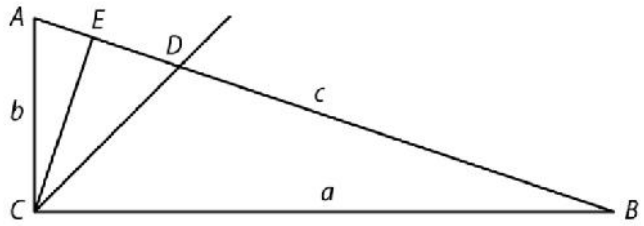
па важи $\overline{CF} = \overline{AC} = b$. Од Талесовата теорема следува

$$\overline{BD} : \overline{DA} = \overline{BC} : \overline{CF}, \text{ т.е. } \overline{BD} : \overline{DA} = a : b$$

(теорема за симетралата на внатрешен агол на триаголник). Триаголниците ACE и ABC, односно BCE и BAC, се слични. Според тоа, $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ и $\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{BE} : \overline{BC}$, односно $b : c = \overline{AE} : b$ и $a : c = \overline{BE} : a$, што значи $b^2 = c \cdot \overline{AE}$ и $a^2 = c \cdot \overline{BE}$ (Евклидовите теореми за правоаголен триаголник). Од последните две равенства следува $b^2 : a^2 = \overline{AE} : \overline{BE}$, па како $b : a = 1 : 2$, добиваме $\overline{AE} : \overline{BE} = 1 : 4$.

11. Симетралата CD на правиот агол во правоаголниот триаголник ја дели хипотенузата AB во однос $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 3$. Нека E е подножјето на висината повлечена од темето C. Определи го односот $\overline{CE} : \overline{AB}$.

Решение. Да означиме $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$ и $\overline{CE} = h$. Од теоремата за симетралата на внатрешниот агол следува $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{BC}$, т.е. $1 : 3 = a : b$ (види цртеж).

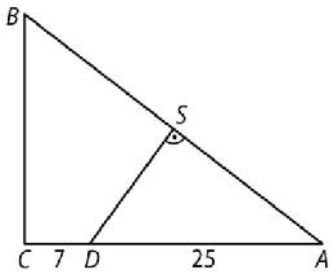


Според тоа, $a = 3b$. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот ABC добиваме $c^2 = (3b)^2 + b^2$, па затоа $c = b\sqrt{10}$. Но, $ab = ch$, $a = 3b$ и $c = b\sqrt{10}$, па затоа $3b \cdot b = b\sqrt{10} \cdot h$, т.е. $h = \frac{3b}{\sqrt{10}}$. Конечно,

$\overline{CE} : \overline{AB} = \frac{3b}{\sqrt{10}} : b\sqrt{10} = 3:10$.

12. Од средината S на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е подигната нормала која катетата AC ја сече во точката D. Ако $\overline{AD} = 25\,cm$ и $\overline{CD} = 7\,cm$, пресметај ја должината на отсечката DS.

Решение. Бидејќи правата DS е симетрала на отсечката AB заклучуваме дека $\overline{BD} = \overline{AD} = 25\,cm$. Сега, од Питагоровата теорема применета на правоаголните триаголници BCD и ABC добиваме



$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ и

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$.

За плоштината на триаголникот ABD имаме $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DS}}{2} = P = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{2}$, па затоа $\overline{DS} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{25\cdot 24}{40} = 15\,cm$.

13. Хипотенузата на правоаголниот триаголник е $25\,cm$, а разликата на катетите е $17\,cm$. Определи ја плоштината на тој триаголник.

Решение. Според условот на задачата имаме $a - b = 17$ и $c = 25$, па затоа $a^2 - 2ab + b^2 = 17^2$ и $c^2 = 25^2$. Сега, од Питагоровата теорема имаме $a^2 + b^2 = c^2$, па затоа $25^2 - 2ab = 17^2$, односно $2ab = 336$. Според тоа, плоштината на триаголникот е $P = \frac{ab}{2} = 84\,cm^2$.

14. Должината на хипотенузата на правоаголниот триголник е $41\,cm$, а збирот на должините на неговите катети е $49\,cm$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Од $a + b = 49$ и $c = 41$, добиваме

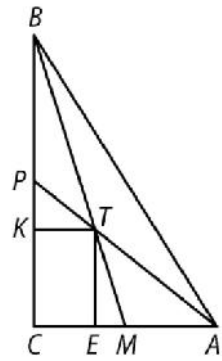
$$a^2 + 2ab + b^2 = 49^2 \text{ и } c^2 = 41^2.$$

Бидејќи $c^2 = a^2 + b^2$, од горните рабенства наоѓаме $41^2 + 2ab = 49^2$,

односно $ab = 360$. Конечно, $P = \frac{ab}{2} = 180\,cm^2$.

15. Даден е правоаголен триаголник ABC. Точките P и M се редослед-но средини на катетите BC и AC.Определи ги растојанијата на пресечната точка на отсечките AP и BM до катетите на триаголникот ABC ако $\overline{AP} = 5\,cm$ и $\overline{BM} = \sqrt{40}\,cm$.

Решение. Отсечките AP и BM се тежишни линии, па нивната пресечна точка T е тежиште на триаголникот ABC (цртеж десно). Од правоаголните триаголници APC и BMC, со примена на Питагоровата теорема добиваме



$$\overline{AC}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2,\ \overline{BC}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{BM}^2,$$

односно $b^2 + \frac{a^2}{4} = 5^2, a^2 + \frac{b^2}{4} = \sqrt{40}^2$. Ако ги собереме последните две равенства, по средувањето добиваме $5a^2 + 5b^2 = 260$, од каде следува $a^2 + b^2 = 52$, односно $c^2 = 52$, па затоа $c = \sqrt{52}\,cm$. Понатаму, од $b^2 + \frac{a^2}{4} = 5^2$, добиваме $4b^2 + a^2 = 100$, па затоа $3b^2 + c^2 = 100$, односно $3b^2 = 48$, што значи $b = 4\,cm$. Конечно, $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{52 - 16} = 6\,cm$.

Нека K и E се подножјата на нормалите повлечени од тежиштето T на катетите BC и AC. Тогаш триаголниците APC и ATE се слични, па затоа $\overline{PC} : \overline{TE} = \overline{PA} : \overline{TA}$, од каде бидејќи T е тежиште добиваме $3 : \overline{TE} = 3 : 2$, односно $\overline{TE} = 2\,cm$. Слично, триаголниците BMC и BTK се слични, па затоа $\overline{MC} : \overline{TK} = \overline{BM} : \overline{BT}$, од каде бидејќи T е тежиште добиваме $2 : \overline{TK} = 3 : 2$, односно $\overline{TK} = \frac{4}{3}\,cm$.

16. Од четири стапа со должина 1 составен е правоаголен триаголник и притоа само еден стап е скршен на два дела.Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Нека еден стап е скршен на два дела со должини x и $1 - x$. Не може да е $x = \frac{1}{2}$ бидејќи во тој случај би имале рамнокрак триаголник со страни $1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$, кој не е правоаголен. Без ограничување на

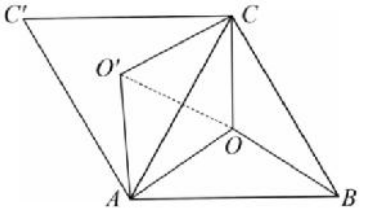
општоста можеме да земеме дека $x<\frac{1}{2}$. Хипотенузата не може да е составена само од цели стапови (должината 1 е премала, а должината 2 е преголема). Затоа должината на хипотенузата е $2-x$, а должините на катетите се 1 и $1+x$. Од Питагоровата теорема следува

$$1+(1+x)^2=(2-x)^2,$$

од каде добиваме $x=\frac{1}{3}$. Значи, катетите се со должини 1 и $\frac{4}{3}$, па затоа плоштината на триаголникот е $\frac{2}{3}$.

17. Нека O е точка во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC таква што $\angle AOB=113^\circ$ и $\angle BOC=123^\circ$. Определи ги аглите на триаголникот со страни OA, OB и OC.

Решение. Нека C' е точка таква што ACC' е рамностран триаголник (различен од ABC) и O' е точка во внатрешноста на триаголникот ACC' таква што триаголникот ACO' е складен со триаголникот ABO. Триаголникот AOO' е рамностран, па затоа $\overline{OO'}=\overline{AO}$ и како $\overline{CO'}=\overline{BO}$, добиваме дека страните на триаголникот $OO'C$ се редоследно еднакви на должините на отсечките AO, BO, CO. Според тоа,

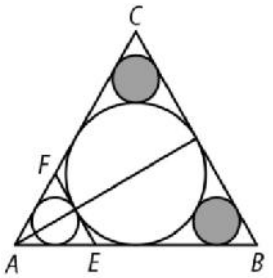


$$\angle OO'C=\angle AOC-60^\circ=63^\circ,\ \angle O'OC=\angle AOB-60^\circ=53^\circ,$$

па затоа $\angle OCO'=180^\circ-(63^\circ+53^\circ)=54^\circ$.

18. Во рамностран триаголник е впишана кружница k. Потоа се впишани кружници кои допираат по две страни на триаголникот и кружицата k. Определи го односот на плоштините на кругот k и збирот на плоштините на трите мали кругови.

Решение. Од осната симетричност на триаголникот ABC и кругот k следува дека трите мали кругови се складни. Да го разгледаме малиот круг кој ги допира AB, AC и кругот k. Нека пресеците на заедничката тангента на големата и малата кружница и страните AB и AC се точ-

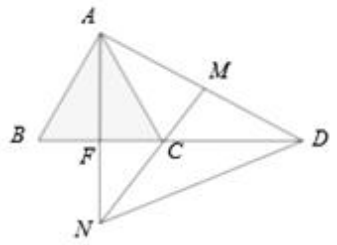


ките E и F, соодветно. Триаголниците ABC и AEF се слични со коефициент на сличност $3:1$. Според тоа и соодветните елементи, а со тоа и радиусите на впишаните кружници во овие два триаголници, се однесуваат како $3:1$. Затоа нивните плоштини се однесуваат како $9:1$ и како имаме три мали кругови, добиваме дека односот на плоштините на кругот k и збирот на плоштините на трите мали кругови е $3:1$.

19. Даден е рамностран триаголник ABC. Нормалата кон страната AB спуштена од темето A ја сече правата BC во точка D. Нека M е средна точка на отсечката AD, со N ќе ја означиме пресечната точка на правата MC со симетралата на аголот $\measuredangle BAC$. Докажи дека $AC \perp DN$

Решение. Сите агли во триаголникот ABC се еднакви на 60°. Триаголникот DAB е правоаголен и, бидејќи аголот кај темето B е 60°, следува дека

$$\measuredangle ADB = 30^\circ \qquad (1)$$



Од друга страна

$$\measuredangle DAB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle BAC = 60^\circ,$$

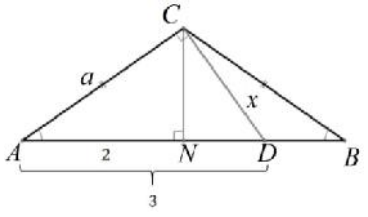
па следува Дека

$$\measuredangle CAD = 30^\circ \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\triangle ACD$ е рамнокрак и, бидејќи MC е тежишна линија на $\triangle ACD$, MC е и висина на $\triangle ACD$. Триаголникот ABC е рамностран, AF е симетрала на $\measuredangle BAC$, па следува дека AF е висина во триаголникот ABC. Според претходното, имаме дека во $\triangle AND$, отсечките NM и DF се висини со ортоцентар во точката C. Висината спуштена од темето A минува низ ортоцентарот C, па следува дека $AC \perp DN$.

20. Даден е тапоаголен рамнокрак триаголник ABC со основа AB со должина 4. Нормалата на AC во точката C ја сече основата AB во точка D. Ако $\overline{AD} = 3$, определи ја должината на отсечката CD.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $\measuredangle DAC = \measuredangle NAC$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle CNA$ триаголниците ADC и ANC се слични. Од оваа сличност следува

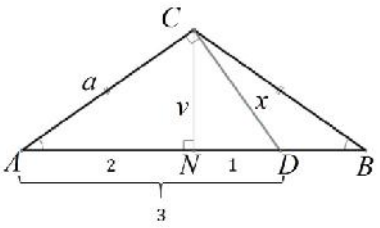


$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}}, \text{ т.е. } \frac{3}{a} = \frac{a}{2},$$

од каде доби-ваме $a^2 = 2$. Сега, од Питагоровата теорема применета на триаголникот ADC добиваме $3^2 = a^2 + x^2$, од каде следува $x^2 = 9 - 6$, односно $x = \sqrt{3}$.

Втор начин. Од Питагоровата теорема применета на триаголниците ANC, CND и ADC следува:

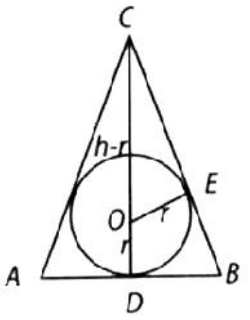
$$a^2 = 2^2 + v^2,$$
$$x^2 = v^2 + 1^2,$$
$$3^2 = x^2 + a^2.$$



Ако од првата равенка ја одземеме втората и потоа добиената равенка ја собереме со третата, ја добиваме равенката $2x^2 = 6$, од каде добиваме $x^2 = 3$, односно $x = \sqrt{3}$.

21. Во рамнокрак триаголник ABC е впишана кружница. Ако должината на основата на триаголникот е $12\,cm$, а должината на висината повлечена кон оновата е $8\,cm$, пресметај ја плоштината на оној дел од триаголникот кој е надвор од кружницата.

Решение. Од Питагоровата теорема следува $b^2 = (\frac{a}{2})^2 + h^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, т.е. $b = 10\,cm$.



Триаголниците BCD и OCE се правоаголни со заеднички остар агол, па затоа тие се слични. Од сличноста следува

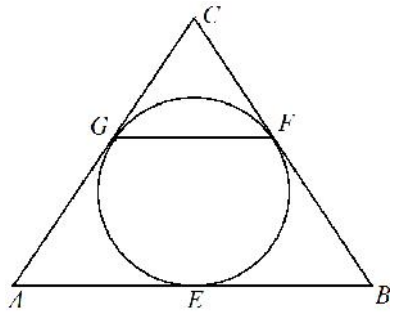
$$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{OC} : \overline{OE}, \text{ т.е. } b : \frac{a}{2} = (h - r) : r,$$

каде r е радиусот на впишаната кружница. Значи, $10 : 6 = (8 - r) : r$, од каде добиваме $10r = 48 - 6r$, т.е. $r = 3\,cm$. За бараната плоштина добиваме:

$$P = P_t - P_k = \frac{ab}{2} - ® r^2 = 48 - 9® = 3(16 - 3®)\,cm^2.$$

22. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB, BC, Ca редоследно во точките E, F, G. Ако $GF \parallel AB$, тогаш E е средина на страната AB. Докажи!

Решение. Од $GF \parallel AB$ следува дека $\triangle GFC \sim \triangle ABC$ (направи цртеж). Тангентните отсечки повлечени кон кружница се еднакви, па затоа $\overline{CG} = \overline{CF}$ и како $\triangle GFC \sim \triangle ABC$, добиваме $\overline{AC} = \overline{BC}$. Според тоа, $\overline{AC} - \overline{CG} = \overline{BC} - \overline{CF}$, па затоа $\overline{AG} = \overline{BF}$. Но, $\overline{AG} = \overline{AE}$ и $\overline{BF} = \overline{EB}$, од што следува тврдењето на задачата.

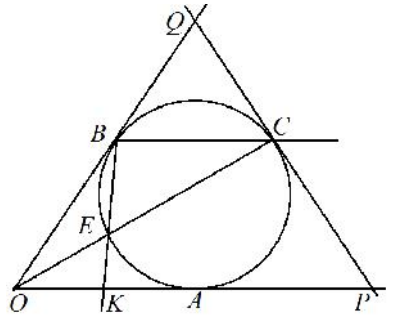


23. Даден е агол со теме O и кружница која ги допира краците на тој агол во точките A и B. Од точката B паралелно со OA е повлечена полуправа која ја сече кружницата во точката C. Нека E е точката во која отсечката OC ја сече кружницата и нека правата BE и отсечката OA се сечат во точката K. Докажи дека K е средина на отсечката OA.

Решение. Нека P и Q се точките во кои тангентата на кружницата во точката C редоследно ги сече полуправите OA и OB. Од решението на претходната задача следува

$$\overline{OA} = \overline{PA} \text{ и } \angle BOK = \angle OPC .$$

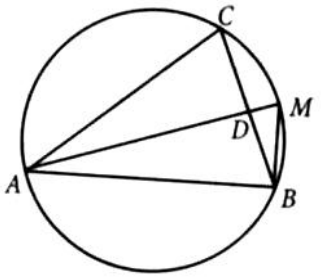
Исто така $\angle OBK = \angle BCO$, како агли меѓу тетива и тангента и периферински агол над истата тетива, и $\angle BCO = \angle POC$, бидејќи правите BC и OP се паралелни. Оттука следува дека $\triangle OBK \sim \triangle POC$, па затоа $\overline{OK} : \overline{OB} = \overline{PC} : \overline{PO}$. Понатаму, $\overline{OA} = \overline{OB}$ и $\overline{PA} = \overline{PC}$, па добиваме дека $\overline{OK} : \overline{OA} = 1:2$, т.е. K е средина на отсечката OA.



24. Симетралата на внатрешниот $\angle BAC$ ги сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката M и страната во точката D. Докажи дека

$$\overline{BM}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{DM} .$$

Решение. Имаме $\angle MBC = \angle MAC$ како агли на ист лак MC. Од условот на задача-



та следува

$$\measuredangle MAC = \measuredangle BAM = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC ,$$

па затоа $\measuredangle MBD = \measuredangle BAM$. Понатаму, би-дејќи $\measuredangle BMD = \measuredangle AMB$, добиваме $\triangle BMD \sim \triangle AMB$. Оттука добиваме

$$\overline{BM} : \overline{AM} = \overline{DM} : \overline{BM} ,$$

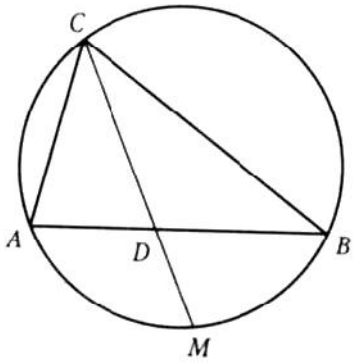
па затоа $\overline{BM}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{DM}$

25. Нека D е точка на страната AB на триаголникот ABC таква што CD е симетралата на $\measuredangle ACB$. Изрази ја должината на страната AB преку должините на страните AC и BC и симетралата CD.

Решение. Нека

$$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, \overline{CD} = l$$

и нека M е втората пресечна точка на правата CD и опишаната кружница околу триаголникот ABC (види цртеж). Од $\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC}$ следува дека $\overline{AD} = kb, \overline{BD} = ka$ за некој позитивен број k. Понатаму, од сличноста на триаголниците AMD и BCD следува $\overline{AD} \cdot \overline{BD} = \overline{CD} \cdot \overline{DM}$, односно $abk^2 = l \cdot \overline{DM}$. Од друга страна, од сличноста на триаголниците BCD и MCA следува $\frac{b}{l+\overline{DM}} = \frac{l}{a}$, односно $ab = l^2 + l \cdot \overline{DM}$. Според тоа,



$$ab = l^2 + abk^2 , \text{ т.е. } k^2 = 1 - \frac{l^2}{ab} .$$

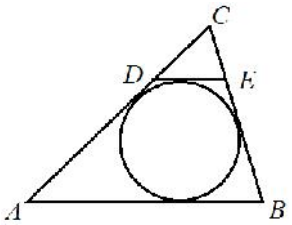
Значи,

$$c = \overline{AD} + kb + ka = (a+b)\sqrt{1 - \frac{l^2}{ab}} .$$

26. Нека D и E се точки на страните AC и BC на триаголникот ABC, тави што отсечката DE ја допира впишаната кружница на триаголникот ABC и $DE \parallel AB$. Изрази ја должина на отсечката DE во функција од должините на страните на триаголникот ABC.

Решение. Нека

$\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c, \overline{DE}=d$.



Од сличноста на триаголниците ABC и DEC следува

$$d:c=(b-\overline{AD}):b=(a-\overline{BE}):a,$$

па затоа

$$\overline{AD}=b-\frac{b}{c}d, \quad \overline{BE}=a-\frac{a}{c}d .$$

Понатаму, од својствата на тангентните отсечки следува

$$\overline{AB}+\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{BE},$$

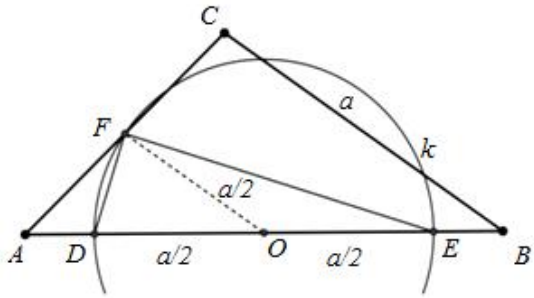
па затоа

$$c+d=b-\frac{b}{c}d+a-\frac{a}{c}d,$$

од каде добиваме $d=\frac{a+b-c}{a+b+c}c$.

27. На страната AB на триаголникот ABC, $\overline{AB}>\overline{BC}$ се избрани точките D и E такви што $\overline{DE}=\overline{BC}$ и $\overline{AD}=\overline{BE}$ (D е меѓу A и E). Ако F е средината на страната AC, докажи дека $\measuredangle DFE=90^\circ$.

Решение. Нека O е средина на страната AB, т.е. $\overline{AO}=\overline{BO}$ и нека $\overline{DE}=\overline{BC}=a$ (види цртеж).



Од

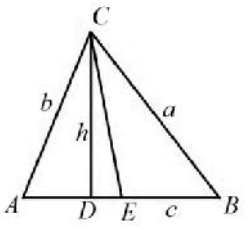
$$\overline{DO}=\overline{AO}-\overline{AD}=\overline{BO}-\overline{BE}=\overline{EO},$$

следува дека точката O е средина на отсечката DE, односно $\overline{DO}=\overline{EO}=\frac{a}{2}$. Понатаму, O е средина на страната AB и F е средината на страната AC, па затоа FO е средна линија на триагол-никот ABC, од каде следува дека $\overline{OF}=\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{a}{2}$. Сега, од $\overline{DO}=\overline{EO}=\overline{OF}=\frac{a}{2}$ следува дека точката F припаѓа на кружницата k чиј дијаметар е

отсечката DE. Според тоа, $\measuredangle DFE$ е периферен агол во кружницата над дијаметар DE, па затоа $\measuredangle DFE = 90^\circ$

28. Во остроаголниот $\triangle ABC$ должините на страните *a*, *b* и *c* се поврзани со релацијата $a + b = 2c$, каде што $a > b$. Од темето *C* се повлечени висина *CD* и тежишна линија *CE*. Докажи дека $\overline{DE} = a - b$.

Решение. Точката *E* е средина за страната *c*, па важи $\overline{AE} = \overline{BE} = \frac{c}{2}$. Од триаголникот *ADC* имаме дека



$$h^2 = b^2 - \overline{AD}^2 = b^2 - (\tfrac{c}{2} - \overline{DE})^2,$$

а од триаголникот *BDC* имаме дека

$$h^2 = ba^2 - \overline{BD}^2 = a^2 - (\tfrac{c}{2} + \overline{DE})^2$$

Со изедначување на висините добиваме

$$b^2 - (\tfrac{c}{2} - \overline{DE})^2 = a^2 - (\tfrac{c}{2} + \overline{DE})^2,$$

и по средувањето на равенството добиваме

$$2c\overline{DE} = a^2 - b^2.$$

Но, $a + b = 2c$, па од последното равенство добиваме

$$(a+b)\overline{DE} = (a-b)(a+b), \text{ т.е. } \overline{DE} = a - b$$

што и требаше да се докаже.

29. Во триаголникот *ABC* се повлечени нормали *BE* и *CF* на симетралата *AD* на $\measuredangle BAC$. Докажи дека $\overline{AE} \cdot \overline{DF} = \overline{AF} \cdot \overline{DE}$.

Решение. Правоаголните триаголници *BDE* и *CDF* се слични бидејќи $\measuredangle BDE = \measuredangle FDC$ како накрсни агли (направи цртеж). Според тоа, $\overline{BE} : \overline{FC} = \overline{DE} : \overline{DF}$. Правоаголните триаголници *ABE* и *AFC* се слични, бидејќи *AD* е симетрала на $\measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC$. Значи, $\overline{AE} : \overline{AF} = \overline{BE} : \overline{FC}$. Од добиените пропорции следува

$$\overline{AE} : \overline{AF} = \overline{DE} : \overline{DF},$$

од каде следува

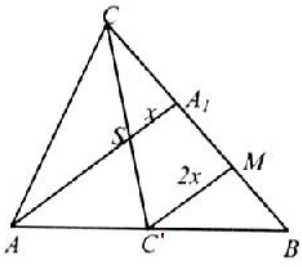
$$\overline{AE} \cdot \overline{DF} = \overline{AF} \cdot \overline{DE}.$$

30. На страната *BC* на триаголникот *ABC* е дадена точка A_1 таква што

$\overline{BA_1} : \overline{A_1C} = 2:1$. Определи во кој однос тежишната линија CC' ја дели отсечката AA_1.

Решение. Нека $AA_1 \cap CC' = \{S\}$ и нека $C'M \parallel AA_1$. Триаголниците CSA_1 и $CC'M$ имаат еднакви агли, па затоа тие се слични. Според тоа,

$$\overline{SA_1} : \overline{C'M} = \overline{CA_1} : \overline{CM}.$$

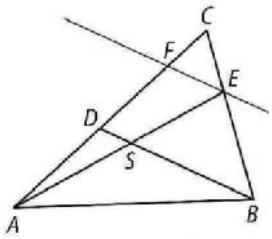


Понатаму, $C'M$ ја содржи средината на AB и $C'M \parallel AA_1$, па затоа таа е средна линија на триаголниот AA_1B. Оттука и од $\overline{BA_1} : \overline{A_1C} = 2:1$ следува $\overline{BM} = \overline{MA_1} = \overline{A_1C}$, па затоа важи $\overline{SA_1} : \overline{C'M} = 1:2$. Сега, ако $\overline{SA_1} = x$, тогаш $\overline{C'M} = 2x$, од каде добиваме $\overline{AA_1} = 4x$.

Според тоа, $\overline{AS} = 4x - x = 3x$, т.е. $\overline{AS} : \overline{SA_1} = 3x : x = 3:1$.

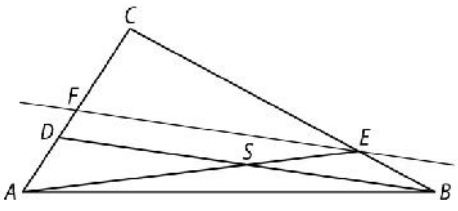
31. Нека D и E се соодветно точки на страните AC и BC на триаголникот ABC такви, то $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{2}{3}$ и $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{2}{1}$. Отсечките AE и BD се сечат во точката S. Во кој однос точката S ја дели отсечката AE?

Решение. Низ точката E повлекуваме права паралелна на правата BD (цртеж десно). Нека F е пресекот на оваа права со страната AC. Тогаш $\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{2}{1}$, од каде следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1}$ и како $\frac{\overline{AS}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}}$ добиваме $\frac{\overline{AS}}{\overline{SE}} = \frac{1}{1}$.



32. Нека D и E се точки редоследно на страните AC и BC на триаголникот ABC и S е пресек на отсечките AE и BD. Ако $\frac{\overline{AS}}{\overline{SE}} = \frac{2}{1}$ и $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{1}{3}$, во кој однос точката D ја дели страната AC?

Решение. Низ точката E повлекуваме права паралелна со BD (цртеж десно). Нека F е пресечната точка на оваа права со страната AC. Тогаш



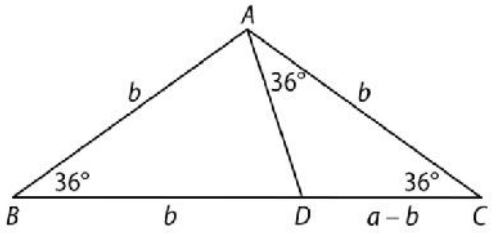
$\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{1}{3}$ и бидејќи важи $\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SE}} = \frac{2}{1}$, добиваме

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AD}}{4\overline{DF}} = \frac{1}{4}\frac{\overline{AS}}{\overline{SE}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} = \frac{1}{2}.$$

33. Во триаголникот ABC е $\overline{BC} = a, \overline{AB} = \overline{AC} = b$ и $\angle BAC = 108^\circ$. Докажи дека $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 1$.

Решение. Во дадениот рамнокрак триаголник ABC важи

$$\angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ.$$



Нека D е точка на основата BC таква што $\overline{BD} = \overline{AB} = b$. Тогаш $\overline{CD} = a - b$ (види цртеж). Триаголникот ADC е рамнокрак (има два еднакви агли, $\angle CAD = 108^\circ - (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 36^\circ = \angle ACD$), па затоа $\overline{AC} = \overline{CD} = a - b$. Рамнокраките триаголници ABC и DAC се слични, па затоа $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AB} : \overline{CD}$, односно $a : b = b : (a - b)$, од каде добиваме $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 1$.

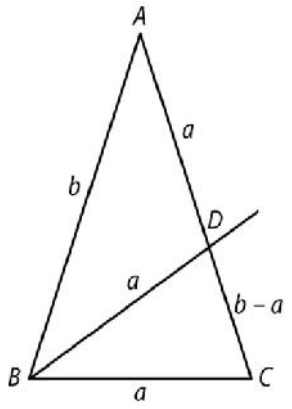
34. Во триаголникот ABC е $\overline{BC} = a, \overline{AB} = \overline{AC} = b$ и $\angle ABC = \angle ACB = 72^\circ$. Докажи дека $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1$.

Решение. Нека D е пресечната точка на симетралата на $\angle ABC$ и кракот AC (цртеж десно). Триаголниците BCD и ABD се рамнокраки, бидејќи важи

$$\angle BDC = \angle BCD = 72^\circ \text{ и}$$

$$\angle ABD = \angle BAD = 36^\circ.$$

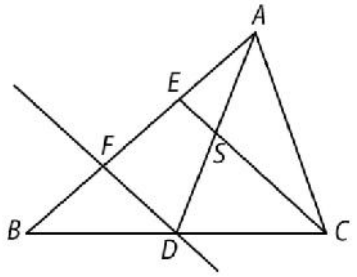
Значи, $\overline{BC} = \overline{BD} = a$ и $\overline{AD} = \overline{BD} = a$, па затоа $\overline{CD} = b - a$. Рамнокраките триа-голници BCD и ABC се слични, па затоа важи



$(b-a):a=a:b$, од каде добиваме $b^2-ab=a^2$, т.е. $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$.

35. Правата која минува низ темето C и средината S на тежишната линија AD ја сече страната AB на триаголникот ABC во точката E. Во кој однос точката E ја дели страната AB?

Решение. Повлекуваме права низ точката D паралелна на CE и пресекот на оваа права со страната AB да го означиме со F. Од Талесовата теорема, дефиницијата на тежишната линија и тоа што S е средина на AD, следува

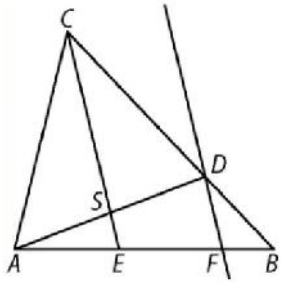


$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=1 \text{ и } \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AS}}{\overline{SE}}=1.$$

Оттука добиваме $\overline{BF}=\overline{FE}$ и $\overline{AE}=\overline{EF}$, па затоа $\overline{AE}:\overline{EB}=1:2$.

36. На страната BC на триаголникот ABC е избрана точка D таква што $\overline{BD}:\overline{CD}=1:2$. Правата која минува низ темето C и средината S на отсечката AD ја сече страната AB во точката E. Во кој однос точката E ја дели станата AB?

Решение. Нека $DF \parallel CE$, $F \in AB$. Од Талесовата теорема следува



$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{1}{2} \text{ и } \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AS}}{\overline{SD}}=1.$$

Оттука имаме $\overline{EF}=2\overline{BF}$ и $\overline{EF}=\overline{AE}$. Затоа

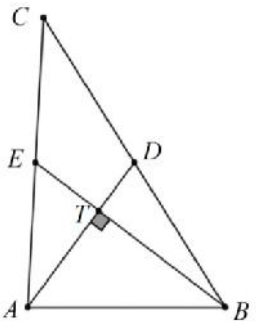
$$\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{AE}:(\overline{EF}+\tfrac{1}{2}\overline{EF})$$
$$=\overline{AE}:(\tfrac{3}{2}\overline{AE})=1:\tfrac{3}{2}=2:3.$$

37. Во триаголникот ABC тежишната линија AD е нормалана на тежишната линија BE. Ако $\overline{BC}=6$ и $\overline{AC}=8$, пресметај ја должината на страната AB.

Решение. Според условот на задачата D е средина на BC и E е средина на AC, па затоа $\overline{AE}=\overline{EC}=4$ и $\overline{BD}=\overline{DC}=3$. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. Тоа ги дели AD и BE во однос $2:1$,

па ако $p=\overline{AD}$ и $q=\overline{BE}$, добиваме

$$\overline{AT}=\tfrac{2}{3}p, \overline{TD}=\tfrac{1}{3}p \text{ и } \overline{BT}=\tfrac{2}{3}q, \overline{TE}=\tfrac{1}{3}q.$$



Според условот на задачата триаголници-те ABT, AET и BDT се правоаголни, па затоа важи

$$\overline{AB}^2=(\tfrac{2}{3}p)^2+(\tfrac{2}{3}q)^2=\tfrac{4}{9}(p^2+q^2),$$
$$4^2=(\tfrac{2}{3}p)^2+(\tfrac{1}{3}q)^2=\tfrac{4}{9}p^2+\tfrac{1}{9}q^2,$$
$$3^2=(\tfrac{1}{3}p)^2+(\tfrac{2}{3}q)^2=\tfrac{1}{9}p^2+\tfrac{4}{9}q^2.$$

Ако ги собереме втората и третата равенка, добиваме $\tfrac{5}{9}(p^2+q^2)=25$, од каде следува $p^2+q^2=45$. Според тоа,

$$\overline{AB}=\tfrac{2}{3}\sqrt{p^2+q^2}=\tfrac{2}{3}\sqrt{45}=2\sqrt{5}.$$

38. Периметрите на триаголниците ABC и $A'B'C'$ се разликуваат за $6\,cm$, а соодветните страни на овие триаголници се однесуваат како $5:6$. Ако $\overline{AB}=8\,cm$ и $\overline{BC}=13\,cm$, определи ги страните на триаголникот $A'B'C'$.

Решение. Бидејќи страните на триаголниците се однесуваат како $5:6$ добиваме $L_{ABC}:L_{A'B'C'}=5:6$. Значи, $L_{ABC}=5k$ и $L_{A'B'C'}=6k$ за некој k. Но, разликата на периметрите на триаголниците е 6, па затоа $6k-5k=6$, од каде добиваме $k=6$. Значи, $L_{A'B'C'}=36\,cm$. Сега, од

$$5:6=\overline{AB}:\overline{A'B'}=8:\overline{A'B'} \text{ и } 5:6=\overline{BC}:\overline{B'C'}=13:\overline{B'C'},$$

добиваме $\overline{A'B'}=9{,}6\,cm$ и $\overline{B'C'}=15{,}6\,cm$, па затоа

$$\overline{A'C'}=L_{A'B'C'}-\overline{A'B'}-\overline{B'C'}=10{,}8\,cm.$$

39. Висините на триаголникот ABC се со должини $2{,}4\,cm, 3\,cm$ и $4\,cm$. Определи го радиусот на впишаната кружница на триаголникот ABC.

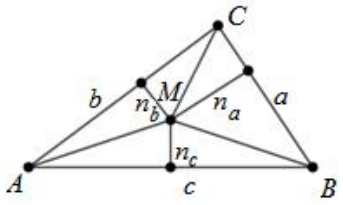
Решение. Имаме $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$, од каде добиваме $a=\frac{2P}{h_a}$, $b=\frac{2P}{h_b}$ и $c=\frac{2P}{h_c}$. Од друга страна $P=\frac{a+b+c}{2}r$, па е $P=\frac{r}{2}(\frac{2P}{h_a}+\frac{2P}{h_b}+\frac{2P}{h_c})$, т.е. $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$. Со замена во последното равенство добиваме $r=1$.

40. Во внатрешноста на произволен триаголник ABC е избрана точка M. Должините на нормалите од точката M до страните BC, CA, AB да ги означиме соодветно со n_a, n_b, n_c. Докажи дека

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини во триаголникот.

Решение. Отсечките MA, MB, MC го делат триаголникот ABC на три триаголници со плоштини $\frac{1}{2}an_a, \frac{1}{2}bn_b, \frac{1}{2}cn_c$. Збирот на овие три плоштини е еднаков на плоштината P на триаголникот ABC, т.е.



$$\frac{1}{2}an_a+\frac{1}{2}bn_b+\frac{1}{2}cn_c=P.$$

Но,

$$\frac{2P}{a}=h_a,\ \frac{2P}{b}=h_b,\ \frac{2P}{c}=h_c,$$

па од последното равенство последоватрелно добиваме

$$\frac{a}{2P}n_a+\frac{b}{2P}n_b+\frac{c}{2P}n_c=1$$

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

што и требаше да се докаже.

Коментар. Ако точката M е центарот на впиашаната кружница во триаголникот, тогаш $n_a=n_b=n_c=r$, каде r е радиусот на впишаната кружница, што значи дека равенството $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ е последица од равенството $\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1$.

41. Должината на едната страна на триаголникот е $36\,cm$, а збирот на должините на другите две страни е $60\,cm$. Колку треба да бид должините на секоја од двете страни, за да радиусот на впишаната кружница во овој триаголник биде најголем?

Решение. Нека должината на едната страна е a, а должината на другата страна е $60-a$. Полупериметарот на триаголникот е $s=48\,cm$, па од Херонвата формула следува дека радиусот на впиша-

ната кружница во овој триаголник е

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{48 \cdot 12 \cdot (48-a)(a-12)}}{48}.$$

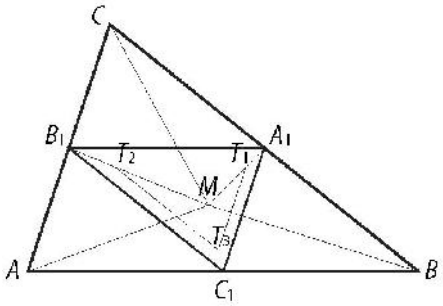
Радиусот ќе биде најголем кога изразот

$$(48-a)(a-12) = -a^2 + 60a - 576 = 324 - (a-30)^2$$

прима најголема вредност. Тоа е за $a-30=0$, односно $a = 30\,cm$. Должината на другата страна е исто така $30\,cm$.

42. Произволна точка M во внатрешноста на триаголникот ABC е поврзана со темињата на триаголникот, со што триаголникот е поделен на три триаголника. Нека T_1, T_2, T_3 се тежиштата на овие триаголници. Колку пати плоштината на триаголникот ABC е поголема од плоштината на триаголникот $T_1T_2T_3$?

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се редоследно средините на страните BC, CA, AB (види цртеж). Страните на триаголникот $A_1B_1C_1$ се паралелни на соодветните страни на триаголникот ABC и секоја страна е два пати помала од соодветната страна на триаголникот ABC. Бидејќи T_1 е тежиште на триаголникот MBC, добиваме $\overline{MT_1} : \overline{MA_1} = 2:3$. Исто така $\overline{MT_2} : \overline{MB_1} = 2:3$. Сега, од Талесовата теорема следува дека $T_1T_2 \parallel A_1B_1$ и $\overline{T_1T_2} : \overline{A_1B_1} = 2:3$. Значи.



$$\overline{T_1T_2} = \frac{2}{3}\overline{A_1B_1} = \frac{1}{3}\overline{AB}.$$

Аналогно се докажува дека

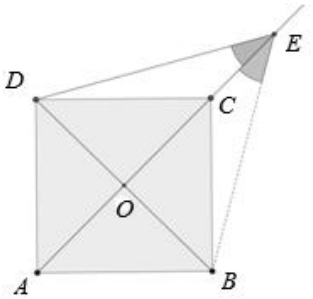
$$\overline{T_2T_3} = \frac{1}{3}\overline{BC} \text{ и } \overline{T_3T_1} = \frac{1}{3}\overline{CA}.$$

Значи, триаголниците ABC и $T_1T_2T_3$ се слични со коефициент на сличност 3, па плоштината на триаголникот ABC е девет пати поголема од плоштината на триаголникот $T_1T_2T_3$.

43. Даден е квадрат $ABCD$. На продолжението на дијагоналата AC е избрана точка E така што $\overline{DE} = \overline{AC}$. Одреди ја големината на аголот DEC.

Решение. Нека точката O е пресекот на дијагоналите. Тогаш имаме дека $\overline{BO} = \overline{DO}$. Од условот на задачата имаме дека $\overline{DE} = \overline{AC}$. Од тоа што $ABCD$ е квадрат имаме дека $\overline{BD} = \overline{AC}$. Значи,

$$\overline{BD} = \overline{DE} \qquad (1)$$

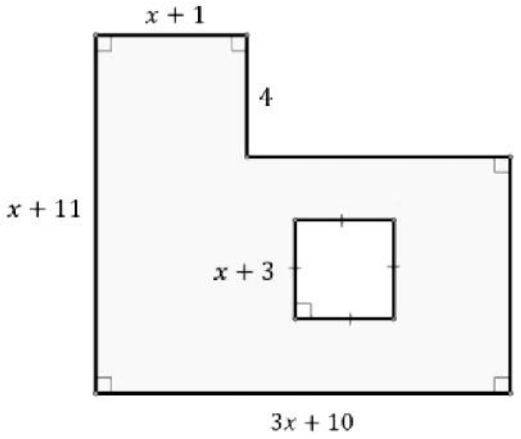


Од друга страна имаме дека отсечката BE е слика на отсечката DE при осна симетрија во однос на правата AC. Така добиваме

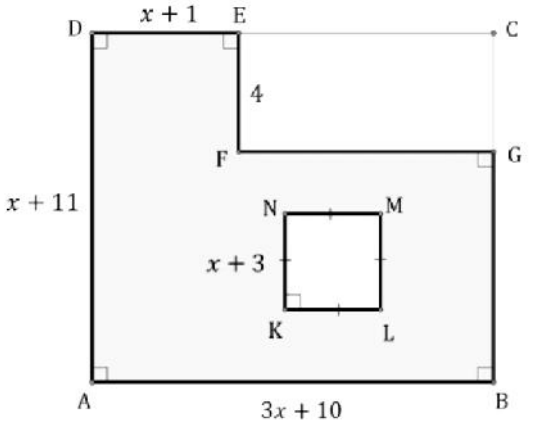
$$\overline{BE} = \overline{DE} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека триаголникот BED е рамностран. Значи $\measuredangle BED = 60^\circ$. Од складноста на триаголниците BOE и DOE имаме дека $\measuredangle DEO = \measuredangle BEO = 30^\circ$. Значи, $\measuredangle DEC = \measuredangle DEO = 30^\circ$.

44. Определи ја плоштината на обоената фигура на долниот цртеж и изрази ја во облик $ax^2 + bx + c$.

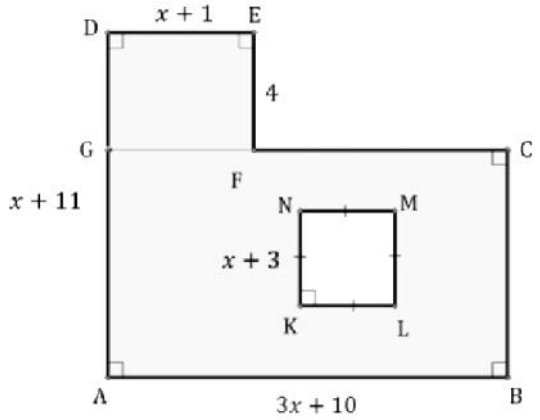


Решение. *Прв начин*. Дадената фигура да ја дополниме до правоаголник $ABCD$ како на цртеж десно и да ги воведеме прикажаните ознаки. За плоштината на обоената фигура добиваме:



$$\begin{aligned} P &= P_{ABCD} - P_{KLMN} - P_{FGCE} \\ &= (3x+10)(x+11) - (x+3)^2 - 4(3x+10-x-1) \\ &= 3x^2 + 33x + 10x + 110 - x^2 - 6x - 9 - 4(2x+9) \\ &= 2x^2 + 37x + 101 - 8x - 36 \\ &= 2x^2 + 29x + 65. \end{aligned}$$

Втор начин. Да означиме како на долниот цртеж. Притоа за плоштината на дадената фигура добиваме:

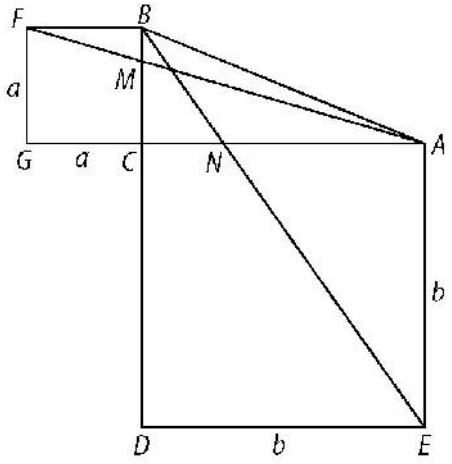


$$\begin{aligned} P &= P_{ABCG} - P_{KLMN} + P_{GFED} \\ &= (3x+10)(x+7) - (x+3)^2 + 4(x+1) \\ &= 3x^2 + 21x + 10x + 70 - x^2 - 6x - 9 + 4x + 4 \\ &= 2x^2 + 29x + 65. \end{aligned}$$

45. Над катетите AC и BC на правоаголен триаголник ABC надвор од триаголникот се нацртани квадрати $ACDE$ и $BFGC$. Отсечките AF и BE ги сечат катетите BC и AC соодветно во точките M и N. Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$.

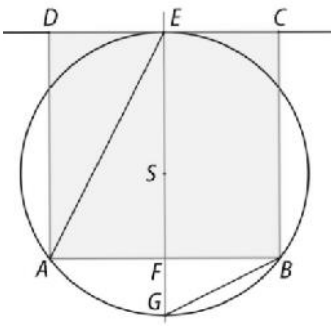
Решение. Нека $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$. Правоаголните триаголници AMC и AFG се слични, па затоа $\frac{\overline{AC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GF}}$, односно $\frac{b}{\overline{CM}} = \frac{b+a}{a}$, што значи $\overline{CM} = \frac{ab}{a+b}$. Од сличноста на триаголниците BCN и BDE добиваме $\frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$, односно $\frac{a}{\overline{CN}} = \frac{a+b}{b}$, што значи $\overline{CN} = \frac{ab}{a+b}$.

Конечно, $\overline{CN} = \frac{ab}{a+b} = \overline{CM}$, што и требаше да се докаже.



46. Две темиња на квадрат припаѓаат на кружница со радиус $5\,cm$, а другите две на тангентата на таа кружница. Определи ја должината на страната на тој квадрат.

Решение. Нека темињата A и B припаѓаат на кружницата, а C и D на тангентата која кружницата ја допира во точката E. Нека S е центарот на кружницата и нека пресеците на правата SE со страната AB и кружницата се F и B, соодветно. Четириаголникот $AFED$ е правоаголник и $\overline{EF}=\overline{AD}=a$. Понатаму, од $\measuredangle BAE=\measuredangle BGE$ (периферски агли на лакот $\overset{\frown}{BE}$) и $\measuredangle AFE=\measuredangle BFG=90^\circ$, следува дека триаголниците AFE и BFG се слични. Од оваа сличност следува $\overline{AF}:\overline{GF}=\overline{EF}:\overline{BF}$, односно $\frac{a}{2}:(10-a)=a:\frac{a}{2}$. Од последното равенство следува $a=8\,cm$.

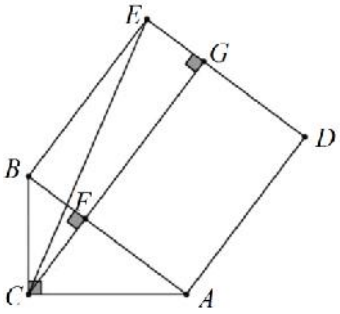


47. Даден е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Над хипотенузата AB како над страна, надвор од триаголникот ABC, е конструиран квадрат $ADEB$. АКо $\overline{AC}=8$ и $\overline{BC}=6$, пресметај ја должината на отсечката CE.

Решение. Нека нормалата на хипотенузата AB повлечена од темето C ги сече хипотенузата AB и страната DE во точките F и G, соодветно. Од Пи-тагоровата теорема следува $\overline{AB}=10$. Понатаму, од

плоштината на триаголникот ABC имаме $\overline{AB}\cdot\overline{CF}=\overline{AC}\cdot\overline{BC}$, па затоа

$$\overline{CF}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8\cdot 6}{10}=4{,}8.$$



Сега, од Питагоровата теорема следува дека

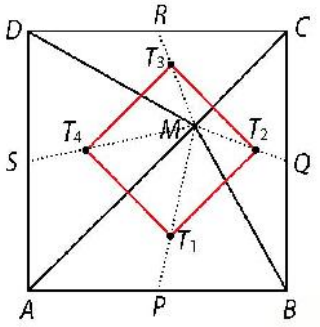
$$\overline{EG}=\overline{BF}=\sqrt{6^2-(4{,}8)^2}=3{,}6.$$

Но, $\overline{CG}=\overline{CF}+\overline{FG}=14{,}8$, па повторно од Питагоровата теорема добиваме

$$\overline{CE}=\sqrt{3{,}6^2+14{,}8^2}=\sqrt{232}=2\sqrt{58}.$$

48. Произволна точка M во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е поврзана со отсечки со темињата на квадратот. На тој начин квадратот е поделен на четири триаголници. Нека T_1,T_2,T_3,T_4 се тежиштата на овие триаголници. Колку пати плоштината на квадратот $ABCD$ е поголема од плоштината на четириаголникот $T_1T_2T_3T_4$?

Решение. Нека P,Q,R,S се редоследно средините на страните AB,BC,CD,DA. Тогаш $PQRS$ е квадрат со страна $b=\frac{a}{\sqrt{2}}$, каде a е страната на квадратот $ABCD$. Бидејќи T_1 е тежиште на триаголникот MAB, добиваме

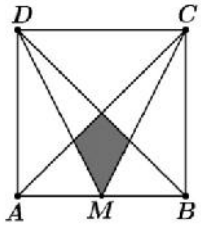


$$\overline{MT_1}:\overline{MP}=2:3.$$

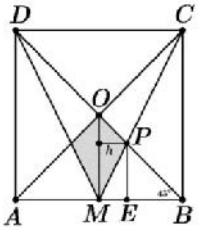
Исто така важи $\overline{MT_2}:\overline{MQ}=2:3$. Сега, од Талесовата теорема следува дека $T_1T_2\parallel PQ$ и $\overline{T_1T_2}:\overline{PQ}=2:3$, т.е. $\overline{T_1T_2}=\frac{2}{3}b=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. На ист начин докажуваме дека и другите три страни на четириаголникот $T_1T_2T_3T_4$ се паралелни со другите три страни на квадратот $PQRS$ и се еднакви на $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Значи, четириаголникот $T_1T_2T_3T_4$ е квадрат со страна $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ па неговата плоштина е $P'=(\frac{a\sqrt{2}}{3})^2=\frac{2}{9}a^2$. Плоштината на квадратот $ABCD$ е $P=a^2$, што значи плоштината на четири-

аголникот $T_1T_2T_3T_4$ е $\frac{2}{9}$ од плоштината на квадратот $ABCD$.

49. Должината на страната на квадратот прикажан на цртежот десно е $1\,m$. Точката M е средина на страната AB. Пресметај ја плоштината на осенчениот дел на квадратот.



Решение. *Прв начин*. Нека O е центар на квадратот, P е пресечната точка на MC и BD, h е висината на $\triangle OMP$ повлечена од темето P и E е подножјето на нормалата повлечена од точката P кон страната AB (цртеж лево).



Според тоа, $\overline{ME}=h$. Од друга страна $\triangle MPE$ е сличен со $\triangle MCB$, па затоа

$$\overline{ME}:\overline{PE}=\overline{MB}:\overline{BC},$$
$$\overline{ME}\cdot\overline{BC}=\overline{PE}\cdot\overline{MB},$$

односно $\overline{ME}=\frac{1}{2}\overline{PE}$. Значи, $h=\frac{1}{2}\overline{PE}$, односно $\overline{PE}=2h$. Сега, бидејќи $\measuredangle PBE=45^\circ$ добиваме $\overline{EB}=\overline{PE}=2h$. Но, $\overline{MB}=\overline{ME}+\overline{EB}$, па затоа $\frac{1}{2}=h+2h$, односно $h=\frac{1}{6}$. Според тоа, за плоштината на осенчениот дел од квадратот добиваме

$$P=2P_{\triangle OPM}=2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{12}\,m^2.$$

Втор начин. Точката O е средина на дијагоналата AC, а точката M е средина на страната AB. Значи, BO и CM се тежишни линии на триаголникот ABC, па затоа P е негово тежиште. Според тоа, $\overline{BP}:\overline{PO}=2:1$. Понатаму, $P_{\triangle MBO}=\frac{1}{8}P_{ABCD}=\frac{1}{8}$, па од $\overline{BP}:\overline{PO}=2:1$ следува

$$P_{\triangle MOP}=\tfrac{1}{3}P_{\triangle MBO}=\tfrac{1}{24}\,m^2.$$

Според тоа, за плоштината на осенчениот дел од квадратот добиваме $P=2P_{\triangle MOP}=2\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{12}\,m^2$.

50. Нека $ABCD$ е квадрат. Точките K,L,M и N лежат на страните AB, BC,CD и DA, соодветно и тие се темиња на квадрат. Правите DK и NM се сечат во точката E, а правите CK и LM се сечат во точката F. Докажи дека правите EF и AB се паралелни.

Решение. Нека P и Q се точките во кои правите NM и LM ја сечат правата AB. Триаголниците NAK, KLB, LCM и MDN се складни (правоаголни со еднакви хипотенузи и по еден остар агол со заемно нормални краци). Нека

$$\overline{AK} = \overline{BL} = \overline{CM} = \overline{DN} = a \text{ и } \overline{BK} = \overline{LC} = \overline{MD} = \overline{NA} = b.$$

Триаголниците PNK и QLK се правоаголни, па од Евклидовата теорема следува

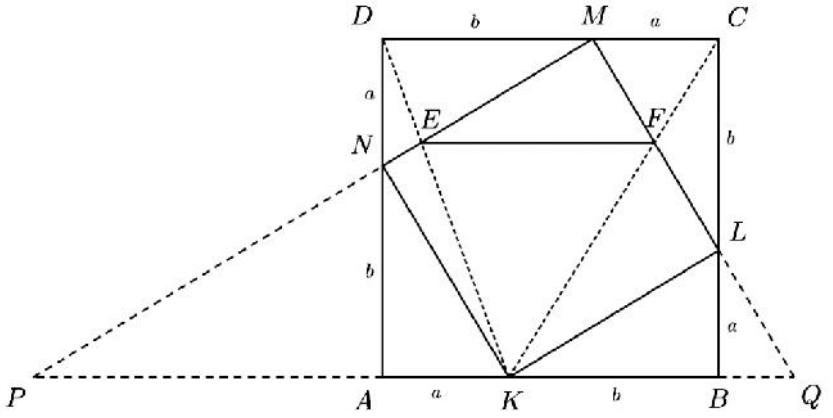
$$\overline{PA} \cdot a = b^2 \text{ и } \overline{QB} \cdot b = a^2.$$

Од сличноста на триаголниците PEK и MED следува

$$\frac{\overline{KE}}{DE} = \frac{\overline{PR}}{MD} = \frac{\overline{PA}+\overline{AK}}{MD} = \frac{\frac{b^2}{a}+a}{b} = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Од сличноста на триаголниците QFK и MFC следува

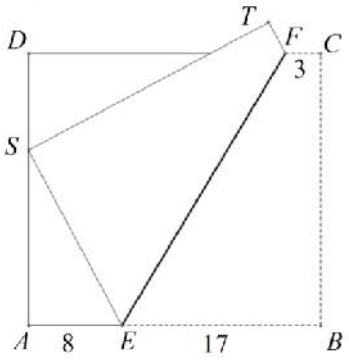
$$\frac{\overline{FK}}{FC} = \frac{\overline{QK}}{MC} = \frac{\overline{QB}+\overline{BK}}{MC} = \frac{\frac{a^2}{b}+b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$



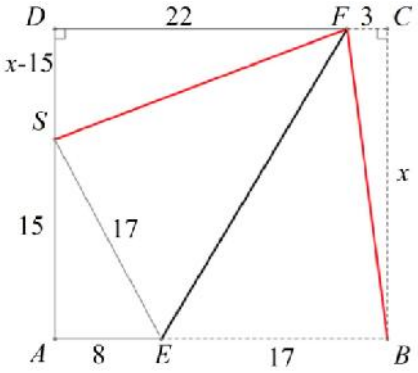
Според тоа, $\frac{\overline{KE}}{DE} = \frac{\overline{FK}}{CF}$. Според Талесовата теорема важи $EF \parallel DC$, т.е. $EF \parallel AB$, што и требаше да се докаже.

51. Од хартија е исечен правоаголник $ABCD$. На страната AB е избрана точка E таква што $\overline{AE} = 8$ и $\overline{BE} = 17$. На страната CD е избрана точка F таква што $\overline{CF} = 3$. По превиткување на хартијата по должината на отсечката EF темето B се поклошва со точка S на страната AD. Определи ја должината на страната BC на правоаголникот $ABCD$.

Решение. *Прв начин*. Четириаголникот $EBCF$ се пресликува во нему складниот четириаголник $SEFT$ (четириаголникот $SEFT$ е слика при осна симетрија на четириаголникот $EBCF$), т.е. триаголникот EBF се пресликува во нему складниот триаголник SEF, па затоа $\overline{SE}=\overline{BE}=17$. Со примена на Питагоровата теорема на триаголникот ASE добиваме дека $\overline{SA}=\sqrt{17^2-8^2}=15$.



Нека $\overline{AD}=\overline{BC}=x$. Имаме дека $\overline{DS}=x-15$ и $\overline{DF}=22$. Од складноста на триаголниците EBF и SEF следува $\overline{SF}=\overline{BF}$, пд со примена на Питагоровата теорема на триаголниците FDS и BCF добиваме:

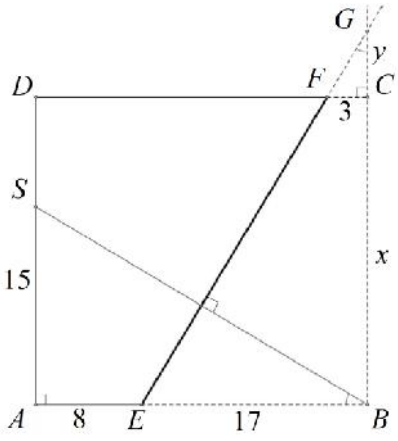


$$\overline{SD}^2+\overline{DF}^2=\overline{FC}^2+\overline{BC}^2,$$
$$(x-15)^2+22^2=3^2+x^2,$$
$$x^2-30x+225+489=x^2+9,$$
$$x=\frac{70}{3}.$$

Втор начин. Како во првиот начин на решавање заклучуваме дека $\overline{SE}=\overline{BE}=17$. Нека G е пресекот на правите BC и EF.

Бидејќи $\angle SBA=\angle EGB$ (остри агли со нормални краци) и уште $\angle BAS=\angle GBE=90^\circ$, заклучуваме дека триаголниците SAB и FGB се слични. Оттука следува дека нивните соодветни страни се пропорционални, па затоа

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{BE}}.$$

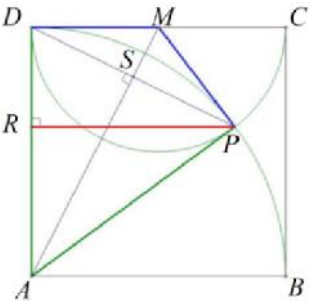


Бидејќи $\angle EGB$ е заеднички агол за триаголниците EBG и FCG и

$\measuredangle GCF = \measuredangle GBE = 90^\circ$, триаголниците EBG и FCG се слични, па нивните соодветни страни се пропорционални, односно $\frac{\overline{BG}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CF}}$. Значи, важи $\frac{25}{15} = \frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}$, од каде добиваме $y = 5$ и $x = \frac{70}{3}$.

52. Точката M е средина на страната CD на квадратот $ABCD$ со страна со должина 4. Кружницата со центар во M и радиус 2 и кружницата со центар во A и радиус 4 се сечат во точките D и P. Определи ја оддалеченоста на точката P до правата AD.

Решение. Нека k' е кружницата со центар во M и радиус 2, а k'' е кружницата со центар во A и радиус 4. Имаме $\overline{MD} = \overline{MP}$ и $\overline{AD} = \overline{AP}$, па затоа четириаголникот $APMD$ е делтоид. Нека R е подножјето на нормала повлечена од точката P на правата AD. Од триаголникот AMD следува



$$\overline{AM} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

Понатаму, плоштината на триаголникот AMD и $P_{AMD} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$, па како $P_{AMD} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{SD}}{2}$, добиваме $4 = \frac{\sqrt{20} \cdot \overline{SD}}{2}$, од каде следува $\overline{SD} = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Значи, $\overline{PD} = 2\overline{SD} = \frac{8}{\sqrt{5}}$. Од триаголникот ASD следува

$$\overline{AS} = \sqrt{4^2 - (\frac{4}{\sqrt{5}})^2} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Имаме, $P_{APD} = \frac{\overline{AS} \cdot \overline{PD}}{2}$ и $P_{APD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{PR}}{2}$, па затоа

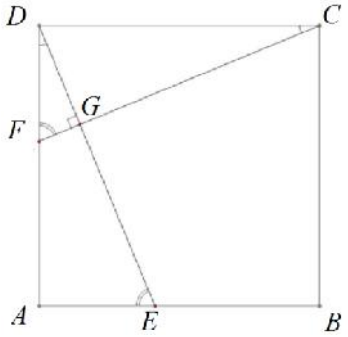
$$\frac{\overline{AS} \cdot \overline{PD}}{2} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{PR}}{2},$$

од каде добиваме

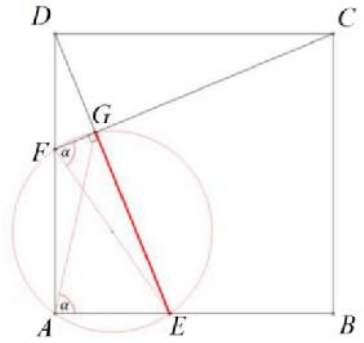
$$\overline{PR} = \frac{\overline{AS} \cdot \overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}}}{4} = \frac{16}{5}.$$

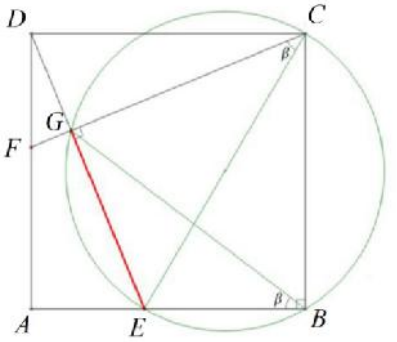
53. Точките E и F припаѓаат редоследно на страните AB и AD на квадратот $ABCD$ и важи $\overline{AE} = \overline{DF}$. Точката G е пресек на отсечките CD и DE. Докажи дека $\measuredangle CEF = \measuredangle AGB$.

Решение. За правоаголните триаголници AED и DFC важи $\overline{AE}=\overline{DF}$ и $\overline{AD}=\overline{CD}$, па затоа тие се складни. Затоа во триаголникот FGD збирот на аглите во темињата F и D е еднаков на 90°, што значи дека $\measuredangle DGF=90^\circ$. Според тоа, $CF\perp DE$.



Бидејќи $\measuredangle EAF=\measuredangle FGE=90^\circ$ четириаголникот $AEGF$ е тетивен, т.е. околу него може да се опише кружница k_1 со дијаметар $\overline{EF}$ (види цреж). Затоа важи $\measuredangle EAG=\measuredangle EFG=\sim$. Бидејќи $\measuredangle CBE=\measuredangle EGC=90^\circ$ четириаголникот $EBCG$ е тетивен, т.е. околу него може да се опише кружница k_2 со дијаметар $\overline{EG}$ (види цреж). Затоа важи $\measuredangle GBE=\measuredangle GCE=$.

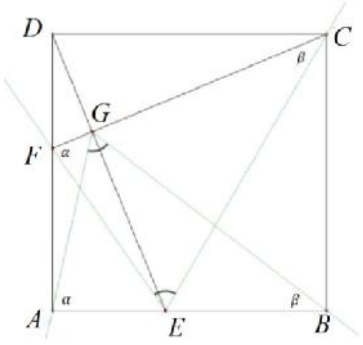




Сега да ги разгледаме триаголниците FEC и ABG. За овие триаголници важи

$$\measuredangle BAG=\measuredangle EFC=\sim \text{ и}$$
$$\measuredangle GBA=\measuredangle FCE= \ ,$$

т.е. имаат по два еднакви агли, па затоа и третите агли им се еднакви, односно важи $\measuredangle CEF=\measuredangle AGB$, што и требаше да се докаже.



54. Во триаголникот ABC е впишан квадрат $PQRS$ така што темињата P и Q припаѓаат соодветно на страните AB и AC, а темињата R и S на страната BC. Изрази ја должината на страната на страната на

квадратот преку должините a на страната BC и соодветната висина h_a.

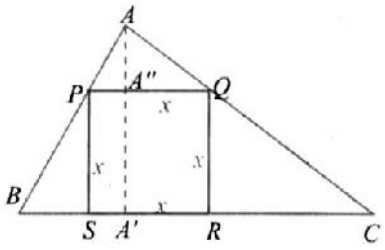
Решение. Нека $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}=x$. Од $PQ \| BC$ следува дека триаголниците ABC и APQ се слични. Од оваа сличност следува

$$\overline{BC}:\overline{AA'}=\overline{PQ}:\overline{AA''},$$

односно

$$a:h_a=x:(h_a-x)$$

од каде добиваме $x=\frac{ah_a}{a+h_a}$.

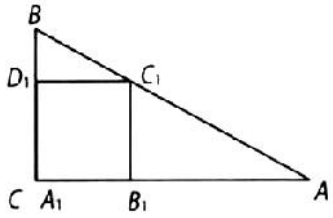


55. Во правоаголен триаголник е впишан квадрат, така што на секоја страна на триаголникот лежи по едно теме од квадратот, а четвртото теме на квадратот е темето на правиот агол на триаголникот. Ако должината на едната катета на правоаголниот триаголник е $12\,cm$, а должината на хипотенузата е $15\,cm$, пресметај ја плоштината на квадратот.

Решение. Од условот на задачата следува $a=12\,m$ и $c=15\,cm$, па од Питагоровата теорема добиваме

$$b=\sqrt{15^2-12^2}=9\,cm.$$

Но, триаголниците ABC и AC_1B_1 се слични, па затоа важи



$$\overline{BC}:\overline{CA}=\overline{C_1B_1}:\overline{B_1A},$$

односно $a:b=x:(b-x)$, каде x е должината на страната на квадратот. Според тоа, $12-9=x:(9-x)$, од каде добиваме $9x=108-21x$, односно $x=\frac{36}{7}\,cm$. Конечно, плоштината на квадратот е

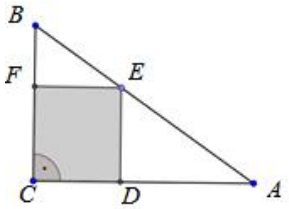
$$P=x^2=\tfrac{1296}{49}\,cm^2=26\tfrac{22}{49}\,cm^2.$$

56. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза $13cm$ и катета $5cm$.

Решение. Нека $c=13$, $a=5$, тогаш од Питагоровата теорема имаме $5^2+b^2=13^2$ односно $b^2=144$. Така добиваме дека $b=12$. Нека

$E \in AB$, $D \in AC$ и $F \in BC$ се такви што $CDEF$ е квадрат. Од сличноста на триаголниците AED и EBF ја добиваме пропорцијата

$$(12-x):x = x:(5-x).$$



На тој начин имаме

$$(12-x)\cdot(5-x) = x^2$$

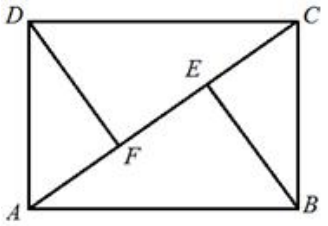
од каде се добива дека $x = \frac{60}{17}$. Плоштината на квадратот е $P = x^2 = \frac{3600}{289}$.

57. Ако во правоаголникот страните се однесуваат како $\sqrt{2}:1$, тогаш нормалите спуштени од две спротивни темиња врз дијагоналата ја делат дијагоналата на три еднакви дела. Докажи!

Решение. Нека $\overline{AD} = \overline{BC} = a$. Тогаш од $\overline{AB}:\overline{AD} = \sqrt{2}:1$, следува дека $\overline{AB} = \overline{DC} = a\sqrt{2}$. Дијагоналата на правоаголникот е

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Од сличноста на триаголниците $\triangle ABC$ и $\triangle BEC$ добиваме дека



$$\overline{EC}:\overline{BC} = \overline{BC}:\overline{AC},$$

т.е.

$$\overline{EC} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Од сличноста на триаголниците $\triangle ADC$ и $\triangle DFA$ добиваме дека

$$\overline{FA}:\overline{AD} = \overline{AD}:\overline{AC},$$

т.е.

$$\overline{FA} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

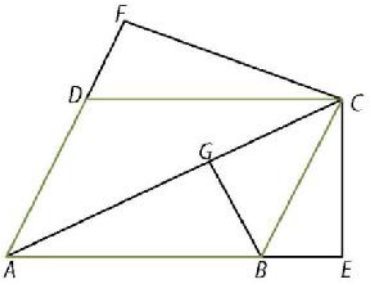
Следува дека

$$\overline{FE} = \overline{AC} - \overline{FA} - \overline{EC} = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

што значи дека нормалите спуштени од две спротивни темиња врз дијагоналата ја делат дијагоналата на три еднакви дела

58. Од темето C на паралелограмот $ABCD$ ($\overline{AC} > \overline{BD}$) повлечени се нормали CE и CF на продолженијата на страните AB и AD. Докажи дека $\overline{AB}\cdot\overline{AE} + \overline{AD}\cdot\overline{AF} = \overline{AC}^2$.

Решение. Нека G е подножјето на нормалата повлечена од B на AC (цртеж десно). Правоаголните триаголници AEC и ABG имаат заеднички остар агол, па затоа тие се слични. Од оваа сличност следува



$$\overline{AB}:\overline{AG}=\overline{AC}:\overline{AE}\,.$$

Правоаголнте триаголници AFC и CGB се исто така слични ($\angle FAC$ и $\angle BCA$ се еднакви), па затоа важи

$$\overline{AC}:\overline{AF}=\overline{BC}:\overline{CG}=\overline{AD}:\overline{CG}\,.$$

Од претходните две пропорции следува

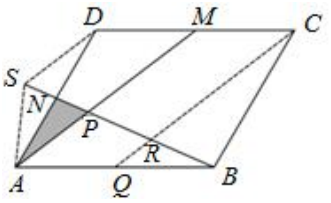
$$\overline{AB}\cdot\overline{AE}=\overline{AG}\cdot\overline{AC}\ \text{ и }\ \overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}\cdot\overline{CG}\,.$$

Ако ги собереме овие равенства, добиваме

$$\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AG}\cdot\overline{AC}+\overline{AC}\cdot\overline{CG}=\overline{AC}(\overline{AG}+\overline{CG})=\overline{AC}^2\,.$$

59. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека точката M е средина на страната CD, а точката N е средина на страната AD. Правите AM и BN се сечат во точката P. Колкав дел од плоштината на паралелограмот $ABCD$ е плоштината на триаголникот ANP?

Решение. Нека S е точка на правата BN, така што N е средина на отсечката PS. Отсечките AD и PS се преполовуваат, па затоа четириаголникот $APDS$ е паралелограм. Нека Q е средината на страната AB. Од $\overline{AQ}=\overline{MC}$ и $AQ\parallel MC$ следува дека четириаголникот $AQCM$ е паралелограм. Според тоа, $CQ\parallel MA\parallel DS$. Понатаму, од $\overline{BQ}=\overline{QA}$ следува $\overline{BR}=\overline{RP}$, а од $\overline{CM}=\overline{MD}$ следува $\overline{RP}=\overline{PS}$. Според тоа, $\overline{BR}=\overline{RP}=\overline{PS}$. Но, $\overline{PS}=2\overline{PN}$, па затоа $\overline{BN}=\overline{BR}+\overline{RP}+\overline{PN}=2\overline{PN}+2\overline{PN}+\overline{PN}=5\overline{PN}$. Последното значи дека $h_B=5h_P$, каде h_B е висината на паралелограмот, а h_P е висината во триаголникот ANP. Според тоа,

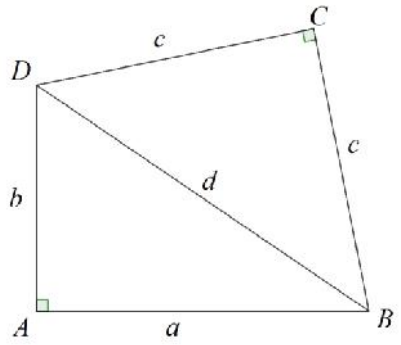


$$P_{ABCD}=\overline{AD}\cdot h_B=2\overline{AN}\cdot 5h_P=20\cdot\frac{\overline{AN}\cdot h_P}{2}=20P_{APN}\,,$$

т.е. $P_{APN}=\frac{1}{20}P_{ABCD}$.

60. Даден е четириаголник $ABCD$, така што збирот на должините на страните AB и AC е $10\,cm$, $\overline{BC}=\overline{CD}$ и $\measuredangle BAD=\measuredangle ACD=90^\circ$. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Ги воведуваме ознаките $\overline{AB}=a, \overline{AD}=b, \overline{BC}=\overline{CD}=c,$ $\overline{BD}=d$ и $P_{ABCD}=P$.



Тогаш

$$P=P_{\triangle BAD}+P_{\triangle BCD},$$

$$P=\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}.$$

Од Питагоровата теорема следува

$$d^2=c^2+c^2 \text{ и } d^2=a^2+b^2,$$

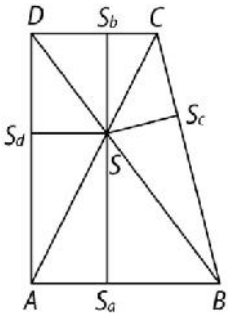
односно $2c^2=a^2+b^2$. Значи,

$$P=\frac{ab}{2}+\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(a+b)^2}{4}$$

и како $a+b=10$, добиваме $P=\frac{10^2}{4}=25\,cm^2$.

61. Основите на правоаголен трапез се $20\,cm$ и $30\,cm$, а висината е $40\,cm$. Определи ги растојанијата од пресекот на дијагоналите на тој трапез до неговите страни.

Решение. Нека $ABCD$ е даденият трапез, S е пресекот на дијагоналите, а $\overline{SS_a}, \overline{SS_b}, \overline{SS_c}$ и $\overline{SS_d}$ се бараните растојанија (цртеж десно).



Триаголниците ABS и CDS се слични (еднакви соодветни агли) со коефициент на сличност $3:2$. Според тоа, $\overline{SS_a}:\overline{SS_b}=3:2$, од каде доби-ваме $\overline{SS_a}=\frac{3}{5}\overline{AD}, \overline{SS_b}=\frac{2}{5}\overline{AD}$, па затоа $\overline{SS_a}=24\,cm$, $\overline{SS_b}=1\,cm$. Плоштините на триаголниците ABD и ABC се еднакви (заедничка основа и еднакви соодветни висини), па се еднакви и плоштините на триаголниците ASD и BSC. Понатаму,

$P_{ABCD}=1000\,cm^2$, $P_{ABS}=\frac{30\cdot 24}{2}=360\,cm^2$,

$P_{CDS}=\frac{20\cdot 16}{2}=160\,cm^2$, $P_{ADS}=P_{BCS}=\frac{1000-360-160}{2}=240\,cm^2$.

Сега, од триаголникот ASD добиваме $\overline{SS_d}=\frac{2P_{ASD}}{\overline{AD}}=12\,cm$. Понатаму, имаме

$\overline{BC}^2=(\overline{AB}-\overline{CD})^2+\overline{BD}^2=(30-20)^2+40^2=1700$, т.е. $\overline{BC}=10\sqrt{17}\,cm$.

Конечно, од триаголникот BCS имаме $\overline{SS_C}=\frac{2P_{BCS}}{\overline{BS}}=\frac{48\sqrt{17}}{17}\,cm$. Значи, бараните растојанија се $24\,cm, 16\,cm, 12\,cm$ и $\frac{48\sqrt{17}}{17}\,cm$.

62. На страната AB на триаголникот ABC е земена произволна точка D. Нека правата p која минува низ точката D и е паралелна со BC ја сече AC во точката E, а правата q која минува низ точката D и е паралелна со AC ја сече BC во точката F. Докажи дека

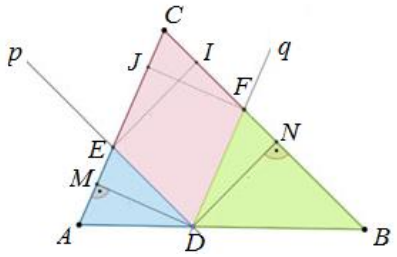
$$P_{CEDF}=2\sqrt{P_{ADE}\cdot P_{BDF}}\,.$$

Решение. Триаголниците ADE и BDF се слични, па затоа важи

$$\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{DF}:\overline{BF}\,,$$

односно

$$\overline{DE}\cdot\overline{DF}=\overline{AE}\cdot\overline{BF}\,. \qquad (1)$$



Нека DM и DN се висини на триаголниците ADE и BDF. Тогаш за плоштината на паралелограмот $CEDF$ имаме

$$P_{CDEF}=\overline{CE}\cdot\overline{DM}=\overline{DF}\cdot\overline{DM}\,, \qquad (2)$$

одосно

$$P_{CDEF}=\overline{CF}\cdot\overline{DN}=\overline{DE}\cdot\overline{DN}\,, \qquad (3)$$

Ако ги помножиме (2) и (3) и го искористиме (1) последователно добиваме

$$P_{CDEF}^2=\overline{DF}\cdot\overline{DM}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{DN}=\overline{DF}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{BF}\cdot\overline{DN}$$
$$=4\cdot\frac{\overline{DF}\cdot\overline{AE}}{2}\cdot\frac{\overline{BF}\cdot\overline{DN}}{2}=4\cdot P_{ADE}\cdot P_{BDF}\,,$$

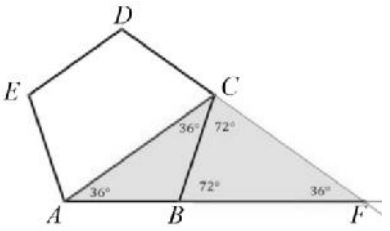
од каде следува равенството $P_{CEDF}=2\sqrt{P_{ADE}\cdot P_{BDF}}$.

63. Даден е правилен петаголник $ABCDE$. Полуправите AB и DC се сечат во точката F. Докажи дека $\overline{FB}=\overline{AC}$.

Решение. Збирот на внатрешните агли на петаголникот е

$$(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ,$$

па затоа внатрешниот агол на правилниот петаголник е $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Од $\overline{AB} = \overline{BC}$ следува дека триаголникот е рамнокрак, па затоа важи $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.



Понатаму, $\measuredangle BCF$ и $\measuredangle CBF$ се надворешни агли на правилниот петаголник, па затоа

$$\measuredangle BCF = \measuredangle CBF = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Според тоа, триаголникот BFC е рамнокрак и важи $\overline{FB} = \overline{FC}$. Понатаму, $\measuredangle BFC = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ$ и како $\measuredangle BAC = 36^\circ$ заклучуваме дека триаголникот AFC е рамнокрак. Затоа, $\overline{FC} = \overline{AC}$. Конечно, од $\overline{FB} = \overline{FC}$ и $\overline{FC} = \overline{AC}$ следува $\overline{FB} = \overline{AC}$, што и требаше да се докаже.

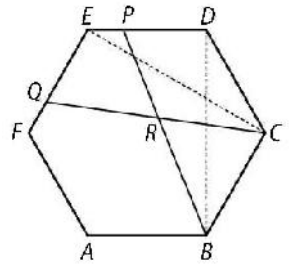
64. Нека P и Q се точки на страните DE и EF, соодветно, на правилниот шестаголник $ABCDEF$ за кои важи дека збирот $\overline{EP} + \overline{EQ}$ е еднаков на страната на шестаголникот. Нека R е пресекот на отсечките BP и CQ.

а) Определи ја мерката на $\measuredangle BRC$.

б) Докажи дека плоштините на триаголникот BCR и четириаголникот $PRQE$ се еднакви.

Решение. а) Од условот дека $\overline{EP} + \overline{EQ}$ е еднаков на страната на шестаголникот следува $\overline{DP} = \overline{EQ}$. Триаголниците BDP и CEQ се складни (правоаголни триаголници со еднакви катети), па затоа важи $\measuredangle BPD = \measuredangle CQE$. Од равенството

$$\measuredangle EQR + \measuredangle EPR = \measuredangle BDP + \measuredangle BPE = 180^\circ$$



следува дека четириаголникот $PRQE$ е тетивен, па затоа важи

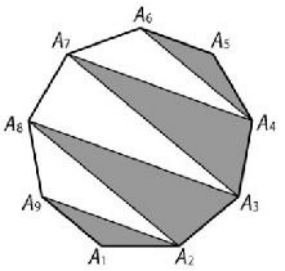
$$\measuredangle BRC = \measuredangle PRQ = 180^\circ - \measuredangle PEQ = 60^\circ.$$

б) Четириаголниците $BCPD$ и $CDEQ$ се складни (еднакви страни и

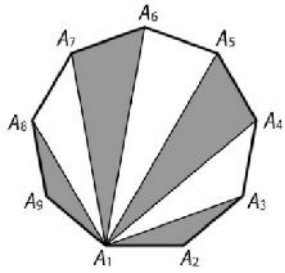
внатрешни агли), па затоа имаат еднакви плоштини. Според тоа:

$$P_{BRC} = P_{BCDP} - P_{CDPR} = P_{CDEQ} - P_{CDPR} = P_{PRQE}\,.$$

65. Во правилен деветаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ е повлечена искршената линија $A_9A_2A_8A_3A_7A_4A_6$. Таа деветаголникот го дели на 7 делови (види цртеж). Секој триаголник е обоен во една од две бои – сива или бела, при што секои два триаголника со заедничка страна се обоени со различни бои. Притоа се добиени четири сиви и три бели триаголници. Кој дел од многуаголникот има поголема плоштина – белиот или сивиот?



Решение. Да ги повлечеме и дијагоналите A_9A_3, A_8A_4, A_7A_5 (цртеж десно). Нека P, Q, R се содветно пресечните точки на A_9A_3 и A_8A_2, A_7A_3 и A_8A_4, A_7A_5 и A_4A_6. Четириаголниците $A_8A_3A_2A_9$, $A_7A_4A_3A_8$ и $A_6A_5A_4A_7$ се трапези, а четириаголниците $A_1A_9PA_2$, PA_3QA_8 и QA_4RA_7 се паралелограми. Сега можеме да имаме шест парови триаголници ($A_1A_9A_2$, PA_2A_9), (PA_9A_8, PA_2A_3), (PA_8A_3, QA_8A_3), (QA_8A7, QA_3A_4), (QA_7A_4, RA_7A_4), (RA_7A_6, RA_4A_5). Во секој пар триаголниците се со еднакви плоштини, при што едниот е бел, а другиот е сив. Единствен дел од деветаголникот кој не е покриен со овие триаголници е триаголникот RA_5A_6, кој е сив. Затоа сивата површина има поголема плоштина и разликата меѓу плоштините на сивата и белата површина е еднаква на површината на триаголникот RA_5A_6.



66. Во правилен деветаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ се повлечени сите дијагонали од темето A_1. Тие деветаголникот го делат на 7 делови (види цртеж). Секој триаголник е обоен во една од две бои – сива или бела, при што секои два триаголника со заедничка

страна се обоени со различни бои. Притоа се добиени четири сиви и три бели триагол-ници. Кој дел од многуаголникот има поголема плоштина – белиот или сивиот?

Решение. Да ја споредиме поделбата од задачата со поделбата на деветаголникот од претходната задача. Лесно се гледа дека важи

$\overline{A_1A_3} = \overline{A_9A_2}$, $\overline{A_1A_4} = \overline{A_2A_8}$, $\overline{A_1A_5} = \overline{A_8A_3}$, $\overline{A_1A_6} = \overline{A_3A_7}$, $\overline{A_1A_8} = \overline{A_4A_6}$.

Да ги формираме следниве парови триаголници:

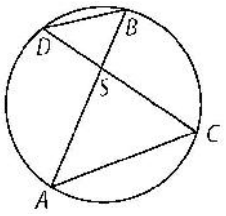
$(A_1A_2A_9, A_1A_2A_3)$, $(A_1A_3A_4, A_9A_2A_8)$, $(A_1A_4A_5, A_8A_2A_3)$,

$(A_1A_5A_6, A_3A_8A_7)$, $(A_1A_6A_7, A_7A_3A_4)$, $(A_1A_7A_8, A_4A_7A_6)$ и

$(A_1A_8A_9, A_4A_5A_6)$.

В секој од седумте парови се наоѓаат по два складни еднакво обоени триаголници, при што првиот е од поделбата во задачата, а вториот е од поделбата во претходната задача. Сега, од претходната задача следува дека сивата површина има поголема плоштина.

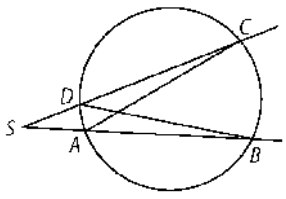
67. Дадени се кружница $k(O, 4\,cm)$ и негови тетиви AB и CD кои се сечат во точката S. Пресметај ја должината на отсечката DS ако $\overline{AS} = 4\,cm$, $\overline{BS} = 2\,cm$ и $\overline{CS} = 3\,cm$.



Решение. Имаме $\angle ASC = \angle BSD$ (накрсни агли) и како $\angle CAB = \angle BDC$ (периферискиагли над тетивата BC), односно $\angle CAS = BDS$, следува дека $\triangle ASC \sim \triangle BSD$ (два пара еднакви агли). Од добиената сличност следува $\overline{AS} : \overline{SC} = \overline{DS} : \overline{SB}$, па затоа $4 : 3 = \overline{DS} : 2$, т.е. $\overline{DS} = \frac{4 \cdot 2}{3}\,cm = \frac{8}{3}\,cm$.

68. Дадена е кружница $k(O, r)$ и точки A, B, C, D на неа такви што правите AB и CD се сечат во точката S. Докажи дека

$$\overline{AS} \cdot \overline{BS} = \overline{CS} \cdot \overline{DS}. \qquad (1)$$

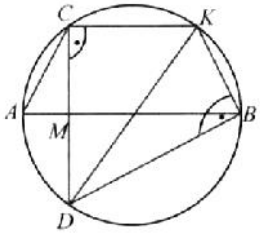


Решение. Ако точката S е во внатрешноста на кружницата, тогаш равенството (1) следува од решението на претходната задача. Нека точката S е надвор од кружницата (цртеж десно). Тогаш $\angle ASC = \angle BSD$ и $\angle ACS = \angle DBS$ (периферискиагли над ист лак), па затоа $\triangle ASC \sim \triangle DBS$. Од сличноста на овие триаголници сле-

дува равенството $\overline{AS}:\overline{CS}=\overline{DS}:\overline{BS}$, кое е еквивалентно со равенството (1).

69. Тетивите AB и CD на една кружница се заемно нормални и се сечат во точката M. Докажи дека збирот $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2$ е константен за било кој избор на тетивите AB и CD.

Решение. Низ точката C повлекуваме права паралелна со AB која кружницата по втор пат ја сече во точката K. Од $\measuredangle KCD=90^\circ$ следува дека KD е дијаметар на кружницата. Тоа значи дека $\measuredangle KBD=90^\circ$, па како $ABCD$ е рамнокрак трапез имаме $\overline{KB}=\overline{AC}$. Сега, ако со r го означиме радиусот на кружницата, од Питагоровата теорема следува



$$\overline{MA}^2+\overline{MC}^2+\overline{MB}^2+\overline{MD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{KB}^2+\overline{BD}^2$$
$$=\overline{KD}^2=(2r)^2=\text{const},$$

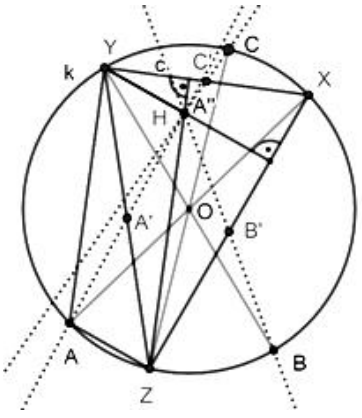
што и требаше да се докаже.

70. На кружница k се избрани три точки A,B,C и нека X,Y,Z соодветно се нивните дијаметрално спротивни точки во k. Нека A',B',C' се средините на тетивите YZ,ZX,XY соодветно. Докажи дека правите AA',BB',CC' се сечат во една точка.

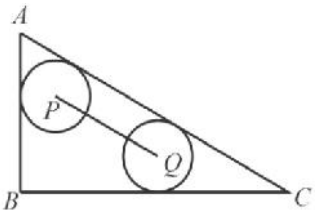
Решение. Со A'' ја означуваме сликата на точката A при централна симетрија во однос на A'. Тогаш $YAZA''$ е четириаголник чии дијагонали се половат во пресечната точка A'; па затоа $YAZA''$ е паралелограм. Според тоа, $A''Y \parallel AZ$ и $A''Z \parallel AY$. Бидејќи

$$\measuredangle XYA=\measuredangle XZA=90^\circ,$$

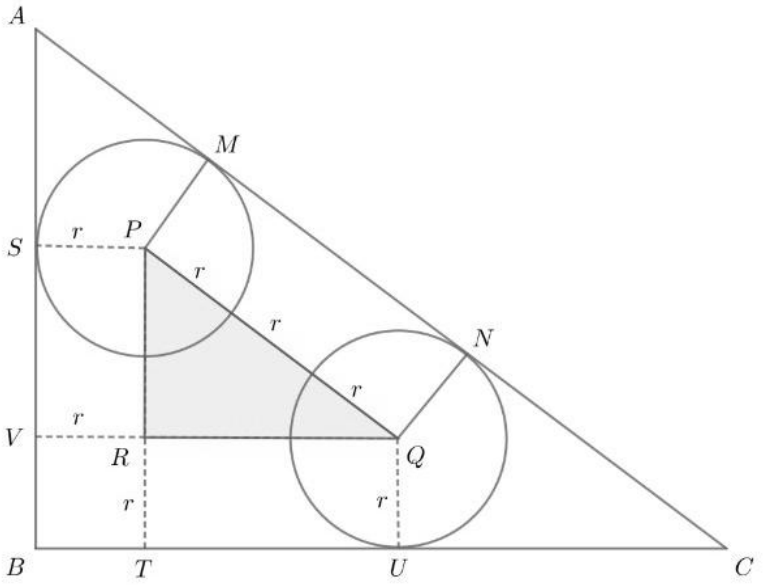
следува $A''Y\perp AZ$ и $A''Z\perp XY$. Значи A'' се совпаѓа со ортоцентарот H на триаголникот XYZ. Слично, правите BB' и CC' минуваат низ точката H.



71. Две кружници со радиус r и центри P и Q се впишани во правоаголен триаголник ABC како на цртежот десно, при што $\overline{AB}=6\,cm$ и $\overline{BC}=8\,cm$. Отсечката PQ со пресечните точки со кружниците е поделена на три еднакви делови. Определи го радисуот r.



Решение. Нека S,M,N и U се допирните точки на кружниците со триаголникот ABC, види цртеж. Имаме $\overline{PQ}=3r$. Од Питагоровата теорема следува:



$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,cm,$$

па затоа $\overline{AM}+3r+\overline{NC}=10$. Нека T е подножјето на нормалата повлечена од P на BC, а V е подножјето на нормалата повлечена од Q на AB и нека R е пресечната точка на PT и QV. Од сличноста на триаголниците ABC и PRQ следува $\overline{AB}:\overline{PR}=\overline{AC}:\overline{PQ}$, од каде добиваме $\overline{PR}=\frac{9r}{5}$ и $\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{RQ}:\overline{PQ}$, од каде добиваме $\overline{RQ}=\frac{12r}{5}$. Понатаму, бидејќи $\overline{SV}=\overline{PR}$, добиваме

$$\overline{AS}=6-(r+\overline{SV})=6-(r+\tfrac{9r}{5})=6-\tfrac{14r}{5}.$$

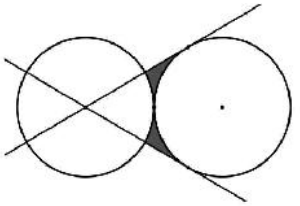
Слично, од $\overline{TU}=\overline{RQ}$ имаме

$$\overline{CU} = 8 - (r + \overline{TU}) = 8 - (r + \tfrac{12r}{5}) = 8 - \tfrac{17r}{5}.$$

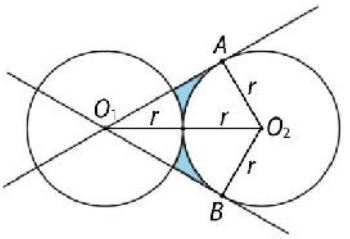
Сега, ако се земе предвид дека $\overline{AM} = \overline{AS}$ и $\overline{NC} = \overline{CU}$, со замена во $\overline{AM} + 3r + \overline{NC} = 10$, добиваме

$$6 - \tfrac{14r}{5} + 3r + 8 - \tfrac{17r}{5} = 10, \text{ т.е. } r = \tfrac{5}{4}\,cm.$$

72. Две кружници со еднакви радиуси се допираат надворешно. Од центарот на едната кружница се повлечени тангенти на другата кружница (види цртеж). Определи ја плоштината на обоениот дел, ако радиусите на кружниците се еднакви на r.



Решение. Да означиме како на цртежот десно. Правоаголните триаголници O_1O_2A и O_1O_2B имаат еднакви катети, па затоа тие се складни. Нивните катети се со должини r и $r\sqrt{3}$, па затоа плоштината на четириаголникот O_1AO_2B е $P_{\square} = r^2\sqrt{3}$. Понатаму, правоаголниот триаголник O_1O_2A има хипотенуза $2r$ и катета r, па затоа тој е половина од рамностран триаголник. Според тоа,



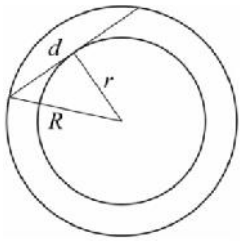
$$\angle O_1O_2A = \angle O_1O_2B = 60^\circ \text{ и } \angle BO_1A = 2\angle AO_1O_2 = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

Значи, плоштината на необоениот дел е еднаква на плоштината на три кружни исечоци со централен агол 60°, односно вкупната плоштина на необоениот дел е $P' = 3\frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi r^2}{2}$.

Конечно, плоштината на обоениот дел е

$$P = P_{\square} - P' = r^2\sqrt{3} - \tfrac{\pi r^2}{2} = r^2(\sqrt{3} - \tfrac{\pi}{2}).$$

73. Дадени се две концентрични кружници. Тетива со должина d на по-големата кружница ја допира помалата кружница. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен кој е определен со овие две кружници.



Решение. Нека r и R се радиусите на малата и

големата кружница, соодветно. Од Питагоровата теорема следува

$$(\frac{d}{2})^2 = R^2 - r^2,$$

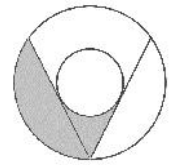
па затоа плоштината на кружниот прстен е еднаква на

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi d^2}{2}.$$

74. Правилен седумаголник и правилен 2014-аголник имаат еднакви должини на страни. Ги разгледуваме кружните прстени определени со опишаната и впишаната кружница на седумаголникот и на 2014-аголникот. Кој од овие два кружни прстени има поголема плоштина?

Решение. Нека a е должината на страната на правилниот седумаголник и правилниот 2014-аголник. И во едниот и во другиот случај страната на многуаголникот е тетива на опишаната кружница која ја допира впишаната кружница. Според претходната задача плоштината на кружниот прстен во двата случаи е еднаква на $\frac{\pi a^2}{2}$, што значи дека двата прстена имаат еднакви плоштини.

75. Радиусите на концентричните кружници кои формираат кружен прстен прикажан на цртежот десно имаат должини r и $2r$. Одреди го односот на плоштините на осенчениот и неосенчениот дел од кружниот прстен.

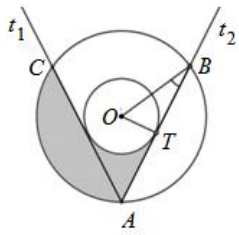


Решение. Нека A, B и C се заеднички точки на поголемата кружница и тангентите t_1 и t_2 на помалата кружница и нека T е точка во која t_1 ја допира помалата кружница. Бидејќи $\overline{OB} = 2\overline{OT}$, важи $\sphericalangle OBT = 30°$, па според тоа $\sphericalangle BAC = 60°$. Имено,

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OAC = 2\sphericalangle OAB = 2\sphericalangle OAT = 2\sphericalangle OBT.$$

Да забележиме дека при првото равенство е искористено дека правата OA е оска на симетрија на целата геометриска конфигурација. Од истата симетрија имаме дека $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Значи, триаголникот ABC е рамностран, па отсечоците на поголемиот круг се еднакви. Бидејќи T е средна точка на отсечката AB, заклучуваме дека помалата кружница е впишана во траголникот ABC.

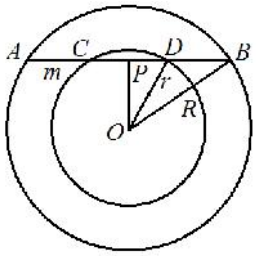


Следствено, обоениот дел на кружниот прстен е

третина од целиот прстен, па плоштиите на обоениот и необоениот дел на овој прстен се однесуваат како 1:2.

76. Дадени се две концентрични кружници. Тетивата AB на поголемата кружница со помалата кружница е поделена на три еднакви делови со точки C и D (C е меѓу A и D). Ако $\overline{AC} = m$, пресметај ја плоштината на прстенот определен со двете кружници, во зависност од m.

Решение. Нека P е подножјето на нормалата повлечена од центарот O на тетивата AB (види цртеж). Од $\overline{CD} = m$ следува



$$\overline{PD} = \frac{m}{2} \text{ и } \overline{PB} = \frac{m}{2} + m = \frac{3m}{2}.$$

Нека r и R се радиусите на помалата и поголемата кружница, соодветно. Од Питагоровата теорема следува

$$d^2 + \overline{PB}^2 = R^2, \text{ т.е. } d^2 + \frac{9m^2}{4} = R^2,$$

и

$$d^2 + \overline{PD}^2 = r^2, \text{ т.е. } d^2 + \frac{m^2}{4} = r^2.$$

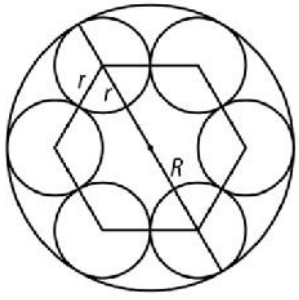
Според тоа,

$$d^2 + \frac{9m^2}{4} - d^2 - \frac{m^2}{4} = R^2 - r^2,$$

од каде следува $2m^2 = R^2 - r^2$. Според тоа, плоштината на бараниот прстен е $P = ®(R^2 - r^2) = 2m^2®$.

77. Во круг со радиус R се впишани шест еднакви мали кругови секој од кои надворешно допира два мали круга и сите внатрешно го допираат големиот круг. Определи го радиусот на еден таков мал круг.

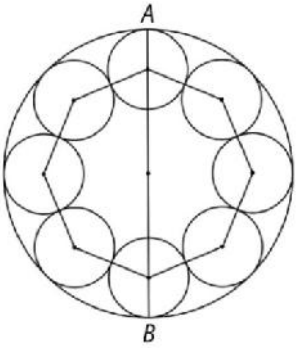
Решение. Центрите на малите кругови, кои го задоволуваат условот на задачата, определуваат правилен шестаголник со страна $2r$, каде со r го означивме радиусот на малите кругови (цртеж десно). Сега, бидејќи радиусот на опишаната кружница околу правилниот шестаголник е еднаков на $2r$, за радиусот на големата кружница-



та добиваме $R = 2r + r = 3r$,

78. Во кружница со радиус R се впишани 8 еднакви мали кружници така што секоја од нив надворешно допира по две мали кружници и сите внатрешно ја допираат големата кружница. Определи го радиусот на една таква мала кружница.

Решение. Центрите на малите кружници со радиуси r кои ги задоволуваат условите на задачата се темиња на правилен осумаголник со должина на страна $2r$. Најголемата дијагонала на овој осумаголник D припаѓа на дијаметарот AB, $\overline{AB} = 2R$ на големата кружница (види цртеж). Бидејќи $D = 2r\sqrt{2\sqrt{2}+4}$, каде $2r$ е страната на осумаголникот, добиваме дека



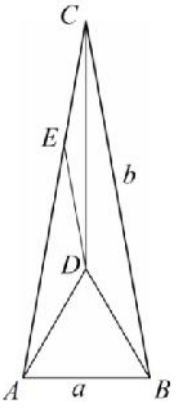
$$2R = D + 2r = 2r\sqrt{2\sqrt{2}+4} + 2r ,$$

од каде добиваме

$$r = \frac{R}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}+1} = R(\sqrt{2\sqrt{2}+4} - 1)(3 - 2\sqrt{2}) .$$

79. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b, аголот при врвот е еднаков на 20°. Докажи дека $b < 3a$.

Решение. *Прв начи*н. Нека е даден рамнокракиот триаголник ABC со врв C . Нека D е внатрешна точка за овој триаголник таква што триаголникот ABD е рамностран, чии должини на страни се еднакви на a . Аглите на триаголникот ADC се еднакви на $20^\circ, 10^\circ$ и 150° . Повлекуваме полуправа со почеток во точката D која со полуправата DC зафаќа агол од 10° и нека оваа полуправа го сече кракот AC во точката E . Триаголниците ADE и DCE се рамнокраки со краци еднакви на a . Јасно,

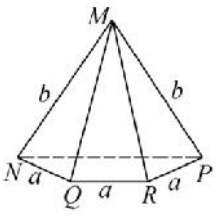


$$b = \overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} < \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EC} = 3a ,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Со дадениот триаголник да го формираме петаголникот

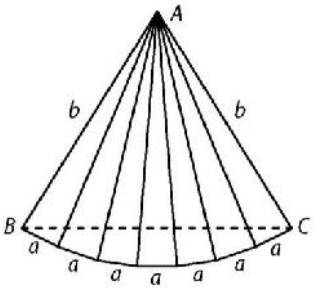
$MNQRP$ прикажан на цртежот десно. Аголот меѓу двете најголеми соседни страни еднакви на b е еднаков на 60°, а другите три страни се еднакви на a. Значи, триаголникот MNP е рамностра, што значи дека $\overline{NP}=b$. Според тоа,



$$b=\overline{NP}<\overline{NQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=3a.$$

80. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b, аголот при врвот е 9°. Докажи дека $b<7a$.

Решение. Со дадениот триаголник да формираме деветаголник како што е прикажано на цртежот десно и да го разгледаме рамнокракиот триаголник ABC. Аголот при темето A на триаголникот ABC е еднаков на $7\cdot 9=63^\circ$, па затоа $\overline{BC}>\overline{AB}$. Од друга страна $\overline{BC}<7a$, па од послединте две неравенства следува $b<7a$, што и требаше да се докаже.



81. Од сите правоаголни триаголници кои имаат збир на должините на катетите еднаков на S определи го триаголникот кој има најголема плоштина.

Решение. Нека a и b се должините на катетите на правоаголниот триаголник. Тогаш $a+b=S$, а неговата плоштина е $P=\frac{ab}{2}$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\sqrt{2P}=\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{S}{2}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=\frac{S}{2}$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен и тогаш за најголемата можна плоштина важи $\sqrt{2P}=\frac{S}{2}$, односно таа е $P=\frac{S^2}{8}$.

82. Од сите правоаголни триаголници со хипотенуза со должина c определи го оној кој има најголем збир на должините на катетите.

Решение. Нека a и b се должините на катетите на правоаголен

триаголник со хипотенуза со должина c. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } a+b \le c\sqrt{2},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Според тоа, најголем збир на должините на катетите има рамнокракиот правоаголен триаголник и тогаш $a+b=c\sqrt{2}$

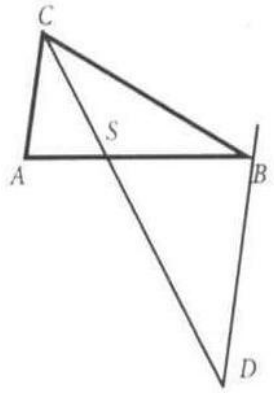
83. На страната AB на $\triangle ABC$ дадена е точка S таква што $\overline{AS}:\overline{SB}=m:n$, $m,n\in\mathbb{N}$. Докажи дека

$$\overline{SC} < \frac{n}{m+n}\overline{AC} + \frac{m}{m+n}\overline{BC}.$$

Решение. Нека точката D е пресек на правата која минува низ точките C и S и правата која минува низ точката B и е паралелна со AC. Триаголниците ASC и BSD се слични, па затоа

$$\overline{AC}:\overline{BD}=\overline{SC}:\overline{SD}=m:n.$$

Значи, $\overline{BD}=\frac{n}{m}\overline{AC}$ и $\overline{SD}=\frac{n}{m}\overline{SC}$. Од триаголникот BCD следува $\overline{DC}<\overline{BC}+\overline{BD}$, па затоа



$$\frac{n}{m}\overline{SC}+\overline{SC} < \overline{BC}+\frac{n}{m}\overline{AC},$$

односно

$$\frac{m+n}{m}\overline{SC} < \overline{BC}+\frac{n}{m}\overline{AC}.$$

Оттука следува

$$\overline{SC} < \frac{n}{m+n}\overline{AC}+\frac{m}{m+n}\overline{BC}.$$

84. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен триаголник со прав агол во темето C и M е произволна точка на хипотенузата AB. Нека точките E и D се ортогонални проекции на точката M врз катетите BC и AC, соодветно. Ако a,b се дожините на катетите на $\triangle ABC$ докажи дека

$$\overline{DE} \ge \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (*)$$

Кога важи знак за равенство?

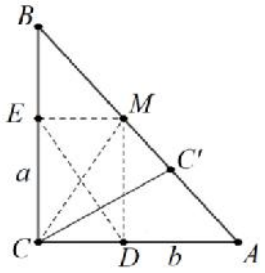
Решение. Четириаголникот $CDME$ е правоаголник, па затоа должините на неговите дијагонали $\overline{CM}$ и $\overline{DE}$ се еднакви. Нека C' е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C (види цртеж).

Тогаш

$$\overline{DE} = \overline{CM} \geq \overline{CC'}. \tag{1}$$

Од сличноста на $\triangle ACB$ и $\triangle AC'C$ следува

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{CC'},$$



т.е.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CC'} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}.$$

Но, според Питагоровата теорема имаме $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$, па затоа важи

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \overline{CC'} = ab,$$

односно

$$\overline{CC'} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) следува неравенството (*). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\overline{CM} = \overline{CC'}$, т.е. ако и само ако точката M е подножната точка на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB.

5.2. СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. Дадена е рамнина $\sim$ и точки A и B од различни страни на рамнината, така што правата која минува низ точките A и B не е нормална на рамнината. Ако растојанијата од точките A и B до рамнината $\sim$ се $1\,cm$ и $5\,cm$, соодветно, колкаво е растојанието од средината на отсечката AB до рамнината $\sim$?

   Решение. Нека C е средината на отсечката AB и нека точките A',B',C' се редоследно нормалните проекции на точките A,B,C врз рамнината $\sim$. Нека B'' е подножјето на нормалата повлечена од точката B на правата AA', а C'' е средината на отсечката $B''A$. Бидејќи $B''BB'A$ е правоаголник, добиваме дека $\overline{B''A'}=5\,cm$, па затоа $\overline{B''A}=6\,cm$. Оттука следува $\overline{C''A}=3\,cm$, а $\overline{C''A'}=2\,cm$. Бидејќи $C''C$ е средна линија на триаголникот $B''BA$, важи $C''C \| B''B$, а оттука следува дека $C''CC'A'$ е правоаголник. Затоа $\overline{CC''}=\overline{C''A'}$ и растојанието од точката C до рамнината $\sim$ е $2\,cm$.

2. Дадена е рамнина $\sim$ и точки A и B од иста страна на $\sim$. Од другата страна на рамнината $\sim$ е дадена точка C, при што точките A,B и C не се колинеарни. Ако точките A,B и C се на растојание од рамнината $\sim$ редоследно $9\,cm,8\,cm$ и $2\,cm$, определи го растојанието на тежиштето на триаголникот ABC од рамнината $\sim$.

   Решение. Нека A_1 е средината на отсечката BC. Аналогно како во решението на претходната задача добиваме дека точката A_1 се наоѓа на иста страна од рамнината $\sim$ како и точката A и дека A_1 е на растојание $3\,cm$ од $\sim$. Со T,A',A_1' и T' редоследно да ги означиме тежиштето на триаголникот ABC и нормалните проекции на точките A,A_1 и T на рамнината $\sim$. Четириаголникот $A'A_1'A_1A$ е правоаголен трапез. Тежиштето T ја дели отсечката AA_1 во однос $2:1$, а $TT' \| AA' \| A_1A_1'$. Низ точката A_1 повлекуваме права паралелна на отсечката $A'A_1'$. Нека пресекот на оваа права со AA' е точката A'', а со TT' е точката T''. Четириаголникот $A'A_1'A_1A''$ е правоаголник и затоа

$\overline{A'A''} = \overline{A_1'A_1} = 3\,cm$. Оттука добиваме $\overline{AA''} = \overline{AA'} - \overline{A'A''} = 6\,cm$. Триаголниците $A''A_1A$ и $T''A_1T$ се слични, па како $\overline{TA_1} : \overline{AA_1} = 1:3$ следува $\overline{TT''} = 2\,cm$. Заради $\overline{T'T''} = \overline{A_1'A_1} = 3\,cm$ конечно добиваме дека тежиштето на триаголникот ABC од рамнината ~ е на растојание од $5\,cm$.

3. Во рамнината ~ е даден рамностран триаголник ABC со должина на страна a. Точката S е надвор од рамнината ~ и од секоја од точките A, B и C е оддалечена $2a$. Определи го растојанието од точката S до рамнината ~.

   Решение. Нека S' е проекција на точката S брз рамниата ~. Од $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = 2a$, следува дека триаголниците ASS', BSS', CSS' се складни (правоаголни триаголници со заедничка катета и еднакви хипотенузи). Од складност следува $\overline{AS'} = \overline{BS'} = \overline{CS'}$, што значи дека S' е тежиште на рамностраниот триаголник ABC. Од Питагоровата теорема применета на правоаголниот триаголник ASS' следува:

$$\overline{SS'}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{AS'}^2 = (2a)^2 - (\tfrac{a\sqrt{3}}{3})^2 = 4a^2 - \tfrac{a^2}{3} = \tfrac{11}{3}a^2 .$$

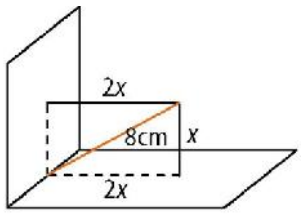
   Според тоа, бараното растојание е $a\sqrt{\tfrac{11}{3}}$.

4. Во рамнината ~ е даден рамностран триаголник ABC со должина на страна a. Пресекот на рамнините ~ и е правата AB, при што аголот меѓу рамниниte ~ и е 45°. Определи го растојанието од тежиштето на триаголникот ABC до рамнината .

   Решение. Нека T' е нормалната проекција на тежиштето T на триаголникот ABC врз рамнината . Растојанието од тежиштето T на триаголникот ABC до правата AB е еднакво на $\overline{TC'} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, каде C' е средината на AB. Во рамнокракиот правоаголен триаголник $C'TT'$ отсечката TC' е хипотенуза, па затоа $\overline{TT'} = \overline{TC'} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

5. Точката A од едниот ѕид на прав диедар е оддалечена два пати повеќе отколку од другиот ѕид. Определи ја оддалеченоста на точката A од ѕидовите на диедарот ако таа од неговиот раб е оддалечена $8\,cm$.

Решение. Ако растојанието на точката до едниот ѕид на диедарот е x, тогаш растојанието до другиот ѕид е $2x$ (цртеж десно). Сега, од правоаголниот триаголник чии катети се x и $2x$, а хипотенуза е $8\,cm$, добиваме $x^2+4x^2=64$, односно



$$x=\frac{8\sqrt{5}}{5}\,cm \text{ и } 2x=\frac{16\sqrt{5}}{5}\,cm.$$

6. На различните рабови на прав триедар се дадени точки A,B,C кои од темето S на триедарот се оддалечени редоследно $2\,cm, 3\sqrt{5}\,cm, 6\,cm$. Определи го периметарот на триаголникот ABC.

Решение. Нека $\overline{AS}=2\,cm, \overline{BS}=3\sqrt{5}\,cm, \overline{CS}=6\,cm$. Од Питагоровата теорема применета на триаголниците ABS, BCS, CAS редоследно добиваме

$$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{5})^2}=7\,cm,$$
$$\overline{BC}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{5})^2}=9\,cm,$$
$$\overline{CA}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}\,cm.$$

Според тоа, периметарот на триаголникот ABC е

$$L=7+9+2\sqrt{10}=2(8+\sqrt{10})\,cm.$$

7. Точките A,B,C се наоѓаат на различни рабови на прав триедар со теме S. Ако $\overline{AB}=5\,cm, \overline{CS}=6\,cm, \overline{BC}=7\,cm$, пресметај ги аглите на триаголникот ASC.

Решение. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголните триаголници BCS, ABS, ASC редоследно добиваме

$$\overline{BS}=\sqrt{7^2-6^2}=\sqrt{13}, \overline{AS}=\sqrt{5^2-13}=\sqrt{12} \text{ и } \overline{AC}=\sqrt{12+6^2}=2\sqrt{12}.$$

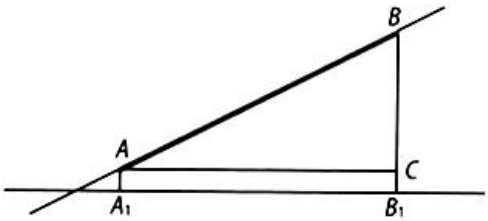
Бидејќи триаголникот ASC е правоаголен кај кој хипотенузата е два пати поголема од едната катета, добиваме дека тој е половина од рамностран триаголник со страна AC. Според тоа, $\measuredangle ACS=30^\circ$ и $\measuredangle CAS=60^\circ$.

8. Правата p на која и припаѓаат точките A и B зафаќа со рамнината

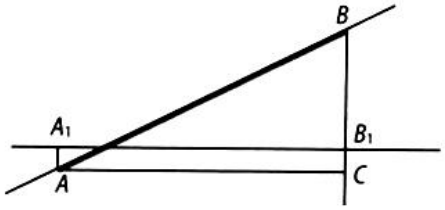
Σ агол од 30°. Должината на отсечката AB е еднаква на $12\,cm$. Ако едната крајна точка на отсечката од рамнината Σ е оддалечена $1\,cm$, пресметај колку од рамнината Σ е оддалечена другата крајна точка.

Решение. Нека A_1 и B_1 се ортогоналните проекции на точките A и B на рамнината Σ, а точката C нека е подножјето на нормалата повлечена од точката A на правата BB_1. Четириаголникот AA_1B_1C е правоаголник, па затоа $\overline{B_1C}=1\,cm$. Триаголникот ABC е правоаголен и $\measuredangle BAC=30^\circ$, па затоа $\overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{2}=6\,cm$. Можни се следниве случаи:

1) Точките A и B се од иста страна на рамнината Σ. Растојанието на точката B до рамнината Σ е еднакво на $\overline{BC}+\overline{CB_1}=7\,cm$.



2) Точките A и B се од различни страни на рамнината Σ. Растојанието на точката B до рамнината Σ е еднакво на $\overline{BC}-\overline{CB_1}=5\,cm$.

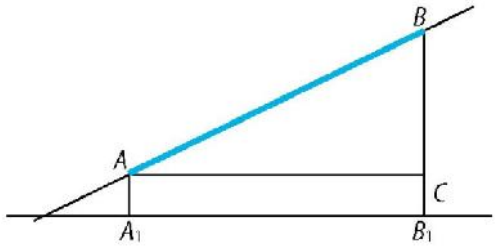


9. Должината на отсечката AB е $12\,cm$. Едниот крај на отсечката е оддалечен $8\,cm$, а другиот е оддалечен $2\,cm$ од рамнината Σ. Пресметај ја должината на проекцијата на отсечката AB врз рамнината Σ.

Решение. Нека се A_1 и B_1 проекциите на точките A и B врз рамнината Σ, а точката C е подножјето на нормалата повлечена од точката A на правата BB_1. Тогаш четириаголникот AA_1B_1C е правоаголник, па затоа $\overline{B_1C}=2\,cm$.

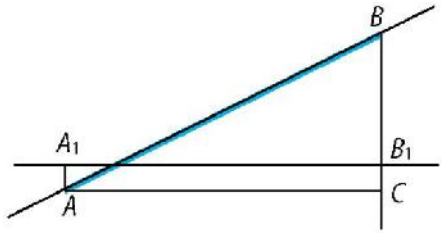
1) Ако се точките A и B од иста страна на рамнината Σ, тогаш $\overline{BC}=6\,cm$. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголни-

от триаголник ACB добиваме $\overline{A_1B_1} = \overline{AC} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}\ cm$.



2) Ако се точките A и B на различна страна на рамнината Σ, тогаш $\overline{BC} = 10\ cm$. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник ACB добиваме

$$\overline{A_1B_1} = \overline{AB} = \sqrt{12^2 - 10^2} = 2\sqrt{11}\ cm.$$



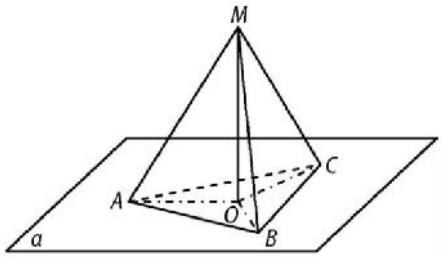
10. Рамнините ~ и зафаќаат агол од 60°. Нивната пресечна права е правата p. Во рамнината е даден рамнокрак трапез $ABCD$ таков што основите на трапезот AB и CD се паралелни со правата p. Ако плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на 2012, колкава е плоштината на четириаголникот $A'B'C'D'$ кој е проекција на трапезот $ABCD$ на рамнината ~.

Решение. Бидејќи правите AB и CD се паралелни со правата p, тие се паралелни со рамнината ~, па затоа $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ и $\overline{C'D'} = \overline{CD}$. Висината на рамнокракиот трапез AM со рамнината ~ зафаќа агол од 60°, па затоа $\overline{A'M'} = \frac{1}{2}\overline{AM}$. Значи, плоштината на трапезот $A'B'C'D'$ е еднаква на половина од плоштината на трапезот $ABCD$, односно на $2012 : 2 = 1006$.

11. Нека ABC е триаголник во рамнината ~ и M е точка надвор од рамнината ~ таква што $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$. Докажи дека нормалата повлечена од точката M на рамнината ~ минува низ центарот на опиша-

ната кружница околу триаголникот ABC.

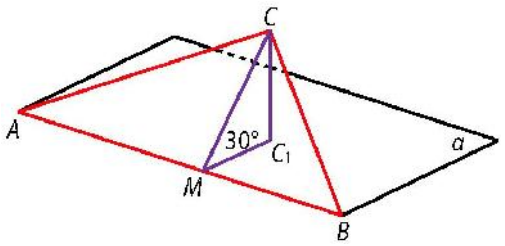
Решение. Нека нормалата повлечена од точката M на рамнината ~ ја прободува рамнината ~ во точката O. Тогаш $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$, $\measuredangle MOA=\measuredangle MOB=\measuredangle MOC=90^\circ$, MO е заедничка катета,



па затоа триаголниците MOA, MOB, MOC се складни. Од складноста следува $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, што значи дека точката O во рамнината на триаголникот е на еднакво растојание од неговите темиња, т.е. таа е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

12. Рамнината ~ ја содржи хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC и со рамнината на триаголникот зафаќа агол од 30°. Определи го растојанието од темето на правиот агол до рамнината ~ ако должините на натетите се $3\,cm$ и $4\,cm$.

Решение. Нека M и C_1 се соодветно подножјата на нормалите повлечени соодветно од темето C на хипотенузата AB и рамнината ~ (цртеж десно). Според тоа, CC_1 е нормална на C_1M и C_1M е нормална на AB (теоремата за три нормали). Должината на хипотенузата на правоаголниот триаголник е $\sqrt{3^2+4^2}=5\,cm$, а должината на висината е $\overline{CM}=\frac{3\cdot 4}{5}=2,4\,cm$. Сега, правоаголниот триаголник CMC_1 е половина од рамностран триаголник со страна $\overline{CM}=2,4\,cm$, па затоа $\overline{CC_1}=1,2\,cm$.



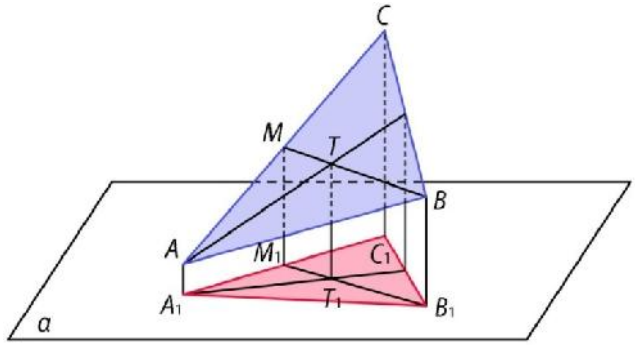
13. Катетата на правоаголниот триаголник ABC, со прав агол во темето C, припаѓа на рамнината ~, а рамнината на триаголникот ABC и рамнината ~ формираат диедар со агол 45°. Ако важи $\overline{AC}=2$ и $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$, определи го растојанието од точката B до рамнината

~ .

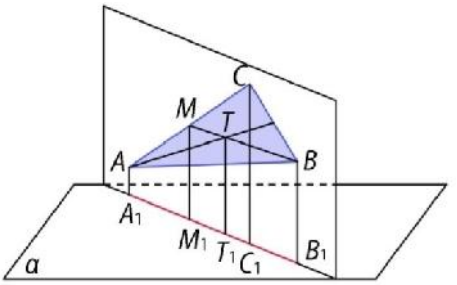
Решение. Од $\overline{AC}=2$ и $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$, со помош на Питагоровата теорема добиваме $\overline{AB}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\overline{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Нека D е подножјето на нормалата од точката B на рамнината ~ . Тогаш $BD\perp CD$ и $AC\perp BC$, па од теоремата за трите нормали следува $AC\perp CD$. Според тоа, аголот на диедарот определен со рамнината на триаголникот ABC и рамнината ~ вусшност е аголот меѓу правите BC и CD, па затоа $\measuredangle BCD=45^\circ$. Значи, триаголникот BCD е рамнокрак правоаголен, со хипотенуза $\overline{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, па затоа должината на катетите е $\overline{BD}=\frac{1}{2}$.

14. Рамнината на триаголникот ABC е во коса положба во однос на рамнината ~ . Темињата A,B,C се на иста страна на рамнината ~ и се на растојание $2\,cm, 4\,cm, 6\,cm$ од рамнината ~ , соодветно. Определи го растојанието од тежиштето на триаголникот ABC до рамнината ~ .

Решение. Нека рамнината на триаголникот е во коса положба спрема рамнината ~ . Бараното растојание на тежиштето T на триаголникот ABC од рамнината ~ е растојанието $\overline{TT_1}$ каде T_1 е ортогоналната проекција на тежиштето T врз рамнината ~ . Нека точката M_1 е ортогоналната проекција на средината M на страната AC врз рамнината ~ (види цртеж). Бидејќи при ортогоналното проектирање се запазува колинеарноста и размерот на отсечките заклучуваме дека отсечката MM_1 е средна линија на правоаголниот трапез AA_1C_1C, односно $\overline{MM_1}=4\,cm$. Според тоа, правата BM е паралелна со рамнината, односно со правата B_1M_1 и растојанието меѓу овие две прави е $4\,cm$, па затоа $\overline{TT_1}=4\,cm$.

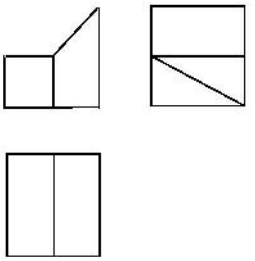


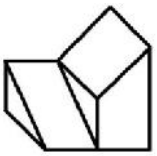
Значи, растојанието од тежиштето на триаголникот ABC до рамнината ~ е еднакво на $4\,cm$.



Рамнината на триаголникот може да биде нормална на рамнината ~ (цртеж лево). На потполно аналоген начин се докажува дека бараното растојание од тежиштето на триаголникот ABC до рамнината ~ е $4\,cm$.

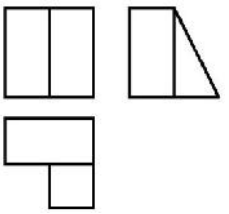
15. На цртежот десно се дадени цртежи на едно тело. Горе лево е цртежот на тоа тело кога се гледа од предната страна, горе десно е даден цртежот кога телото се гледа од левата страна и долу е даден цртежот на телото кога се гледа од горната страна. Нацртај го ова тело.



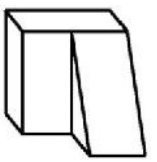


Решение. Телото кое соодветствува на трите цртежи при гледањето од напред, лево и од горе е прикажано на цртежот лево.

16. На цртежот десно се дадени цртежи на едно тело. Горе лево е цртежот на тоа тело кога се гледа од предната страна, горе десно е даден цртежот кога телото се гледа од левата страна и долу е даден цртежот на телото кога се гледа од горната страна. Нацртај го ова тело.



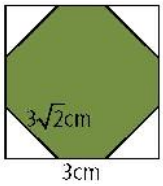
Решение. Телото кое соодветствува на трите цртежи при гледањето од напред, лево и од горе е прикажано на цртежот десно.

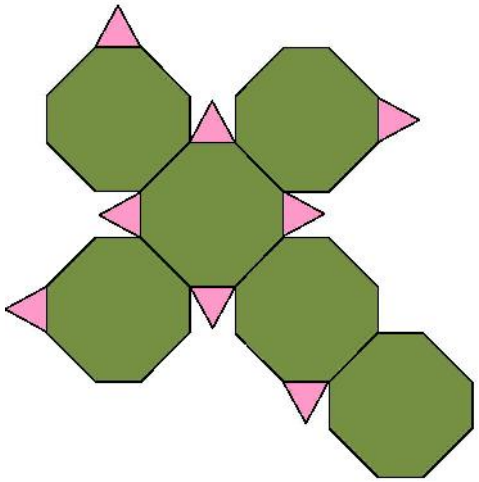


17. Дадена е коцка. Секој раб на коцката е поделен на три еднакви делови. Потоа секое ќоше на коцката е отсечено со рамнината која ги содржи трите точки на поделбата кои се најблиски до тоа ќоше. Нацртај ја мрежата на добиеното тело.

Решение. Добиеното тело е ограничено со осум рамностран

триаголници и шест осумаголници. Нека должината на работ на коцката е $a = 9\,cm$. Тогаш триаголниците се рамностран, бидејќи секоја страна е еднаква на $3\sqrt{2}\,cm$, а осумаголниците се неправилни и секој од нив се добива кога од квадрат со страна $9\,cm$ од секој аго се отсече рамнокрак правоаголен триаголник со катета $3\,cm$ (види цртеж).





Скицата на мрежата на добиеното тело е прикажана на цртежот горе.

18. Односот на плоштините на ѕидовите на даден квадар е $2:3:5$. Определи го односот на должините на рабовите на овој квадар.

Решение. Нека a,b,c се должините на рабовите на квадарот. Тогаш $P_1 = ab, P_2 = bc, P_3 = ca$. Ако е $P_1 : P_2 : P_3 = 2:3:5$, тогаш

$$a : b = P_3 : P_2 = 5:3 = 10:6 \text{ и } b : c = P_1 : P_3 = 2:5 = 6:15,$$

па затоа $a : b : c = 10:6:15$.

19. Определи го односот на должините на рабовите на квадар чии ѕидови со заедничко теме имаат плоштини P_1, P_2 и P_3.

Решение. Нека a,b,c се должините на рабовите на дадениот квадар. Тогаш $P_1 = ab, P_2 = bc, P_3 = ca$, од каде добиваме

$$a : b = P_3 : P_2 = P_3P_1 : P_2P_1,$$
$$b : c = P_1 : P_3 = P_1P_2 : P_3P_2,$$

и затоа важи $a : b : c = P_3P_1 : P_1P_2 : P_2P_3$.

20. Ако размерот на должините на рабовите на квадарот се $15:12:20$, во кој размер се плоштините на неговите различни ѕидови.

Решение. За должините на рабовите a,b,c на квадарот имаме $a:b:c=15:12:20$, па затоа $a=15k, b=12k, c=20k$. Сега,

$$\begin{aligned} ab:bc:ca &= (15k\cdot 12k):(12k\cdot 20k):(20k\cdot 15k)\\ &= 180k^2:240k^2:300k^2\\ &= 3:4:5. \end{aligned}$$

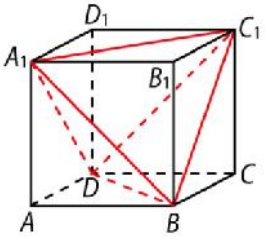
21. Плоштините на три ѕида на квадарот се $24\,cm^2, 28\,cm^2$ и $42\,cm^2$. Определи го волуменот на овој квадар.

Решение. Нека должините на рабовите на квадарот се a,b,c. Тогаш бидејќи дадените плоштини на трите ѕида се различни, добиваме дека тие се еднакви на ab, bc и ca, во некој редослед. Според тоа,

$$\begin{aligned} (ab)(bc)(ca) &= 24\cdot 28\cdot 42,\\ (abc)^2 &= (4\cdot 6)\cdot(4\cdot 7)\cdot(6\cdot 7),\\ (abc)^2 &= (4\cdot 6\cdot 7)^2,\\ abc &= 4\cdot 6\cdot 7, \end{aligned}$$

па затоа волуменот на коцката е $V=abc=4\cdot 6\cdot 7=168\,cm^3$.

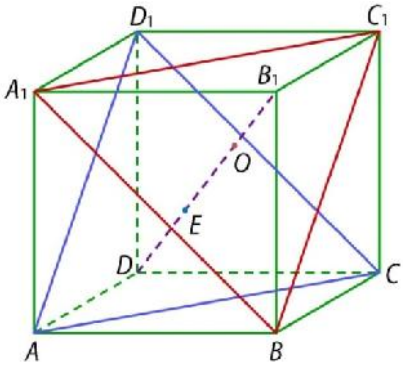
22. Коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е пресечена со рамнините BDA_1, BDC_1, DA_1C_1 и BA_1C_1 на пет тристрани пирамиди. Определи ги должините на рабовите на тие пирамиди ако должината на работ на коцката е a.



Решение. Пирамидите $ABDA_1$, $CBDC_1$, $B_1BA_1C_1$ и $D_1DA_1C_1$ се правилни триастрани пирамиди чии основи се редоследно рамностраните триаголници BDA_1, BDC_1, BA_1C_1 и DA_1C_1 со должини на страни $a\sqrt{2}$. Бочните рабови на овие пирамиди се еднакви на рабовите на коцката, т.е. на a, а аглите при врвот се прави (види цртеж). Сите рабови на пирамидата BDA_1C_1 се еднакви, што значи дека таа е правилен тетраедар.

23. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажи дека рамнините A_1BC_1 и ACD_1 се нормални на дијагоналата B_1D и дека ја делат таа дијагонала на три еднакви дела.

Решение. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е коцка со раб a (цртеж десно). Темето B_1 е еднакво оддалечено од темињата A_1, B и C_1. Исто важи и за темето D. Оттука следува дека правата B_1D е нормална на рамнината A_1BC_1 и ја прободува оваа рамнина во точка O која е центар на триаголникот A_1BC_1. Според тоа, $A_1BC_1B_1$ е правилна тристрана пирамида со врв B_1, раб на основата $a\sqrt{2}$, бочен раб a и визина B_1O. Должината на висината е



$$\overline{B_1O} = \sqrt{a^2 - (\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{a^2 - \tfrac{2}{3}a^2} = \tfrac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Значи, $\overline{B_1O}$ е една третина од дијагоналата на коцката. На ист начин се докажува дека правата B_1D е нормална на рамнината ACD_1 и ја прободува таа рамнина, на пример во точката E така што $\overline{DE}$ е еднаква на третина од дијагоналата.

24. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рамнината ~ ги содржи дијагоналата AC на основата на коцката и темето D_1. Плоштината на пресекот на рамнината ~ и коцката е еднаква на S. Определи ги плоштината и волуменот на коцката.

Решение. Нека должината на работ на коцката е a. Пресекот на рамнината ~ и коцката е рамностран триаголник со страна $a\sqrt{2}$. Оттука следува $S = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, односно $a = \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{3}}}$. Според тоа,

$$P = 6a^2 = 6(\sqrt{\tfrac{2S}{\sqrt{3}}})^2 = \tfrac{12S}{\sqrt{3}} = 4S\sqrt{3} \text{ и } V = a^3 = (\sqrt{\tfrac{2S}{\sqrt{3}}})^3 = \tfrac{2S}{3}\sqrt{2S\sqrt{3}}.$$

25. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$. Растојанието од темето A до дијагоналата на коцката BD е еднакво на d. Определи ги плоштината и

волуменот на дадената коцка.

Решение. Нека должината работ на коцката е a. Триаголникот ABD' е правоаголен, а неговите катети се a и $a\sqrt{2}$, додека хипотенузата е $a\sqrt{3}$, а должината на висината над хипотенузата е d. Од плоштината на овој триаголник имаме $a \cdot a\sqrt{2} = d \cdot a\sqrt{3}$, па затоа $a = d\sqrt{\frac{3}{2}}$. Значи, плоштината коцката е $P = 6a^2 = 9d^2$, а волуменот е $V = a^3 = \frac{3d^3\sqrt{6}}{4}$.

26. Точките M, N, P се средини на три заемно разминувачки рабови на коцка (никои два раба не се сечат и не се паралелни). Должината на работ на коцката е $4\,cm$. Определи ја плоштината на триаголникот MNP.

Решение. Нека е дадена коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и нека без ограничување на општиста земеме дека M, N, P се средини на рабовите AA_1, BC, C_1D_1. Овој триаголник е рамностран, бидејќи сите негови страни имаат еднакви должини. Бидејќи правата AA_1 е нормална на рамнината $ABCD$, триаголникот AMN е правоаголен со катети $\overline{AM} = 2\,cm$ и $\overline{AN} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}\,cm$. Затоа

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2} = \sqrt{24}\,cm.$$

Аналогно се пресметуваат и должините на другите две страни на триаголникот AMN. Според тоа, плоштината на триагоникот AMN е $P = \frac{24\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}\,cm^2$.

27. Плоштините на три ѕида на дрвен квадар изнесуваат $6\,dm^2; 8\,dm^2$ и $12\,dm^2$. Кај секое од темињата изделкана и отстранета е коцка така што едно нејзино теме се совпаѓа со темето на квадарот, при што страната на коцката е 25% од најмалата страна на квадарот. Пресметај:

а) го бројот на темиња, рабови и ѕидови на добиеното тело,

б) ги плоштината и волуменот на квадарот и телото.

в) Процентот на плоштината и процентот на волуменот на телото во однос на соодветната мерка на квадарот.

Решение. а) Добиеното тело има 56 темиња; 84 рабови и 30 ѕидови.

Нека a,b,c, ($a<b<c$) се димензиите на квадарот изразени во dm. Од $ab=6, ac=8, bc=12$ се добива $(abc)^2=576$, т.е. $abc=24$. Значи $a=2\,dm, b=3\,dm, c=4\,dm$. Нека x е работ на коцката (во dm). Тогаш $x=\frac{25\cdot 2}{100}=0,5\,dm$.

б) Сега лесно се гледа дека

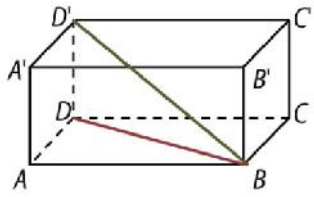
$P_{kv}=52\,dm^2$, $V_{kv}=24\,dm^3$, $P_t=52\,dm^2$ и $V_t=24-8\cdot 0,5^3=23\,dm^3$.

в) Јасно,

$$p_P=\frac{100P_t}{P_{kv}}=100\ \%\ \text{и}\ p_V=\frac{100V_t}{V_{kv}}=\frac{2300}{24}\%.$$

28. Дијагоналата на правилна четиристрана призма е $16\sqrt{3}\,cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата ако дијагоналата на призмата е наклонета кон рамнината на основата под агол од 30°.

Решение. Триаголникот DBD' е правоаголен. Хипотенузата на овој триаголник е $\overline{BD'}=16\sqrt{3}\,cm$ и еден негов оштар агол е 30°, т.е. тој е половина од рамностран триаголник и затоа висната на призмата е $\overline{DD'}=8\sqrt{3}\,cm$. Според тоа, дијагоналата на основата на призмата е $\overline{BD}=24\,cm$, па затоа оснвниот раб на призмата е $\overline{AB}=12\sqrt{2}\,cm$. Конечно, за волуменот на призмата добиваме $V=2304\sqrt{3}\,cm^3$, а плоштината е $P=192(3+2\sqrt{6})\,cm^2$.



29. Должината на дијагоналата на правилна четиристрана призма е $16\,cm$. Определи ја плоштината на призмата, ако дијагоналата со рамнината на основата зафаќа агол од 60°.

Решение. Нека призмата е $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (види цртеж). Да го разгледаме правоаголниот триаголник со катети DB и DD_1. Вториот остар агол на правоаголниот триаголник е еднаков на $90^\circ-60^\circ=30^\circ$, што значи дека триаголникот BDD_1 е половина од рамностран триаголник со страна $\overline{BD_1}=16\,cm$. Затоа $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BD_1}=8\,cm$.

Од Питагоровата теорема следува:

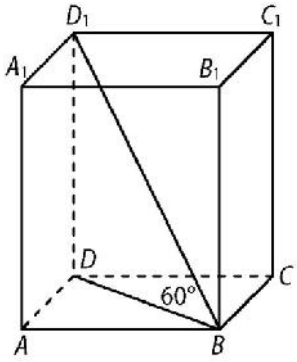
1) висината на призмата е

$$H = \overline{DD_1} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}\ cm,$$

2) за основата $\overline{AB} = a$ на призмата имаме $a^2 + a^2 = 8^2$, од каде следува дека $a = 4\sqrt{2}\ cm$

3) за плоштината на призмата добиваме

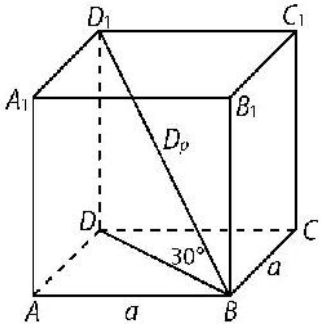
$$\begin{aligned} P &= 2a^2 + 4aH \\ &= 2(4\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{3} \\ &= 64(1 + 2\sqrt{6})\ cm^2. \end{aligned}$$



30. Дијагоналата на правилна четиристрана призма со рамнината на основата зафаќа агол од 30°. Ако волуменот на призмата е $324cm^3$, пресметај ја должината на дијагоналата.

Решение. Во правоаголниот триаголник DBD_1, заради $\angle DBD_1 = 30^\circ$, имаме $\overline{DD_1} = \frac{1}{2}\overline{BD_1} = \frac{1}{2}D_p$. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголните триаголници DBD_1 и ABD добиваме

$\overline{BD}^2 = D_p^2 - (\frac{1}{2}D_p)^2$ и $\overline{BD}^2 = a^2 + a^2$,



па затоа $\frac{3}{4}D_p^2 = 2a^2$, т.е. $a^2 = \frac{3}{8}D_p^2$. Сега, од $V = a^2H = \frac{3}{8}D_p^2 \cdot \frac{1}{2}D_p$ следува $D_p^3 = \frac{16V}{3} = \frac{16 \cdot 324}{3} = 12^3$, па затоа $D_p = 12\ cm$.

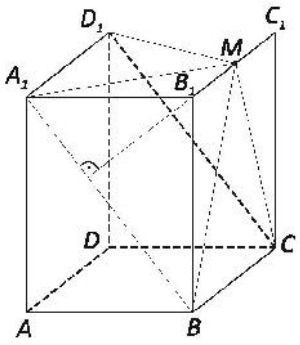
31. Рабовите на квадарот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ се $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 1, \overline{CC_1} = 2$. Нека M е средина на работа B_1C_1. Определи го волуменот на четиристраната пирамида BCD_1A_1M со основа BCD_1A_1 и врв M.

Решение. Четириаголникот BCD_1A_1 е правоаголник со страни

$$\overline{BC} = \overline{A_1D_1} = 1 \text{ и } \overline{BA_1} = \overline{CD_1} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Должината на висината на оваа пирамида е еднаква на растојанието од точката M до рамнината BCD_1A_1. Бидејќи правата B_1C_1 е паралелна

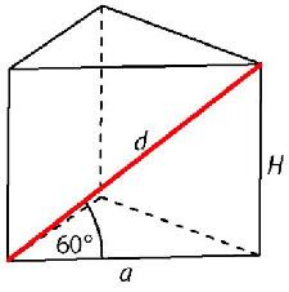
на оваа рамнина, а точката M лежи на оваа права, бараното растојание всушност е еднакво на растојанието на било која точка од правата B_1C_1 до рамнината BCD_1A_1 (види цртеж). Затоа висината на пирамидата е еднаква на висината на правоаголниот триаголник BB_1A_1 и таа е еднаква на $\frac{3\cdot 2}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$. Конечно, волуменот на пирамидата е



$$V_{BCD_1A_1M}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{13}\cdot 1\cdot\frac{6\sqrt{13}}{13}=2.$$

32. Дијагоналата на еден бочен ѕид на правилна тристрана призма е еднаква на $8\sqrt{3}\,cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата ако дијагоналата на бочниот ѕид со размнината на основата зафаќа агол од 60°.

Решение. Аголот меѓу дијагоналата на бочниот ѕид и рамнината на основата е аголот меѓу дијагоналата на основата и основниот раб. Триаголникот формиран од дијагоналата на бочниот ѕид d, висината H и основниот раб a е правоаголен триаголник со агол еднаков на 60°, што значи дека е половина од рамностран триаголник. Затоа



$a=4\sqrt{3}\,cm$ и $H=12\,cm$. Сега лесно се добива дека плоштината на призмата е $P=168\sqrt{3}\,cm^2$, а нејзиниот волумен е $V=144\sqrt{3}\,cm^3$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

33. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб со должина a. Рамнината ~ која минува низ дијагоналата AC_1 и темето B ја дели дадената коцка на две геометриски тела. Определи ги плоштините и волумените на добиените геометриски тела.

Решение. Бидејќи рамнината ги содржи темињата A,B и C_1, таа го содржи и темето D, па се добиени две складни геометриски тела чии

волумени се еднакви, т.е. $V' = V'' = \frac{a^3}{2}$. Плоштините на двете тела исто така се еднакви и се еднакви на збирот на плоштините на два квадрати ($ABCD$ и CDD_1C_1) со страна a, два рамнокраки правоаголни триаголници (BCC_1 и ADD_1) со катети a и еден правоаголник (ABC_1D_1) со страни a и $a\sqrt{2}$. Значи, $P' = P'' = (3+\sqrt{2})a^2$.

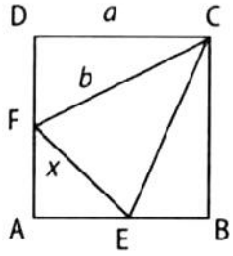
34. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со раб a. Рамнината Σ која ја содржи дијагоналата на коцката AC' и средината B'' на работ BB', ја дели дадената коцка на две геометриски тела. Пресметај ги плоштините и волумените на добиените геометриски тела.

Решение. Бидејќи рамнината ги содржи темињата A и C' и средината на работ BB', таа ја содржи и средината D'' на работ DD', па затоа се добиени две складни геоемитриски тела чии волумени с $V' = V'' = \frac{a^3}{2}$.

Плоштините на добиените тела исто така се еднакви и еднакви на половина од плоштината на коцката и плоштината на ромбот $AB''C'D''$ чии дијагонали се $\overline{AC'} = a\sqrt{3}$ и $\overline{B''D''} = a\sqrt{2}$. Значи, бараните плоштини се $P' = P'' = 3a^2 + \frac{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2(6+\sqrt{6})}{2}$.

35. Од коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб a е исечена права тристрана призма $EFCE_1F_1C_1$, каде E е средина на работ AB и F е средина на работ AD. Определи го волуменот на оваа призма.

Решение. Основата на оваа призма е рамнокракиот триаголник CEF. Од Питагоровата теорема следува $\overline{EF} = x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\overline{CF} = b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Висината на триаголникот CEF е $h = \frac{a\sqrt{22}}{4}$. Значи, волуменот на призмата е

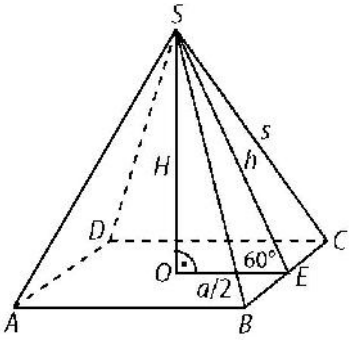


$$V = B \cdot H = \frac{xh}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{11}}{8}.$$

36. Должината на бочниот раб на правилна чеиристрана пирамида е $5\sqrt{3}\,cm$, а апотемата со рамнината на основата зафаќа агол од 60°.

Определи го волуменот на оваа пирамида.

Решение. Во правоаголниот триаголник OES важи $\angle OES = 60^\circ$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник. Според тоа, $\overline{ES} = 2\overline{OE}$, односно $h = a$. Понатаму, од Питагоровата теорема применета на триаголникот SCE добиваме



$$s^2 = h^2 + (\tfrac{a}{2})^2 = \tfrac{5}{4}h^2,$$

па затоа $h^2 = \frac{4}{5}s^2 = \frac{4}{5}(5\sqrt{3})^2$, т.е. $h = 2\sqrt{15}\ cm$. Сега, од правоаголниот триаголник OES добиваме

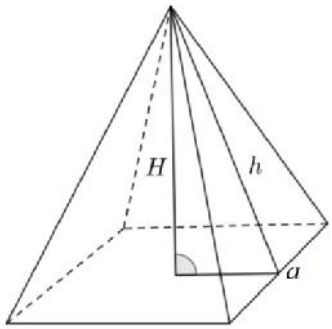
$$H^2 = h^2 - (\tfrac{a}{2})^2 = \tfrac{3}{4}h^2,$$

па затоа $H = 3\sqrt{5}\ cm$. Конечно,волуменот на пирамидата е

$$V = \tfrac{1}{3}a^2H = \tfrac{1}{3}(2\sqrt{15})^2 \cdot 3\sqrt{5} = 60\sqrt{5}\ cm^3.$$

37. Основниот раб и висината на правилна четириаголна пирамида се однесуваат како $5:6$, а волуменот на пирамидата е $400\,cm^3$. Пресметај ја плоштината на оваа пирамида.

Решение. Од условот на задачата имаме $a:H = 5:6$, односно $H = \frac{6a}{5}$. Според тоа, $V = \frac{a^2H}{3} = \frac{6a^3}{15} = \frac{2a^3}{5}$ и како $V = 400$, добиваме $\frac{2a^3}{5} = 400$, од каде следува $a = 10\,cm$. Според тоа, $H = 12\,cm$, па од Питагоровата теорема следува



$$h = \sqrt{H^2 + (\tfrac{a}{2})^2} = 13\,cm.$$

Конечно, плоштината на пирамидата е $P = a^2 + \frac{4ah}{2} = 360\,cm^2$.

38. Дали постои правилна шестстрана еднакворабна призма кај која збирот на сите дијагонали е еднаков на збирот на сите рабови?

Решение. Не постои. Збирот на сите рабови на призмата е $18a$. Збирот на сите дијагонали можеме да го определиме на следниот начин. Со секое теме на основата се определени две кратки и една долга дијагонала. Значи, ако постои таква призма тогаш збирот на рабовите мора да биде еднаков на $24a + 6a\sqrt{5}$, што не е можно.

39. Основниот раб на правилна шестстрана призма е зголемен за 200%, а висината е намалена за $p\%$. Ако волуменот на таа призма се зголемил за $p\%$, определи дали плоштината на омотачот се зголемила или се намалила и за колку проценти?

Решение. Нека основниот раб на призмата е a, а висината е H. Тогаш основниот раб на новата призма е $3a$, а висината е $(1-\frac{p}{100})H$. Бидејќи волуменот на новата призма е поголем за $p\%$ од волуменот на почетната призма, добиваме дека

$$6\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}(1-\frac{p}{100})H = (1+\frac{p}{100})6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H,$$

од каде добиваме $9(1-\frac{p}{100}) = 1+\frac{p}{100}$, односно $p = 80$. Значи, плоштината на омотачот на новата призма е $6\cdot 3a\cdot 0,2H = 0,6\cdot 6aH$, што значи дека плоштината на омотачот се намалила за 40%.

40. Основниот раб на правилна шестстрана призма е четири пати пократок од нејзината висина, а збирот на должината на висината и основниот раб е $30\,cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на оваа призма.

Решение. Со a да го означиме основниот раб, а со H висината на призмата. Имаме, $H = 4a$ и $a + H = 30$, од каде добиваме $a = 6\,cm$ и $H = 24\,cm$. Плоштината на основата на призмата е плоштината на правилен шестаголник, па е $B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}\,cm^2$, а плоштината на омотачот е $M = 6aH = 864\,cm^2$. Значи, плоштината на призмата е $P = 2B + M = 108(\sqrt{3}+8)\,cm^2$, а волуменот е $V = Bh = 1296\sqrt{3}\,cm^3$.

41. Квадрат со страна $a = 30$ е заедничка долна основа на правилна четиристрана призма и правилна четиристрана пирамида при што врвот на пирамидата е во центарот на горната основа на призмата. Определи го

волуменот на пирамидата ако се знае дека плоштината на омотачот на пирамидата е два пати поголема од плоштината на омотачот на призмата.

Решение. Нека H е заедничката висина на призмата и пирамидата, а h е висната на бочниот ѕид (апотемата) на пирамидата. Тогаш плоштината на омотачот на призмата е $M = 120H$, а плоштината на омотачот на пирамидата е $M' = \frac{120h}{2} = 60h$. Според тоа, $h = 4H$. Од друга страна, h е хипотенуза, а H е катета во правоаголниот триаголник чија друга катета е $\frac{a}{2} = 15$. Сега, од Питагоровата теорема следува $H = \sqrt{15}$, па затоа волуменот на пирамидата е $V' = 300\sqrt{15}$.

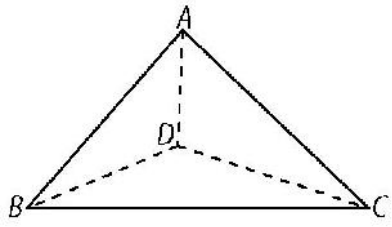
42. Бочните рабови на правилна тристрана пирамида меѓусебно градат агли од по 90°. Определи ја плоштината на оваа пирамида ако должината на бочниот раб е $6\sqrt{2}\ cm$.

Решение. Бочните ѕидови на пирамидата се рамнокраки правоаголни триаголници со катети $6\sqrt{2}\ cm$. Од Питагоровата теорема за хипотенузата добиваме $a^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2$, т.е. $a = 12\ cm$. Оновата на пирамидата е рамностран триаголник со страна $a = 12\ cm$, па затоа за плоштината на пирамидата добиваме

$$P = B + M = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 36(\sqrt{3} + 3)\ cm^2 .$$

43. Трите бочни рабови на тристрана пирамида се со должини $5\ cm$, $9\ cm$ и $12\ cm$, при што два по два се заемно нормални. Пресметај ја плоштината на оваа пирамида.

Решение. Бочните рабови на пирамидата се AB, AC и AD. Триаголниците ABC, ACD и ABD се правоаголни и нивните плоштини се $22{,}5\ cm^2, 30\ cm^2$ и $54\ cm^2$.

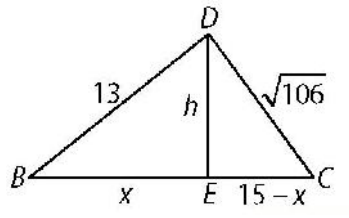


Основните рабови на пирамидата се хипотенузите на овие триаголници и од Питагоровата теорема следува дека нивните должини се $13\ cm$, $15\ cm$ и $\sqrt{106}\ cm$. За висината $\overline{DE} = h$ на основата (цртеж десно) имаме

$13^2 - x^2 = h^2 = \sqrt{106}^2 - (15-x)^2$,

$169 - x^2 = 106 - 225 + 30x - x^2$,

$x = 9,6\ cm.$



Значи, висината е $h = \frac{\sqrt{1921}}{5}\ cm$. Конечно, плоштината на пирамидата е

$$P = 22,5 + 30 + 54 + \frac{3\sqrt{1921}}{2} = \frac{3}{2}(71 + \sqrt{1921})\ cm^2\ .$$

44. Бочните рабови на правилна тристрана пирамида меѓусебно зафаќаат прави агли. Определи ја плоштината на пирамидата, ако должината на основниот раб на пирамидата е $4\ cm$.

Решение. Бочниот раб на пирамидата е рамнокрак триаголник со хипотенуза $a = 4\ cm$. Ако должината на бочниот раб е s, тогаш од Питагоровата теорема следува $s^2 + s^2 = a^2$, односно $s^2 = \frac{a^2}{2}$. Сега за плоштината пирамидата добиваме

$$P = B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{s^2}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{a^2}{4} = 4(\sqrt{3} + 3)\ cm^2\ .$$

45. Спротивните рабови на даден тетраедар $ABCD$ се еднакви, односно $\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{BC} = \overline{AD}, \overline{AC} = \overline{BD}$. Шесте рамнини, од кои секоја содржи еден раб на тетраедарот и е паралелна на спротивнот раб на тој тетраедар, определуваат паралелопипед. Докажи дека вака добиениот паралелопипед е квадар, чиј волумен е три пати поголем од волуменот на тетраедарот.

Решение. Дијагоналите на спротивните ѕидови на добиениот паралелопипед се спротивни рабови на дадениот тетраедар. На пример, AB и CD се дијагонали (кои не се паралелни) на два спротивни ѕида на паралелопипедот. Со други зборови, секој од овие ѕидови има дијагонали кои се еднакви на отсечките AB и CD. Бидејќи овие отсечки се еднакви, ѕидовите на паралелопипедот се правоаголници, што значи дека тој е квадар. Ѕидовите на овој тетраедар го делат квадарот на дадениот тетраедар и уште четири тетраедри чии волумени се еднакви на шестина од волуменот на квадарот. Според тоа, волуменот на дадениот тетраедар е еднаков на третина од волуменот на добиениот квадар.

46. Спротивните рабови на даден тетраедар се еднакви и нивните должини се a,b и c. Изрази го волуменот на овој тетраедар во функција од a,b и c.

Решение. Според претходната задача шесте рамнини, секоја од кои содржи еден раб на тетраедарот и е паралелна со спротивниот раб на тетраедарот, определува квадар. Ако x,y,z се должините на страните на овој квадар, тогаш важи

$$x^2+y^2=a^2,\quad y^2+z^2=b^2,\quad z^2+x^2=c^2.$$

Оттука добиваме

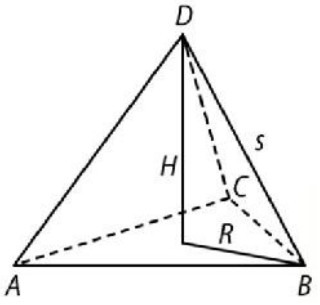
$$x^2=\tfrac{1}{2}(a^2-b^2+c^2),\quad y^2=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),\quad z^2=\tfrac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2).$$

Понатаму, според горната задача волуменот на овој квадар е три пати поголем од волуменот на тетраедарот, па затоа волуменот на тетраедарот е

$$V=\tfrac{1}{3}xyz=\tfrac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

47. Основата на пирамидата е триаголник со страни $13\,cm, 14\,cm, 15\,cm$, а нејзините бочни рабови се по $8,75\,cm$. Определи го волуменот на оваа пирамида.

Решение. Нека триаголникот ABC е осмова, H е должината на висината на пирамидата, R е должината на радиусот на опишаната кружница околу основата и s е должината на бочниот раб. Полупериметарот на основата е



$$\tfrac{a+b+c}{2}=\tfrac{13+14+15}{2}=21\,cm,$$

па од Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84\,cm^2.$$

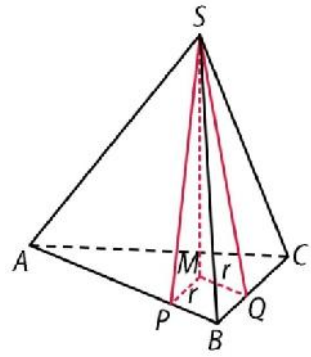
Понатаму, за радиусот на опишаната кружница околу основата добиваме $R=\tfrac{abc}{4P}=\tfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\tfrac{65}{8}\,cm$, па затоа висината на пирамидата е

$H=\sqrt{s^2-R^2}=\sqrt{(\tfrac{70}{8})^2-(\tfrac{65}{8})^2}=\tfrac{15\sqrt{3}}{6}\,cm$. Конечно, волуменот на пи-

рамидата е $V = \frac{BH}{3} = \frac{84 \cdot 15\sqrt{3}}{3 \cdot 8} = \frac{105\sqrt{3}}{2}\ cm^3$.

48. Основата на пирамидата е правоаголен триаголник со катети $5\,cm$ и $12\,cm$. Бочните ѕидови со основата зафаќаат агли по 60°. Определи и плоштината и волуменаот на оваа пирамида.

Решение. Нека дадената пирамида е $ABCS$ и нека $\measuredangle ABC = 90^\circ$ (види цртеж). Хипотенузата на триаголникот на основата е $13\,cm$. Од еднаквоста на нагибните агли на бочните ѕидови спрема основата следува дека подножјето на висината на пирамидата е во центарот на впишаната кружница во основата на пирамидата. Радиусот на таа кружница е

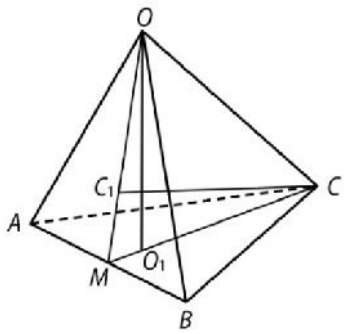


$$r = \frac{a+c-b}{2} = \frac{12+5-13}{2}\,2\ cm.$$

Од правоаголниот триаголник SMP, кој е половина од рамностран триаголник следува дека $\overline{SP} = 4\,cm$, па сите апотеми на пирамидата се по $4\,cm$. Висината на пирамидата е $\overline{SM} = 2\sqrt{3}\,cm$. Конечно, плоштината на пирамидата е $P = \frac{12 \cdot 5}{2} + \frac{12 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{13 \cdot 4}{2} = 90\,cm^2$, а нејзиниот волумен е $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\,cm^3$.

49. Бочниот ѕид OAB на тристрана пирамида $OABC$ е рамностран триаголник со страна $\overline{AB} = 6\sqrt{3}\,cm$. Рабовите CA, CB и CO се меѓусебно еднакви. Висината на пирамидата е $\overline{OO_1} = 4{,}5\sqrt{3}\,cm$. Определи го волуменот на пирамидата $OABC$.

Решение. Нека OM е нормалата од O на AB. Тогаш $\overline{AM} = \overline{MB}$ и MO_1 е нормална на AB во рамнината ABC (теорема за трите нормали). Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак добиваме дека O_1 припаѓа на висината CM. Понатаму, OM е висина на рамностра-



ниот триаголник ABO, па затоа $\overline{OM} = 9\,cm$. Сега со примена на Питагоровата теорема на триаголникот OMO_1 добиваме

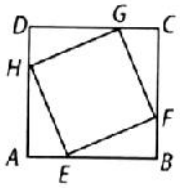
$$\overline{MO_1} = \sqrt{9^2 - (\tfrac{9\sqrt{3}}{2})^2} = \tfrac{9}{2}\,cm\,.$$

Значи дека триаголникот OMO_1 е половина од рамностран триаголник, па затоа $\angle OMO_1 = 60^\circ$. Пирамидата $OABC$ е правилна трисрана пирамида со врв C, па затоа подножјето C_1 на висината на пирамидата повлечена од врвот C е центар на основата ABO, односно $\overline{MC_1} = \tfrac{1}{3}\overline{MO} = 3\,cm$. Сега CMC_1 е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{MC} = 6\,cm$ и $\overline{CC_1} = 3\sqrt{3}\,cm$. Конечно, волуменот на пирамидата е

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\cdot 3\sqrt{3} = 8\,cm^3\,.$$

50. Од правилна четиристрана пирамида $ABCDS$ отсечена е правилна четиристрана пирамида $EFGHS$. Темињата E,F,G,H припаѓаат редоследно на рабовите AB,BC,CD,DA, а основните рабови на пирамидата $EFGHS$ со основните рабови на пирамидата $ABCDS$ формираат агли од 30°. Определи го односот на волумените на овие две пирамиди.

Решение. Основата на пирамидара $EFGHS$ е квадрат и нека должината на основниот раб е a, цртеж десно. Триаголникот AEH е половина од рамностран триаголник, па затоа ако $\overline{AE} = x$, тогаш $\overline{EH} = 2x$ и $\overline{AH} = x\sqrt{3}$. Според тоа,



$$\overline{AD} = x + x\sqrt{3} = x(1+\sqrt{3})\,.$$

За волумените на пирамидите $ABCDS$ и $EFGHS$ соодветно имаме

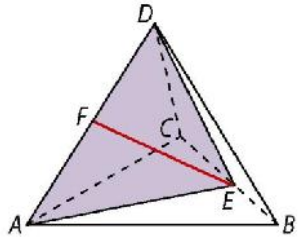
$$V' = \tfrac{1}{3}(x(1+\sqrt{3}))^2 H \quad \text{и} \quad V'' = \tfrac{1}{3}(2x)^2 H\,,$$

па затоа

$$V' : V'' = (x(1+\sqrt{3}))^2 : (2x)^2 = (4+2\sqrt{3}) : 4 == (2+\sqrt{3}) : 2\,.$$

51. Пресметај го растојанието меѓу средините на два спротивни раба на тристрана еднакворабна пирамида.

Решение. Со a да ја означиме должината на работ на пиранидата. Кај триагоникот AED (цртеж десно) две страни се еднакви на висините на ѕидот на пирамидата, т.е. на $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а третата страна е еднаква на a. Бараното растојание е еднакво на висината на триаголникот AED. Од Питагоровата теорема следува дека



$$\overline{EF} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

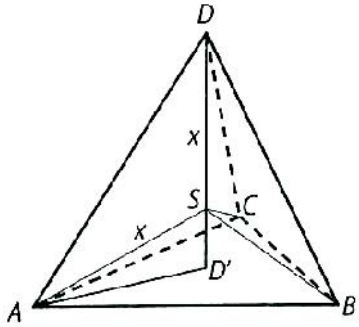
52. Даден е правилен тетраедар со должина на раб a. Во внатрешноста на тетраедарот определи точка S која е еднакво оддалечена од сите четири темиња на тетраедарот. Докажи дека точката S ја дели висината на тетраедарот во однос $3:1$ одејќи од темето на тетраедарот кон подножјето на висината.

Решение. Нека D' е проекцијата на точката S на основата на тетраедарот ABC. Тогаш триагол-ниците ASD', BSD', CSD' се правоаголни, имаат заедничка катета и како

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = x,$$

заклучуваме дека тие се складни. Според тоа,

$$\overline{AD'} = \overline{BD'} = \overline{CD'},$$



што значи дека D' е центарот на опишаната кружница околу рамностраниот триаголник ABC, а со самото тоа и проекцијата на темето D врз основата ABC, т.е. DD' е висината на тетраедарот.

Бидејќи $\overline{AD'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, добиваме $\overline{DD'} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AD'}^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на триаголникот $AD'S$ добиваме

$$\overline{AS}^2 = \overline{AD'}^2 + \overline{SD'}^2 = \overline{AD'}^2 + (\overline{DD'} - \overline{SD})^2,$$

од каде последователно добиваме

$$x^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{a\sqrt{6}}{3} - x)^2,$$

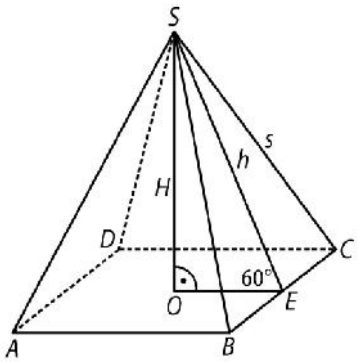
$$x^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2x\frac{a\sqrt{6}}{3} + x^2,$$

$$x = \frac{a^2}{2\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}..$$

Конечно, $\overline{DD'}:\overline{SD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}:\frac{a\sqrt{6}}{4} = 4:3$, па затоа $\overline{SD}:\overline{SD'} = 3:1$.

53. Должината на висината на правилна четиристрана пирамида е $5\sqrt{3}\,cm$, а апотемата со рамнината на основата формира агол од 60°. Определи ја должината на бочниот раб на оваа пирамида.

Решение. Нека дадената пирамида е $SABCD$ со центар на основата O. СО h, H, s да ги означиме редоследно должините на апотемата, висината и бочнио раб (цртеж десно). Во правоаголниот триаголник OES важи $\measuredangle OES = 60^\circ$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник, па затоа за основниот раб a добиваме дека $\frac{a}{2} = \overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{SE} = \frac{h}{2}$. Од Питагоровата

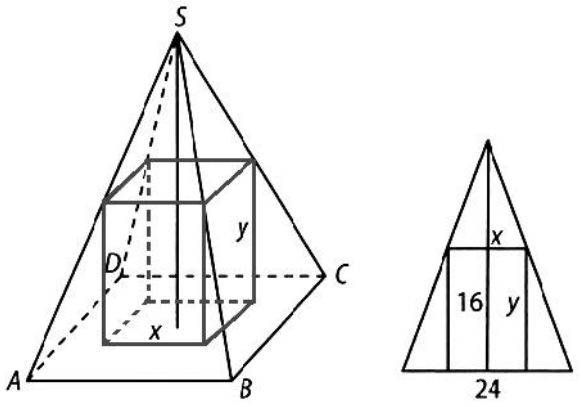


теорема применета на триаголникот OES следува $H^2 = h^2 - (\frac{h}{2})^2$, т.е. $H^2 = \frac{3}{4}h^2$. Според тоа, $h^2 = \frac{4}{3}H^2 = \frac{4}{3}(5\sqrt{3})^2 = 100$, т.е. $h = 10\,cm$ и затоа $a = 10\,cm$. Конечно, од правоаголниот триаголник CSE следува $s^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = 10^2 + 5^2 = 125$, односно $s = 5\sqrt{5}\,cm$.

54. Во правилна четиристрана пирамида со основен раб 24 и висина 16 е впишана правилна четиристрана призма со максимален волумен. Определи го односот на волумените на пирамидата и впишаната призма.

Решение. Ако пирамидата и во неа впишаната призма ги пресечиме со рамнина која ја содржи висината на пирамидата и е паралелна со еден од основните рабови на пирамидата, се добива пресек како на долниот десен цртеж. Од сличноста на триаголниците следува равенството $24:16 = x:(16-y)$, од каде добиваме $2x = 48 - 3y$, односно $y = \frac{48-2x}{3}$. Волуменот на впишаната четиристрана призма е

$$V' = x^2 y = \tfrac{1}{3} x^2 (48 - 2x).$$



Ако го искористиме неравенството $(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc$, за $a = b = x$ и $c = 48 - 2x$, добиваме

$$V' = \tfrac{1}{3} x^2 (48 - 2x) \leq \tfrac{1}{3} (\tfrac{x+x+48-2x}{3})^3 = \tfrac{16^3}{3}.$$

Според тоа, максималниот волумен на впишана призма може да биде $\frac{16^3}{3}$ и истиот се достгнува за $a = b = c$, односно $x = 48 - 2x$, од каде добиваме $x = 16$ и $y = \frac{16}{3}$. Од друга страна волуменот на пирамидата е

$$V = \tfrac{1}{3} BH = \tfrac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 16,$$

па затоа

$$V : V' = 24^2 \cdot 16 : 16^3 = 24^2 : 16^2 = 3^2 : 2^2 = 9 : 4.$$

55. Во тристрана еднакворабна пирамида со раб $6\,cm$ е впишана четиристрана призма чиј основен раб е два пати пократок од нејзината висина. Пресметај го основниот раб на оваа призма.

Решение. Со a да го означиме работ на пирамидата, а со b основниот раб на призмата. Тогаш висината на призмата е еднаква на $2b$. Нека горната основа на призмата се наоѓа во триаголникот PQR, кој е рамностран. Тоа значи дека горната основа на призмата е впишана во рамностраниот триаголник PQR. Страната на триаголникот PQR да ја означиме со x (види цртеж). Тогаш

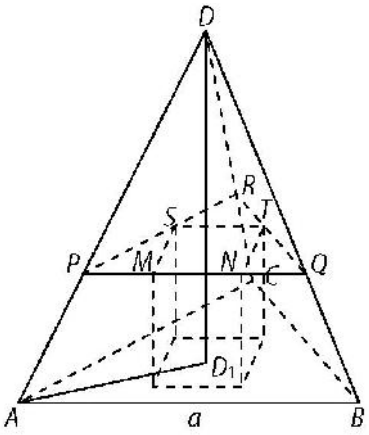
$$\overline{PM} = \tfrac{x-b}{2},\ \overline{MS} = b$$

и бидејќи $\measuredangle PMS = 60^\circ$ важи :

$$b=\frac{x-b}{2}\sqrt{3},$$
$$2b=(x-b)\sqrt{3},$$
$$2b=x\sqrt{3}-b\sqrt{3},$$
$$2b+b\sqrt{3}=x\sqrt{3},$$

т.е.

$$x=\frac{b(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}. \qquad (1)$$

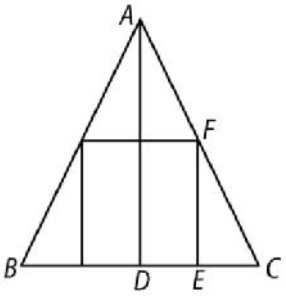


Од Питагоровата теорема применета на триаголникот ADD_1 за висината $H=\overline{DD_1}$ на тетраедарот добиваме

$$H=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}\ cm.$$

Бидејќи триаголниците ABC и PQR се слични, со коефициент $H:(H-2b)$, последователно добиваме

$$H:a=(H-2b):x,$$
$$2\sqrt{6}:6=(2\sqrt{6}-2b):x,$$
$$x\sqrt{6}=6\sqrt{6}-6b,$$



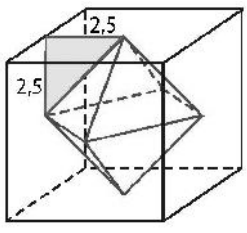
па со замена од (1) наоѓаме

$$\frac{b(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\sqrt{6}=6\sqrt{6}-6b,$$
$$2b\sqrt{2}+b\sqrt{6}+6b=6\sqrt{6},$$
$$b=\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}+6}.$$

56. Дадена е коцка со раб $5\,cm$. Да ги земеме шесте точки кои се средини на ѕидовите на коцката. Секоја од овие шест точки да ја поврземе со средините на четирите соседни ѕида на коцката. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

Решение. Од Питагоровата теорема следува дека секој раб на добиеното тело е еднаков на

$$\sqrt{(\tfrac{5}{2})^2+(\tfrac{5}{2})^2}=\tfrac{5}{2}\sqrt{2}\ cm.$$



Според тоа, добиеното тело има осум ѕидови кои се рамностранни триаголници и истото се

нарекува октаедар. Плоштината на октаедарот е:

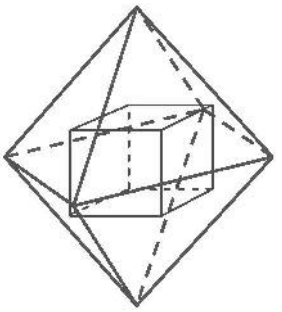
$$P = 8 \cdot \frac{(\frac{5}{2}\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\,cm^2 .$$

За да го определиме волуменот, доволно е да забележиме дека истиот е еднаков на збирот на волумените на две еднакворабни пирамиди, секоја од која има основа квадрат со страна $\frac{5}{2}\sqrt{2}\,cm$ и висина $\frac{5}{2}\,cm$ (Зошто?). Според тоа,

$$V = 2 \cdot \frac{(\frac{5}{2}\sqrt{2})^2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = \frac{125}{6}\,cm^3 .$$

57. На октаедарот од претходната задача да ги означиме точките на тежиштата на ѕидовите. Секоја од овие точки да ја поврземе со тежиштата на соседните ѕидови. На овој начин се добива коцка. Пресметај ја плоштината на оваа коцка и односот на волумените на новодобиената и почетната коцка од претходната задача.

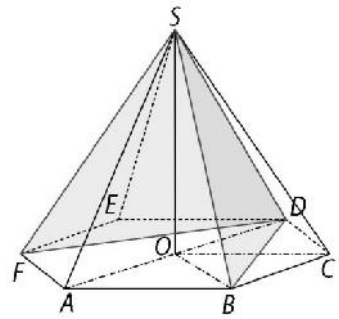
Решение. Ако ја земеме половината на октаедарот, т.е. еднакворабната четиристрана пирамида, заради правилноста на телата (октаедарот и коцката) коцката исто така ќе биде поделена на два еднакви дела. Заради сличноста половина од работ на коцката ќе биде еднаков на третина од висината на пирамидата (темето на коцката воедно е тежиште на рамностраниот триаголник, односно на ѕидот на пирамидата). Висината на пирамидата е еднаква на половина од работ на почетната коцка, т.е. $\frac{5}{2}\,cm$. Од ова следува дека должината на работ на новата коцка е еднаков на третина од работ на почетната коцка, т.е. на $\frac{5}{3}\,cm$. Односот на волуменот V' на новата коцка и волуменот V на почетната коцка е $\frac{V'}{V} = (\frac{5}{3})^3 : 5^3 = \frac{1}{27}$.



58. Дадена е правилна шестстрана пирамида $ABCDEFS$ со врв S. Висината и основниот раб на пирамидата се со должина $4\,cm$. Пирамидата е пресечена со рамнините BDS и DFS. Определи ги плоштината и волуменот на новодобиената четиристрана пирамида.

Решение. Основата на новата четиристрана пирамида е делтоидот

$ABDF$ чи страни се $\overline{AB}=\overline{AF}=4\,cm$ и $\overline{BD}=\overline{DF}=4\sqrt{3}\,cm$. Дијагоналите на делтоидот се $\overline{AD}=8\,cm$ и $\overline{BF}=4\sqrt{3}\,cm$, па затоа плоштината на основата е $B=16\sqrt{3}\,cm^2$, а волуменот е $V=\frac{64\sqrt{3}}{3}\,cm^3$. Бочниот раб на пирамидата е $\overline{SB}=4\sqrt{2}\,cm$ (хипотенуза на рамнокракиот триаголник OBS). Сите страни на рамнокраките триаголници ABS и BDS се познати, па нивните висини соодветно се $2\sqrt{7}\,cm$ и $2\sqrt{5}\,cm$. За омотачот на новата пирамида имаме



$$\begin{aligned} M &= 2P_{ABS}+2P_{BDS} \\ &= 2\cdot\frac{4\cdot 2\sqrt{7}}{2}+2\cdot\frac{4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{5}}{2} \\ &= 8(\sqrt{7}+\sqrt{15})\,cm^2 \end{aligned}$$

Значи, плоштината на пирамидата е

$$P=B+M=8(2\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{15})\,cm^2.$$

59. Дадени се две еднакви прави призми, чии основи се рамнокраки правоаголни триаголници со катети $5\,cm$. Висините на призмите се по $10\,cm$. Колку различни призми можеме да составиме од овие две еднакви призми? Спореди ги нивните плоштини.

Решение. Призмите можеме да ги спојуваме со основите или со бочните ѕидови. Ако призмите ги споиме со основите се добива призма чија основа е складна со основите на дадените призми и два пати поголема висина. Нејзината плоштина е

$$P_1=2\cdot\frac{5^2}{2}+2\cdot 5\cdot 20+20\cdot 5\sqrt{2}=(225+100\sqrt{2})\,cm^2.$$

Ако призмите ги споиме со поголемите бочни ѕидови, се добива правилна четиристрана призма чија плоштина е

$$P_2=2\cdot 5^2+4\cdot 5\cdot 10=250\,cm^2.$$

Призмите можеме да ги споиме на два начина со помалите бочни ѕидови. Едниот начин е да добиеме призма чија основа е правоаголен триаголник со катета $5\sqrt{2}\,cm$ и тогаш плоштината е

$$P_3=2\cdot\frac{(5\sqrt{2})^2}{2}+2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 10+10\cdot 10=(150+100\sqrt{2})\,cm^2.$$

При второто спојување на малите бочни ѕидови добиваме призма чија

основа е паралелограм со страни $5\sqrt{2}\ cm$ и $5\,cm$. Нејзината плоштина е

$$P_4 = 2\cdot 5^2 + 2\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 10 = (150+100\sqrt{2})\ cm^2 .$$

Според тоа, постојат четири можности и $P_2 < P_3 = P_4 < P_1$.

60. Определи го односот на волумените на два цилиндри, ако радиусите на основите се однесуваат како $2:3$, а висините како $3:4$.

Решение. Нека r', r'' се радиусите, H', H'' се висините и V', V'' се волумените на двата цилиндри. Од условот на здачата следува $r':r''=2:3$ и $H':H''=3:4$, па затоа

$$V':V''=\pi r'^2 H':(\pi r''^2 H'')=(r':r'')^2(H':H'')=(2:3)^2\cdot(3:4)=1:3 .$$

61. Радиусите на основите на два цилиндри се однесуваат како $1:2$, а волумените како $1:12$. Определи го односот на нивните висини.

Решение. Од условот на задачата имаме $r':r''=1:2$ и $V':V''=1:12$. Но, $V'=\pi r'^2 H'$ и $V''=\pi r''^2 H''$, па како $r''=2r'$, добиваме

$$12:1=V'':V'=\pi(2r')^2 H'':(\pi r'^2 H')=4H'':H',$$

од каде следува $H'':H'=3:1$.

62. Вкупната должина на дијаметарот и висината на цилиндарот е еднаква на $14\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на овој цилиндар ако односот на висината и радиусот на цилиндарот е $5:1$.

Решение. Да го означиме радиусот на основата на цилиндарот со r, а висината на цилиндарот со H. Според условот имаме $2r+H=14$ и $H:r=5:1$. Значи, $H=5r$ и затоа $2r+5r=14$, од каде добиваме $r=2\,cm$. Според тоа, $H=10\,cm$. Значи, $P=48\pi\ cm^2$ и $V=40\pi\ cm^3$

63. Конус и цилиндар имаат еднакви плоштини, а нивните оскини пресеци се редоследно рамностран триаголник и квадрат. Определи го односот на волумените на двете тела.

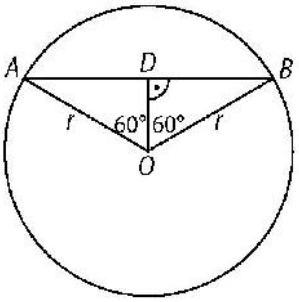
Решение. Нека r и R се радиусите на основите на конусот и цилиндарот, соодветно. Тогаш нивните висини се $r\sqrt{3}$ и $2R$. Од еднаквоста на плоштините седува $\pi r^2+\pi r\cdot 2r=2\pi R^2+2R\cdot 2R\pi$, од каде добиваме $3r^2=6R^2$, односно $r=R\sqrt{2}$. Според тоа, односот на волуме-

ните е

$$V_k : V_c = \frac{\pi r^2 \cdot r\sqrt{3}}{3} : (\pi R^2 \cdot 2R) = \frac{2R^3\sqrt{6}}{3} : (2R^3) = \sqrt{2} : \sqrt{3}\,.$$

64. Рамнина паралелна со оската на цилиндарот го сече така што од основата отсекува отсечок соодветен на централен агол од 120°. Должината на оската е $10\,cm$, а нејзиното растојание од пресечната рамнина е $2\,cm$. Определи ја плоштината на пресекот.

Решение. Нека рамнината ја сече основата на цилиндарот по правата AB. Од $\angle OAB = 30^\circ$, правоаголниот триаголник AOD е половина од рамностран триаголник, односно $\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{AO} = r$. Затоа $r = 2\overline{DO} = 4\,cm$. Понатаму, од Питагоровата теорема следува

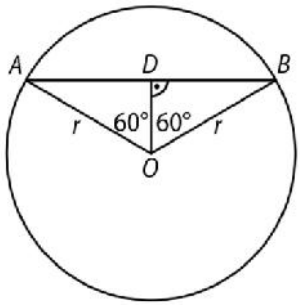


$$\overline{AD} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}\,cm\,.$$

Затоа $\overline{AB} = 2\overline{AD} = 4\sqrt{3}\,cm$. Конечно, плоштината на бараниот пресек е $4\sqrt{3} \cdot 10 = 40\sqrt{3}\,cm^2$.

65. Рамнина паралелна на оската на цилиндарот го сече цилиндарот така што од основите отсекува отсечоци на кои им соодветствува централен агол од 120°. Оската на цилиндарот од таа рамнина е оддалечена $3\,cm$. Ако плоштината на пресекот е $54\sqrt{3}\,cm^2$, пресметај го волуменот на цилиндарот.

Решение. Нека рамнината ја сече основата во отсечката AB и нека D е подножјето на нормалата повлечена од центарот на основата O на тетивата AB. Во правоаголниот триаголник AOD имаме $\angle AOD = 60^\circ$, т.е. тој е половина од рамностран триаголник. Затоа $r = \overline{AO} = 2\overline{DO} = 2 \cdot 3 = 6\,cm$. Сега, од Питагоровата теорема следува



$$\overline{AD} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}\,cm\,,$$

од каде добиваме $\overline{AB} = 2\overline{AD} = 6\sqrt{3}\,cm$. Бидејќи пресекот на цилндарот

и рамнината е правоаголник со плоштина $54\sqrt{3}\,cm^2$ и страна $6\sqrt{3}\,cm$, добиваме дека висината на цилиндарот е $H = 54\sqrt{3} : 6\sqrt{3} = 9\,cm$. Конечно, волуменот на цилиндарот е $V = ®r^2H = ® \cdot 6^2 \cdot 9 = 324®\ cm^3$.

66. Даден е конус со плоштина $P = 324®\ cm^2$, чија изводница s е $9\,cm$ пократка од дијаметарот на основата. Определи го волуменот на овој конус.

Решение. Имаме $324® = r®(r+s)$ и $s = 2r - 9$, па затоа $324 = r(3r-9)$ односно $3r^2 - 9r - 324 = 0$. Ако последната равенка ја поделиме со 3 добиваме $r^2 - 3r - 108 = 0$. Сега, последователно последната равенка е еквивалентна на равенките

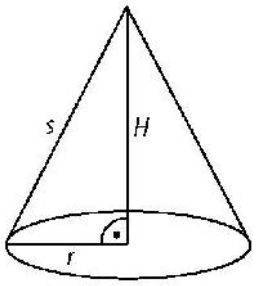
$$r^2 - 12r + 9r - 108 = 0,$$
$$r(r-12) + 9(r-12) = 0,$$
$$(r-12)(r+9) = 0.$$

Производ на два броја е еднаков на 0 ако барем еден од множителите е еднаков на 0 и како $r + 9 > 0$ од последната равенка следува $r = 12\,cm$. Според тоа, $s = 15\,cm$ и за висината H на конусот добиваме $H = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\,cm$. Конечно, волуменот на конусот е

$$V = \frac{®r^2H}{3} = \frac{®\cdot 12^2 \cdot 9}{3} = 432®\ cm^3.$$

67. Плоштината на конусот е $36®\ cm^2$, а плоштината на омотачот е три пати поголема од плоштината на основата. Пресметај го волуменот на конусот.

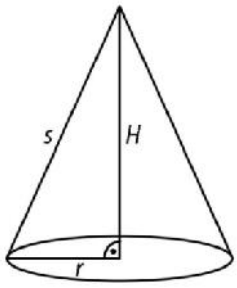
Решение. Од условот на задачата следува $®rs = 3®r^2$, т.е. $s = 3r$. Сега, $®r(r+s) = 36®$ и затоа $r(r+s) = 36$, па затоа $r(r+3r) = 36$, од каде добиваме $r^2 = 9$, односно $r = 3\,cm$. Значи, $s = 9\,cm$. Сега, од Питагоровата теорема следува $H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{81-9} = 6\sqrt{2}\,cm$. Конечно, волуменот на конусот е



$$V = \frac{®r^2H}{3} = \frac{®\cdot 3^2 \cdot 6\sqrt{2}}{3}\,cm^3 = 18®\sqrt{2}\,cm^3.$$

68. Волуменот на еден конус е $12\pi\ cm^3$, а должината на изводницата е 3,5 пати поголема од должината на дијаметарот на основата. Определи ја плоштината на овој конус.

Решение. Од условот на задачата следува $s = 3{,}5 \cdot 2r = 7r$ и $\frac{1}{3}\pi r^2 H = 12\pi$, т.е. $r^2 H = 36$. Понатаму, од Питагоровата теорема следува $s^2 = H^2 + r^2$, односно $(7r)^2 = H^2 + r^2$, па затоа $H = 4r\sqrt{3}$. Од $r^2 H = 36$ и $H = 4r\sqrt{3}$ добиваме $4\sqrt{3}r^3 = 36$, односно $r^3 = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.



Значи, $r^3 = (\sqrt{3})^3$, т.е. $r = \sqrt{3}\ cm$. Според тоа, $s = 7\sqrt{3}\ cm$ и плоштината на конусот е

$$P = \pi r(r+s) = \pi\sqrt{3}(\sqrt{3} + 7\sqrt{3}) = 24\pi\ cm^2.$$

69. Плоштината на конусот е $200\pi\ cm^2$, а должината на дијаметарот на основата е за $1\,cm$ помала од должината на изводницата. Пресметај го волуменот на овој конус.

Решение. Од условот на задачата имаме $P = 200\pi\ cm^2$ и $2r = s - 1$. Но, $P = r\pi(r+s)$, па затоа $200 = r(r + 2r + 1)$, т.е. $3r^2 + r - 200 = 0$. Последната равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$r^2 + \tfrac{r}{3} - \tfrac{200}{3} = 0,$$
$$r^2 + 2 \cdot r \cdot \tfrac{1}{6} + (\tfrac{1}{6})^2 - (\tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{200}{3} = 0$$
$$(r + \tfrac{1}{6})^2 = \tfrac{2401}{36},$$
$$(r + \tfrac{1}{6})^2 = (\tfrac{49}{6})^2,$$
$$r + \tfrac{1}{6} = \pm\tfrac{49}{6},$$

од каде бидејќи $r > 0$ добиваме $r = 8\,cm$. Сега, $s = 17\,cm$, па затоа

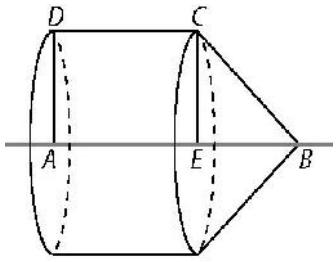
$$H^2 = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\,cm.$$

Конечно, $V = \frac{\pi r^3 H}{3} = \frac{\pi \cdot 8^3 \cdot 15}{3} = 320\pi\ cm^3$.

70. Правоаголен трапез ротира околу подолгата основа. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело ако основите на трапезот се долги $13\,cm$ и $17\,cm$, а висината на трапезот е долга $3\,cm$.

Решение. Нека трапезот е $ABCD$ и

$\overline{AB}=17\,cm$, $\overline{CD}=13\,cm$ и $\overline{AD}=3\,cm$.



Според тоа,

$$\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{CD}=17-13=4\,cm.$$

Од Питагоровата теорема применета на триаголникот BCE добиваме

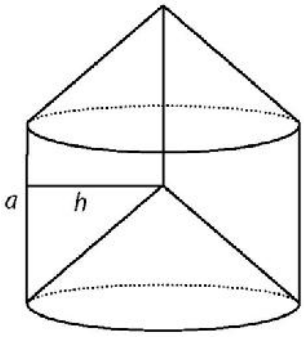
$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5\,cm.$$

Со ротација на правоаголниот трапез околу подолгата основа се добива тело кое е составено од цилиндар и конус. Радиусот на основите на двете тела е $\overline{AD}=3\,cm$, висината на цилиндарот е $\overline{CD}=13\,cm$, а висината на конусот е $\overline{EB}=4\,cm$.

Волуменот на добиеното тело е еднаков на збирот на волумените на двете тела, а неговата плоштина е еднаква на зброт на плоштините на една основа на цилиндарот е омотачите на цилиндарот и конусот. Лесно се добива дека $P=102\pi\ cm^2$ и $V=129\pi\ cm^3$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

71. Ромб со плоштина $15\,cm^2$ се врти околу својата страна за 360°. Определи ја плоштината на добиеното ротационо тело.

Решение. Со a и h да ги означиме должината на страната и должината на висината на ромбот. Имаме $ah=15$. Плоштината на добиеното тело се состои од плоштината на омотачот на цилиндар со радиус на основата h и висина a и два складни омотачи на конус со радиус на основа-та h и изводница a. Затоа имаме

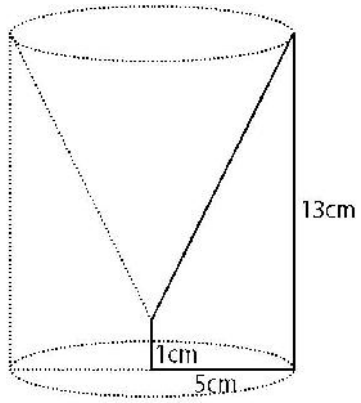


$$P=M_c+2M_k=2\pi ha+2\pi ha$$
$$=4\pi ha=60\pi\ cm^2.$$

72. Правоаголен трапез, со основи $1\,cm$ и $13\,cm$ и висина $5\,cm$, ротира

околу помалата основа. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

Решение. Телото кое се добива е цилиндар со радиус $R=5\,cm$ и висина $H=13\,cm$, од кое е изваден конус со радиус $r=5\,cm$ и висина $h=13-1=12\,cm$ (цртеж десно). Изводницата на конусот е



$$s=\sqrt{5^2+12^2}=13\,cm.$$

Волуменот на телото е еднаков на разликата на волумените на цилин-дарот и конусот, т.е.

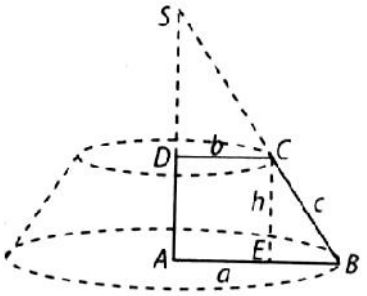
$$V=V_c-V_k=5^2\cdot 13\pi-\frac{5^2\cdot 12\pi}{3}=225\pi\ cm^3.$$

Плоштината на телото е еднаква на збирот на плоштините на омотачите на конусот и цлиндарот и плоштината на една основа на цилиндарот, т.е.

$$P=B_c+M_c+M_k=5^2\pi+2\cdot 5\cdot 13\pi+5\cdot 13\pi=220\pi\ cm^2.$$

73. Правоаголен трапез ротира околу права на која лежи пократкиот крак. Опреели ги волуменот и плоштината на добиеното тало ако должините на основите се $10\,cm$ и $6\,cm$, а остриот агол на трапезот е 60°.

Решение. При ознаки како на цртежот десно имаме



$$x=\overline{BE}=\frac{a-b}{2}=4\,cm.$$

Аглите на триагоникот BCE се еднакви на $90^\circ, 60^\circ$ и 30°, што значи дека тој е половина од рамностран триаголник. Оттука следува дека $c=2x=8\,cm$ и $h=\frac{c\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,cm$.

Слично, триаголникот ABS е половина од рамностран триаголник и затоа

$$\overline{SB}=2a=20\,cm \text{ и } \overline{SA}=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\,cm.$$

Значи, $\overline{SD}=\overline{SA}-\overline{DA}=6\sqrt{3}\,cm$ и $\overline{SC}=\overline{SB}-\overline{BC}=12\,cm$. Добиеното тело е пресечен конус чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на основите и плоштината на омотачот, која е еднаква на разликата на плоштините на омотачите на двата конуси. Според тоа,

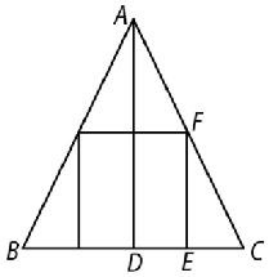
$$\begin{aligned}P&=B'+B''+M'-M''=\pi a^2+\pi b^2+a\cdot\overline{SB}\pi-b\cdot\overline{SC}\pi\\&=10^2\pi+6^2\pi+10\cdot 20\pi-6\cdot 12\pi\\&=100\pi+36\pi+200\pi-72\pi=264\pi\ cm^2.\end{aligned}$$

Волуменот на потсечениот конус е еднаков на разликата на волумените на двата конуси, односно

$$\begin{aligned}V&=V'-V''=\tfrac{1}{3}\pi a^2\cdot\overline{SA}-\tfrac{1}{3}\pi a^2\cdot\overline{SD}\\&=\tfrac{1}{3}\pi\cdot 10^2\cdot 10\sqrt{3}-\tfrac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 6\sqrt{3}\\&=\frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}-\frac{216\pi\sqrt{3}}{3}=\frac{784\pi\sqrt{3}}{3}\,cm^3.\end{aligned}$$

74. Во конус со радиус на основата $6\,cm$ е впишан цилиндар со радиус на основата $3\,cm$ и висина $5\,cm$. Основата на цилиндарот лежи на основата на конусот. Определи го волуменот на делот од конусот кој е надвор од цилиндарот.

Решение. Да го разгледаме оскиниот пресек на конусот и цилиндарот (цртеж десно). Триаголниците ADC и FEC се слични. Од сличноста на овие триаголници следува дека висината на конусот е еднаква на $10\,cm$. Бараниот волумен го добиваме кога од волуменот на конусот ќе го одземеме волуменот на цилиндарот. Значи, бараниот волумен е $75\pi\ cm^3$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



75. Сад во облик на цилиндар, со радиус на основата $4\,cm$ и висина $12\,cm$, наполнет е со вода до $\frac{2}{3}$ од својата висина. Матеј во садот уфрлил 30 оловни топчиња со радиус $1\,cm$. Дали по ставањето на топчињата дошло до прелевање на водата од сдот?

Решение. Кога садот ќесе наполни до $\frac{2}{3}$ од својата висина со вода,

добиваме дека висината на водата во садот е $8\,cm$. Според тоа, волуменот на водата во цилиндарот е $4^2 \cdot 8® = 128®\ cm^3$. Волуменот на празниот дел од садот е $4^2 \cdot 4® = 64®\ cm^3$. Волуменот на едно оловно топче е $\frac{4}{3}®\ cm^3$, па затоа волуменот на ставените топчиња е $30 \cdot \frac{4}{3}®\ cm^3 = 40®\ cm^3$. Конечно, од $40®\ cm^3 < 64®\ cm^3$ следува дека водата во садот нема да се прелее.

76. Во цилиндричен сад со радиус на основата $8\,cm$ и висина $14\,cm$ се ставени 35 метални топки со радиус $3\,cm$. Потоа во садот се турени $300\,ml$ течност. Колку најмногу литри вода може да се тури во садот, а водата да не се прелее? (Земи $® \approx \frac{22}{7}$.)

Решение. Вкупниот волумен на садот е

$$V = ®r^2H = 14 \cdot 8^2® \approx 2816\,cm^3.$$

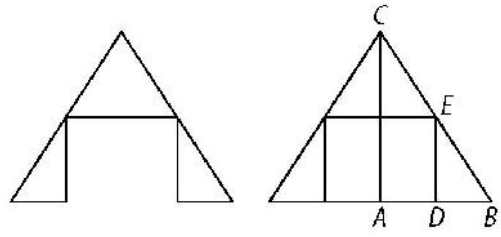
Вкупниот волумен на металните топки е

$$V = 35 \cdot \frac{4}{3}®r^3 = 35 \cdot \frac{4}{3} \cdot (\frac{3}{2})^3® \approx 495\,cm^3.$$

Значи, во садот може да се долеат $2816 - 495 - 300 = 2021\,cm^3$ вода, односно 2,021 литри вода.

77. Од конус со радиус на основата $4\,cm$ исечен е впишан цилиндар со радиус на основата $2\,cm$ и висина $3\,cm$. Пресметај ја плоштината на вака добиеното тело.

Решение. Оскиниот пресек на телото кое се добива со исекување на цилиндарот од конусот е прикажан на левиот цртеж. Значи, неговата плоштина се состои од плоштината на омотачот на конусот, плоштината на омотачот на цилиндарот и плоштината на основата на конусот (делот од основата на конусот кој се исекува е еднаков на основата на цилиндарот и истиот се добива со горната основа на цилиндарот). Од сличноста на триаголниците ABC и DBE за висината на конусот добиваме $h : 3 = 4 : 2$, па затоа $h = 6\,cm$.

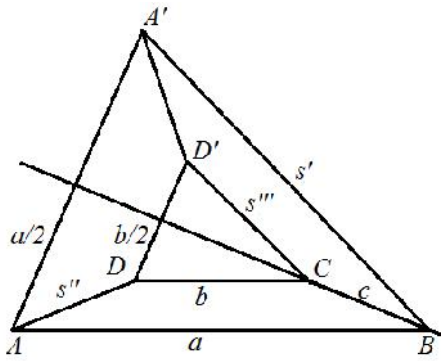


Сега изводницата на цилиндарот е $s=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}\,cm$. Конечно, плоштината на добиеното тело е

$$P=2\pi RH+\pi r(r+s)=12\pi+4\pi(4+2\sqrt{13})=4\pi(7+2\sqrt{13})\,cm^2.$$

78. Рамнокрак трапез ротира околу права на која лежи еден од краците. Определи ги плоштината и волуменот на настанатото тело ако должините на основите на трапезот се $10\,cm$ и $4\,cm$, а остриот агол на трапезот е 30°

Решение. Должината на кракот на трапезот е $c=2\sqrt{3}\,cm$. Настанатото тело, чиј оскин пресек е прикажан на цртежот десно, се добива кога во конус со изводница $s'=10\,cm$, радиус $r'=5\,cm$ и висина $H'=5\sqrt{3}\,cm$ прво се извади потсечен конус со изводница $s''=c$, радиуси $r'=5\,cm$ и $r''=2\,cm$ и висина $H''=\sqrt{s''^2-(\frac{a-b}{4})^2}$, а потоа се извади конус со изводница $s'''=4\,cm$, радиус $r''=2\,cm$ и висина $H''=2\sqrt{3}\,cm$. Сега плоштината на настанатото тело е еднаква на збирот на плоштините на омотачите на двата конуси и потсечениот конус. Според тоа, $P=M'+M''+M'''=(58+14\sqrt{3})\pi\,cm^2$. Волуменот го добиваме кога од волуменот на првиот конус ги одземеме волумените на потсечениот конус и на вториот конус, односно $V=V'-V''-V'''=26\sqrt{3}\pi\,cm^3$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

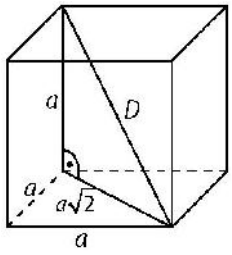


79. Определи ги плоштината и волуменот на топката која е впишана во коцка со плоштина $216\,cm^2$.

Решение. Нека должината на работ на коцката е a. О условот на задачата следува $6a^2=216$, од каде добиваме $a^2=36$, т.е. $a=6\,cm$. Радиусот r на топката е $r=\frac{a}{2}=3\,cm$, па затоа нејзината плоштина е $P=4\pi r^2=36\pi\,cm^2$, а волуменот е $V=\frac{4}{3}\pi r^3=36\pi\,cm^3$.

80. Определи ги плоштината и волуменот на топка опишана околу коцка со волумен $24\sqrt{3}\,cm^3$.

Решение. Нека должината на страната на коцката е a. Имаме $a^3 = 24\sqrt{3}$, од каде добиваме $a^3 = 2^3 \cdot 3\sqrt{3} = (2\sqrt{3})^3$, па затоа $a = 2\sqrt{3}\,cm$. Радиусот на топката е еднаков на половина од дијагоналата D на коцката. Понатаму, бидејќи



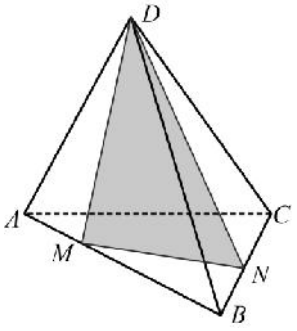
$$D = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3},$$

добиваме $r = \frac{D}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\,cm$. Конечно плоштината на топката е $P = 4\pi r^2 = 36\pi\ cm^2$, а нејзиниот волумен е $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi\ cm^3$.

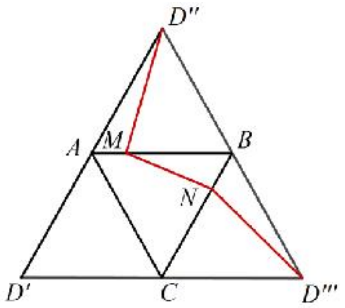
81. Дадена е тристрана пирамида $ABCD$ и S е тежиштето на триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{SD} < \frac{\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}}{3}$.

Решение. Нека AA_1 е тежишна линија на триаголникот ABC. Во триаголникот BCD важи $\overline{BA_1} = \overline{A_1C}$, па затоа $\overline{A_1D} < \frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{CD}$. Слично на ова, во триаголникот AA_1D важи $\overline{AS} : \overline{SA_1} = 2:1$, па затоа важи $\overline{SD} < \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{A_1D}$. Користејќи ги двете неравенства добиваме дека $\overline{SD} < \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{CD}) = \frac{\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}}{3}$.

82. Даден е правилен тетраедар $ABCD$ чиј раб има должина a. Рамнината ¢ ја содржи точката D и ги сече рабовите AB и BC редоследно во точките M и N така што пресекот на тетраедарот и рамнината ¢ е триаголникот DMN (цртеж десно). Докажи дека периметарот на пресечниот триаголник DMN е поголем од $2a$.



Решение. Да ја нацртаме мрежата на тетраедарот $ABCD$ (цртеж долу лево), при што добиваме рамностран триаголник $D'D''D'''$ со должина на страна $2a$.



Тогаш, бидејќи должината на секоја искршена линија која поврзува две темиња на даден триаголник е поголема од страната на триаголникот определена со тие две темиња, за периметарот на пресечниот триаголник DMN добиваме

$$\begin{aligned} L &= \overline{DM} + \overline{MN} + \overline{ND} \\ &= \overline{D''M} + \overline{MN} + \overline{ND'''} \\ &> \overline{D''D'''} = 2a, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Определи четирицифрен природен број кој се зголемува 4 пати кога неговите цифри ќе се запишат во обратен редослед.

   Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcd}$. Тогаш $4\cdot\overline{abcd}=\overline{dcba}$, од каде следува $a\le 2$. Но, не е можно $a=1$, бидејќи така добиваме непарен број кој треба да е делив со 4, што е противречност. Според тоа, $a=2$ и затоа $4\cdot\overline{2bcd}=\overline{dcb2}$, од каде добиваме дека цифрата на единиците на бројот $4d$ е 2, па затоа $d=8$. Значи, $4\cdot\overline{2bc8}=\overline{8cb2}$. Последното равенство е еквивалентно на равенството $13b+1=2c$, од каде бидејќи b и c се цифри, добиваме $b=1, c=7$. Конечно, задачата има единствено решение $\overline{abcd}=2178$.

2. Дали постои трицифрен број кој ќе се зголеми четири пати ако неговите цифри се запишан во обратен редослед?

   Решение. *Прв начин*. Нека $\overline{abc}$ е трицифрен број. Ако $4\cdot\overline{abc}=\overline{cba}$, тогаш $a\le 2$. Не може да е $a=1$, бидејќи тогаш $\overline{cba}$ нема да е делив со 4. Значи, $a=2$. Според тоа, производот $4\cdot\overline{abc}$ има цифра на единиците 2, па затоа $c=8$. Според тоа, $4\cdot\overline{2b8}=\overline{8b2}$, од каде следува дека $b\le 2$, па од деливост со 4 следува дека $b=1$. Но, $4\cdot 218=872\ne 812$ што значи дека не постои број со саканите својства.

   Втор начин. Нека $\overline{abc}$ е трицифрен број. Ако $4\cdot\overline{abc}=\overline{cba}$, тогаш $a\le 2$ и како $133a+10b=32c$, добиваме $a=2$. Значи, $133+5b=16c$, од каде добиваме дека мора да е $c=9$. Со замена во последната равенка по средувањето добиваме $5b=11$, па како оваа равенка нема решение во множеството природни броеви добиваме дека не постои број со саканите својства.

3. Колку цифри има најмалиот природен број n таков што збирот на цифрите на бројот n и збирот на цифрите на бројот $n+1$ е делив со 1990?

   Решение. Ако цифрата на единиците на бројот n не е 9, тогаш збировите на цифрите на броевите n и $n+1$ се разликуваат за 1, па збирот

на цифрите на едниот број не може да е делив со 10. Значи, бројот n со саканото својство, треба да се бара меѓу броевите кои имаат цифра на единици 9. Со додавање на 1 на бројот n се менуваат во нули сите деветки на крајот на бројот, а последната цифра различна од 9 се зголемува за 1. За да броевите n и $n+1$ го задоволуваат баранот услов, збирот на броевите пред крајните деветки мора да биде 1989, а збирот на крајните деветки мора да е од облик $1990k+1$, за што е можно помал број k. Нека бројот на овие деветки е s. Бројот k го добиваме како најмал број s за кој $1990k+1=9s$. Според тоа,

$$s=\frac{1990k+1}{9}=220k+\frac{k+1}{9}.$$

Значи, најмал број е $k=8$ и тогаш $s=221\cdot 8+1=1769$. Збирот на цифрите пред крајните деветки е 1989. Најмал број чија последна цифра е различна од 9, а чиј збир на цифри е 1989 е бројот $1\underbrace{99...9}_{220}8$.

Конечно, бараниот број е $1\underbrace{99...9}_{220}8\underbrace{99...9}_{1769}$ и тој има 1991 цифра.

4. а) Марко испишува низа броеви според следново правило: како прв член го запишува бројот 1, а секој следен член се добива така што претходниот член се зголемува за најголемата цифра од неговиот запис, т.е. за соодветниот едноцифрен број. Дали е можно во низата да се појави бројот 2012?

б) Истото прашање ако наместо 1 за прв член се земе било кој број помал од 1000?

Решение. Бројот 2012 на опишаниот начин може непосредно да се добие или од бројот 2010, или од борјот 2006.

Одејќи од бројот 2010 наназад, имаме еднозначно определена низа: 2005, 1996, ..., 1906, 1897 (постојано се намалува за 9, бидејќи станува збор за броеви кај кои секогаш цифрата на стотките е 9). Но, бројот 1897 не може да се добие од ниту еден број според наведената постапка.

Бројот 2006 може да се добие или од бројот 2003 или од бројот 1997. Одејќи од бројот 2009 наназад имаме еднозначно определена низа: 1994, 1985, ..., 1895 (секогаш се намалува за 9). Сега 1895 може да се добие само од 1887, додека 1887 не може да се добие од ниту еден број.

Одејќи од бројот 1997 наназад имаме еднозначно определена низа: 1988, 1979, ..., 1889, 1881, 1873, 1865, 1857, додека 1857 не може да се

добие од ниту еден број.
Значи, 2012 не може да се добие на опишаниот начин тргнувајќи од некој број помал од 1000.

5. На колку начини бројот 2010 може да се запише како збир на последователни природни броеви?
Решение. Нека бројот 2010 е збир на последователните природни броеви $a+1, a+2, ..., a+n-1, a+n$. Имаме,

$$(a+1)+(a+2)+...+(a+n)=2010,$$
$$na+(1+2+...+n)=2010,$$
$$na+\frac{n(n+1)}{2}=2010,$$
$$n(2a+n+1)=4020,$$
$$n(2a+n+1)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67.$$

Од $a+1>0$ следува $2a+n+1>n$. Производот $n(2a+n+1)$ може да се запише како производ на два цели броја на толку начини, колку што има делители бројот 4020, а тоа е $3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=24$. Од овие 24 случаи само половината се можни, бидејќи првиот множител е помал од вториот. Од тоа следува $n=1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60$. Ако не допуштаме низа од еден број, тогаш имаме само 11 можности. Но, бројот 2010 е парен па нема да добиеме решение за оние парни броеви кои не се деливи со 4. Имено, не е можно двата броја n и $2a+n+1$ да се парни, па како нивниот производ е парен број едниот мора да е делив со 4, а другиот да е непарен број. Затоа треба да ги изоставиме и можностите 2, 6, 10 и 30, па така добиваме 7 решенија:
$n=3, a+1=669$; $n=4, a+1=502$; $n=5, a+1=400$; $n=12, a+1=162$; $n=15, a+1=127$; $n=20, a+1=91$ и $n=60, a+1=4$.

6. На колку начини можеме бројот 2013 да го запишеме како збир на последователни непарни природни броеви?
Решение. Нека 2013 е запишан како збир на n последователни непарни природни броеви: $a+1, a+3, ..., a+2n-1$, каде a е парен број. Тогаш

$$(a+1)+(a+3)+...+(a+2n-3)+(a+2n-1)=2013$$

и

$$(a+2n-1)+(a+2n-3)+...+(a+3)+(a+1)=2013.$$

Ако ги собереме горните равенства (на левата страна собираме прв со

прв собирок, втор со втор собирок, ..., последен со последен собирок), го добиваме равенството $n(2a+2n)=2\cdot 2013$, кое е еквивалентно со равенството $n(a+n)=2013$, каде $n<a+n$. Сега од $2013=3\cdot 11\cdot 61$ следува дека бројот 2013 има $2\cdot 2\cdot 2=8$ делители, од кои n ги прима вредностите само на најмалите 4 делители, бидејќи само во тој случај првиот делител на 2013 е помал од вториот. Значи, $n\in\{1,3,11,33\}$.

- За $n=1$ имаме $a+1=2013$.
- За $n=3$ имаме $a+1=669$ и броевите се: 669, 670 и 671.
- За $n=11$ имаме $a+1=173$ и броевите се: 173, 175, ..., 193.
- За $n=33$ имаме $a+1=29$ и броевите се: 29, 31, ..., 91, 93.

7. На колку начини бројот 2013 можеме да го запишеме како збир на последователни природни броеви?

Решение. Нека претпоставимедека има повеќе од еден собирок, бидејќи во спротивно тоа е бројот 2013. Нека првиот број е x, а последниот е $x+k$. Тогаш

$$x+(x+1)+\ldots+(x+k)=2013,$$
$$x(k+1)+(1+2+\ldots+k)=2013,$$
$$x(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}=2013,$$
$$(k+1)(2x+k)=4026.$$

Сега, од $x\geq 1$ следува $2x+k>k+1$. Понатаму $4026=2\cdot 3\cdot 11\cdot 61$ и броевите $k+1$ и $2x+k$ се со спротивна парност. Така ги имаме следниве можности:

1) $k+1=2,\ 2x+k=2013$, од каде добиваме $k=1$ и $x=1006$, па затоа $1006+1007=2013$,
2) $k+1=3,\ 2x+k=1342$, од каде добиваме $k=2$ и $x=670$, па затоа $670+671+672=2013$,
3) $k+1=6,\ 2x+k=671$, од каде добиваме $x=5$ и $x=333$, па затоа $333+334+335+336+337+338=2013$,
4) $k+1=11,\ 2x+k=366$, од каде добиваме $k=10$ и $x=178$, па затоа $178+179+180+181+182+183+184+185+186+187+188=2013$,
5) $k+1=22,\ 2x+k=182$, од каде добиваме $k=21$ и $x=81$, па затоа $81+82+83+84+\ldots+97+98+99+100+101+102=2013$,
6) $k+1=33,\ 2x+k=122$, од каде добиваме $k=32$ и $x=45$, па затоа $45+46+47+48+\ldots+74+75+76+77=2013$,

7) $k+1=61, 2x+k=66$, од каде добиваме $k=60$ и $x=3$, па затоа $3+4+5+6+7+...+57+58+59+60+61+62+63=2013$.

Според тоа, бројот 2013 може да се запише на осум начини како збир на последователни природни броеви, од кои едниот содржи само еден собирот, а тоа е самиот број 2013.

8. Во земјата на математичарите треба да направат монетарна реформа. Целта е да има најмал можен број банкноти (според вредностите), а притоа секоја сума од 1 до 25 да може да се плати со најмногу 2 банкноти (со иста или различна вредност). Колку типови банкноти треба да се отпечатат?

Решение. Доволно е седум типови банкноти. На пример, 1, 3, 4, 6, 10, 12 и 13, или пак 1, 2, 5, 8, 11, 12 и 13.

Ќе докажеме дека целта не може да се постигне со помалку од седум типови банкноти. Да разгледаме произволно шестелементно подмножество A на множеството $B=\{1,2,3,...,25\}$. Ќе докажеме дека постои барем еден елемент од B кој не е во A и кој не е од облик $m+n$, каде m и n се броеви од A, еднакви или различни.

Нека го претпоставиме спротивното. Нека во A има три парни и три непарни броеви. Бидејќи во B има 13 непарни броеви, секој од нив или е во множеството A или се добива како збир на еден парен и еден непарен број од A. На овој начин можеме да добиеме најмногу $3+3\cdot 3=12$ непарни броеви, што е противречност.

Слично добиваме противречност и кога бројот на непарните броеви во A е еднаков на било кој број различен од 3.

9. На еден натпревар во риболов, победникот (кој уловил најмногу риби) уловил точно 4 пати помалку риби од сите останати натпреварувачи заедно. Натпреварувачот кој го освоил третото место уловил точно 9 пати помалку риби од сите останати натпреварувачи заедно, а натпреварувачот кој го освоил последното место уловил точно 10 пати помалку риби од останатите натпреварувачи. Колку луѓе учествувале на натпреварот?

Решение. Нека n е вкупниот број напреварувачи. Со $a_k, k=1,2,...,n$ да го означиме бројот на рибите кои ги уловил натпреварувачот кој го освоил $k-$тото место. Нека $S=a_1+a_2+...+a_n$. Според условот на задачата $a_1\geq a_2\geq ...\geq a_n$ и

$$a_1 = \frac{S-a_1}{4},\ a_3 = \frac{S-a_3}{9},\ a_n = \frac{S-a_n}{10}.$$

Оттука следува $a_1 = \frac{S}{5},\ a_2 = \frac{S}{10},\ a_n = \frac{S}{11}$. Според тоа,

$$\frac{S}{5} = a_1 \geq a_2 \geq a_3 = \frac{S}{10} \geq a_4 \geq \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n = \frac{S}{11}.$$

Така, за S ја имаме следнава оценка

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq a_1 + a_3 + a_3 + a_n + \ldots + a_n \\ &= a_1 + 2a_3 + (n-3)a_4 = \frac{2S}{5} + (n-3)\frac{S}{11}, \end{aligned}$$

од каде добиваме $\frac{3S}{5} \geq (n-3)\frac{S}{11}$, односно $n \leq 9\frac{3}{5}$. Од друга страна

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\leq a_1 + a_1 + a_3 + \ldots + a_3 + a_n \\ &= 2a_1 + (n-3)a_3 + a_n \\ &= \frac{2S}{5} + (n-3)\frac{S}{10} + \frac{S}{11} \\ &< \frac{2S}{5} + (n-2)\frac{S}{10} \\ &= (n+2)\frac{S}{10}, \end{aligned}$$

од каде добиваме $\frac{n+2}{10} > 1$, односно $n > 8$.

Конечно, $8 < n \leq 9\frac{3}{5}$, па затоа $n = 9$.

10. На шаховски турнир учествувале осум шахисти (секој играл по една партија со секој од преостанатите шахисти). По завршувањето на турнирот се покажало дека не постојат двајца шахисти кои освоиле еднаков број поени. Шахистот кој го освоил второто место имал исто толку поени колку што имале заедно четворицата последнопласирани шахисти. Со кој резултат завршила партијата меѓу шахистите кои го освоиле третото и седмото место? (Во шахот за победа се добива 1 поен, за пораз 0 поени и за нерешен резултат секој шахист добива по 0,5 поени.)

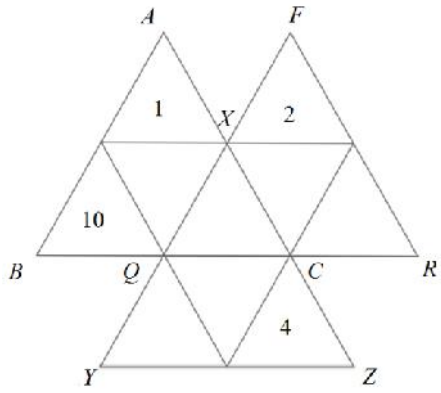
Решение. Четирите последнопласирани шахисти меѓусебно одиграле $(4\cdot 3):2 = 6$ партии и вкупно од овие партии освоиле 6 поени. Според тоа, вториот играч нема помалку од 6поени. Меѓутоа, тој не може да има ниту повеќе од 6 поени. Имено, ако вториот има 6,5 поени, тогаш вториот мора да има 7 поени, што значи дека тој ги победил сите шахисти, па го победил и вториот кој тогаш би имал најмногу 6 поени.

Значи вториот играч освоил точно 6 поени. Тоа значи дека последнопласираните четири шахисти сите поени ги освоиле од партите кои ги играле меѓу себе. Следува дека последните четворица ги загубиле сите партии против првите четворица. Значи, партијата меѓу третиот и седмиот шахист завршила со победа на третиот шахист.

Останува да дадеме пример дека ваков турнир навистина постои. Ако шахистите ги означиме со A, B, C, D, E, F, G, H, тогаш следната табела е пример на резултати од ваков турнир.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	■	1	1	1	1	1	1	1
B	0	■	1	1	1	1	1	1
C	0	0	■	1	1	1	1	1
D	0	0	0	■	1	1	1	1
E	0	0	0	0	■	1	1	1
F	0	0	0	0	0	■	1	1
G	0	0	0	0	0	0	■	1
H	0	0	0	0	0	0	0	■

11. На дијаграмот се прикажани три триаголници ABC, PQR и XYZ, така што секој од нив е разделен на четири помали триаголници. Во помалите триаголници запиши ги броевите од 1 до 10, така што збирот на броевите запишани во секој од триаголниците ABC, PQR и XYZ ќе биде еднаков. Броевите 1, 2, 4 и 10 се веќе запишани. На колку начини може да се пополни дијаграмот?



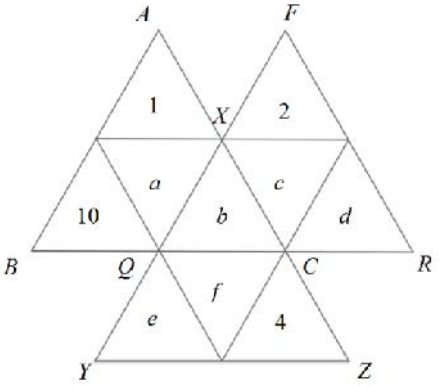
Решение. Нека броевите кои недостасуваат во шесте мали триаголници ги означиме со a, b, c, d, e и f (види цртеж) и тие се броевите 3, 5, 6, 7, 8 и 9. Според тоа,

$$a+b+c+d+e+f=3+5+6+7+8+9,$$

т.е.

$$a+b+c+d+e+f=38. \qquad (1)$$

Нека збирот на броевите запишани во секој од триаголниците ABC, PQR и XYZ го означиме со x. При ознаки како на цртежот десно добиваме



$$x=11+a+b,$$
$$x=2+b+c+d, \qquad (2)$$
$$x=4+b+e+f.$$

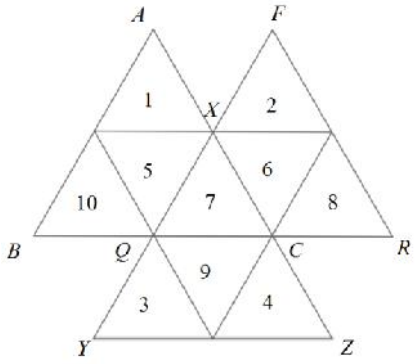
Ако ги собереме горните равенства и го искористиме (1), добиваме

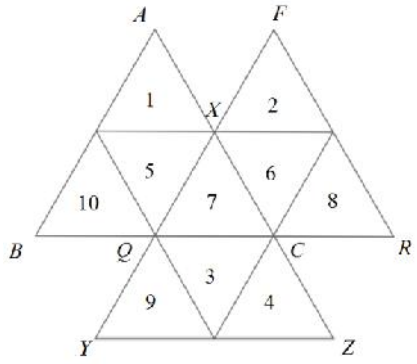
$$3x=17+2b+(a+b+c+d+e+f),$$
$$3x=17+2b+38,$$
$$3x=55+2b, \qquad (3)$$

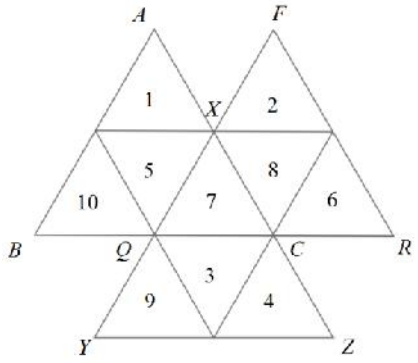
каде $b\in\{3,5,6,7,8,9\}$. Од последното равенство следува $3\mid 55+2b$ и како $b\in\{3,5,6,7,8,9\}$, со непосредна проверка се добива дека тоа е можно само за $b=7$. Тогаш од (3) добиваме дека $x=23$. Со замена во (2) добиваме

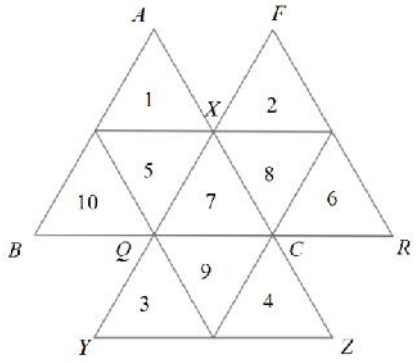
$$a=5,$$
$$c+d=14,,$$
$$e+f=12,$$

при што $\{c,d,e,f\}=\{3,6,8,9\}$. Оттука е јасно дека $\{c,d\}=\{6,8\}$ и $\{e,f\}=\{3,9\}$. Според тоа, постојат четири различни начини на кои може да се пополни дадениот дијаграм.









12. Два камиони превезуваат песок од местото A во местото B. Ако првиот камион направи 4 тури, а вториот 3 тури, тие вкупно ќе превезат помалку 42 тони песок. Меѓутоа, ако првиот направи 7 тури, а вториот 4 тури, тие ќе превезат повеќе од 66 тони песок. Кој камион има поголема носивост?

Решение. Нека x е носивоста на првиот, а y е носивоста на вториот камион во тони. Од условот на задачата следува $4x+3y<42$ и $7x+4y>66$. Ако првата неравенка ја помножиме со 7, а втората со -4 добиваме

$$\begin{aligned} 28x+21y&<294,\\ -28x-16y&<-264 \end{aligned}.$$

Ги собираме добиените неравенски и наоѓаме $5y<30$, т.е. $y<6$. Ако првата неравенка ја помножиме со -4, а втората со 3, добиваме

$$\begin{aligned} -16x-12y&>-168,\\ 21x+12y&>198 \end{aligned}.$$

Ги собираме добиените неравенки и наоѓаме $5x>30$, т.е. $x>6$. Значи, поголема носивост има првиот камион.

13. Венко во подрумот има определен број буриња полни со вино. Волуменот на секое буре е 1100 литри. Ако виното се претури во буриња со волумен 900 литри, ќе бидат потребни 6 буриња повеќе и едно буре нема да биде полно. Ако виното се претури во буриња со волумен 800 литри, ќе бидат потребни 9 буриња повеќе и повторно едно буре нема да биде полно. Колку хектолитри вино има Венко во своите буриња?

Решение. Со x да го означиме количеството вино, а со n бројот на буриња од 1100 литри во кои е целото количество вино. Според

условот на задачата

$$1100n = x,$$
$$900(n=5) < x < 900(n+6),$$
$$800(n+8) < x < 800(n+9).$$

Од $900(n+5) < x = 1100n$ следува $200n > 4500$, т.е. $n > 22$.

Од $800(n+9) > x = 1100n$ следува $300n < 7200$, т.е. $n < 24$.

Значи, $n = 23$, од каде наоѓаме $x = 1100 \cdot 23 = 25300$. Значи, Венко има 235 хектолитри вино.

14. Во една зграда живеат неколку брачни парови со деца. Познато е дека деца има повеќе од возрасни, возрасни повеќе од момчиња, момчиња повеќе од девојчиња, девојчиња повеќе од семејства. Во секое семејство има најмалку едно дете, а броевите на децата во сите семејства се меѓусебно различни. Секое девојче има најмалку еден брат и најмногу една сестра. Во едно семејство има повеќе деца отколку во сите останати. Колку семејства живеат во зградата и колку девојчиња има во секое семејство?

Решение. Нека x е бројот на семејствата кои живеат во зградата и нека $y_1, y_2, ..., y_x$ се броевите на децата во семејствата. Според условот на задачата важи

$$y_1 < y_2 < ... < y_{x-1} < y_x \text{ и } y_1 + y_2 + ... + y_{x-1} < y_x .$$

Според тоа,

$$y_x > 1 + 2 + ... + x - 1 = \frac{x(x-1)}{2},$$

а вкупниот број деца го задоволува неравенството

$$y > 2\frac{x(x-1)}{2} = x(x-1).$$

Ако u е вкупниот број момчиња и v е вкуниот број девојчиња, тогаш според условот на задачата

$$y > 2x > u > v > x,$$

па затоа

$$4x > u + v = y > 2x.$$

Освен тоа,

$$u \le 2x - 1,$$

од каде што следува

$$v \le 2x - 2,$$
$$y = u + v \le 4x - 3.$$

Затоа важи

$$\begin{aligned} &x(x-1) < y \le 4x-3, \\ &x(x-1)-(4x-3) \le 0, \\ &x^2-5x+3 \le 0, \\ &(2x-5)^2 \le 13 < 16, \\ &-4 < 2x-5 < 4, \\ &1 < 2x < 9, \\ &1 \le x \le 4. \end{aligned}$$

За $x=1$ и $x=2$ не може да е исполнет условот $2x > u > v > x$. За $x=4$ добиваме $x(x-1)=12 < y \le 4x-3=13$, од каде следува дека

$$y = 13 = 1+2+3+7,$$

а како $v > x = 4$, добиваме $v=5, u = y-v = 13-5 = 8$, што противречи на условот $2x > u$. Останува единствената можност $x=3$. За $x=3$, се добива $2x = 6 > u > v > x = 3$, т.е. $u=5, v=4$, па затоа $y = u+v = 9$. Условите на задачата според кои секое девојче има барем еден брат и најмногу една сестра, може да се исполнети само ако $y_1 = 1, y_2 = 3$ и $y_3 = 5$. Значи, во зградата живеат три семејства и притоа во првото има едно дете (син), во второто син и две ќерки и во третото три сина е две ќерки.

15. Должината на еден правоаголник е зголемена за $p\%$, а ширината е намалена за $p\%$. Ако плоштината на правоаголникот се намалила за 16%, определи го p.

Решение. Нека должината на правоаголникот е a, а ширината е b. Тогаш должината на новиот правоаголник е $(1+\frac{p}{100})a$, а неговата ширина е $(1-\frac{p}{100})b$. Бидејќи плоштината на новиот правоаголни е помала за 16% од плоштината на почетниот правоаголник, добиваме $(1+\frac{p}{100})a(1-\frac{p}{100})b = 0{,}84ab$, од каде следува $1-(\frac{p}{100})^2 = 0{,}84$, па затоа $(\frac{p}{100})^2 = 0{,}16$, т.е. $p = 40$.

16. Плоштината на правоаголникот е $\overline{3xx3}$, а должините на неговите соседни страни се x^2 и $\overline{xx}$. Определи ја цифрата x.

Решение. Имаме $x^2 \cdot \overline{xx} = \overline{3xx3}$, од каде последователно добиваме

$$(10x + x) \cdot x^2 = 3000 + 100x + 10x + 3,$$
$$11x^3 = 110x + 3003,$$
$$11x^3 - 110x - 3003 = 0,$$
$$11(x^3 - 10x) - 11 \cdot 273 = 0,$$
$$x^3 - 10x - 273 = 0$$
$$x^3 - 49x + 39x - 273 = 0,$$
$$x(x-7)(x+7) + 39(x-7) = 0,$$
$$(x-7)(x^2 + 7x + 39) = 0.$$

Но, $x \geq 0$, па затоа $x^2 + 7x + 39 \geq 39$ и од последната равенка добиваме $x - 7 = 0$, односно $x = 7$.

17. Определи го бројот на правоаголните триаголници чии темиња се воедно и темиња на даден правилен 2023-аголник.

Решение. Хипотенузата на произволен таков триаголник воедно е и дијаметар на кружницата опишана околу дадениот правилем многуаголник. Но, овој многуаголник има непарен број темиња, па затоа не постои дијаметар на опишаната кружница чии крајни точки се темиња на многуаголникот. Значи, не постои ниту еден правоаголен триаголник чии темиња воедно се и темиња на дадениот правилен 2023-аголник.

18. Андреј ги измерил должините на четирите страни и едната дијагонала на четириаголникот и добил: $1\,cm$, $2\,cm$, $2{,}8\,cm$, $5\,cm$, $7{,}5\,cm$.

а) Која е должината на измерената дијагонала?

б) Колку има четириаголници кои не се складни за кои наведените броеви се должини на страните и една од дијагоналите на четириаголник?

Решение. а) За да ги исклучиме случаите кои не се можни го применуваме неравенството на триаголник. Дијагоналата не може да има должина $7{,}5\,cm$, бидејќи преостанатите четири броја не може да се поделат на два пара такви што збировите на броевите во секој од двата пара е поголем од $7{,}5\,cm$. Од исти причини го исклучуваме и бројот $5\,cm$. Бројот $1\,cm$ не може да е должина на дијагоналата,

бидејќи бројот $7,5\,cm$ ќе биде поголем од збирот на бројот $1\,cm$ и било кој друг број. Од исти причини го исклучуваме и бројот $2\,cm$. Останува единствена можност дијагоналата да е еднаква на $2,8\,cm$. Постои четириаголник кој ги задоволува условите на задачата и тоа: на едната страна над дијагоналата $2,8\,cm$ се страните со должини $1\,cm$ и $2\,cm$, а на другата страна се страните со должини $5\,cm$ и $7,5\,cm$.

б) Лесно се гледа дека во четириаголник кој ги задоволува условите на задачата двете најкратки страни мора да се соседни (тие со најдената дијагонала формираат триаголник), а истото важи и за двете најдолги страни. Според тоа, постојат четири четириаголници кои ги задоволуваат наведените услови и кои не се по парови складни.

19. а) Колку најмногу страни може да има конвексен многуаголник кај кој сите агли се со различна големина, а мерниот број на секој агол е цел број степени?

б) За колку најмногу може да се разликуваат најголемиот и најмалиот агол на тој многуаголник?

Решение. а) Ако големините на внатрешните агли се изразуваат со цели броеви степени, тоа важи и за надворешните агли. Бидејќи збирот на надворешните агли е еднаков на 360° и

$$1+2+3+...+26=351<360<1+2+3+...+27,$$

добиваме дека многуаголникот може да има најмногу 26 страни.

б) Најголемата разлика меѓу најголемиот и најмалиот агол на таквиот многуаголник е кога првите 25 надворени агли се најмалите можни, а последниот надворешен агол е најголемиот можен. Значи, надворешните агли се $1^\circ,2^\circ,3^\circ,...,25^\circ,35^\circ$. Соодветните внатрешни агли се $179^\circ,178^\circ,...,155^\circ,145^\circ$. Разликата меѓу најголемиот и најмалиот агол е $179^\circ-145^\circ=34^\circ$.

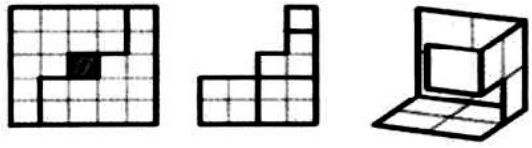
20. Определи го најмалиот број квадрати со целобројни должини на страни (во сантиметри) на кои може да се исече правоаголник со плоштина $2009\,cm^2$, ако должините на страните на правоагоникот се исто така целобројни.

Решение. Бидејќи $2009=7\cdot7\cdot41$ должините на страните на право-

аголникот, изразени во cm, може да се 1 и 2009, 7 и 287, 41 и 49. Во првиот случај (1 и 2009) правоаголникот може да се расече на квадрати со страна $1\,cm$ и такви квадрати има 2009. Во вториот случај (7 и 287) правоаголникот може да се расече на квадрати со страни $7\,cm$ и такви квадрати има 41. Во третиот случај (41 и 49), имаме најмал број квадрати. Од правоаголникот можеме да исечеме еден квадрат со страна $41\,cm$, па ни останува правоаголник со страни $8\,cm$ и $41\,cm$. За да добиеме најмал можен број квадрати, од него исекуваме 4 квадрати со страна $8\,cm$ и ни останува правоаголник со страни $8\,cm$ и $9\,cm$. Од него исекуваме 1 квадрат со страна $5\,cm$, 2 квадрати со страна $4\,cm$, 1 квадрат со страна $3\,cm$, 1 квадрат со страна $2\,cm$ и 2 квадрати со страна $1\,cm$. Тоа се вкупно 12 квадрати.

21. Од квадрат 5×5 е исечено централното поле. Расечи ја добиената фигура на два дела од кои може да се состави коцка со должина на раб 2.

Решение. Бараното расекување е прикажано на долниот лев цртеж. На средниот цртеж е прикажано како ќе го превиткаме секој од добиените делови, а на деснот цртеж е прикажано како од еден дел ќе добиеме половина од обвивката на коцката. Јасно, и другиот дел треба да го превиткаме на истиот начин и потоа лесно се составува бараната коцка со раб 2.



22. Дали коцка може да се расечи на 2014 помали коцки?

Решение. *Прв начин*. Да. Нека должината на разбот на коцката е 13 (што секогаш може да се постигне со изборот на соодветна единечна мерка). Тогаш коцката може да се подели на $13^3=2197$ единчени коцки. Сега, ако од четири различни темиња на коцката отсечиме една коцка со раб 5, т.е. $5^3=125$ мали коцки, од две темиња коцки со рабови 3, т.е. $2\cdot 3^3=54$ мали коцки и една коцка со раб 2, т.е. $2^3=8$ мали коцки, тогаш ќе ни останат $2197-125-54-8=2010$ мали коцки. На тој начин со веќе отсечените 4 коцки ќе имаме 2014 коцки на

кои е расечена големата коцка.

Втор начин. Да. Коцката со раб 13 да ја расечеме на 3 коцки со раб 3, 15 коцки со раб 2 и 1996 коцки со раб 1. На тоја начин добиваме 2014 помали коцки кои вкупно содржат $3\cdot 3^3+15\cdot 2^3+1996=2197$ единечни коцки.

23. Колку рабови има телото кое е ограничено со шест осумаголници, осум шестаголници и дванаесет четириаголници?

Решение. Шест осумаголници, осум шестаголници и дванаесет четириаголници вкупно имаат $6\cdot 8+8\cdot 6+12\cdot 4=144$ страни. Бидејќи секоја страна се јавува како раб на два sида на даденото тело, заклучуваме дека даденоо тело има $144:2=72$ рабови.