

Самоил Малчески, Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ И НЕГОВА ПРИМЕНА

Неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц прв го докажал францускиот математичар Коши во 1821 година, а интегралната аналогија на истото ја докажал рускиот математичар Буњаковски во 1859 година. Ова неравенство во своите работи го користел и германскиот математичар Шварц, но доста подоцна, по 1884 година. Во оваа статија ќе дадеме три докази на ова важно неравенство, ќе докажеме некои последици од истото и ќе разгледаме како се применува за докажувањето на неравенства, за определување на најголема вредност на израз и за решавање ирационални равенки.

1. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ И НЕГОВИ ПОСЛЕДИЦИ

Теорема 1 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \lambda. \quad (2)$$

Доказ. Прв начин. Да го разгледаме квадратниот трином

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i \lambda - b_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Триномот $P(\lambda)$ е ненегативен за секој $\lambda \in \mathbb{R}$, па затоа неговата дискриминанта е непозитивна, т.е. точно е неравенството

$$4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Понатаму, во (1) важи знак за равенство ако и само ако дискриминатата на полиномот $P(\lambda)$ е еднаква на

нула. Последното значи дека разгледуваниот квадратен полином има двоен корен, па како тој е збир на квадрати, добиваме ако и само ако

$$a_i \lambda - b_i = 0, \text{ за } i=1, 2, \dots, n,$$

т.е. ако и само ако се исполнети равенствата (2).

Втор начин. Нека

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad B = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad \text{и} \quad x_i = \frac{B}{A} a_i^2, \quad y_i = \frac{A}{B} b_i^2, \quad \text{за } i=1, 2, \dots, n.$$

Ако искористиме дека за секои ненегативни реални броеви x и y важи неравенството меѓу средините, т.е. важи $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, добиваме

$$|a_i b_i| = \sqrt{a_i^2 b_i^2} = \sqrt{\frac{B}{A} a_i^2 \cdot \frac{A}{B} b_i^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} a_i^2 + \frac{A}{B} b_i^2 \right).$$

за $i=1, 2, \dots, n$. Последните неравенства ги собираме и ако искористиме

дека $A^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ и $B^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$, добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i b_i| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} a_i^2 + \frac{A}{B} b_i^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{A}{B} \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \cdot A^2 + \frac{A}{B} \cdot B^2 \right) = \frac{1}{2} (BA + AB) = AB \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \end{aligned}$$

Од неравенството на триаголник за реални броеви следува неравенството

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i|,$$

па затоа од горното неравенство следува неравенството

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2},$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, т.е. ако и само ако $x_i = y_i$ и знак за равенство во неравенството на триаголник, т.е. ако и само ако производите $a_i b_i$ се со ист знак. Ако $x_i = y_i$, тогаш $\frac{B}{A} a_i^2 = \frac{A}{B} b_i^2$, а тоа е еквивалентно со $a_i^2 = \frac{A^2}{B^2} b_i^2$, односно со $|a_i| = \frac{A}{B} |b_i|$. Но, уште мора производите $a_i b_i$ да се со ист знак,

па затоа $a_i = \frac{A}{B} b_i$, за $i=1,2,\dots,n$ или $a_i = -\frac{A}{B} b_i$, за $i=1,2,\dots,n$, со што доказот е завршен.

Трет начин. Ако искористиме дека збир на квадрати на реални броеи е ненегативен број, тогаш со квадрирање на изразите во заградите и разделување на двојните зборови го добиваме неравенството

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_j a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^2 b_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j a_j b_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{j=1}^n a_j^2 - \sum_{i=1}^n a_i b_i \sum_{j=1}^n b_j a_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2, \end{aligned}$$

кое што е еквивалентно со неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако за секои i, j важи $a_i b_j - a_j b_i = 0$, т.е. $a_i b_j = a_j b_i$. Ако $a_i = 0$, за секој $i=1,2,\dots,n$, тогаш $a_i = 0 \cdot b_i$, за $i=1,2,\dots,n$, т.е. $\lambda = 0$. Ако постои $k \in \{1,2,\dots,n\}$ таков што $a_k \neq 0$, тогаш за секој $i=1,2,\dots,n$ од $a_k b_i = a_i b_k$ следува $b_i = \frac{b_k}{a_k} a_i$, за секој $i=1,2,\dots,n$, т.е. $\lambda = \frac{b_k}{a_k}$. ■

Во следните две последици ќе покажеме како со помош на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц може да се докажат две од добро познатите неравенства меѓу средните.

Дефиниција 1. Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$. Броевите

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}, \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \text{ и } \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска, хармониска и квадратна средина* на броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$, соодветно.

Последица 1 (неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина). Ако $a_i, i=1,2,\dots,n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad (3)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Доказ. Нека $a_i, i=1,2,\dots,n$ се позитивни реални броеви и да земеме $b_i = 1, i=1,2,\dots,n$. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot 1 \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n 1^2, \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 &\leq n \sum_{i=1}^n a_i^2, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ■

Последица 2 (неравенство меѓу аритметичката и хармониската средина). Ако $x_i, i=1,2,\dots,n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказ. Земаме $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}$, $i=1,2,\dots,n$. Со замена во неравенството (1) добиваме

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}^2}, \\ n^2 &\leq \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{-1}, \\ \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\frac{1}{\sqrt{x_1}}} = \frac{\sqrt{x_2}}{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{\frac{1}{\sqrt{x_n}}},$$

т.е. ако и само ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■

2. ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ ВО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА

Задача 1. Нека a, b, c, d се ненегативни релани броеви. Докажи дека

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $a_1 = \sqrt{a}, a_2 = \sqrt{c}$ и $b_1 = \sqrt{b}, b_2 = \sqrt{d}$ следува

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{d} \leq \sqrt{a+c} \cdot \sqrt{b+d},$$

т.е.

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}. \blacksquare$$

Задача 2. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Решение. Даденото неравенство непосредно следува од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}, a_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}, a_3 = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ и } b_1 = \frac{1}{\sqrt{b}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{c}}, b_3 = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 3. Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви такви што

$$a + b + c + d = 4.$$

Докажи дека

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} + \frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} + \frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}} + \frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}} \leq 16.$$

Решение. За произволни позитивни реални броеви x и y важи

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq \frac{x+y}{2},$$

а од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x + \sqrt{y})^2 \leq (x + y)(x + 1),$$

па затоа,

$$\frac{(x + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x^2 - xy + y^2}} \leq 2(x + 1).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \frac{(a + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{(b + \sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{(c + \sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2 - cd + d^2}} + \frac{(d + \sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2 - da + a^2}} &\leq \\ &\leq 2(a + 1) + 2(b + 1) + 2(c + 1) + 2(d + 1) \\ &= 2(a + b + c + d) + 8 = 16, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 4. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{a^3}{b^2 + c} + \frac{b^3}{c^2 + a} + \frac{c^3}{a^2 + b} \geq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a(b^2 + c) + b(c^2 + a) + c(a^2 + b))\left(\frac{a^3}{b^2 + c} + \frac{b^3}{c^2 + a} + \frac{c^3}{a^2 + b}\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

па затоа е доволно да се докаже

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + ab + bc + ca \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + 1.$$

Познато е дека

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Понатаму, повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 &\leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \\ &= \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \end{aligned}$$

па затоа е доволно да се докаже дека

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq \frac{1}{3},$$

а последното неравенство важи бидејќи

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 1.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Задача 5. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz = 1$. Докажи дека

$$(x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) \geq (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1).$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(y^2)^2 + (\frac{x}{z})^2} \geq x^2 y^2 + \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = x^2 (y^2 + \frac{1}{xy}),$$

$$\sqrt{(y^2)^2 + (\frac{x}{z})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\frac{y}{x})^2} \geq y^2 z^2 + \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{x} = y^2 (z^2 + \frac{1}{yz}),$$

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\frac{y}{x})^2} \geq x^2 z^2 + \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = z^2 (x^2 + \frac{1}{xz}).$$

Множејќи ги последните три неравенства добиваме,

$$\begin{aligned} (x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) &\geq x^2 y^2 z^2 (y^2 + \frac{1}{xy})(z^2 + \frac{1}{yz})(x^2 + \frac{1}{xz}) \\ &= (xyz)^3 (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1) \\ &= (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 6. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = \frac{2}{3}$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^3 + b^3 + c^3)(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}) \geq a + b + c.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^3 + b^3 = \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} \geq a^2 b + b^2 a = ab(a + b).$$

Слично,

$$b^3 + c^3 \geq bc(b + c) \quad \text{и} \quad c^3 + a^3 \geq ca(c + a).$$

Последните три неравенства ги собираме и добиваме

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{2} \quad (1)$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува:

$$(ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a))(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}) \geq (ab + bc + ca)^2. \quad (2)$$

Исто така, важи:

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab) = 3abc(a + b + c) = 2(a + b + c). \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) &\geq \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{2} \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) \\ &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2} \geq \frac{2(a+b+c)}{2} = a + b + c, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 7. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$.

Докажи дека

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3(a + b + c + ab + bc + ca).$$

Решение. Прво ќе докажеме дека

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ab + bc + ca \text{ и } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c. \quad (4)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} \right) \\ &\geq \frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{b^2}} + \frac{\sqrt[3]{ba}}{\sqrt[3]{c^2}} + \frac{\sqrt[3]{cb}}{\sqrt[3]{a^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{abc}}{b} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{c} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} \\ &= ab + bc + ca. \end{aligned}$$

Слично, добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \right) \\ &\geq \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}} + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{ca}} + \frac{\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{ab}} \\ &= \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) &\geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \text{ и} \\ (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) &\geq 9. \end{aligned}$$

Последните неравенства ги собираме и ако ги искористиме неравенствата (4) добиваме

$$2(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 + 9 \geq 6\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 3(a + b + c + ab + bc + ca),$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 8. Нека n е природен број и $x_1, x_2, \dots, x_n$ се реални броеви. Докажи дека:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \frac{12\left(\sum_{i=1}^n ix_i\right)^2}{n(n+1)(n+2)(3n+1)}. \quad (5)$$

Решение. Нека $S = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i$ и $y_i = x_i - S$, за $1 \leq i \leq n$. Тогаш важи

$$\sum_{i=1}^n ix_i = \sum_{i=1}^n iy_i + \frac{n(n+1)}{2} S$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2S \sum_{i=1}^n x_i + nS^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - S^2 \end{aligned}$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n ix_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n iy_i + \frac{n(n+1)}{2} S\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n i^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 + S^2\right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right) \end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (5). ■

3. ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ ВО НАОЃАЊЕ МАКСИМУМ НА ИЗРАЗ

Задача 9. Нека x, y, z се реални броеви поголеми или еднакви на $\frac{1}{3}$ и такви што $x + y + z = 2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$A = \sqrt{3x-1} + \sqrt{3y-1} + \sqrt{3z-1}.$$

Решение. Од неравенството на Копи-Буњаковски-Шварц, применето на броевите $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$ и $b_1 = \sqrt{3x-1}, b_2 = \sqrt{3y-1}, b_3 = \sqrt{3z-1}$, следува

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot \sqrt{3x-1} + 1 \cdot \sqrt{3y-1} + 1 \cdot \sqrt{3z-1} \\ &\leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x-1+3y-1+3z-1} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3(x+y+z)-3} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{6-3} = 3, \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{3x-1}}{1} = \frac{\sqrt{3y-1}}{1} = \frac{\sqrt{3z-1}}{1}$, т.е. ако и само ако $x = y = z$. Со замена во $x + y + z = 2$, добиваме дека $x = y = z = \frac{2}{3}$. Значи, најголемата вредност на дадениот израз A е еднаква на 3 и истата се достигнува за $x = y = z = \frac{2}{3}$. ■

Задача 10. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$A = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}.$$

Решение. Јасно, дадениот израз е определен за $x \in [0, 2]$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2 \text{ и } b_1 = \sqrt{x}, b_2 = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}, b_3 = \sqrt{1 - \frac{x}{2}},$$

следува

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{2}} + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \\ &\leq \sqrt{9} \cdot \sqrt{x + 1 - \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2}} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{2}}}{2}$, т.е. ако и само ако $x = \frac{2}{9}$. Според тоа, најголемата вредност на дадениот израз A е еднаква на $3\sqrt{2}$ и истата се достигнува за $x = \frac{2}{9}$. ■

Задача 11. Определи ја најголемата можна вредност на функцијата

$$f(x, y) = 2x + 5y,$$

при услов

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Решение. Со елементарна трансформација и користење на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x + 5y = 6 \cdot \frac{x}{3} + 20 \cdot \frac{y}{4} \\ &\leq \sqrt{6^2 + 20^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}} \\ &= 2\sqrt{109} \sqrt{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}}. \end{aligned}$$

Но, $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, па затоа

$$f(x, y) \leq 2\sqrt{109} \cdot 1 = 2\sqrt{109}.$$

Притоа знак за равенство се достигнува ако $\frac{x}{3} = 6\lambda$, $\frac{y}{4} = 20\lambda$, каде $\lambda \in \mathbb{R}$ го определуваме од условот $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. Значи, добиваме

$$(6\lambda)^2 + (20\lambda)^2 = 1,$$

односно $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{109}}$.

Според тоа, функцијата достигнува максимум за $x = \frac{9}{\sqrt{109}}$, $y = \frac{40}{\sqrt{109}}$, кој максимум е $f(\frac{9}{\sqrt{109}}, \frac{40}{\sqrt{109}}) = 2\sqrt{109}$. ■

Задача 12. Определи ја најголемата можна вредност на функцијата

$$f(x, y) = x + y + z,$$

при услов

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{12^2} = 1.$$

Решение. Како во пример 11, имаме

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y + z = 3 \cdot \frac{x}{3} + 4 \cdot \frac{y}{4} + 12 \cdot \frac{z}{12} \\ &\leq \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{12^2}} \\ &= 13 \sqrt{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{12^2}} = 13. \end{aligned}$$

Притоа знак за равенство се достигнува ако $\frac{x}{3} = 3\lambda$, $\frac{y}{4} = 4\lambda$, $\frac{z}{12} = 12\lambda$, каде

$\lambda \in \mathbb{R}$ го определуваме од условот $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{12^2} = 1$. Според тоа, добиваме

$$(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2 + (12\lambda)^2 = 1, \text{ т.е. } \lambda = \frac{1}{13}.$$

Конечно, функцијата достигнува максимум за $x = \frac{9}{13}$, $y = \frac{16}{13}$, $z = \frac{144}{13}$ и тој

максимум е $f(\frac{9}{13}, \frac{16}{13}, \frac{144}{13}) = 13$. ■

4. ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ ВО РЕШАВАЊЕ НА НЕКОИ ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Задача 13. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-3} + 2\sqrt{5-x} = \sqrt{10}. \quad (1)$$

Решение. Дефиниционата област на непозната x во равенката (1) е интервалот $[3, 5]$. Ако за броевите $a_1 = \sqrt{x-3}$, $a_2 = \sqrt{5-x}$ и $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ го примениме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц го добиваме неравенството

$$(\sqrt{x-3} + 2\sqrt{5-x})^2 \leq (\sqrt{x-3}^2 + \sqrt{5-x}^2) \cdot (1^2 + 2^2),$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt{x-3} + 2\sqrt{5-x} \leq \sqrt{10}, \quad (2)$$

во кое според условот на задачата треба да важи знак за равенство. Но, во

(2) знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{x-3}}{1} = \frac{\sqrt{5-x}}{2}$. Последната равен-

ка ја квадрираме и наоѓаме $x = \frac{17}{5}$ и како $\frac{17}{5} \in [3, 5]$, тоа е решение на почетната равенка. ■

Задача 14. Реши ја равенката

$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}. \quad (3)$$

Решение. Дефиниционата област на непозната x во равенката (3) е интервалот $[-1, 3]$. Ако за броевите $a_1 = \sqrt{1+x}$, $a_2 = \sqrt{3-x}$ и $b_1 = x$, $b_2 = 1$ го примениме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц го добиваме неравенството

$$(x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x})^2 \leq (\sqrt{1+x}^2 + \sqrt{3-x}^2)(x^2 + 1^2)$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$|x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}| \leq 2\sqrt{x^2+1}. \quad (4)$$

во кое според условот на задачата треба да важи знак за равенство. Во (4)

знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{1+x}}{x} = \frac{\sqrt{3-x}}{1}$. Од последната равенка

следува $x > 0$ и затоа решенијата на равенката (3) ги бараме во интервалот $(0, 3]$. Ако последната равенка ја квадрираме ја добиваме равенката

$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$, која е еквивалентна на равенката $(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$.

Решенијата на последната се $x_1 = 1, x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$. Конечно, од $x \in (0, 3]$ до-

биваме дека решенија на дадената равенка се $x_1 = 1$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. ■

Задача 15. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^3 + x^2 + 9x + 9} = x\sqrt{x} + 3.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\sqrt{x^2(x+1) + 9(x+1)} = x\sqrt{x} + 3,$$

$$\sqrt{(x+1)(x^2+9)} = x\sqrt{x} + 3.$$

Од последната равенка следува дека дефиниционата област на непознатата x во почетната равенка е интервалот $[0, +\infty)$. Очигледно $x = 0$ е едно ре-

шение на равенката. Понатаму, на броевите $a_1 = x, a_2 = 3$ и $b_1 = \sqrt{x}, b_2 = 1$ го применуваме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и по средувањето го добиваме неравенството

$$x\sqrt{x} + 3 \leq \sqrt{(x^2+9)(x+1)},$$

во кое според условот треба да важи знак за равенство. Сега, за $x > 0$ добиваме дека во последното неравенство знак за равенство важи ако и само ако $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{3}{1}$, од каде добиваме добиваме $x = 9$.

Конечно, решенија на почетната равенка се $x = 0$ и $x = 9$. ■

Задача 16. Реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2 + 5y^2} = x + 2y - 1.$$

Решение. Ако на броевите $a_1 = x, a_2 = y$ и $b_1 = 1, b_2 = 2$ го примениме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, по средувањето добиваме

$$x + 2y \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{5}, \text{ т.е. } x + 2y \leq \sqrt{5x^2 + 5y^2}.$$

Но, за секои реални броеви x и y важи $x + 2y > x + 2y - 1$, па затоа

$$\sqrt{5x^2 + 5y^2} > x + 2y - 1,$$

што значи дека дадената равенка нема решенија. ■

Задача 17. Реша го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

Решение. Допуштливи вредности за x и y се $0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}$.

Лема. За секои реални броеви x и y такви што $0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}$ точно е неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x = y$.

Доказ. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \right), \quad (5)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{1+2x^2} = \sqrt{1+2y^2}$, т.е. $x = y$.

Од друга страна, бидејќи $0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}$, добиваме

$$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} = \frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)} \leq 0, \quad (6)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x = y$. Сега тврдењето на Лемата следува од (1) и (2). ■

Од Лемата следува дека дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9}, \end{cases}$$

чии решенија се $x = y = \frac{9-\sqrt{73}}{36}$ и $x = y = \frac{9+\sqrt{73}}{36}$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Cîrtoaje, V., *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing house, Zalau, 2006
3. Govedarica, V., *Matematička takmičenja u Republici Srpskoj*, ZUNS, Sarajevo, 2007
4. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
5. Wigren, T., *The Cauchy-Schwarz Inequality*, Karlstad University, Faculty of Technology and Science, 2015
6. Малчески, Р., *Два доказа на неравенството на Коши-Бсњаковски-Шварц*, Математички талент, Скопје, 2024
7. Малчески, Р., *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
8. Рангелова, П., *Векторите при решавање на задачи с ирационални изрази*, Математика 1/2013, София

Статијата прв пат е издадена на српски јазик во математичкото списание ДИОФАНТ во април 2026 година