Trinomni koeficijenti

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Marjan Praljak*[3], *Robert Soldo*[4],

Binomni koeficijenti $C_n^k = \binom{n}{k}$ daju broj načina da iz skupa od n elemenata izaberemo njih k, i prirodno se pojavljuju u razvoju

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{1}$$

Mnoga zanimljiva svojstva i identiteti binomnih koeficijenata mogu se dokazati kombinatorno i/ili algebarski, korištenjem izraza (1).

U ovom članku ćemo pokazati neka svojstva trinomnih koeficijenta B_n^k, koji se javljaju u razvoju

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^k. \tag{2}$$

Trinomni koeficijenti su u literaturi manje zastupljeni od binomnih, ali ih je proučavao još i Euler [3].

Uz algebarski pristup, korištenjem (2), koristit ćemo i kombinatorni pristup povezavši trinomne koeficijente s minimalnim šetnjama šahovskog kralja opisanim u sljedećem problemu:

Problem. *Na koliko načina može putovati šahovski kralj, na beskonačnoj šahovskoj ploči, između dva zadana polja uz najmanji mogući broj koraka?*

Polja na beskonačnoj šahovskoj ploči označavat ćemo s koordinatama (i, j), pri čemu je $i \in \mathbb{Z}$ horizontalna, a $j \in \mathbb{Z}$ je vertikalna pozicija. Bez smanjenja općenitosti, početno kraljevo polje označit ćemo s $(0, 0)$. Podsjetimo da se u jednom koraku kralj može pomaknuti s unutarnjeg polja na jedno od osam susjednih koja ga okružuju. Kraljeve korake označavat ćemo sa strelicama $\longrightarrow$, $\nearrow$,$\ldots$, $\searrow$. Na primjer korak $\searrow$ znači da se horizontalna pozicija kralja uvećala za 1, a vertikalna smanjila za 1.

Na primjer, do polja $(-2, -2)$ kralj može doći u minimalno 2 koraka i to na samo jedan način (koraci $\swarrow$, $\swarrow$, a do polja $(2, 0)$ može doći u minimalno dva koraka i to na tri načina, vidi sliku 1A.

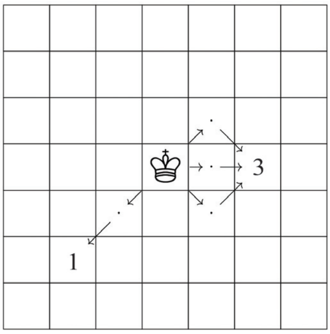
Uočimo da je minimalan broj koraka do polja (i, j) jednak $n = \max\{|i|, |j|\}$. Na primjer, ako je $i \geq |j|$, to znači da se kralj u svakom koraku u horizontalnom smjeru mora pomaknuti za jedno mjesto udesno (i treba mu $n = i$ takvih koraka), a u vertikalnom smjeru može pri svakom koraku ići jedno mjesto gore, dolje ili ostati na istoj verikalnoj poziciji.

[1] Autor je redoviti profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb; e-pošta: `jjaksetic@pbf.hr`

[2] Autor je predavač na VVG, Velika Gorica; e-pošta: `josiplopatic@gmail.com`

[3] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb; e-pošta: `mpraljak@pbf.hr`

[4] Autor je inženjer teorijske matematike zaposlen u firmi Pružne građevine, Zagreb; e-pošta: `robert.soldo@prg.hr`



Slika 1A.

1						1
	1				1	
		1		1		
			♔			
		1		1		
	1				1	
1						1

Slika 1B.

Drugim riječima, ako se završno polje kralja nalazi u desnom trokutu (tj. $i \geq |j|$, vidi sliku 1B) tada kralj u svakom najkraćem putu koristi jedan od tri tipa koraka: $\searrow$, $\longrightarrow$, $\nearrow$. Naravno, posve analogno zaključivanje se može primijeniti na preostala tri trokuta sa slike 1B.

1	4	10	16	19	16	10	4	1
4	1	3	6	7	6	3	1	4
10	3	1	2	3	2	1	3	10
16	6	2	1	1	1	2	6	16
19	7	3	1	♔	1	3	7	19
16	6	2	1	1	1	2	6	16
10	3	1	2	3	2	1	3	10
4	1	3	6	7	6	3	1	4
1	4	10	16	19	16	10	4	1

Slika 2.

Brojevi najkraćih putova, odnosno, brojevi na slici 2, usko su povezani s koeficijentima uz x^k u izrazu

$$(x^{-1}+1+x)^n = \underbrace{(x^{-1}+x^0+x^1)\cdots(x^{-1}+x^0+x^1)}_{n \text{ puta}}.$$

Za svako završno polje (i,j) kretanje u jednom od smjerova je jednoznačno određeno (npr. ako se nalazimo u desnom trokutu, tj. $i \geq |j|$ tada se u horizontalnom smjeru krećemo udesno, a ako se nalazimo u donjem trokutu, tj. $-j \geq |i|$, onda se u vertikalnom smjeru krećemo prema dolje). U onom drugom smjeru u svakom koraku kretanja pozicija se može promijeniti za -1, 0 ili 1. Dakle, koeficijent uz potenciju x^k u gornjem izrazu nam daje broj najkraćih putova od n koraka, pri čemu je k, $-n \leq k \leq n$, završna pozicija polja u ovom drugom smjeru. Označimo te koeficijente T_n^k, tj.

$$(x^{-1}+1+x)^n = \sum_{-n\leq k\leq n} T_n^k \cdot x^k. \tag{3}$$

Uočimo da su koeficijenti T_n^k i B_n^k isti, uz pomak u indeksu, jer je

$$(x^{-1}+1+x)^n = x^{-n}(1+x+x^2)^n,$$

pa je $T_n^k = B_n^{k+n}$. Možemo staviti $T_n^k = B_n^{k+n} = 0$ za $|k| > n$ i, uz ovu napomenu, sva svojstva koja ćemo pokazati vrijede za sve $k \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}_0$.

Za trinomne koeficijente vrijedi slična rekurzivna formula kao i za binomne koeficijente, samo što ne zbrajamo dva, već tri susjedna trinomna koeficijenta jednog reda niže. Da bi kralj u najkraćem putu od n koraka završio u polju označenom T_n^k, u predzadnjem koraku mora biti u poljima A, B ili C. Do polja A u $n-1$ korak može doći na T_{n-1}^{k-1} načina, do polja B na T_{n-1}^{k}, a do polja C na T_{n-1}^{k+1} načina (vidi sliku 3).

1								1
	1						1	
		1				1		
			1		1			
				♔				
			1		1			
		1				1		
	1			A	B	C	1	
1					T_n^k			1

Slika 3.

Dakle,

$$T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-1}^{k} + T_{n-1}^{k+1}. \tag{4}$$

Time dolazimo do brojevnog trokuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

koji je za trinomne koeficijente ono što je Pascalov trokut za binomne koeficijente.

Tvrdnja 1. Dokažimo da vrijedi

a) $B_n^k = B_n^{2n-k}$,

b) $B_n^0 + B_n^1 + B_n^2 + \cdots + B_n^{2n} = 3^n$,

c) $B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \cdots + B_n^{2n} = 1$,

d) $B_n^0 + B_n^2 + \cdots + B_n^{2n-2} + B_n^{2n} = \dfrac{3^n+1}{2}$

e) $B_n^1 + B_n^3 + \cdots + B_n^{2n-3} + B_n^{2n-1} = \dfrac{3^n-1}{2}$

f) $(B_n^0)^2 + (B_n^1)^2 + (B_n^2)^2 + \ldots + (B_n^{2n})^2 = B_{2n}^{2n}$.

Dokaz. a) *Algebarski dokaz.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^k &= (1+x+x^2)^n = x^{2n}\Big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)^n\\ &= x^{2n}\sum_{k=0}^{2n} B_n^k \frac{1}{x^k} = \sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} B_n^{2n-k} x^k.\end{aligned}$$

Kombinatorni dokaz. Tvrdnja je ekvivalentna s $T_n^k = T_n^{-k}$. Uzmimo, bez smanjenja općenitosti, da je završno polje kretanja kralja u desnom trokutu. U tom slučaju najkraća kraljeva šetnja koristi samo tri tipa koraka: $\searrow$, $\longrightarrow$, $\nearrow$. Ako u svakoj najkraćoj šetnji koja završi u polju (n,k) svaki korak $\searrow$ zamijenimo s $\nearrow$, i obratno, dobijemo najkraću šetnju koja završi u polju $(n,-k)$.

b) *Algebarski dokaz.* Uvrstimo li $x = 1$ u relaciju (2), imamo

$$B_n^0 + B_n^1 + B_n^2 + \ldots + B_n^{2n} = (1+1+1)^n = 3^n.$$

Kombinatorni dokaz. Pretpostavimo da smo u desnom trokutu. Suma na lijevoj strani je ukupan broj najkraćih putova do polja (n,k), $-n \le k \le n$, tj. do "desnog" ruba ploče. Kralj će doći najkraćim putem do desnog ruba ako i samo ako u svakom koraku koristi jedan od tri koraka $\searrow$, $\longrightarrow$, $\nearrow$, pa je takvih putova 3^n.

c) Uvrštavanjem $x = -1$ u relaciju (1), dobivamo

$$B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \ldots + B_n^{2n} = (1-1+1)^n = 1.$$

d) Zbrajanjem identiteta b) i c).

e) Oduzimanjem identiteta c) od b).

f) *Algebarski dokaz.* Tražena suma jednaka je koeficijentu uz x^{2n} u polinomu:

$$\big(B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n}\big)\cdot\big(B_n^{2n} + B_n^{2n-1}x + B_n^{2n-2}x^2 + \ldots + B_n^0 x^{2n}\big).$$

Koristeći svojstvo a) ovaj polinom možemo zapisati kao

$$\big(B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n}\big)^2 = (1+x+x^2)^{2n},$$

odakle slijedi tražena jednakost.

Kombinatorni dokaz. Tvrdnja je ekvivalentna s $\sum\limits_{k=-n}^{n} (T_n^k)^2 = T_{2n}^0$. Desna strana identiteta je broj najkraćih putova do polja $(2n,0)$. Svaki od tih putova je nakon n-tog koraka u jednom od polja (n,k), $-n \le k \le n$. Do polja (n,k) kralj može doći na T_n^k načina, a u preostalih n koraka se mora vratiti, tj. pomaknuti za $-k$ polja, a to može napraviti na T_n^{-k} načina. Zbog simetrije iz a) dijela $T_n^{-k} = T_n^k$, pa je ukupan broj najkraćih putova od $(0,0)$ do $(2n,0)$ koji prolaze kroz polje (n,k) jednak $(T_n^k)^2$, $-n \le k \le n$. $\square$

Tvrdnja 2. Dokažimo da vrijedi

a) $B_n^1 - 2B_n^2 + 3B_n^3 - \ldots - 2nB_n^{2n} = -n$,

b) $(B_n^1)^2 - (2B_n^2)^2 + (3B_n^3)^2 - \ldots - (2nB_n^{2n})^2 = -3n^2 B_{n-1}^{n-1}$.

Dokaz. a) Deriviranjem relacije (2) dobivamo

$$n(1+x+x^2)^{n-1}(1+2x) = \sum_{k=1}^{2n} kB_n^k x^{k-1}. \qquad (5)$$

Uvrštavanjem $x = -1$ u relaciju (5) slijedi tvrdnja a).

b) Supstituiramo li u jednakosti (5) x s $-\frac{1}{x}$, slijedi

$$n\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{2}{x}\right)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}kB_n^k\frac{1}{x^{k-1}},$$

a odavde, množenjem s x^{2n-1}, proizlazi

$$n(1-x+x^2)^{n-1}(-2+x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}kB_n^kx^{2n-k}. \tag{6}$$

Pomnožimo li jednakosti (5) i (6), dobivamo

$$n^2\big((1+x^2)^2-x^2\big)^{n-1}(1+2x)(-2+x)=\sum_{i=1}^{2n}iB_n^ix^{i-1}\cdot\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j-1}jB_n^jx^{2n-j},$$

odnosno, nakon sređivanja ove jednakosti, imamo

$$n^2(1+x^2+x^4)^{n-1}(-2-3x+2x^2)=\sum_{i,j=1}^{2n}(-1)^{j-1}ijB_n^iB_n^jx^{2n-1+i-j}. \tag{7}$$

U obje strane jednakosti (7) odredit ćemo koeficijent uz potenciju x^{2n-1}. Prema relaciji (2) je $(1+x^2+x^4)^{n-1}=\sum_{k=0}^{2n-2}B_{n-1}^kx^{2k}$, stoga slijedi da su koeficijenti u razvoju polinoma $(1+x^2+x^4)^{n-1}$ uz potencije x^{2n-3}, x^{2n-2}, x^{2n-1} redom jednaki 0, B_{n-1}^{n-1}, 0. Sada je koeficijent uz x^{2n-1} u polinomu na lijevoj strani jednakosti (7) jednak $-3n^2B_{n-1}^{n-1}$.

U polinomu na desnoj strani jednakosti (7) koeficijent uz potenciju x^{2n-1} dobivamo ako i samo ako je $i-j=0$, tj. $i=j$. Stoga je očito pripadni koeficijent jednak $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2(B_n^k)^2$. Konačno, zbog (7), sada slijedi

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}(kB_n^k)^2=-3n^2B_{n-1}^{n-1},$$

čime je i tvrdnja b) dokazana. $\square$

Tvrdnja 3. Dokažimo da za svaki prosti broj p i nenegativne cijele brojeve r, s takve da je $r<p$ i $s<p$, vrijedi

$$B_{mp+r}^{lp+s}\equiv B_m^lB_r^s+B_m^{l-1}B_r^{s+p} \pmod p.$$

Dokaz. U dokazu ove tvrdnje koristit ćemo formulu

$$x^n-y^n=(x-y)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}). \tag{8}$$

Također, trebat će nam sljedeća činjenica koja vrijedi za binomne koeficijente: za prosti broj p i za svaki prirodan broj $k<p$, broj $C_p^k=\binom{p}{k}$ je djeljiv s p. Posljedično, uz primjenu binomne formule, slijedi da p dijeli sve koeficijente u izrazu $(X+Y)^p-(X^p+Y^p)$. Stavimo li $X=1+x$ i $Y=x^2$, dobivamo da p dijeli sve koeficijente polinoma $\big((1+x)+x^2\big)^p-\big((1+x)^p+x^{2p}\big)$. Budući da p dijeli sve koeficijente polinoma $\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}x^k$, svi koeficijenti polinoma

$$Q(x)=(1+x+x^2)^p-(1+x^p+x^{2p})$$

su također djeljivi s p.

Definiramo polinom $P(x)$, kojeg ćemo dalje transformirati pomoću formule (8):

$$\begin{aligned} P(x) &= (1+x+x^2)^{mp+r} - (1+x+x^2)^r \cdot (1+x^p+x^{2p})^m \\ &= (1+x+x^2)^r \cdot \Big[(1+x+x^2)^{mp} - (1+x^p+x^{2p})^m\Big] \\ &= (1+x+x^2)^r \cdot Q(x) \cdot \Big[(1+x+x^2)^{(m-1)p} \\ &\quad + (1+x+x^2)^{(m-2)p} \cdot (1+x^p+x^{2p}) + \ldots + (1+x^p+x^{2p})^{m-1}\Big]. \end{aligned}$$

Zbog gornje faktorizacije vidimo da je i svaki koeficijent polinoma $P(x)$ djeljiv s p. Nadalje, gledamo koeficijent uz x^{lp+s} u razvoju polinoma $P(x)$. Koeficijent uz x^{lp+s} u izrazu $(1+x+x^2)^{mp+r}$ je B_{mp+r}^{lp+s}. Promatramo razvoj polinoma umanjenitelja u definiciji polinoma $P(x)$:

$$\begin{aligned} &(1+x+x^2)^r \cdot (1+x^p+x^{2p})^m \\ &\qquad = (1 + B_r^1 x + B_r^2 x^2 + \ldots + \underline{B_r^s x^s} + \ldots + \underline{B_r^{s+p} x^{s+p}} + \ldots + x^{2r}) \\ &\qquad\quad \cdot (1 + B_m^1 x^p + B_m^2 x^{2p} + \ldots + \underline{B_m^{l-1} x^{(l-1)p}} + \underline{B_m^l x^{lp}} + \ldots + x^{2mp}). \end{aligned}$$

Uočavamo da se samo množenjem naznačenih članova javlja potencija x^{lp+s} i koeficijent koji se uz tu potenciju javlja je $B_m^l B_r^s + B_m^{l-1} B_r^{s+p}$. Dakle, koeficijent uz x^{lp+s} je $B_{mp+r}^{lp+s} - B_m^l B_r^s - B_m^{l-1} B_r^{s+p}$, pa je taj izraz djeljiv s p. □

Tvrdnja 4. Dokažimo da u srednjem stupcu brojevnog trokuta ne postoji broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2.

Dokaz. Ustvari, tvrdnja kaže $B_n^n \equiv 0$ ili $1 \pmod 3$, što ćemo dokazati koristeći indukciju i tvrdnju 3. Tvrdnja vrijedi, očito, za $n = 1, 2, 3$. U koraku indukcije neka je $n = 3m + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$. Iz tvrdnje 3, za $p = 3$ slijedi,

$$B_n^n = B_{3m+p}^{3m+p} \equiv B_m^m B_r^r + B_m^{m-1} B_r^{r+3} \pmod 3. \tag{9}$$

Prema pretpostavci indukcije je $B_m^m \equiv 0$ ili $1 \pmod 3$ i $B_r^r \equiv 0$ ili $1 \pmod 3$, pa je onda i $B_m^m B_r^r \equiv 0$ ili $1 \pmod 3$. U (9) je $r = 0, 1$ ili 2, a $B_0^3 = B_1^4 = B_2^5 = 0$, pa je $B_m^{m-1} B_r^{r+3} = 0$, iz čega slijedi tvrdnja. □

Na koncu ostavljamo nekoliko zadataka za samostalno rješavanje.

Zadatci za vježbu

1. Koeficijent B_n^k može se interpretirati i kao broj različitih izvlačenja k karata iz dva identična špila od po n igraćih karata. Koristeći ovu interpretaciju pokažite da vrijedi

$$B_n^k = B_{n-1}^k + B_{n-1}^{k-1} + B_{n-1}^{k-2}.$$

2. Koristeći interpretaciju iz problema 1 dokažite identitete d) i e) iz tvrdnje 1. (***Uputa***: Prebrojavajte broj najkraćih putova kralja do polja (n, k), $-n \leq k \leq n$, u kojima kralj završi u polju iste, odnosno suprotne boje od boje početnog polja.)

3. Dokažite da vrijedi

$$B_n^0 + B_n^3 + B_n^6 + \ldots = B_n^1 + B_n^4 + B_n^7 + \ldots = B_n^2 + B_n^5 + B_n^8 + \ldots = 3^{n-1}.$$

(***Uputa***: Kombinatorno, slično kao i u zadatku 2, s time da polja šahovske ploče obojimo u tri boje u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju broja $i+j$ s brojem 3. Algebarski, koristite relaciju (2) i dva kompleksna rješenja jednadžbe $z^3 = 1$.)

4. Neka je p prosti broj, te m i n prirodni brojevi. Neka je nadalje $m = kp + s$, $n = lp + t$, gdje su k, l, s, t cijeli brojevi takvi da je $0 \leq s < p$, $0 \leq t < p$. Dokažite da tada vrijedi

$$C_n^m \equiv C_l^k \cdot C_t^s \pmod{p}.$$

(***Uputa***: Promatrati polinom $P(x) = (1 + x)^{lp+t} - (1 + x)^t \cdot (1 + x^p)^l$, te potom usporediti koeficijente analogno kao u dokazu tvrdnje 4.)

5. (Moskovska matematička olimpijada 1947.) Dokažite da se u svakom retku brojevnog trokuta, počevši s trećim, nalazi paran broj.
(***Uputa***: U svakom retku brojevnog trokuta parne brojevi zamijeniti s 0, a neparne s 1. Uočiti da se tada u svakom petom retku brojevnog trokuta prva četiri broja 1010 periodično ponavljaju.)

6. Dokažite da za $n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^\ell$ niti jedan koeficijent B_n^k nije djeljiv s 3.
(***Uputa***: Koristite indukciju i tvrdnju 3.)

Literatura

[1] D. Fuks, M. Fuks, *Arifmetika binomialnih koeficientov*, Kvant br. 6, 1970.

[2] I. M. Jaglom, A. M. Jaglom, *Neelementarni zadači v elementarnom izloženii*, Moskva, 1954.

[3] L. Euler, *Exemplum Memorabile Inductionis Fallacis*, Opera Omnia, Series Prima, Vol. 15, Leipzig, Germany, Teubner, 50–69, 1911.

[4] N. N. Čencov, D. O. Škljarski, I. M. Jaglom, *Izabranie zadači i teoremi elementarnoi matematiki*, Moskva, 1965.

[5] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Zagreb, 1989.

[6] N. Ya. Vilenkin, A. N. Vilenkin, P. A. Vilenkin, *Kombinatorika*, Moskva, 2013.

[7] V. V. Prasolov, T. I. Golenishcheva-Kutuzova, A. Ya. Kanel-Belov, Yu. G. Kudryashov, I. V. Jaščenko, *Moskovske matematičke olimpijade*, Moskva, 2010.