

# **МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ C16**

**Самоил Малчески**

## **ЗБИРКА РЕШЕНИ ТЕСТОВИ ОД НАТПРЕВАРОТ КЕНГУР ЗА ПРВА И ВТОРА ГОДИНА (КАТЕГОРИЈА Junior 2008-2025)**

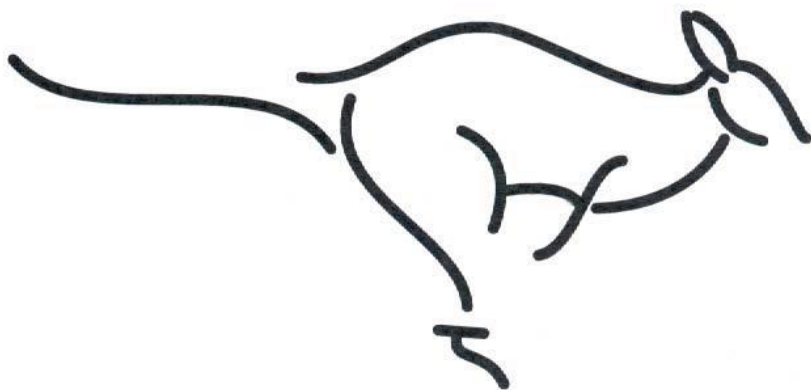
**Скопје, 2025**

Рецензент:  
Д-р Катерина Аневска  
ФОН Универзитет, Скопје



**СОДРЖИНА**

Предговор	5
1. Јуниор 2008	7
2. Јуниор 2009	19
3. Јуниор 2010	31
4. Јуниор 2011	44
5. Јуниор 2012	58
6. Јуниор 2013	71
7. Јуниор 2014	84
8. Јуниор 2015	96
9. Јуниор 2016	108
10. Јуниор 2017	120
11. Јуниор 2018	132
12. Јуниор 2019	144
13. Јуниор 2020	157
14. Јуниор 2021	170
15. Јуниор 2022	183
16. Јуниор 2023	196
17. Јуниор 2024	209
18. Јуниор 2025	223



## ПРЕДГОВОР

Пред вас е збирка решени задачи од престижниот меѓународен натпревар *Кенгур без граници*, наменета за учениците од прва и втора година од средното образование. Збирката ги содржи сите задачи од оваа категорија од 2008 до 2025 година.

Задачите, кои ги има вкупно 540 се распределени по години, што значи дека секој тест е даден посебно. Во збиркава се дадени комплетни решенија на задачите, при што решението на секоја задача следи одма по формулацијата на истата. Сепак на читателот му препорачувам прво да се обиде самостојно да ја реши задачата која ја обработува, а потоа да го консултира понуденото решение. Освен тоа, за неколку задачи се понудени по два начини за решавање на задачата. Ова е особено важно за развојот на математичкото мислење, па затоа на читателот му препорачувам, секаде каде што може, задачата да ја реши и на друг начин од тој што е понуден.

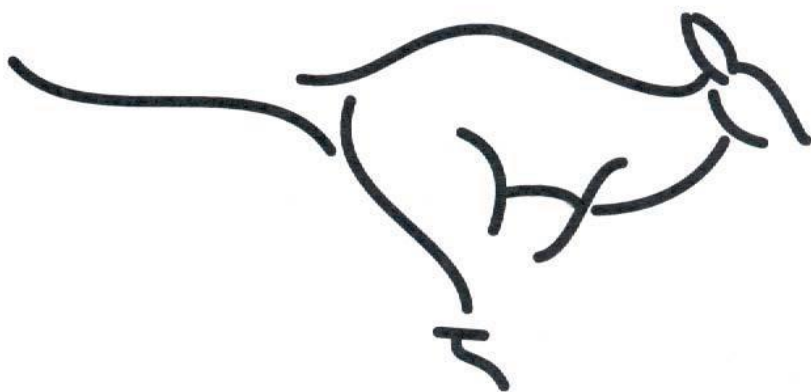
Во оваа пригода сакам да ѝ се заблагодарам на рецензентката д-р Катерина Аневска чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки придонесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за учество на натпреварот *Кенгур без граници*, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Веќе реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект, па затоа ќе бидат посебно благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје

Авторот

8. мај, 2026 г.



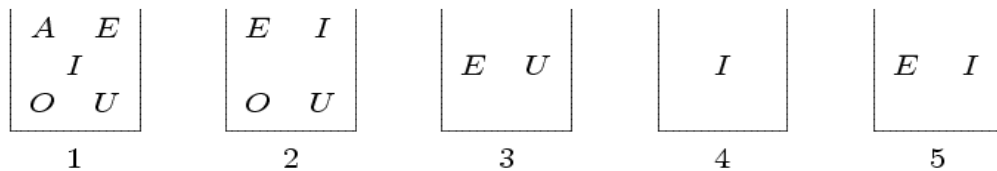
## Junior (прва и втора година) 2008

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Во 5 кутии се сместени карти на кои се напишани буквите  $A, E, I, O, U$  (види цртеж). Петар ги отстранува картите од кутиите, на тој начин што на крајот секоја кутија содржи по една карта, и различни кутии содржат карти со различни букви. Која карта останала во кутијата 2?



- A)  $A$       B)  $E$       C)  $I$       D)  $O$       E)  $U$

**Решение. D).** Буквата  $A$  ја има само во кутијата 1, па затоа таа останала во оваа кутија. Сега, буквата  $O$  ја има само во кутиите 1 и 2, па како во кутијата 1 останала буквата  $A$ , заклучуваме дека во кутијата 2 останала буквата  $O$ .

2. Филип и Горан се натпреварувале во трчање на 200 метри. Горан ја истрчал патеката за половина минута, а Филип за стотинка од еден час. Кој и за колку секунди бил побрз?

- A) Горан за 36 секунди      B) Филип за 24 секунди  
 C) Горан за 6 секунди      D) Филип за 4 секунди  
 E) Тие истрчале за исто време

**Решение. C).** Горан патеката ја истрчал за  $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30 \text{ s}$ , а Филип патеката ја истрчал за  $\frac{1}{100} \cdot 60 \cdot 60 = 36 \text{ s}$ . Значи побрз бил Горан и тоа за 6 s.

3. За прославата на Новата 2008 година, Борче облекол маица со натпис на градите  $2008$  и пред огледалото направил стој на глава. Што гледа во огледалото неговиот пријател Никола, кој стои зад Борче, нормално на нозе?

$2008$     $5008$     $8002$     $8005$     $2005$

A)                      B)                      C)                      D)                      E)

**Решение. В).** Кога Никола ќе направи стој на глава завртен кон огледалото, тогаш пред огледалото на градите на Никола ќе се биде ротацијата на бројот  $2008$  за  $180^\circ$ , а тоа е сликата  $8002$ . Но, во огледалото ќе се гледа симетричната слика на ликот пред огледалото во однос на вертикалната права, што значи дека ќе се гледа ликот  $5008$ .

4. Дадено е

$$a = 2 - (-4), \quad b = (-2)(-3), \quad c = 2 - 8, \quad d = 0 - (-6) \quad \text{и} \quad e = (-12) : (-2).$$

Колку од овие изрази не се еднакви на 6?

A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 4                      E) 5

**Решение. В).** Имаме

$$a = 2 - (-4) = 6, \quad b = (-2)(-3) = 6, \quad c = 2 - 8 = -6,$$

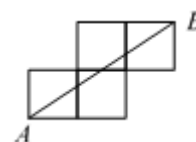
$$d = 0 - (-6) = 6 \quad \text{и} \quad e = (-12) : (-2) = 6,$$

т.е. 1 израз не е еднаков на 6.

5. Колку изнесува должината на отсечката  $AB$  ако страната на секој од квадратите на цртежот е 1?

A) 5                      B)  $\sqrt{13}$                       C)  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$                       D)  $\sqrt{5}$

E) друга должина



**Решение. В).** Отсечката  $AB$  е хипотенуза на правоаголен триаголник со страни

$$2 \text{ и } 3, \text{ па затоа } \overline{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

6. Ако  $10^{100} = \text{кенгур}$ , тогаш колку е  $1000^{100}$ ?

A) 100 кенгур    B) 3 кенгур    C) кенгур<sup>кенгур</sup>    D) (кенгур)<sup>2</sup>    E) (кенгур)<sup>3</sup>

**Решение. Е).** Имаме  $1000^{100} = (10^3)^{100} = (10^{100})^3 = (\text{кенгур})^3$ .

7. Почнувајќи од некој природен број, и броејќи по три, или по четири, или по пет броја, секогаш го добивам бројот 70. Кој е мојот почетен број?  
 A) 10      B) 12      C) 52      D) 60      E) Не може да се определи

**Решение. А).** Нека почетниот број е  $a$ . Ако од бројот 70 го одземеме почетниот број, тогаш добиената разлика е делива со 3, 4 и 5, односно со  $\text{НЗС}(3, 4, 5) = 60$ . Според тоа,  $60 \mid 70 - a$ , па како  $a$  е природен број, заклучуваме дека  $a = 10$ .

8. Мирко и Славко сечат два еднакви правоаголника. Мирко добил два еднакви правоаголника со периметар од по 40 *cm*, а Славко добил два еднакви правоаголника со периметар од по 50 *cm*. Колку изнесувале периметрите на почетните правоаголници?  
 A) 40 *cm*    B) 50 *cm*    C) 60 *cm*    D) 80 *cm*    E) 100 *cm*

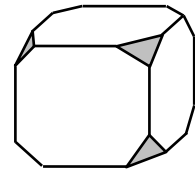
**Решение. С).** Нека се  $a$  и  $b$  должините на страните на почетниот правоаголник. Тогаш бидејќи се добиени по два правоаголника со различни периметри сечењето може да биде така што правоаголниците на Мирко се со страни  $\frac{a}{2}, b$ , а правоаголниците на Славко се со страни  $a, \frac{b}{2}$ . Затоа, важи

$$a + 2b = 40 \text{ и } 2a + b = 50.$$

Ако ги собереме овие равенства добиваме  $3a + 3b = 90$ , од каде следува  $a + b = 30$ . Конечно, периметарот на почетниот правоаголник е  $2(a + b) = 60$ .

9. На коцка и се отсечени сите ќошиња, како што е прикажано на цртежот десно. Колку рабови има така добиеното тело?

- A) 26      B) 30      C) 36      D) 40      E) 48



**Решение. С).** Коцката има 12 раба и 8 темиња. Со секое сечење на едно ќоше бројот на рабовите се зголемува за 3. Значи, добиеното тело има  $12 + 8 \cdot 3 = 36$  рабови.

10. На првиот тест Ана освоила 1 од можните 5 бодови. На следните тестови ги освоила сите бодови од можните 5. Уште колку тестови направила Ана ако просечниот број бодови ѝ бил 4?  
 A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**Решение. В).** Ако со  $a$  го означиме бројот на новите тестови, тогаш од условот имаме  $1 + 5a = 4(a + 1)$ , од каде добиваме  $a = 3$ .

11. Во една кутија има седум карти. На картите се напишани броевите од 1 до 7 (на секоја карта само еден број). Првиот мудрец на случаен начин избира 3 карти од кутијата, а вториот мудрец избира 2 карти. Тогаш, првиот мудрец му вели на вториот: „Јас знам дека збирот на броевите од твоите карти е парен број.“ Колку е збирот на броевите од картите на првиот мудрец? (Мудреците не ги гледаат преостанатите карти во кутијата.)

A) 10      B) 12      C) 6      D) 9      E) 15

**Решение. В).** Во кутијата има три парни и четири непарни карти. Ако меѓу картите кои ги зел првиот мудрец има непарна карта, тогаш во кутијата ќе остане најмалку една непарна карта. Затоа првиот мудрец не може да знае дали вториот мудрец добил парен или непарен збир. Но, како првиот мудрец тврди дека знае дека збирот е парен, заклучуваме дека тој извлекол три парни карти, т.е. ги извлекол картите со броевите 2, 4 и 6. Значи, збирот на броевите на неговите карти е 12.

12. Билјана има 10 картички, на секоја од кои е запишан точно еден од броевите 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53, 68. Кој е најмалиот број на картички кои треба Билјана да ги избере за да збирот на броевите од картите кои ги избрала е еднаков на 100?

A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) невозможно е тоа да го направи

**Решение. D).** Билјана не може да избере само картички со парна цифра на единиците, т.е. со цифрата 8. Навистина, тогаш таа мора да избере пет картички, но збирот на броевите ќе биде  $8 + 18 + 28 + 48 + 68 = 170 > 100$ . Значи, Билјана мора да избере барем една карта со цифра на единиците 3. Но, тогаш таа мора да избере парен број карти со цифра на единиците 3, т.е. мора да избере две или четири вакви карти.

- Ако избере две карти со цифра на единиците 3, тогаш збирот на цифрите на единиците ќе биде 6, па мора да избере три карти со цифра на единиците 8. На пример, една можност за ваков избор е: 13, 33, 8, 18, 28.

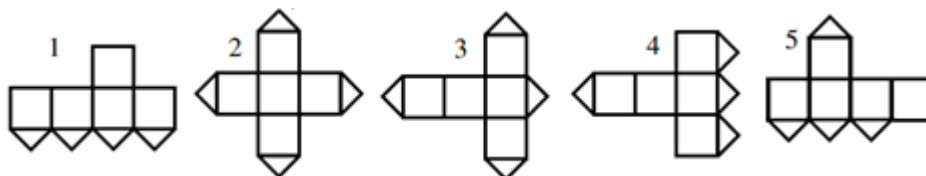
- Ако избере четири карти со цифра на единиците 3, тогаш збирот на цифрите на единиците ќе биде 12, па мора да избере една карта со цифра на единиците 8. На пример, една можност за ваков избор е: 3, 13, 23, 33, 28.

13. Седумте цуциња се родени на ист ден, во 7 последователни години. Најмладите три цуциња заедно имаат 42 години. Колку години заедно имаат најстарите три цуциња?

A) 51      B) 54      C) 57      D) 60      E) 63

**Решение. В).** Петтото, шестото и седмото цуце е 4 години постаро соодветно од првото, второто и третото цуце. Значи, најстарите три цуциња заедно имаат  $3 \cdot 4 = 12$  години повеќе од вкупниот број години на најмладите три цуциња. Значи, најстарите три цуциња заедно имаат  $42 + 12 = 54$  години.

14. Еден сид на коцката е расечен по неговите дијагонали. Кои од следниве мрежи на коцката не се можни?



A) 1 и 3      B) 1 и 5      C) 3 и 4      D) 3 и 5      E) 2 и 4

**Решение. D).** Кај мрежата 1 предниот сид на коцката ќе биде составен од триаголниците. Кај мрежата 2 горниот сид на коцката ќе биде составен од триаголниците. Кај мрежата 4 десниот сид од коцката ќе биде оставен од триаголниците. Кај мрежата 3 горниот и долниот триаголник ќе се преклопат со првиот квадрат од лево. Кај мрежата 5 горниот триаголник ќе се преклопи со првиот квадрат од десно. Значи, 3 и 5 не се мрежи на коцката.

15. На цртежот двата правилни шестаголника се складни. Кој дел од плоштината на паралелограмот е штрафираниот дел?

A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{1}{5}$       E)  $\frac{1}{6}$

**Решение. А).** Со  $a$  да ја означиме должината на страната на шестаголниците. Тогаш ако низ шест-



аголниците повлечеме прави паралелни на подолгите страни на паралелограмот (види цртеж), лесно се добива дека пократката страна на паралелограмот има должина  $3a$ , а соодветната висина е четири пати подолга од висината на карактеристичниот триаголник на шестаголниците, па затоа оваа висина е еднаква на  $4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$ . Значи, плоштината на паралелограмот е  $3a \cdot 2a\sqrt{3} = 6a^2\sqrt{3}$ . Понатаму, плоштината на двата шестаголници е еднаква на  $2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\sqrt{3}$ , т.е. таа е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот.

16. Шест природни броеви се претставени на реалната права (види цртеж). Се знае дека барем два од нив се деливи со 3, и барем два од нив се деливи со 5. Кои броеви се деливи со 15?



- A)  $A$  и  $F$       B)  $B$  и  $D$       C)  $C$  и  $E$       D) сите      E) само еден од нив

**Решение. А).** Од  $C - A = 5$ ,  $D - A = 10$ ,  $F - A = 15$  следува дека или четирите броја  $A, C, D, F$  се деливи со 5 или ниту еден од нив не е делив со 5. Значи, ако  $A$  не е делив со 5, тогаш мора да се деливи со 5 двата броја  $B$  и  $E$ , што не е можно бидејќи  $E = B + 9$ . Значи, броевите  $A, C, D, F$  се деливи со 5.

Од  $B - A = 3$ ,  $E - A = 12$ ,  $F - A = 15$  следува дека или четирите броја  $A, B, E, F$  се деливи со 3 или ниту еден од нив не е делив со 3. Значи, ако  $A$  не е делив со 3, тогаш мора да се деливи со 3 двата броја  $C$  и  $D$ , што не е можно бидејќи  $D = C + 5$ .

Од претходните разгледувања следува дека со 5 се деливи броевите  $A, C, D, F$ , а со 3 се деливи броевите  $A, B, E, F$ . Значи, со 15 се деливи броевите  $A$  и  $F$ .

17. Весна отишла на распродажба да ги купи производите  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Односот на цените на производите пред распродажбата бил  $5:2:1$ . На производот  $A$  таа добила попуст од 20%, на  $B$  попуст од 25% и на  $C$  попуст од 50%. Колку е проценти е вкупниот попуст кој го добила Весна?
- A) 75%      B) 30%      C) 42.5%      D) 28.75%      E) 25%

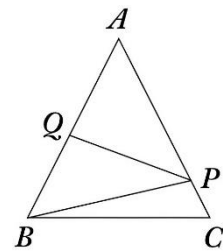
**Решение. Е).** Ако цената на производот  $C$  е  $a$  денари, тогаш цените на производите  $A$  и  $B$  соодветно се  $5a$  и  $2a$  денари. Значи, пред распродажбата трите

производи чинеле  $5a + 2a + a = 8a$  денари. Бидејќи на производот  $A$  Весна добила попуст 20%, таа платила  $0,8 \cdot 5a = 4a$ . Слично за производот  $B$  платила  $0,75 \cdot 2a = 1,5a$  денари и за производот  $C$  платила  $0,5a$  денари. Значи, за трите производи платила  $4a + 1,5a + 0,5a = 6a$  денари, т.е. добила попуст од  $2a$  денари. Конечно, таа добила попуст од  $\frac{2a}{8a} \cdot 100 = 25\%$ .

18. Колку најмногу цифри може да бидат избришани од 1000-цифрениот број 20082008...2008, така што збирот на цифрите што останале ќе биде 2008?  
 А) 746      В) 510      С) 524      Д) 1020      Е) 130

**Решение. А).** Во записот на бројот има 250 двојки, 250 осумки и 500 нули. Јасно, можеме да ги избришеме сите нули. Најмногу цифри ќе избришеме ако го избришеме најголемиот можен број двојки, т.е. ако остане најголемиот можен број осумки. Збирот на сите осумки е  $250 \cdot 8 = 2000$ , па затоа може да останат сите осумки и за да добиеме збир 2008 ни требаат уште 4 двојки. Според тоа, треба да избришеме 246 двојки, односно  $500 + 246 = 746$  цифри.

19. На цртежот е прикажан рамнокрак триаголник со краци  $\overline{AB} = \overline{AC}$ . Ако отсечката  $PQ$  е нормална на кракот  $AB$ ,  $\angle BPC = 120^\circ$  и аголот  $\angle ABP = 50^\circ$ , тогаш колкав е аголот  $\angle PBC$ ?



- А)  $5^\circ$       В)  $10^\circ$       С)  $15^\circ$       Д)  $20^\circ$       Е)  $25^\circ$

**Решение. А).** Со  $x$  да го означиме бараниот агол. Тогаш  $\angle BQP = 90^\circ$ ,  $\angle BPQ = 40^\circ$ ,  $\angle ABC = \angle ACB = x + 50^\circ$  и  $\angle QPA = 180^\circ - (120^\circ + 40^\circ) = 20^\circ$ . Значи,  $\angle BAC = 180^\circ - 2(x + 50^\circ)$  и  $\angle BAC = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$ . Од последните две равенства следува  $180^\circ - 2(x + 50^\circ) = 70^\circ$ , односно  $x = 5^\circ$ .

20. Колку парови реални броеви постојат такви што збирот, производот и количникот на тие два броја се еднакви?  
 А) 0      В) 1      С) 2      Д) 4      Е) 8

**Решение. В).** Двата броја не може да се еднакви на 0. Броевите да ги означиме со  $x$  и  $y$ . Да претпоставиме дека  $y \neq 0$ . Тогаш  $xy = \frac{x}{y}$ , од каде следува  $x(y^2 - 1) = 0$ . Ако  $x = 0$ , тогаш од условот на задачата ќе следува

$$0 = xy = x + y = y \neq 0,$$

што е противречност. Значи,  $x \neq 0$ , па од  $x(y^2 - 1) = 0$  добиваме  $y^2 - 1 = 0$ , односно  $y = 1$  или  $y = -1$ . Ако  $y = 1$ , тогаш од  $xy = x + y$  следува  $x = 0$ , што противречи на  $x \neq 0$ . Ако  $y = -1$ , тогаш од  $xy = x + y$  следува  $x = \frac{1}{2}$ . Значи, имаме само еден пар реални броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

21. Секоја цифра, почнувајќи од третата, во декадниот запис на еден шестцифрен број е еднаква на збирот од претходните две цифри. Колку шестцифрени броеви го имаат тоа својство?

A) 0      B) 1      C) 2      D) 4      E) 6

**Решение. D).** Шестцифрениот број да го означиме со  $\overline{abcdef}$ . Тогаш од условот на задачата следува  $c = a + b$ ,  $d = a + 2b$ ,  $e = 2a + 3b$ ,  $f = 3a + 5b$ . Сега, бидејќи  $f$  е цифра, добиваме  $b = 0$  или  $b = 1$ . Ако  $b = 0$ , тогаш се добиваат броевите 101123, 202246 и 303369, а ако  $b = 1$  се добива бројот 112358. Значи, имаме 4 шестцифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

22. Имам дрвена коцка, со три црвени и три сини сида. Кога ќе ја поделам коцката на  $3 \times 3 \times 3 = 27$  еднакви мали коцки, колку од овие мали коцки ќе имаат најмалку 1 црвен и 1 син сид?

A) 6      B) 12      C) 14      D) 16

E) зависи од тоа кои од сидовите на големата коцка се црвени, а кои се сини

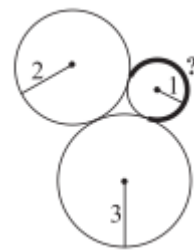
**Решение. E).** Можни се два начини на боење и тоа:

- трите еднакво обоени сида имаат заедничко теме и другите три еднакво обоени сида имаат заедничко теме, при што 12 мали коцки имаат најмалку 1 црвен и 1 син сид,
- трите еднакво обоени сида немаат заедничко теме и другите три еднакво обоени сида немаат заедничко теме, при што 16 мали коцки со најмалку 1 црвен и 1 син сид.

Значи, одговорот е Е).

23. Колку е должината на задебелениот лак на кружницата со радиус 1, прикажана на цртежот десно?

А)  $\frac{5\pi}{4}$       В)  $\frac{5\pi}{3}$       С)  $\frac{\pi}{2}$       Д)  $\frac{3\pi}{2}$       Е)  $\frac{2\pi}{3}$



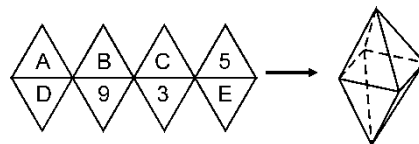
**Решение. Д).** Ако ги поврземе центрите на трите кружници добиваме триаголник со страни 3, 4 и 5. Но,  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , па затоа овој триаголник е правоаголен со прав агол во центарот на кружницата со радиус 1. Значи, должината на задебелениот лак еднаква на  $\frac{3}{4}$  од должината на кружницата со радиус 1, т.е. на  $\frac{3\pi}{2}$ .

24. Да означиме  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n$ . Ако  $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ , колку е  $n$ ?

А) 13      В) 14      С) 15      Д) 16      Е) 17

**Решение. Д).** Бидејќи 13 е прост број кој е во каноничниот запис на  $n!$ , а 17 е следниот прост број и не е во каноничниот запис на  $n!$ , заклучуваме дека  $13 \leq n < 17$ . Понатаму, бројот 2 во каноничниот запис се јавува на степен 15, па како меѓу броевите кои се помали од 16 деливи со 2 се: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 и 16, деливи со 4 се: 4, 8, 12 и 16, деливи со 8 се: 8 и 16, делив со 16 е само бројот 16, заклучуваме бројот 2 на степен 15 се јавува во бројот  $16!$ . Сега, лесно се добива дека  $16! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ .

25. Оваа мрежа од осум рамнострани триаголници може да се превитка и да формира правилен октаедар. За да составиш *магичен октаедар*, замени ги буквите  $A, B, C, D$  и  $E$  со броевите 2, 4, 6,



7 и 8 (без повторување) така да сите зборови на четири броја на четири зида кои имаат заедничко теме да се еднакви. Колку е збирот  $B + D$ ?

А) 6      В) 7      С) 8      Д) 9      Е) 10

**Решение. А).** Од условот на задачата следуваат равенствата

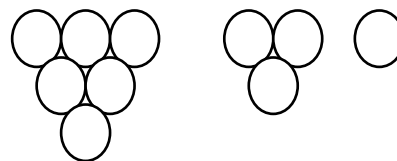
$$A + B + C = D + E + 7 \text{ и } A + D + E = B + C + 7.$$

Ако ги собереме овие равенства, по средувањето добиваме  $A = 7$ . Понатаму,

$$A+B+C+D+E=27 \text{ и } A+B+D+1=C+E,$$

од каде добиваме  $A+B+D=13$ ,  $C+E=14$ . Според тоа,  $B+D=13-A=6$ .

26. 3-пирамида е купче од 3 слоја од топки (како на цртежот) наредени еден над друг. На тој начин се формираат и 4-пирамида, 5-пирамида, итн. Сите надворешни топки на една 8-пирамида се

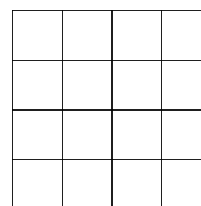


црни (топките се надворешни ако го допираат опишаниот тетраедар), топките во внатрешноста се бели. Каква фигура формираат белите топки?

- A) 3-пирамида      B) 4- пирамида      C) 5- пирамида  
D) 6- пирамида      E) 7- пирамида

**Решение. B).** Кога од долниот дел на 8-пирамидата ќе ги отстраниме црните топки, ќе ни остане 7-пирамида чии странични сидови се со црни топки. Кога ќе отстраниме еден страничен сид ќе ни остане 6-пирамида чии два странични сида се само со црни топки. Кога ќе отстраниме еден од овие два сида ќе ни остане 5 пирамида чиј еден страничен сид е само со црни топки. Кога ќе го отстраниме овој сид ќе ни остане 4-пирамида составен само од бели топки, при што во постапката не отстранивме ниту еден бела топка. Значи, белите топки формираат 4-пирамида.

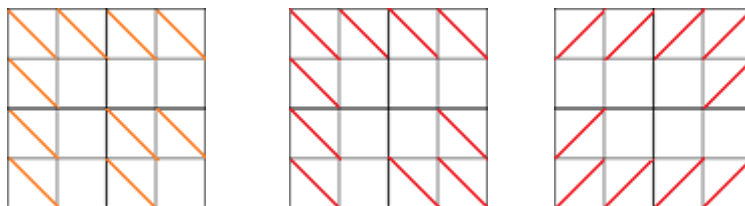
27. Квадрат  $4 \times 4$  поделен е на 16 единечни квадрати (види цртеж). Најди го најголемиот можен број на дијагонали што може да се повлечат во овие единечни квадрати така што кои било две од нив нема да имаат заеднички точки (вклучувајќи ги и крајните точки).



- A) 8      B) 9      C) 10      D) 11      E) 12

**Решение. C).** Од условот на задачата следува дека во деветте точки кои припаѓаат на централниот  $2 \times 2$  квадрат можеме да повлечеме најмногу 8 дијагонали, при што најмногу една од дијагоналите може да лежи на  $2 \times 2$  квадратот. Понатаму, исто така од условот на задачата следува дека ако две дијагонали се повлечени во две квадратчиња кои имаат заедничка страна, тогаш тие мора да се паралелни. Имајќи го предвид претходно кажаното лесно се гледа дека единечните квадратчиња на  $4 \times 4$  квадратот може да се повлечат најмногу 10 дијагонали

кои ги задоволуваат условите на задачата. На долните цртежи се дадени три вакви распореди. Обиди се да најдеш барем уште еден распоред, различен од дадените.



28. Кенгурчето Кеги секогаш скока  $1\ m$  или  $3\ m$ . Кеги сака да помине пат од  $10\ m$ . На колку начини може да го направи тоа? (Начините  $1+3+3+3$  и  $3+3+3+1$  ги разгледуваме како два различни начина)

A) 28      B) 34      C) 35      D) 55      E) 56

**Решение. A).** Имаме:

$$\begin{aligned} 3+3+3+1 &= 3+3+1+1+1+1 = 3+1+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10. \end{aligned}$$

Бидејќи редоследот на собирањето е важен сите можности се:

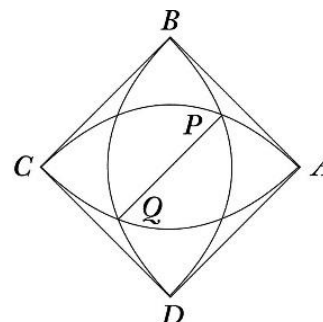
- за  $3+3+3+1$  со избор на едно од четирите места каде ќе биде бројот 1, па имаме 4 можности,
- за  $3+3+1+1+1+1$  со избор на две од шесте места каде ќе биде бројот 3, па имаме  $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  можности,
- за  $3+1+1+1+1+1+1+1$  со избор на едно од осумте места каде ќе биде бројот 3, па имаме 8 можности и
- за  $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$  имаме една можност.

Значи, Кеги може да помине пат од  $10\ m$  на  $4+15+8+1 = 28$  начини.

29. На цртежот  $ABCD$  е квадрат со страна 1, а кружните лаци имаат центри во  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Колку изнесува должината на отсечката  $PQ$ ?

A)  $2 - \sqrt{2}$       B)  $\frac{3}{4}$       C)  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       E)  $\sqrt{3} - 1$



**Решение. Е).** Триаголникот  $PCD$  е рамностран со страна 1. Според тоа, растојанието на точката  $P$  до страната  $CD$  е  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Значи точката  $P$  од страната  $AB$  е на растојание  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Аналогно се добива дека растојанието на точката  $Q$  до страната  $CD$  е  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Според тоа, должината на отсечката  $PQ$  е еднаква на  $1 - 2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} - 1$ .

30. Колку 2007-цифрени броеви постојат, кај кои секој двоцифрен број составен од две последователни цифри е делив или со 17 или со 23?

A) 5      B) 6      C) 7      D) 9      E) повеќе од 9

**Решение. А).** Двоцифрени содржатели на 23 се: 23, 46, 69 и 92, а двоцифрени содржатели на 17 се: 17, 34, 51, 68 и 85. Ако почетната цифра е:

- 1 тогаш следната цифра е 7, па низата не може да се продолжи,
- 2 тогаш го добиваме бројот 234692...,
- 3 тогаш го добиваме бројот 346923...,
- 4 тогаш го добиваме бројот 469234...,
- 5 тогаш првите три цифри се 517, па низата не може да се продолжи,
- 6 тогаш го добиваме бројот 692346...,
- 8 тогаш првите четири цифри се 8517, па низата не може да се продолжи,
- 9 тогаш го добиваме 923469... .

Значи, постојат 5 броја со саканото својство.

## Junior (прва и втора година) 2009

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Кој од следните броеви е делив со 3:

A) 2009      B)  $2+0+0+9$       C)  $(2+0)(0+9)$       D)  $2^9$       E)  $200-9$

**Решение. C).** Бројот 2009 не е делив со 3, бројот  $2+0+0+9=11$  не е делив со 3, бројот  $(2+0)(0+9)=18$  е делив со 3, бројот  $2^9$  не е делив со 3 и бројот  $200-9=191$  не е делив со 3. Значи, само  $(2+0)(0+9)$  е делив со 3.

2. Кој е минималниот број на точки кои треба да се отстранат од квадратната шема дадена на цртежот, така што во точките кои ќе останат да нема три колинеарни?

A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 7

**Решение. C).** Треба да отстраниме по 1 точка од секој ред, секоја колона и секоја дијагонала. Јасно, најмалиот број точки е 3 и тоа се точките од било која од двете дијагонали.

3. На една популарна трка учествувале 2009 атлетичари. Бројот на натпреварувачи кои Давид ги победил е трипати поголем од бројот на натпреварувачи кои него го победиле. Кое место го освоил Давид на трката?

A) 503      B) 501      C) 500      D) 1503      E) 1507

**Решение. A).** Ако  $a$  е бројот на атлетичарите кои Давид ги победиле, тогаш важи  $a+1+3a=2009$ , од каде добиваме  $a=502$ . Значи, Давид го освоил 503-тото место.

4. Колку е вредноста на  $\frac{1}{2}$  од  $\frac{2}{3}$  од  $\frac{3}{4}$  од  $\frac{4}{5}$  од  $\frac{5}{6}$  од  $\frac{6}{7}$  од  $\frac{7}{8}$  од  $\frac{8}{9}$  од  $\frac{9}{10}$  од 1000?

- A) 250      B) 200      C) 100      D) 50      E) друг одговор

**Решение. С).** Имаме:

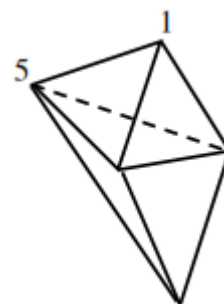
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot 1000 = \frac{1}{10} \cdot 1000 = 100.$$

5. Во бројот добиен со последователно запишување 2009 пати на бројот 2009, збирот на непарните цифри по кои непосредно следува парна цифра е еднаков на:

- A) 2      B) 9      C) 4018      D) 18072      E) 18081

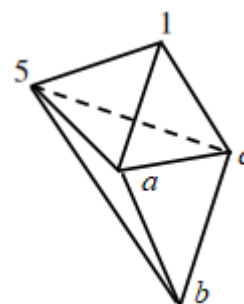
**Решение. D).** Непарните цифри 9 се пред парните цифри 2 и тоа за секој запишан број 2009, освен за последниот. Затоа збирот на непарните цифри по кои непосредно следува парна цифра е еднаков на  $2008 \cdot 9 = 18072$ .

6. Едно тело е формирано од 6 триаголници. Во секое негово теме е запишан по еден број. За секој ѕид е пресметан збирот на броевите во неговите темиња, и сите пресметани зборови се еднакви. Два од запишаните броеви се 1 и 5 како на цртежот. Колку е збирот на сите запишани броеви во темињата на телото?



- A) 9      B) 12      C) 17      D) 18      E) 24

**Решение. С).** При ознаки како на цртежот десно имаме  $1+5+a=b+5+a$ , па затоа  $b=1$ . Сега,  $1+5+a=1+c+a$ , па затоа  $c=5$ . Конечно, од  $1+5+a=1+5+5$  следува  $a=5$ . Значи, збирот на запишаните броеви е  $1+5+5+5+1=17$ .



7. Колку природни броеви имаат својство да нивните кубови и квадрати имаат еднаков број цифри (во декаден броен систем)?

- A) 0      B) 3      C) 4      D) 9      E) бесконечно многу

**Решение. B).** Ако  $N=10$ , тогаш  $N^3=1000$  и  $N^2=100$ , што значи дека бројот 10 го нема саканото својство. Ако  $N>10$ , тогаш

$$N^3 > N^3 - N^2 = N^2(N-1) \geq 10N^2,$$

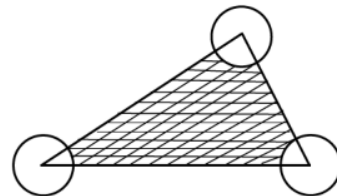
од каде следува дека бројот  $N^3$  е запишан со повеќе цифри од бројот  $N^2$ .

Понатаму, ако  $5 \leq N < 10$ , тогаш  $N^3$  е трицифрен, а  $N^2$  е двоцифрен број, па затоа и овие броеви не го задоволуваат условот на задачата. Конечно, од

$$1^2 = 1^3 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 4^2 = 16, \quad 4^3 = 64,$$

следува дека единствени броеви со саканото својство се 1, 2 и 4, т.е. одговорот е В).

8. Плоштината на триаголникот е  $80 m^2$ , а радиусите на кружниците со центри во темињата на триаголникот се  $2 m$ . Колку е плоштината на штрафираниот дел на цртежот, изразена во  $m^2$ ?



- А) 76      В)  $80 - 2\pi$       С)  $40 - 4\pi$       Д)  $80 - \pi$       Е)  $78\pi$

**Решение. Д).** Ако со  $\alpha, \beta, \gamma$  ги означиме аглиите на триаголникот, тогаш бидејќи  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , добиваме дека трите кружници од триаголникот отсекуваат делови чиј збир на плоштини е половина од плоштината на кругот со радиус  $2 m$ . Значи, плоштината на штрафираниот дел на цртежот е еднаква на  $80 - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 80 - \pi$ .

9. Огнен последователно запишал седум броеви. Почнувајќи од третиот број секој од нив е збир на претходните два броја. Четвртиот запишан број е еднаков на 6, а шестиот запишан број е еднаков на 15. Кој е седмиот запишан број?

- А) 9      В) 16      С) 21      Д) 22      Е) 24

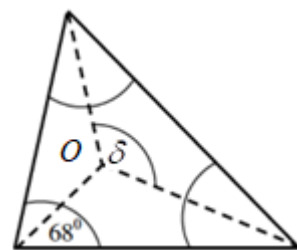
**Решение. Е).** Петтиот број запишан во низата е  $15 - 6 = 9$ . Значи, седмиот број е  $9 + 15 = 24$ .

10. Триаголникот на цртежот има еден агол еднаков на  $68^\circ$ . Трите симетрали на аглиите се сечат во точката  $O$ . Определи го аголот  $\delta$ ?

- А)  $120^\circ$       В)  $124^\circ$       С)  $128^\circ$       Д)  $132^\circ$       Е)  $136^\circ$

**Решение. В).** Нека  $\alpha, \beta, \gamma$  се аглиите на триаголникот и  $\alpha = 68^\circ$ . Тогаш  $\beta + \gamma = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$ , па затоа

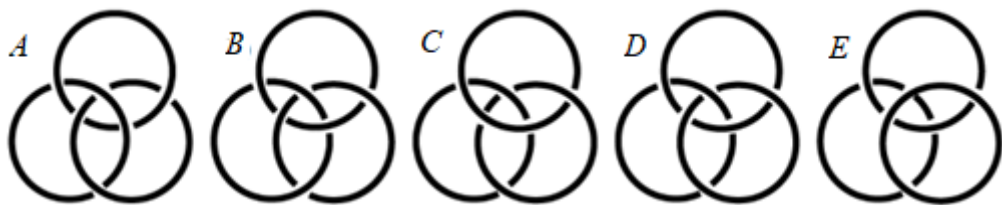
$$\delta = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{112^\circ}{2} = 124^\circ.$$



11. При секое тестирање оценките кои може да се добијат се 0, 1, 2, 3, 4 или 5. По четири тестирања просечната оценка на Марија е 4. Еден од следните искази не може да е точен. Кој е тој исказ?
- A) Марија добила само оценки 4  
 B) Марија добила оценка 3 точно двапати  
 C) Марија добила оцена 3 точно три пати  
 D) Марија добила оцена 1 точно еднаш  
 E) Марија добила оцена 4 точно двапати

**Решение. C).** Јасно, реченицата A може да е точна. Понатаму, од  $\frac{5+5+3+3}{4} = 4$  следува дека реченицата B може да е точна. Сега, од  $\frac{5+5+5+1}{4} = 1$  следува дека и реченицата D може да е точна, а од  $\frac{4+4+5+3}{4} = 4$  следува дека и реченицата E може да е точна. За да е точна реченицата C треба да важи  $\frac{3+3+3+a}{4} = 4$ , каде  $a$  е оценката која Марија ја добила на четвртиот тест. Но, тогаш  $a = 7$ , што противречи на тоа дека највисоката можна оценка е 5.

12. Борманови прстени се три прстени, кои се сврзани така, што никој од нив не може да се оддели без кинење, но ако било кој прстен се оддели, тогаш преостанатите два не се поврзани еден со друг. На кој од следните цртежи се нацртани Борманови прстени?



- A) A      B) B      C) C      D) D      E) E

**Решение. B).** На цртежит A, C и D ако се оддели горниот прстен останатите два пак се поврзани, а на цртежот E прстените воопшто не се поврзани. Останува цртежот B кој го задоволува условот прстените да се Борманови.

13. На еден остров живеат само витези и лажливци. Лажливците секогаш лажат, а витезите секогаш ја говорат вистината. Во еден ред биле наредени 25 жители на островот. Сите членови во редот, освен првиот, вели дека тој пред него во редот

е лажливец, а првиот во редот вели дека останатите членови во редот се лажливци. Колку членови во редот се лажливци?

A) 0      B) 12      C) 13      D) 24

E) не е можно да се определи

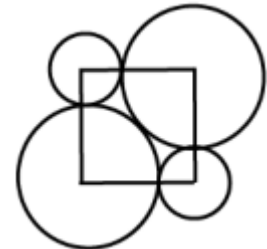
**Решение. C).** Ако првиот во редот е витез, тогаш сите останати треба да се лажливци. Но, тогаш третиот во редот ја говори вистината, што не е можно бидејќи тој е лажливец. Значи, првиот во редот е лажливац, па затоа вториот е витез, па третиот е лажливац итн. на секое непарно место е лажливец, а на секое парно место е витез. Бидејќи, непарни броеви помали или еднакви на 25 се 13, заклучуваме дека во редот има 13 лажливци.

14. Ако  $a*b = ab + a + b$  и  $3*5 = 2*x$ , тогаш  $x$  е еднаков на:

A) 3      B) 6      C) 7      D) 10      E) 12

**Решение. C).** Имаме,  $3 \cdot 5 + 3 + 5 = 2x + 2 + x$ , од каде добиваме  $x = 7$ .

15. Темињата на квадратот се центри на кружници: две големи и два мали. Големите кружници се допираат меѓу себе и секоја од нив се допира со двете мали кружници (види цртеж). Определи го односот на радиусот на поголемата и радиусот на помалата кружница?



A)  $\frac{2}{9}$       B)  $\sqrt{5}$       C)  $1 + \sqrt{2}$       D) 2,5      E)  $0,8\pi$

**Решение. C).** Ако со  $R$  и  $r$  ги означиме радиусите на големите и малите кружници, соодветно, тогаш должината на страната на квадратот е еднаква на  $R + r$ , а должината на неговата дијагонала е еднаква на  $2R$ . Сега, од Питагоровата теорема следува  $4R^2 = 2(R + r)^2$ , од каде добиваме  $2R = \sqrt{2}(R + r)$ , односно  $(2 - \sqrt{2})R = \sqrt{2}r$ . Конечно,  $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ .

16. Разликата меѓу броевите  $\sqrt{n}$  и 10 е помала од 1. Колку такви природни броеви  $n$  постојат?

A) 19      B) 20      C) 39      D) 40      E) 41

**Решение. C).** Последователно добиваме

$$\begin{aligned}
 |\sqrt{n} - 10| < 1, \\
 -1 < \sqrt{n} - 10 < 1, \\
 9 < \sqrt{n} < 11, \\
 81 < n < 121,
 \end{aligned}$$

што значи дека постојат 39 броеви со саканото својство.

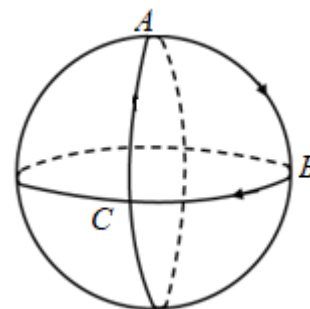
17. Петко напишал во една редица неколку природни броеви кои не се поголеми од 10. Робинзон Крусо ги разгледал и забележал дека за секој пар соседни броеви, едниот од нив е делител на другиот. Колку најмногу такви броеви може да се запишат?

A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 10

**Решение. D).** Бројот 1 може да е на било кое место во редицата. Понатаму, еден до друг може да бидат броевите 2 и 4, 2 и 6, 2 и 8, 2 и 10, 3 и 6, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 10. Сега, за да имаме најмногу запишани броеви потребно е броевите 3, 6 и 9 да се запишани во редослед 9 3 6 или 6 3 9, а броевите 2, 4, 6 и 8 да се запишани во редослед 6 2 4 8 или 8 4 2 6 или 6 2 8 4. Така, досега го имаме распоредот 9 3 6 2 4 8 или 9 3 6 2 8 4 и на овие редици однапред или одназад можеме да ги додадеме броевите 1, 5 и 10. На пример, 10 5 1 9 3 6 2 4 8 или 9 3 6 2 4 8 1 5 10.

Според тоа, определивме редици во кои се запишани 9 броеви. Дали може да се запишат сите 10 броеви. Одговорот е негативен, бидејќи во тој случај треба да се запише и бројот 7, а тој може да биде сосед само на бројот 1, но тогаш отпаѓаат броевите 5 и 10.

18. Три кружни прстени се споени заедно, така што секои два се наоѓаат под прав агол, како што е прикажано на цртежот, т.е. рамнините во кои лежат се по парови заемно нормални. Една бубамара слетала во точката  $A$  и почнала да лази околу прстенот кон точката  $B$ , како што е прикажано на цртежот во правец на стрелката. Лазењето го продолжила на следниот

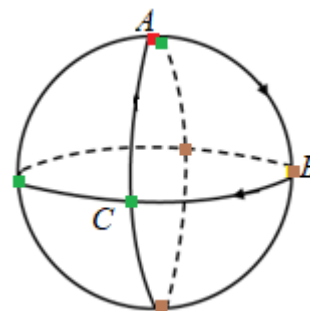


начин: поминала четвртина кружница и завртела десно за  $90^\circ$ , поминала четвртина кружница и завртела лево за  $90^\circ$ , поминала четвртина кружница и завртела

десно за  $90^\circ$  итн. Продолжувајќи на овој начин, колку четвртини од кружниците треба да помине бубамарата за да се врати во точката  $A$ ?

- A) 6    B) 9    C) 12    D) 15    E) 18

**Решение. А).** За да од точката  $A$  стигне во точката  $A$  бубамарата врти: десно, лево, десно, лево, десно, што значи дека таа поминала 6 четвртини од кружница (вид цртеж).



19. Колку нули треба да се стават на местото на  $*$ , така што децималниот број  $1,*1$  е број поголем од  $\frac{20009}{20008}$ , а е помал од  $\frac{2009}{2008}$  ?

- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

**Решение. С).** Имаме

$$\frac{20009}{20008} \approx 1,000049980007997\dots \text{ и } \frac{2009}{2008} \approx 1,000498007968127\dots,$$

што значи дека треба да се запишат 3 нули.

20. Ако  $a = 2^{25}$ ,  $b = 8^8$  и  $c = 3^{11}$ , тогаш

- A)  $a < b < c$     B)  $b < a < c$     C)  $c < b < a$     D)  $c < a < b$     E)  $b < c < a$

**Решение. С).** Имаме,  $a = 2^{25} = 2 \cdot 2^{24} = 2 \cdot 4^{12}$  и  $b = 8^8 = 2^{24} = 4^{12}$ . Затоа,  $a > b$  и како  $b = 4^{12} > 3^{12} > 3^{11} = c$ .

21. Колку десетцифрени броеви може да се запишат со цифрите 1, 2 и 3, така што две соседни цифри се разликуваат за 1.

- A) 16    B) 32    C) 64    D) 80    E) 100

**Решение. С).** Ако првата цифра е 2, тогаш втората може да е 1 или 3, па третата мора да е 2, четвртата може да е 1 или 3 итн. На овој начин за секое непарно место имаме 1 можност, а за секое парно место имаме 2 можности, па  $2^5 = 32$  броја го задоволуваат условот на задачата. Ако првата цифра е 1 или 3, тогаш втората цифра мора да е 2, па третата цифра е 1 или 3, четвртата мора да е 2 итн. Значи, во овој случај за непарните места имаме 2 можности, а за парните места 1 можност, што значи дека  $2^5 = 32$  броја го задоволуваат условот на задачата. Според тоа, имаме  $32 + 32 = 64$  броја со саканото својство.

22. Матео има 2009 коцки  $1 \times 1 \times 1$  и 2009 стикери  $1 \times 1$ . Тој со сите коцки сака да направи квадар и целосно однадвор да го покрие со стикери. Колку стикери му останале?

A) повеќе од 1000      B) 763      C) 476      D) 49  
E) Матео не може да ја постигне саканата цел

**Решение. В).** Бидејќи  $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$  Матео може да ги направи следниве квадрати:  $1 \times 1 \times 2009$ ,  $1 \times 7 \times 287$ ,  $1 \times 41 \times 49$ ,  $7 \times 7 \times 41$  и за покривањето на овие квадрати редоследно му требаат:

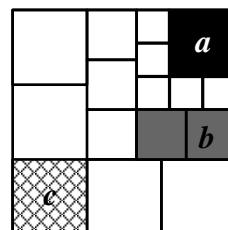
$$2 + 4 \cdot 2009 = 8040, \quad 2(1 \cdot 7 + 1 \cdot 287 + 7 \cdot 287) = 4606,$$

$$2(1 \cdot 41 + 1 \cdot 49 + 41 \cdot 49) = 4198, \quad 2(7 \cdot 7 + 7 \cdot 41 + 7 \cdot 41) = 1246$$

стикери. За првите три квадрати Матео нема доволен број стикери, па затоа може да го направи само четвртиот квадар и притоа му остануваат  $2009 - 1246 = 763$  стикери.

23. Квадрат е поделен на 16 помали квадрати, при што плоштината на црниот дел е  $a$ , на сивиот е  $b$  и на шрафираниот е  $c$ , како на цртежот. Кој од следните одговори е точен?

A)  $a < b < c$       B)  $a < c < b$       C)  $b < a < c$   
D)  $b < c < a$       E)  $c < a < b$



**Решение. А).** Нека должината на страната на најмалите квадратчиња е  $4x$ . Тогаш должината на страната на црниот квадрат е  $8x$ , должината на страната на сивиот квадрат е  $6x$  и должината на страната на шрафираниот квадрат е  $9x$ . Според тоа, плоштината на црниот квадрат е  $a = 64x^2$ , плоштината на сивиот правоаголник е  $b = 2 \cdot 36x^2 = 72x^2$  и плоштината на шрафираниот квадрат е  $c = 81x^2$ . Значи,  $a < b < c$ .

24. Неколку портокали, јаболка, банани и круши се наредени во редица така, што за секој вид овошје постои негов претставник, кој се наоѓа непосредно до претставникот на било кој од останатите видови овошје. Кој е најмалиот број плодови во редицата?  
A) 4      B) 5      C) 8      D) 11      E) таков распоред не е можен

**Решение. С).** Бидејќи секој плод треба да биде соседен на три плода, а кога е поставен во редицата може да има најмногу два соседи, добиваме дека секој плод мора во редицата да се наоѓа најмалку два пати. Значи, во редицата не може да има помалку од  $4 \cdot 2 = 8$  плодови. Распоред од точно 8 плодови при кој е исполнет условот на задачата е: БПЈБКПЈК.

25. Кој е најмалиот природен број  $n$  за кој  $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \dots \cdot (n^2 - 1)$  е точен квадрат?

A) 6      B) 8      C) 16      D) 27      E) друг одговор

**Решение. В).** Ако си искористи разложувањето  $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$  последователно добиваме

$$2^2 - 1 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3$$

$$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot (5^2 - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \dots \cdot (6^2 - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \dots \cdot (7^2 - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \dots \cdot (8^2 - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 9 = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Како што можеме првпат во каноничното разложување на дадениот производ степените на множеителите се парни броеви за  $n = 8$ , што значи дека дека тоа е бараниот број.

26. Најмалиот делител на еден природен број  $N$  кој е поголем од 1 е 45 пати помал од најголемиот негов делител кој е помал од  $N$ . Колку такви природни броеви има?

A) 0      B) 1      C) 2      D) повеќе од 2      E) не може да се определи

**Решение. С).** Нека  $a$  е најмалиот делител на бројот  $N$  кој е поголем од 1. Тогаш најголемиот делител на бројот  $N$  кој е помал од  $N$  е  $\frac{N}{a}$ . Оттука добиваме

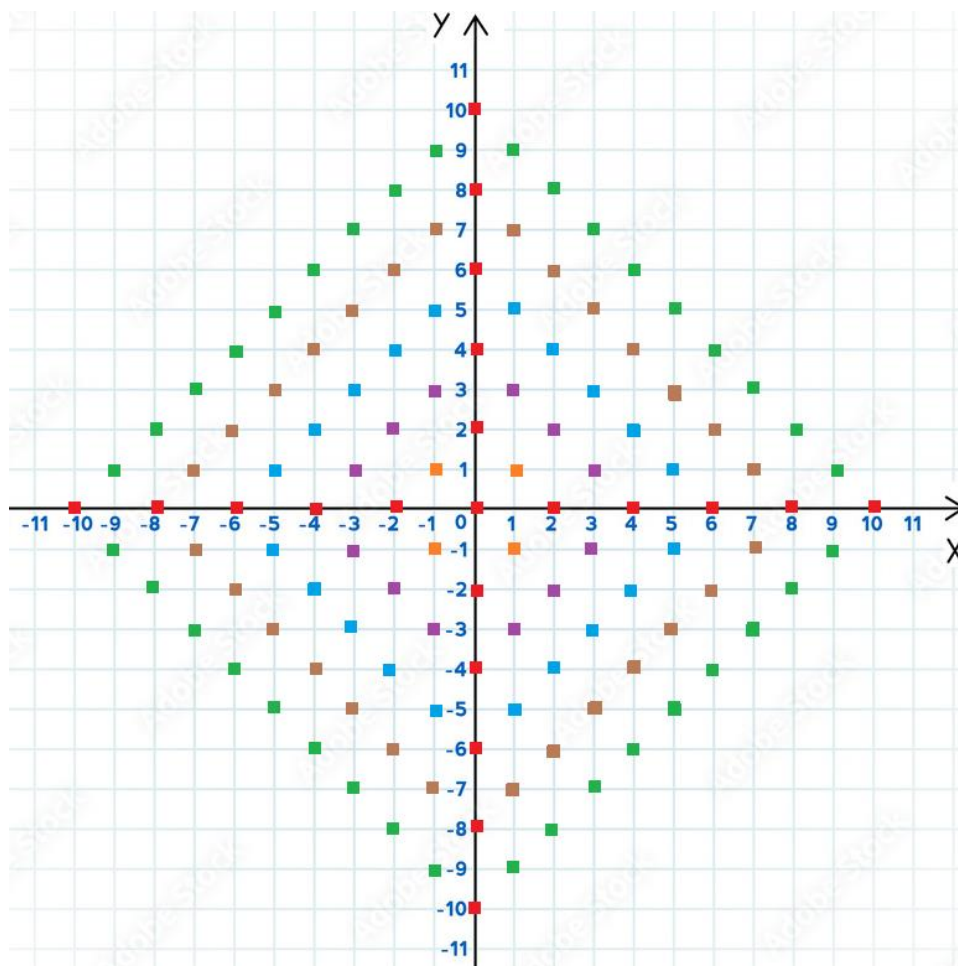
$$\frac{N}{a} = 45a, \text{ т.е. } N = 45a^2. \text{ Ако } N \text{ е парен број, тогаш } a = 2, \text{ па затоа } N = 180.$$

Ако  $N$  е непарен број, тогаш од  $N = 45a^2$  следува дека 3 е делител на  $N$ , па

затоа  $a = 3$ , односно  $N = 405$ . Значи, само броевите 180 и 405 го задово-луваат условот на задачата.

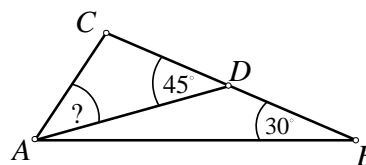
27. Едно кенгурче се наоѓа во координатниот почеток на еден правоаголен координатен систем во рамнина. Тоа може да скокне за единица вертикално или за единица хоризонтално. Во колку точки од рамнината може да стаса кенгурчето по 10 скока?  
 А) 121    В) 100    С) 400    D) 441    Е) ниту еден од дадените одговори

**Решение. А).** Бидејќи кенгурот прави 10 скока, т.е. парен број скокови, тој може да стигне до сите точки чии координати се или двете парни или двете непарни и притоа збирот на апсолутните вредности на координатите е помал или еднаков на 10 (Зошто?).



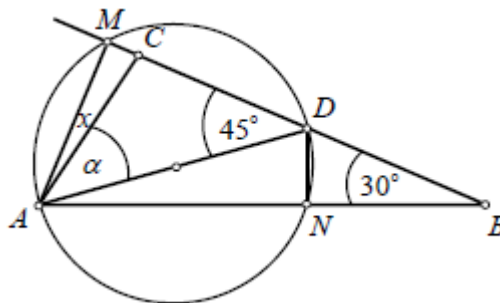
На горниот цртеж се прикажани сите точки до кои може да стигне кенгурот. Според тоа, кенгурот може да стигне до  $4 \cdot (10 + 8 + 6 + 4 + 2) + 1 = 121$  точка.

28. Нека  $AD$  е тежишна линија во триаголникот  $ABC$ . Аголот  $\angle ABC$  има  $30^\circ$ , а аголот  $\angle ADC$  има  $45^\circ$ . Колку степени има аголот  $\angle CAD$ ?



- A)  $45^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $25^\circ$       D)  $20^\circ$       E)  $15^\circ$

**Решение. В).** Од точката  $A$  повлекуваме нормала на страната  $BC$  и нека нејзината подножна точка е  $M$ , а од точката  $D$  повлекуваме нормала на страната  $AB$  и нека нејзината подножна точка е  $N$ . Четириаголникот  $ANDM$  е тетивен. Да означиме  $\angle MAC = x$  и  $\angle CAD = \alpha$ . Тогаш е



јасно дека  $\alpha + x = 45^\circ$ . Сега, не е тешко да се пресмета дека  $x = 15^\circ$  и  $\alpha = 30^\circ$ .

29. Која е најголемата вредност за  $k$ , за која  $3^k$  е делител на  $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{111\dots1}_{24 \text{ пати}}$ .
- A) 20      B) 15      C) 12      D) 10      E) 8

**Решение. D).** Од деливоста со 3 и со 9 следува дека само следните множители во дадениот производ се деливи со 3 и со 9:

$$111 = 3 \cdot 37,$$

$$\underbrace{111\dots1}_{6 \text{ пати}} = 3 \cdot 37037,$$

$$\underbrace{111\dots1}_{9 \text{ пати}} = 3^2 \cdot 12345679,$$

$$\underbrace{111\dots1}_{12 \text{ пати}} = 3 \cdot 37037037037,$$

$$\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ пати}} = 3 \cdot 37037037037037,$$

$$\underbrace{111\dots1}_{18 \text{ пати}} = 3^2 \cdot 12345679012345679,$$

$$\underbrace{111\dots1}_{21 \text{ пат}} = 3 \cdot 37037037037037037037,$$

$$\underbrace{111\dots1}_{24 \text{ пати}} = 3 \cdot 37037037037037037037037,$$

и ниту еден од другите множители во овој производ не е делив со 3. Значи, најголемата вредност на  $k$  за која  $3^k$  е делител на  $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{111\dots1}_{24 \text{ пати}}$  е:

$$k = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10.$$

30. Квадратна шема  $3 \times 3$  треба да се дополни до магичен квадрат (збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и дијагонала е еднаков). Ако два од броевите се дадени (види цртеж), колку е бројот  $a$  ?

$a$		
		47
	63	

- A) 16      B) 51      C) 54      D) 55      E) 110

**Решение. D).** При ознаки како на цртежот десно, од првата колона и вториот ред следува  $a + g = e + 47$ , а од третиот ред и дијагоналата која го содржи  $a$  следува  $a + e = g + 63$ . Ако ги собереме двете, по средувањето добиваме  $2a = 110$ , т.е.  $a = 55$ .

$a$	$b$	$c$
$d$	$e$	47
$g$	63	$h$

**Junior (прва и втора година) 2010**

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Колку е количникот кој се добива кога бројот 20102010 ќе се подели со 2010?  
 A) 11      B) 101      C) 1001      D) 10001      E) не е природен број

**Решение. D).** Имаме:

$$20102010 = 20100000 + 2010 = 2010 \cdot 1000 + 2010 = 2010 \cdot (1000 + 1) = 2010 \cdot 10001,$$

што значи дека количникот од делењето е 10001.

2. На едно тестирање Игор освоил 85% од поените на тестот, а Давор на истиот тест освоил 90% од поените. Давор освоил само 1 поен повеќе од Игор. Кој е максималниот број поени на овој тест?  
 A) 5      B) 17      C) 18      D) 20      E) 25

**Решение. D).** Давор освоил  $90 - 85 = 5\%$  повеќе поени од Игор. Но, тој освоил повеќе само 1 поен, па затоа 1 поен е еднаков на 5% од вкупниот број поени на тестот. Сега, ако вкупниот број поени на тестот е  $a$ , тогаш  $a : 100 = 1 : 5$ , од каде добиваме  $a = 20$ .

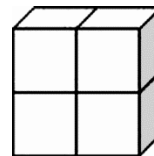
3. Збирите на броевите во двата реда се еднакви. Кој број треба да биде запишан на местото на ѕвездичката?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

A) 1010      B) 1020      C) 1910      D) 1990      E) 2020

**Решение. C).** Во секоја од првите десет колони бројот запишан во вториот ред е за 10 поголем од бројот запишан во првиот ред. Затоа на местото на ѕвездичката треба да стои број кој е за  $10 \cdot 10 = 100$  помал од бројот 2010, а тоа е бројот  $2010 - 100 = 1910$ .

4. Телото на цртежот десно е составено од четири идентични коцки. Плоштината на секоја коцка е еднаква на  $24 \text{ cm}^2$ . Колкава е плоштината на ова тело?



- A)  $80 \text{ cm}^2$       B)  $64 \text{ cm}^2$       C)  $40 \text{ cm}^2$       D)  $32 \text{ cm}^2$       E)  $24 \text{ cm}^2$

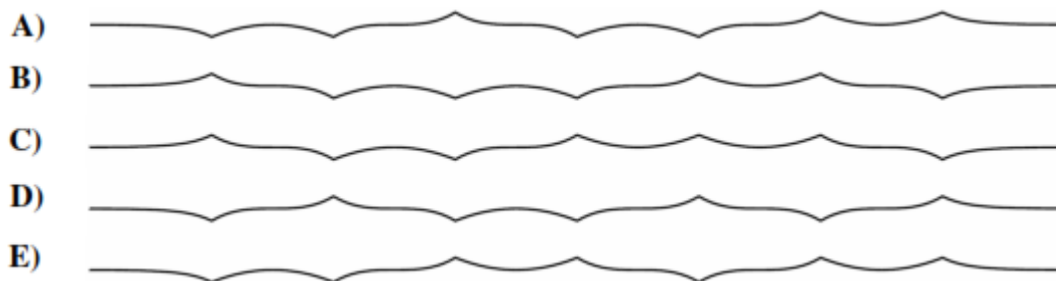
**Решение. B).** Плоштината на еден ѕид на коцките од кои е составено телото е еднаква на  $24 : 6 = 4 \text{ cm}^2$ . Површината на телото е составена од 16 ѕидови на коцката, па затоа неговата плоштина е еднаква на  $16 \cdot 4 = 64 \text{ cm}^2$ .

5. За секој роденден Јана добива онолку ружи колку што полни години. Јана досега добила 120 ружи. Колку години има сега Јана?

- A) 10      B) 12      C) 14      D) 15      E) 20

**Решение. D).** Нека Јана полни  $a$  години. Тогаш  $1+2+3+\dots+a=120$ , од каде добиваме  $\frac{a(a+1)}{2}=120$ , односно  $a(a+1)=2^4 \cdot 3 \cdot 5$ . Значи,  $a(a+1)=15 \cdot 16$ , па затоа  $a=15$ .

6. Тенка хартиена лента се превиткува на средината, потоа уште еднаш се превиткува на средината и трет пат се превиткува на средината. Лентата се одвиткува и се гледаат седумте места на превиткување. Кој од прикажаните цртежи не може да се добие на опишаниот начин?



**Решение. D).** Ако ликот  $E$  прво го пресликаме симетрично во однос на хоризонталната, а потоа во однос на вертикалната права го добиваме ликот  $A$  (види цртеж). Тоа значи дека двата лика се добиваат со ист начин на превиткување.

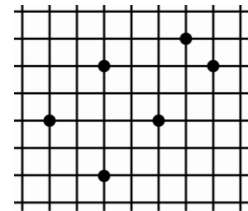


Ако ликот  $C$  прво го пресликаме симетрично во однос на хоризонталната, а потоа во однос на вертикалната права го добиваме ликот  $B$  (види цртеж). Тоа значи дека двата лика се добиваат со ист начин на превиткување.



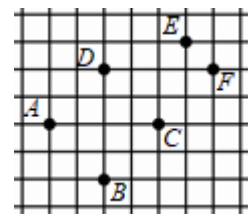
Едниот начин е три пати превиткуваме во лево, а другиот начин е два пати превиткуваме во лево и еднаш во десно. Притоа во однос на четвртото прекршување останатите шест прекршувања мора да се „централно симетрични“. Ова не е случај со линијата  $D$ , па затоа истата не може да се добие на опишаниот начин.

7. На цртежот се дадени шест точки кои се темиња на единечни квадрати во дадената мрежа. На која геометриска фигура темињата не може да се меѓу дадените точки?

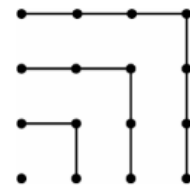


- A) квадрат    B) траpez    C) тапоаголен триаголник  
D) паралелограм кој не е ромб  
E) правоаголник кој не е квадрат

**Решение. E).** При ознаки како на цртежот десно квадрат е  $ABCD$ , траpez е  $CDEF$ , тапоаголен триаголник е  $ACF$ , паралелограм кој не е ромб е  $ACFD$ . Меѓутоа, единствен правоаголник е квадратот  $ABCD$ , па затоа нема правоаголник кој не е квадрат.



8. Од фигурата на цртежот десно следува  $1+3+5+7=4^2$ . Колку е  $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ ?



- A)  $14 \cdot 14$     B)  $9 \cdot 9$     C)  $4 \cdot 4 \cdot 4$     D)  $16 \cdot 16$     E)  $4 \cdot 9$

**Решение. B).** Имаме  $\frac{7+1}{2} = 4$  и  $1+3+5+7=4^2$ , што значи

дека збирот е еднаков на бројот на јазлите на  $4 \times 4$  решетка. Аналогно од  $\frac{17+1}{2} = 9$  заклучуваме дека збирот  $1+3+5+7+9+11+13+15+17$  е еднаков на бројот на јазлите на  $9 \times 9$  решетка, односно дека

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17=9 \cdot 9.$$

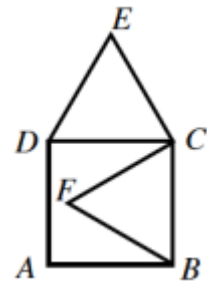
9. Рената била на одмор во Верона и планира најмалку еднаш да помине по петте моста на реката Адиге. Прошетката ја почнала и ја завршила кај железничката станица поминувајќи ја реката исклучиво преку тие 5 мостови. Во текот на прошетката реката ја поминала  $n$  пати. Кој од понудените броеви е можна вредност на бројот  $n$ ?

A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

**Решение. D).** Железничката станица се наоѓа на едната страна на реката. При првото, третото, петтото, седмото и секое следно непарно поминување Рената ќе се наоѓа на спротивната страна на реката од страната на која е железничката станица. Значи, Рената мора реката да ја помине парен број пати. Единствени понудени парни броеви се 4 и 6. Но, при 4 поминувања Рената нема да помине преку еден мост. Значи,  $n = 6$ .

10. На цртежот десно четириаголникот  $ABCD$  е квадрат со страна 1. Ако триаголниците  $FBC$  и  $DCE$  се рамнострани, определи ја должината на отсечката  $FE$ .

A)  $\sqrt{2}$       B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C)  $\sqrt{3}$       D)  $\sqrt{5} - 1$       E)  $\sqrt{6} - 1$



**Решение. A).** Имаме

$$\angle FCE = \angle FCD + \angle DCE = 90^\circ - 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Значи, триаголникот  $FCE$  е рамнокрак правоаголен, со катети 1, од каде следува  $\overline{FE} = \sqrt{2}$ .

11. Во 2010 година производот на годините на учителот Дамјан и годините на неговиот татко бил еднаков на 2010. Која година е роден учителот Дамјан?

A) 1943      B) 1953      C) 1980      D) 1995      E) 2005

**Решение. C).** Имаме  $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ , па како таткото на учителот Дамјан не може да има

$$2 \cdot 67 = 134, \quad 3 \cdot 67 = 201, \quad 5 \cdot 67 = 335$$

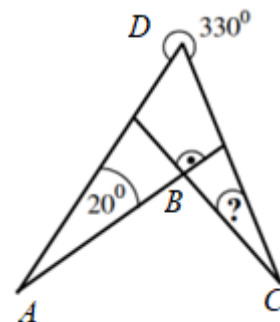
години, заклучуваме дека таткото на учителот Дамјан има 67 години, а Дамјан има  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  години. Значи, Дамјан е роден во 1980 година.

12. Колку е мерката изразена во степени на аголот означен со прашалниот знак?

- A)  $10^\circ$     B)  $20^\circ$     C)  $30^\circ$     D)  $40^\circ$     E)  $50^\circ$

**Решение. D).** Мерките на трите агли на конкавниот четириаголник  $ABCD$  се  $\angle DAB = 20^\circ$ ,  $\angle ABC = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$  и  $\angle CDA = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$ . Според тоа,

$$\angle BCD = 360^\circ - 30^\circ - 30^\circ - 270^\circ = 40^\circ.$$

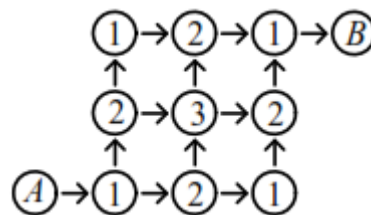


13. Определи го бројот на природните броеви кај кои збирот на цифрите е еднаков на 2010, а производот на цифрите е еднаков на 2.

- A) 2010    B) 2009    C) 2008    D) 1005    E) 1004

**Решение. B).** За да производот на цифрите на еден природен број е 2, тој мора да е запишан со една цифра 2, а преостанатите цифри да се 1. Сега, ако бројот е  $n$ -цифрен, тогаш бидејќи збирот на неговите цифри треба да е 2010, добиваме  $(n-1) \cdot 1 + 2 = 2010$ , од каде следува  $n = 2009$ . Значи, бараните броеви се 2009-цифрени природни броеви со една цифра 2, а преостанатите цифри се 1. Сите броеви се добиваат на цифрата 2 се запише на првото, второто, третото итн. последното место, што значи дека имаме 2009 природни броја со саканите својства.

14. Следејќи ги стрелките треба од кругчето означено со A да стигнеме во кругчето означено со B. За секоја можна патека го пресметуваме збирот на броевите запишани во кругчињата кои се на таа патека. Колку различни збирове можеме да добиеме?



- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 6

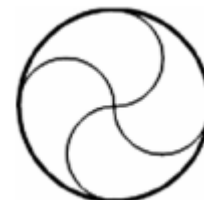
**Решение. B).** Во деветте кругчиња на квадратот се запишани девет броеви кои се симетрични во однос на четирите оски на симетрија на квадратот и се симетрични во однос на пресекот на дијагоналите на квадратот. Затоа имаме само два можни збира:  $1+2+1+2+1=7$  и  $1+2+3+2+1=9$ .

15. Три од вторниците во еден месец се на парни дати. Кој ден од седмицата е на 21-ви тој месец?

А) среда      В) четврток      С) петок      Д) санота      Е) недела

**Решение. Е).** Ако првиот вторник на парна дата е на датата  $2a$ , тогаш бидејќи бидејќи имаме три вторници на парни дати, добиваме дека преостанатите вторници се на датите  $2a + 7, 2a + 14, 2a + 21, 2a + 28$ . Но,  $2a + 28 \leq 30$ , па затоа  $a = 1$ . Значи, 2-ри во месецот е вторник, 23-ти во месецот е вторник, па затоа 21-ви во месецот е во недела.

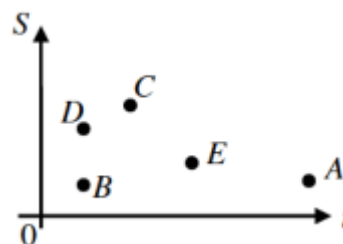
16. Кругот на цртежот десно е со радиус 4 и е поделен на четири еднакви делови со помош на лаци од кружници со радиус 2. Колку е периметарот на секој од делбените делови?



А)  $2\pi$       В)  $4\pi$       С)  $6\pi$       Д)  $8\pi$       Е)  $12\pi$

**Решение. С).** Секој од делбените делови е составен од три кружни лаци, од кои едниот е четвртина од кружницата со радиус 4, а другите два се половина од кружницата со радиус 2. Значи, периметарот на секој од делбените делови е еднаков на  $\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4\pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 6\pi$ .

17. Во правоаголен координатен систем  $tOS$  е прикажана положбата на натпреварувачите А, В, С, D и Е во зависност од времето, за кое секој од нив истрчал соодветно растојание. Кој натпреварувач е најбрз?



А) А      В) В      С) С      Д) D      Е) Е

**Решение. D).** Натпреварувачот D за исто време истрчал поголемо растојание од натпреварувачот B, а за пократко време истрчал поголемо растојание од натпреварувачите А и Е. Значи, D е побрз од А, В и Е. Понатаму, натпреварувачот С за двапати подолго време не истрчал двапати поголемо растојание од натпреварувачот D, па затоа D е побрз и од С.

18. Триаголникот е превиткан преку испрекинатата линија и така добиената фигура е прикажана на цртежот десно. Плоштината на почетниот триаголникот е 1,5 пати поголема од плоштината на фигурата добиена со пре-



виткувањето. Вкупната плоштина на сивите делови е 1. Колкава е плоштината на почетниот триаголник?

- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) не може да се определи

**Решение. B).** При ознаки како на цртежот десно имаме

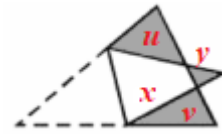
$u + v + y = 1$ , па затоа  $u + v = 1 - y$ . Според тоа,

$$x + y + x + u + v = 1,5(u + x + v + y),$$

$$2x + y + 1 - y = 1,5(x + y + 1 - y),$$

$$x = 1.$$

Конечно,  $P = x + y + x + u + v = 1 + y + 1 + 1 - y = 3$ .



19. Во еден супермаркет има два реда колички за набавка на производи. Количките во секој од редовите се наредени со еден дел една во друга на потполно ист начин. Во првиот ред има 10 колички и тој е долг 2,9 метри, а во вториот ред има 20 колички и тој е долг 4,9 метри. Колку метри е долга 1 количка?



- A) 0,8      B) 1      C) 1,1      D) 1,2      E) 1,4

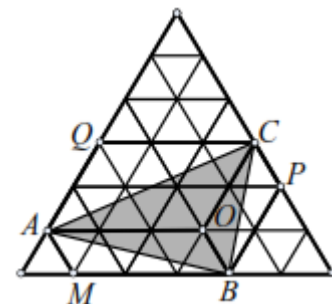
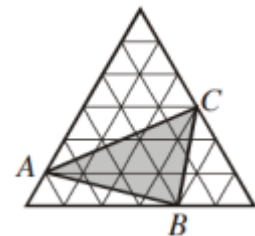
**Решение. C).** Ако со  $x$  ја означиме должината на количката, а со  $y$  го означиме растојанието меѓу рачките на секои две соседни колички, тогаш добиваме  $x + 19y = 4,9$  и  $x + 9y = 2,9$ . Од последниот систем наоѓаме  $y = 0,2$  и  $x = 1,1$ . Значи, една количка е долга 1,1 метри.

20. Рамностран триаголник е поделен на 36 еднакви рамностранни триаголници (цртеж десно), секој со плоштина  $1 \text{ cm}^2$ . Колкава е плоштината на триаголникот  $ABC$ ?

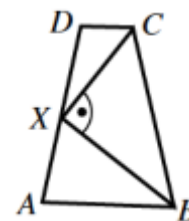
- A)  $11 \text{ cm}^2$     B)  $12 \text{ cm}^2$     C)  $15 \text{ cm}^2$     D)  $9 \text{ cm}^2$     E)  $10 \text{ cm}^2$

**Решение. A).** При ознаки како на цртежот десно имаме:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CAO} \\ &= \frac{1}{2} P_{AMBO} + \frac{1}{2} P_{BPCO} + \frac{1}{2} P_{CQAO} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 11 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



21. Даден е рамнокрак трапез  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Точката  $X$  е средина на кракот  $AD$  и важи  $\overline{AX} = 1$  и  $\angle BXC = 90^\circ$ . Определи го периметарот на трапезот.



A) 5      B) 6      C) 7      D) 8

E) не е можно да се определи

**Решение. B).** Нека  $M$  е средината на  $BC$  (направи цртеж). Тогаш  $\overline{MC} = \overline{MB} = 1$ .

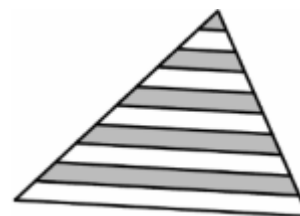
Бидејќи  $\angle BXC = 90^\circ$ , точката  $X$  припаѓа на кружницата со центар  $M$  и радиус 1. Значи,  $\overline{MX} = 1$ . Понатаму,  $MX$  е средна линија на трапезот и затоа

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{MX} = 2.$$

Конечно,

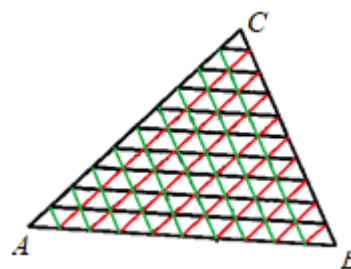
$$L_{ABCD} = 2\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{CD} = 2 \cdot 2 + 2 = 6.$$

22. Со прави паралелни на основата, секоја од другите две страни на триаголникот е поделена на 10 еднакви делови (цртеж десно). Колкав процент од површината на триаголникот е обоен во сива боја?



A) 41,75%      B) 42,5%      C) 45%  
D) 46%      E) 47,5%

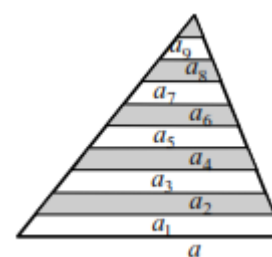
**Решение. C).** *Прв начин.* Ако повлечеме прави паралелни со страната  $AC$ , а потоа со страната  $BC$ , тогаш гледано одгоре-надолу по редови триаголникот има 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 и 19 мали складни триаголници, од кои сиви се 1, 5, 9, 13 и 17 мали



триаголници. Значи, вкупно имаме  $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$  триаголници, од кои сиви се  $1+5+9+13+17=45$  триаголници.

Конечно,  $\frac{45}{100} \cdot 100 = 45\%$  од триаголникот е обоен со сива боја.

*Втор начин.* Триаголникот е разделен на девет трапези и еден триаголник. Нека поголемата основа на најголемиот бел трапез е  $a$ , а основите на сивите трапези  $a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6; a_7, a_8$  и основата на сивиот триаголник е  $a_9$ . Тогаш плоштината на сивиот дел од триагол-



никот е

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{h}{10} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_7 + a_8 + a_9),$$

а плоштината на белиот дел од триаголникот е

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{h}{10} (a + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_7 + a_8 + a_9) = \frac{1}{20} ah + P_1.$$

За плоштината на целиот триаголник имаме

$$P = \frac{1}{2} ah \text{ и } P = P_1 + P_2 = 2P_1 + \frac{1}{20} ah = 2P_1 + \frac{1}{10} P,$$

па затоа од последното равенство следува  $P_1 = \frac{9}{20} P = \frac{45}{100} P$ .

Значи, 45% од плоштината на целиот триаголник е обоена со сива боја.

23. Октоподи со по шест, седум и осум пипки го опслужуваат морскиот крал. Октоподите кои имаат по седум пипки секогаш лажат, а октоподите кои имаат шест или осум пипки секогаш ја говорат вистината. Еден ден се сретнале четири октоподи.

Синиот октопод рекол: *Заедно имаме 28 пипки.*

Зелениот октопод рекол: *Заедно имаме 27 пипки.*

Жолтиот октопод рекол: *Заедно имаме 26 пипки.*

Црвениот октопод рекол: *Заедно имаме 25 пипки.*

Колку пипки има црвениот октопод?

A) 6      B) 7      C) 8      D) 6 или 8

E) не може да се определи

**Решение. B).** Бројот 25 може како збир на четири броеви еднакви на 6, 7 или 8 на единствен начин и тоа  $25 = 6 + 6 + 6 + 7$ .

Ако црвениот октопод има 6 пипки, тогаш тој ја зборува вистината и четирите октоподи навистина имаа 25 пипки. Но, тогаш уште два октоподи имаат по 6 пипки, што значи дека и тие ја зборуваат вистината. Но овие два октоподи рекле дека вкупниот број пипки на сите октоподи се два од броевите 26, 27 или 28, што не е можно. Значи, црвениот октопод лаже, па затоа тој има 7 пипки.

24. За колку природни броеви  $n$ ,  $1 \leq n \leq 100$ , бројот  $n^n$  е точен квадрат?

A) 5      B) 50      C) 55      D) 54      E) 15

**Решение. С).** Ако  $n$  е парен број, т.е.  $n = 2k$ , тогаш  $n^n = (2k)^{2k} = ((2k)^k)^2$ , што значи дека е полн квадрат. Значи, во овој случај точни квадрати се броевите:

$$2^2, 4^4 = (4^2)^2, 6^6 = (6^3)^2, \dots, 98^{98} = (98^{49})^2, 100^{100} = (100^{50})^2,$$

т.е. имаме 50 точни квадрати од бараниот вид.

Ако  $n$  е непарен број, тогаш  $n^n$  е точен квадрат ако и само ако  $n$  е точен квадрат. Непарни броеви кои се помали од 100 и се точни квадрати се: 1, 9, 25, 49 и 81, т.е. во овој случај точни квадрати се броевите

$$\begin{aligned} 1^1 &= 1^2, \\ 9^9 &= (3^2)^9 = (3^9)^2, \\ 25^{25} &= (5^2)^{25} = (5^{25})^2, \\ 49^{49} &= (7^2)^{49} = (7^{49})^2, \\ 81^{81} &= (9^2)^{81} = (9^{81})^2. \end{aligned}$$

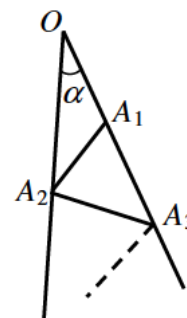
имаме 5 точни квадрати од бараниот вид. Значи, вкупно имаме  $50 + 5 = 55$  точни квадрати од бараниот вид.

25. Во фигурата на цртежот десно важи  $\angle \alpha = 7^\circ$  и

$$\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots$$

Колку најмногу отсечки  $A_iA_{i+1}$  може да се нацртаат на овој начин?

- А) 10                      В) 11                      С) 12                      Д) 13  
Е) произволно многу



**Решение. С).** Триаголниците

$$\begin{aligned} &OA_1A_2, A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_5, \\ &A_4A_5A_6, A_5A_6A_7, A_6A_7A_8, A_7A_8A_9, \\ &A_8A_9A_{10}, A_9A_{10}A_{11}, A_{10}A_{11}A_{12}, A_{11}A_{12}A_{13} \end{aligned}$$

се рамнокраки со основи

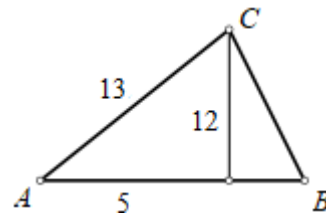
$$\begin{aligned} &OA_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_8, \\ &A_7A_9, A_8A_{10}, A_9A_{11}, A_{10}A_{12}, A_{11}A_{13}, \end{aligned}$$

и агли при основите

$$7^\circ, 14^\circ, 21^\circ, 28^\circ, 35^\circ, 42^\circ, 49^\circ, 56^\circ, 63^\circ, 70^\circ, 77^\circ, 84^\circ.$$

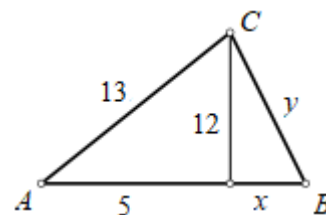
Ако може да се нацрта уште една отсечка, тогаш ќе добиеме рамнокрак триаголник  $A_{12}A_{13}A_{14}$  и тој ќе има агли при основата  $91^\circ$ , што не е можно.

26. Сите растојанија на цртежот десно се дадени во километри. Од  $A$  до  $B$  може да се стигне директно или преку точката  $C$ . Патот преку  $C$  е двапати подолг од директниот пат. Колкава е должината на патот од  $B$  до  $C$ ?



- A) 9      B) 13      C) 14      D) 15      E) 28

**Решение. D).** Бидејќи  $5^2 + 12^2 = 13^2$ , од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникот со страни 5, 12 и 13 е правоаголен. Според тоа, триаголникот со страни 12,  $x$ ,  $y$  исто така е правоаголен. Значи,



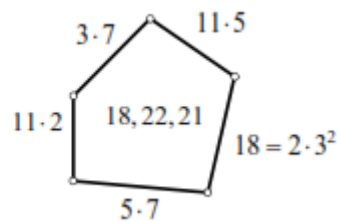
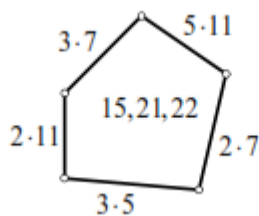
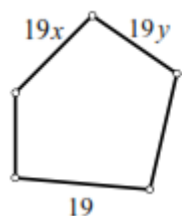
$$12^2 + x^2 = y^2. \quad (1)$$

Понатаму, од условот на задачата следува  $2(5+x) = 13+y$ , т.е.  $y = 2x - 3$ . Со замена во (1) добиваме  $12^2 + x^2 = (2x - 3)^2$  и по средовањето ја добиваме квадратната равенка  $x^2 - 4x - 45 = 0$  чии решенија се  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 9$ . Должината на патот е позитивна величина, па затоа  $x = 9$ , од каде добиваме  $y = 15$ .

27. На секоја од страните на еден петаголник е запишан по еден природен број. Два броја се соседни ако се запишани на соседни страни на петаголникот. Соседните броеви се заемно прости, а несоседните броеви не се заемно прости. Постојат повеќе вакви можности. Кој од броевите не може да биде запишан на некоја страна на петаголникот?

- A) 15      B) 18      C) 19      D) 21      E) 22

**Решение. C).** Ако на едната страна е запишан бројот 19, тогаш на двете несоседни страни мора да се запишани броеви од видот  $19x$  и  $19y$ . Последното противречи на условот на задачата, бидејќи овие два броја не се заемно прости и ќе бидат запишани на две соседни страни (цртеж лево). За преостанатите од дадените броеви бараното запишување е дадено средниот и десниот цртеж.



28. Определи го бројот на трицифрените броеви, кај кои средната цифра е аритметичка средина на другите две цифри.

A) 12            B) 16            C) 25            D) 34            E) 45

**Решение. E).** Според условот на задачата бараните броеви се од видот  $\overline{abc}$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $\frac{a+c}{2} = b$ , т.е.  $a+c = 2b$ . Според тоа, треба да се определат броевите решенија на равенките

$$\begin{aligned} a+c=2, & \quad a+c=4, & \quad a+c=6, \\ a+c=8, & \quad a+c=10, & \quad a+c=12, \\ a+c=14, & \quad a+c=16, & \quad a+c=18, \end{aligned}$$

при услови  $a \neq 0$ ,  $a, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Лесно се добива дека дадените равенки последователно имаат: 2, 4, 6, 8, 9, 7, 5, 3 и 1 решение. Значи, имаме вкупно  $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$  броеви со саканото својство.

29. Четири броеви се собрани по парови и така се добиени шест зборови. Четирите најмали зборови се 1, 5, 8 и 9. Определи го збирот на почетните четири броја.

A) 10            B) 12            C) 16            D) 17            E) 20

**Решение. D).** Нека броевите се  $x, y, z, u$ . Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека  $x \leq y \leq z \leq u$ . Тогаш добиените зборови се

$$x+y, \quad x+z, \quad x+u, \quad y+z, \quad y+u, \quad z+u.$$

Јасно,

$$\begin{aligned} x+y &\leq x+z \leq y+z \leq y+u \leq z+u, \\ x+y &\leq x+z \leq x+u \leq y+u \leq z+u, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека  $x+u$  и  $y+z$  се двата средни збира. Тоа значи дека  $x+u$  и  $y+z$  се еднакви на 8 и 9, во некој редослед. Според тоа,

$$x+y+z+u = (x+u) + (y+z) = 8+9 = 17.$$

30. Бар-кодот на цртежот е составен од црни и бели ленти кои се наизменично распоредени и секогаш почнува и завршува со црна лента. Секоја лента (бела или црна) е широка 1 или 2. Вкупната ширина на бар-кодот е 12. Колку различни кодови постојат, ако секогаш читаме од лево кон десно?



- A) 24            B) 132            C) 66            D) 12            E) 116

**Решение. Е).** Бидејќи белите и црните ленти на бар-кодот наизменично се менуваат, а секој бар-код започнува и завршува со црна лента, бројот на лентите на еден бар код мора да биде непарен и притоа мора да има повеќе од шест ленти (во спротивно неговата ширина ќе биде помала од 12). Значи, бројот на црните и белите ленти во нашите бар-кодови може да биде:

- 1) 6 црни и 5 бели,
- 2) 5 црни и 4 бели,
- 3) 4 црни и 3 бели.

Во случајот 1) мора да има само една лента со ширина 2 и таа може да биде црна или бела и да е поставена на било кое место. Значи, во овој случај имаме  $6+5=11$  различни бар-кодови.

Во случајот 2) имаме три ленти со ширина 2 и тие може да се: 3 црни, 2 црни, 1 црна или да нема црна лента. Затоа во овој случај бројот бар-кодовите е еднаков на:  $\binom{5}{3}\binom{4}{0} + \binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2} + \binom{5}{0}\binom{4}{3} = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 84$ .

Во случајот 3) имаме пет ленти со ширина 2 и тие може да се: 4 црни и 1 бела, 3 црни и 2 бели, 2 црни и 3 бели. Затоа во овој случај бројот на бар-кодовите е еднаков на:  $\binom{4}{4}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\binom{3}{3} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 21$ .

Значи, вкупно имаме  $11+84+21=116$  бар-кодови од дадениот вид.

## Junior (прва и втора година) 2011

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

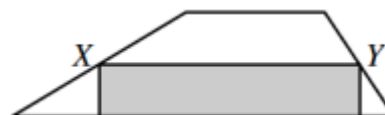
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Пешачки премин (зебра) е составен од бели и црни ленти, секоја широка  $50\text{ cm}$ . Преминот почнува и завршува со бела лента и има 8 бели ленти. Колку е широка улицата?

A)  $7\text{ m}$       B)  $7,5\text{ m}$       C)  $8\text{ m}$       D)  $8,5\text{ m}$       E)  $9\text{ m}$

**Решение. B).** Бидејќи зебрата има 8 бели ленти, а почнува и завршува со бела лента, таа има 7 црни ленти. Значи, зебрата има 15 ленти, па затоа улицата е широка  $15 \cdot 0,5 = 7,5\text{ m}$ .

2. Праваголниот прикажан на цртежит десно има плоштина  $13\text{ cm}^2$ . Точките  $X$  и  $Y$  се средини на краците на трапезот. Колку е плоштината на трапезот?



A)  $24\text{ cm}^2$       B)  $25\text{ cm}^2$       C)  $26\text{ cm}^2$       D)  $27\text{ cm}^2$       E)  $28\text{ cm}^2$

**Решение. C).** Нека  $m = \overline{XY}$ ,  $a$  и  $b$  се должините на основите на трапезот. Отсечката  $XY$  е средна линија на трапезот, па затоа  $\frac{a+b}{2} = m$ . Понатаму, ако висината на правоаголникот е  $h$ , тогаш висината на трапезот е  $2h$ . Конечно, за плоштината на трапезот добиваме  $P = \frac{a+b}{2} \cdot 2h = 2hm = 2 \cdot 13 = 26\text{ cm}^2$ .

3. Дадени се збирите

$$S_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8,$$

$$S_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2,$$

$$S_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7.$$

Кое од следниве тврдења е точно?

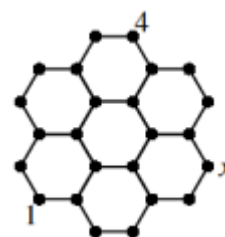
- A)  $S_2 < S_1 < S_3$       B)  $S_1 < S_2 = S_3$       C)  $S_1 < S_2 < S_3$   
 D)  $S_3 < S_2 < S_1$       E)  $S_2 = S_1 < S_3$ .

**Решение. D).** Бидејќи

$$1 \cdot 2 < 2^2 < 2 \cdot 3, \quad 2 \cdot 3 < 3^2 < 3 \cdot 4, \quad 3 \cdot 4 < 4^2 < 4 \cdot 5, \\ 4 \cdot 5 < 5^2 < 5 \cdot 6, \quad 5 \cdot 6 < 6^2 < 6 \cdot 7, \quad 6 \cdot 7 < 7^2 < 7 \cdot 8,$$

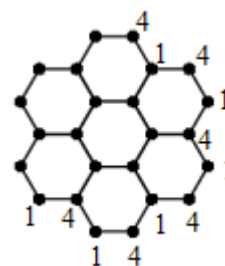
ако ги собереме горните равенства добиваме дека  $S_3 < S_2 < S_1$ .

4. Во секоја крајна точка на отсечките на дадената фигура треба да се запише по еден број, така што збирот на броевите запишани на краевите на секоја отсечка да е еднаков. Два броја се веќе запишани. Кој број треба да е запишан на местото на  $x$ ?



- A) 1      B) 3      C) 4      D) 5      E) нема доволно информации

**Решение. A).** Ако две отсечки имаат заедничка крајна точка, тогаш бидејќи збирите на броевите запишани во крајните точки се еднакви, мора во крајните точки кои не се заеднички за овие две отсечки да е запишан еден ист број. Затоа одејќи во фигурата по искршена линија наизменично се запишуваат броевите 1 и 4. Сега, од цртежот десно добиваме дека на местото на  $x$  треба да се запише бројот 1.



5. При делење на бројот 2011 со некој број е добиен остаток 1011. Кој од следниве броеви е делителот?  
 A) 100      B) 500      C) 1000      D) некој друг број  
 E) не е можно да се добие овој остаток

**Решение. E).** Нека претпоставиме дека  $k$  е делителот на бројот 2011. Тогаш бидејќи остатокот е 1011 важи  $k > 1011$  и постои единствен  $q \in \mathbb{N}$  таков што  $2011 = kq + 1011$ , т.е.  $kq = 1000$ . Значи,  $k \mid 1000$  и  $k > 1011$ , што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека при делење на 2011 со некој број не е можно да се добие остаток 1011.

6. Сите четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4 се запишани во опаѓачки редослед. На кое место по ред се наоѓа бројот 2011?

A) 6-то      B) 7-мо      C) 8-мо      D) 9-то      E) 10-то

**Решение. D).** Четирицифрените броеви чиј збир на цифри е 4 запишани во опаѓачки редослед се: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1021, 1012. Притоа бројот 2011 е на деветто место.

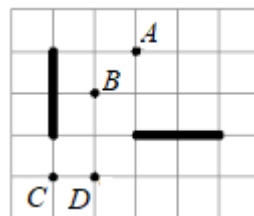
7. Мозаик во форма на правоаголник со плоштина  $360 \text{ cm}^2$  е направен со еднакви квадратни плочки. Мозаикот има должина  $24 \text{ cm}$ , а ширина 5 плочки. Колкава е плоштината на една плочка изразена во сантиметри квадратни?

A) 1      B) 4      C) 9      D) 16      E) 25

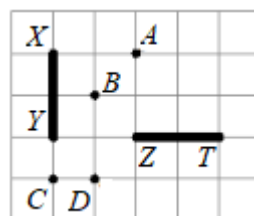
**Решение. C).** Ако  $a$  е должината на страната на плочките, тогаш за плоштината на мозикот добиваме  $P = 24 \cdot 5a = 120a$ . Според тоа,  $120a = 360$ , од каде добиваме  $a = 3 \text{ cm}$ . Конечно, плоштината на една плочка е  $a^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$ .

8. Со ротација една од отсечките, прикажани на цртежот се пресликува во другата отсечка. Кои од означените точки може да се центар на ваква ротација?

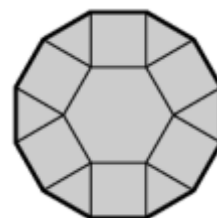
A) само  $A$       B)  $A$  и  $C$       C)  $A$  и  $D$   
D) само  $D$       E)  $A, B, C$  и  $D$



**Решение. C).** Крајните точки на отсечките да ги означиме  $X, Y, Z, T$  (види цртеж десно). Од својствата на ротацијата следува дека отсечката  $XY$  е слика на отсечката  $ZT$  околу центар на ротација  $O$  ако и само ако триаголниците  $OXY$  и  $OZT$  се складни. Сега, од  $\triangle AXO \cong \triangle AZO$ ,  $\triangle BXO \cong \triangle BZO$ ,  $\triangle CXO \cong \triangle CZO$ ,  $\triangle DXO \cong \triangle DZO$  следува дека центри на вакви ротации може да се точките  $A$  и  $D$ .



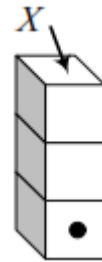
9. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од правилен шестаголник со должина на страна 1, шест квадрати и шест триаголници. Колку е периметарот на оваа фигура?



- A)  $6(1+\sqrt{2})$     B)  $6(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$     C) 12  
 D)  $6+3\sqrt{2}$     E) 9

**Решение. С).** Јасно, триаголниците се рамнокраки со должини на краците 1 агол меѓу нив  $360^\circ - (90^\circ + 120^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$ , што значи дека тие се рамнострани. Според тоа фигурата е дванаесетаголник со страни еднакви на 1, т.е. неговиот периметар е 12.

10. На цртежот се прикажани три стандардни коцки за играње ставени една врз друга. Кај стандардна коцка за играње збирот на бројот на точките на спротивните сидови е еднаков на 7. Збирот на точките на секои два сида кои што се поклопуваат е еднаков на 5. Колку точки има на сидот  $X$  ?



- A) 2    B) 3    C) 4    D) 5    E) 6

**Решение. Е).** Јасно, на сидот на кој лежи долната коцка не може да има 1 или 6 точки. Значи, на овој сид може да има 2, 3, 4 или 5 точки.

Ако на сидот на кој лежи долната коцка има 2 точки, тогаш на горниот нејзин сид има 5 точки, што противречи на условот на задачата.

Ако на сидот на кој лежи долната коцка има 3 точки, тогаш на спротивниот негов сид има 4 точки, па за да збирот на точките на сидовите кои се допираат е 5 треба на долниот сид на средната коцка да има 1 точка. Сега, на горниот сид на средната коцка има 6 точки, што противречи на условот на задачата.

Ако на сидот на кој лежи долната коцка има 4 точки, тогаш на спротивниот нејзин сид има 3 точки, па за да збирот на точките на сидовите кои се допираат е 5 треба на долниот сид на средната коцка да има 2 точки. Сега, на горниот сид на средната коцка има 5 точки, што противречи на условот на задачата.

Ако на сидот на кој лежи долната коцка има 5 точки, тогаш на спротивниот нејзин сид има 2 точки, па за да збирот на точките на сидовите кои се допираат е 5 треба на долниот сид на средната коцка да има 3 точки. Сега, на горниот сид на средната коцка има 4 точки, па затоа на долниот сид на горната коцка има 1 точка. Конечно, на горниот сид на горната точка, т.е. на сидот  $X$  има 6 точки,

11. Во еден месец има 5 понеделници, 5 вторници и 5 среди. Во претходниот месец имало точно 4 недели. Што има следниот месец?

А) точно 4 петоци                      В) точно 4 саботи                      С) 5 недели  
D) 5 понеделници                      Е) не може да се определи

**Решение. В).** Разгледуваниот месец има 31 ден и први во тој месец е во понеделник. Бидејќи последниот ден во претходниот месец е недела и тој месец има 4 недели, заклучуваме дека претходниот месец е февруари. Според тоа, тековниот месец е март и следниот месец е април, кој има 30 дена и 1. април е во четврток. Јасно, во случајов има 5 четвртоци, 5 петоци, 4 саботи, 4 недели, 4 понеделници, 4 вторници и 4 среди. Значи, точен е одговорот В).

12. Михаел, Фернандо и Себастијан учествувале во трка. Одма по стартот, Михаел бил прв, Фернандо втор и Себастијан трет. Во текот на трката Михаел и Фернандо се прстигнувале меѓусебно 9 пати, Фернандо и Себастијан 10 пати, а Михаел и Себастијан 11 пати. Во кој редослед ја завршиле трката?

А) Михаел, Фернандо, Себастијан  
В) Фернандо, Себастијан, Михаел  
С) Себастијан, Михаел, Фернандо  
D) Себастијан, Фернандо, Михаел  
Е) Фернандо, Михаел, Себастијан

**Решение. В).** Ако двајца тркачи парен број си ги променат местата, тогаш трката ќе ја завршат во истиот редослед како на почетокот, а кога непарен број пати ги променуваат местата тие трката ќе ја завршат во обратен редослед.

На почетокот Михаел е пред Фернандо и како 9 пати се прстигнувале, на крајот од трката Фернандо е пред Михаел. Понатаму, бидејќи 11 е непарен број Себастијан е пред Михаел, а како 10 е парен број Фернандо е пред Себастијан. Според тоа, на крајот од трката редоследот е: Фернандо, Себастијан, Михаел.

13. Колку е  $n$  ако  $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$  ?

А) 1005      В) 1006      С) 2010      D) 2011      Е) друг одговор

**Решение. А).** Имаме

$$\begin{aligned}
 9^n + 9^n + 9^n &= 3^{2011}, \\
 3 \cdot 9^n &= 3^{2011}, \\
 3 \cdot (3^2)^n &= 3^{2011}, \\
 3^{2n+1} &= 3^{2011}, \\
 2n+1 &= 2011, \\
 n &= 1005.
 \end{aligned}$$

14. Димитар има два сада во форма на коцки, едниот со внатрешна должина на работ  $a$ , а другиот со внатрешна должина на работ  $a+1$ . Поголемиот сад е полн со вода, а помалиот сад е празен. Димитар го наполнил помалиот сад претурајќи вода од поголемиот сад, по што во поголемиот сад останале 217 литри вода. Колку литри вода собира помалиот сад?

A) 243      B) 512      C) 125      D) 1331      E) 729

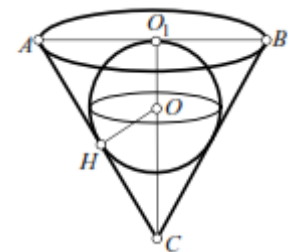
**Решение. B).** Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}
 (a+1)^3 &= a^3 + 217, \\
 a^3 + 3a^2 + 3a + 1 &= a^3 + 217, \\
 a^2 + a - 72 &= 0, \\
 a &= 8 \text{ или } a = -9.
 \end{aligned}$$

Значи, помалиот сад собира  $a^3 = 8^3 = 512 \text{ l}$  вода.

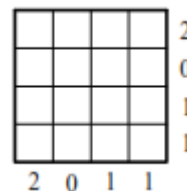
15. Метално топче со радиус 15 е ставено во конусен сад (рамнината на основата на конусниот сад го допира топчето). Оскиниот пресек на конусот е рамностран триаголник. Колкава е висината на конусот?

A)  $30\sqrt{2}$     B)  $25\sqrt{3}$     C) 45    D) 60    E)  $60(\sqrt{3}-1)$



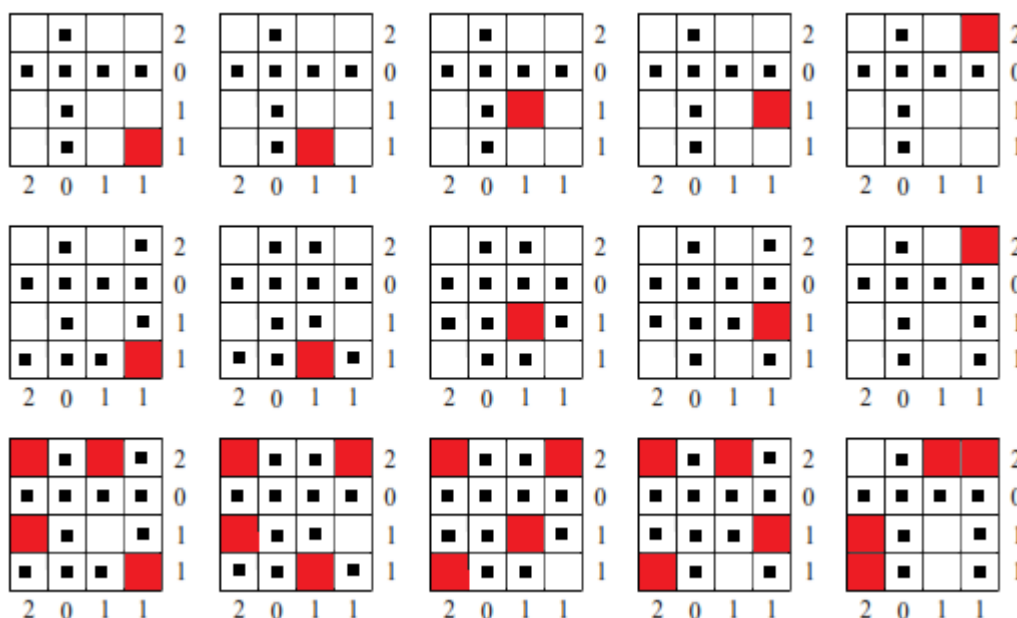
**Решение. C).** Нека  $\triangle ABC$  е оскиниот пресек на конусот. Според условот на задачата тој е рамностран триаголник и неговата рамнина минува низ центарот на топката  $O$  која ја сече во впишаната кружница на триаголникот. Тогаш  $\overline{OO_1} = 15$  и од својствата на рамностраниот триаголник следува  $\overline{OC} = 2\overline{OO_1} = 30$ . Значи,  $\overline{O_1C} = \overline{O_1O} + \overline{OC} = 15 + 30 = 45$ .

16. На табла со димензии  $4 \times 4$  некои полиња мора да бидат обоени со црвена боја. Броевите десно и под таблата покажуваат колку полиња во тој ред или колона мора да се обоени црвено. На колку начини оваа табла може да биде обоена?



- A) 0      B) 1      C) 3      D) 5      E) 9

**Решение. D).** Во првиот ред квадрати со црни точки се означени квадратчињата кои не смее да се бојат (во редот и колоната треба да нема обоени квадратчиња) и црвено е обоено по едно квадратче од ред или колона во која треба да е обоено само една квадратче.



Во вториот ред со црни точки се означени квадратчињата кои понатму не смее да се бојат (во редот и колоната веќе има по едно обоено квадратче).

Во третиот ред дополнително се обоени квадратчињата во редот и колоната во која треба да има по две обоени квадратчиња. Притоа во првите четири квадрати боењата се еднозначни, а додека за петтиот квадрат водиме сметка да не се повтори некое од претходните четири боења,

17. Кој е максималниот број на последователни трицифрени броеви такви што секој од нив има најмалку една непарна цифра?  
 A) 1      B) 10      C) 110      D) 111      E) 221

**Решение. D).** Во последователните броеви кај кои цифрата на стотките е парна нема повеќе од единаесет последователни броеви кои имаат барем една непарна цифра. Понатаму, во последователни броеви кај кои цифрата на стотките е не-

парна цифра имаме 100 последователни броеви со барем една непарна цифра. Ако на овие броеви се додадат 11 последователни броеви кај кои цифрата на стотките е парна цифра и кои имаат барем една непарна цифра, тогаш добиваме дека максималниот број на последователни трицифрени броеви такви што секој од нив има најмалку една непарна цифра е еднаков на 111. Пример за вакви броеви е: 689, 690, 691, ..., 699, 700, 701, 702, ..., 799.

18. Даниел треба да запише цели броеви во единичните полиња на  $3 \times 3$  квадрат, при што збирот на броевите во секој  $2 \times 2$  подквадрат од  $3 \times 3$  квадратот е еднаков на 10. Некои броеви се веќе запишани. Колку е збирот на броевите кои треба да се запишат во празните полиња.

1		0
	2	
4		3

- A) 9      B) 10      C) 11      D) 12      E) 13

**Решение. D).** *Прв начин.* Нека Даниел во празните полиња ги запише броевите  $x, y, z, u$ , како на цртежот десно. Постојат точно четири  $2 \times 2$  квадрати и притоа важи:

$$\begin{cases} x+0+y+2=10, \\ 2+y+z+3=10, \\ z+4+u+2=10, \\ 1+x+2+u=10. \end{cases}$$

1	$x$	0
$u$	2	$y$
4	$z$	3

Ако ги собереме горните равенства, добиваме

$$2(x+y+z+u)+1+2+3+4+3 \cdot 2=40, \text{ т.е. } x+y+z+u=12.$$

*Втор начин.* Со  $x$  да го означиме бројот кој недостасува во првата колона. Ако го искористиме својството на  $2 \times 2$  квадратите, пополнувањето на  $3 \times 3$  квадратот е прикажано на цртежот десно. Тогаш збирот на броевите кои недостасуваат е:

1	$7-x$	0
$x$	2	$x+1$
4	$4-x$	3

$$x+(7-x)+(x+1)+(4-x)=12.$$

19. Симона, која не била добар цртач, сакала да направи мапа на своето село. Таа успеала да нацрта четири улици, нивните раскрсници и куќите на своите пријатели. Улиците Леринска, Воденска и Солунска се прави. Четвртата улица е Прилепска,



која е крива. Кој живее на улицата Прилепска?

А) Анета      В) Бране      С) Кате      Д) Давид

Е) Од скицата на Симона не може да се определи

**Решение. С).** Ако две улици се прави тие може да имаат најмногу една раскрсница. Единствено улицата Прилепска, која е крива може да има по две раскрсници со две други улици. Таква е улицата на која живее Кате, бидејќи истата има две раскрсници со улицата на која живее Бране и две раскрсници со улицата на која живее Анета. Значи, Кате живее на улицата Прилепска.

20. Димитар има бела пластична коцка со должина на работ  $1\text{ dm}$ . Тој залепил повеќе жолти еднакви квадратни налепници, како што е прикажано на цртежот десно. Притоа се покажало дека сите сидови на коцката имаат ист изглед. Колкава е плоштината на жолтиот дел на коцката?



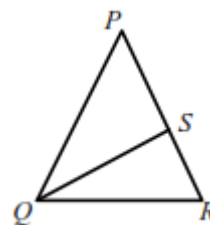
А)  $37,5\text{ cm}^2$       В)  $150\text{ cm}^2$       С)  $225\text{ cm}^2$       Д)  $300\text{ cm}^2$       Е)  $375\text{ cm}^2$

**Решение. С).** Плоштината на жолтиот дел на еден сид на коцката е еднаков на збирот на плоштините на три налепници. Дијагоналата на една налепница е  $d = \frac{a}{2}$  каде  $a$  е должината на работ на коцката. Значи, вкупната плоштина на

жолтиот дел на коцката е  $P = 6 \cdot 3 \cdot \frac{d^2}{2} = 6 \cdot 3 \cdot \frac{(\frac{a}{2})^2}{2} = 9 \cdot (\frac{10}{2})^2 = 225\text{ cm}^2$ .

21. Во триаголникот  $PQR$ ,  $\overline{PQ} = \overline{PR}$ , симетралата на  $\angle PQR$  ја сече страната  $PR$  во точката  $S$  и  $\angle QPR = 48^\circ$ . Колку е мерката на  $\angle QSR$ ?

А)  $60^\circ$       В)  $66^\circ$       С)  $72^\circ$       Д)  $81^\circ$       Е)  $99^\circ$



**Решение. Д).** Триаголникот  $PQR$  е рамнокрак со основа  $QR$ . Од  $\angle QPR = 48^\circ$  за аголот при основата добиваме  $\angle PQR = \angle QRP = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$ . Но,  $QS$  е симетрала на  $\angle PQR$ , па затоа  $\angle SQR = 33^\circ$ . Конечно,

$$\angle QSR = 180^\circ - (\angle SQR + \angle SRQ) = 180^\circ - (66^\circ + 33^\circ) = 81^\circ.$$

22. За петцифрен број  $\overline{abcde}$  велиме дека е *интересен* ако е запишан со различни цифри и ако важи  $a = b + c + d + e$ . Определи го бројот на интересните броеви.  
 А) 72            В) 144            С) 168            D) 216            E) 288

**Решение. С).** Нулата сигурно учествува во записот на интересниот број  $\overline{abcde}$ . Во спротивно  $b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  и не може да е исполнето равенството  $a = b + c + d + e$ . Понатаму,  $b + c + d + e \geq 0 + 1 + 2 + 3 = 6$ , т.е. најмалата вредност на цифрата  $a$  е 6.

Ако  $a = 6$ , тогаш бидејќи 6 може на единствен начин да се запише како збир на четири цифри, т.е. на цифрите 0, 1, 2 и 3, заклучуваме дека секоја пермутација на овие четири цифри дава еден интересен број. Значи, во овој случај имаме  $4! = 24$  интересни броеви.

Ако  $a = 7$ , тогаш заради единственоста на претставувањето на 7 како збир на четири цифри, т.е. на цифрите 0, 1, 2 и 4, заклучуваме дека и во овој случај имаме  $4! = 24$  интересни броеви.

Ако  $a = 8$ , тогаш бидејќи имаме две претставувања на 8 како збир на четири цифри, и тоа на цифрите 0, 1, 2, 5 и на цифрите 0, 1, 3, 4, заклучуваме дека во овој случај имаме  $4! + 4! = 48$  интересни броеви.

Ако  $a = 9$ , тогаш бидејќи имаме три претставувања на 9 како збир на четири цифри, и тоа на цифрите 0, 1, 2, 6, на цифрите 0, 1, 3, 5 и на цифрите 0, 2, 3, 4, заклучуваме дека во овој случај имаме  $4! + 4! + 4! = 72$  интересни броеви.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека имаме  $24 + 24 + 48 + 72 = 168$  интересни броеви.

23. Броевите  $x$  и  $y$  се поголеми од 1. Кој од следниве изрази има најголема вредност:

- А)  $\frac{x}{y+1}$             В)  $\frac{x}{y-1}$             С)  $\frac{2x}{2y+1}$             D)  $\frac{2x}{2y-1}$             E)  $\frac{3x}{3y-1}$

**Решение. В).** Имаме

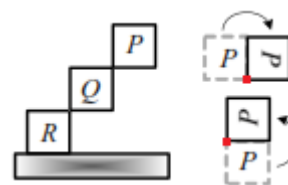
$$\begin{aligned} \frac{x}{y-1} - \frac{2x}{2y-1} &= \frac{2xy - x - 2xy + 2x}{(y-1)(2y-1)} = \frac{x}{(y-1)(2y-1)} > 0, \\ \frac{2x}{2y-1} - \frac{3x}{3y-1} &= \frac{6xy - 2x - 6xy + 3x}{(2y-1)(3y-1)} = \frac{x}{(2y-1)(3y-1)} > 0, \\ \frac{3x}{3y-1} - \frac{2x}{2y+1} &= \frac{6xy + 3x - 6xy + 2x}{(2y+1)(3y-1)} = \frac{5x}{(2y+1)(3y-1)} > 0, \\ \frac{2x}{2y+1} - \frac{x}{y+1} &= \frac{2xy + 2x - 2xy - x}{(2y+1)(y+1)} = \frac{x}{(2y+1)(y+1)} > 0. \end{aligned}$$

Значи,  $\frac{x}{y-1} > \frac{2x}{2y-1} > \frac{3x}{3y-1} > \frac{2x}{2y+1} > \frac{x}{y+1}$ .

24. Сидот  $ABC$  од правилниот тетраедар  $ABCD$  лежи во рамнината  $\sigma$ . Работ  $BC$  лежи на правата  $s$ . Правилните тетраедри  $ABCD$  и  $BCDE$  имаат заеднички сид. Каде правата  $DE$  ја прободува рамнината  $\sigma$  ?
- А) во полурамнината определена со правата  $s$  во која е точката  $A$ , внатре во триаголникот  $ABC$
  - В) во полурамнината определена со правата  $s$  во која е точката  $A$ , надвор од триаголникот  $ABC$
  - С) во полурамнината определена со правата  $s$  во која не е точката  $A$
  - Д) правата  $DE$  е паралелна на рамнината  $\sigma$
  - Е) одговорот зависи од должината на работ на тетраедрите

**Решение. С).** Пресекот на правата  $DE$  и рамнината  $\sigma$  да го означиме со  $G$ . Нека  $F$  е средината на работ  $BC$ . Тогаш  $DF$  е апотема на пирамидата  $ABCD$ , а  $EF$  е апотема на пирамидата  $BCDE$ . Според тоа, рамнината во која лежат точките  $D, E, F$  е нормална на  $BC$ , што значи и на рамнината  $\sigma$ . Точката  $G$  лежи на правата  $DE$ . Бидејќи  $\angle DFA < 90^\circ$ , добиваме дека неговиот суплементен агол  $\angle DEG > 90^\circ$ . Според тоа,  $\angle DGF < 90^\circ$ , а тоа значи дека  $A$  и  $G$  лежат на различни страни од правата  $s$  во рамнината  $\sigma$ .

25. Бојан игра компјутерска игра со квадратчиња почнувајќи од позицијата прикажана на цртежот. Во еден чекор тој може да ротира едно квадратче за  $90^\circ$  (околу црвените темиња како што е прикажано на цртежот).



Тој сака да ги нареди трите квадратчиња во хоризонтален ред. Која од следниве подредувања не може да го добие?

- А)      В)      С)      Д)

Е) може да ги добие сите позиции од А до Д

**Решение. В).** Со непосредна проверка се добива дека може да се добијат подредувањата А, С и Д. Меѓутоа подредувањето В не може да се добие. Зошто?

26. Колку подредени парови природни броеви  $(x, y)$  ја задоволуваат равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**Решение. D).** Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\frac{y+x}{xy} = \frac{1}{3},$$

$$3x + 3y = xy,$$

$$xy - 3x - 3y + 9 = 9,$$

$$(x-3)(y-3) = 9.$$

Бидејќи  $x, y \in \mathbb{N}$ , важи  $x-3, y-3 \in \mathbb{Z}$ , па од последната равенка ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} x-3=1 \\ y-3=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=3 \\ y-3=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=9 \\ y-3=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-1 \\ y-3=-9 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-3 \\ y-3=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-9 \\ y-3=-1 \end{cases}$$

Последните три системи немаат решенија во множеството природни броеви, а од првите три системи ги добиваме решенијата

$$(x, y) = (4, 12), (x, y) = (6, 6) \text{ и } (x, y) = (12, 4).$$

27. За секој природен број  $n \geq 2$  со  $\langle n \rangle$  да го означиме најголемиот прост број кој е помал или еднаков на  $n$ . Колку решенија има во множеството природни броеви равенката  $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$ ?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) повеќе од 3

**Решение. B).** Ако  $k=1$ , тогаш

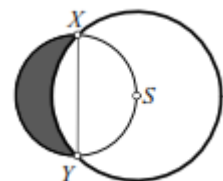
$$\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 1+1 \rangle + \langle 1+2 \rangle = 2+3=5 = \langle 2k+3 \rangle.$$

Значи, решение на дадената равенка е  $k=1$ . Ако  $k \geq 2$ , тогаш

$$\langle k+1 \rangle \geq 3, \langle k+2 \rangle \geq 3, \langle 2k+3 \rangle \geq 3,$$

од каде следува дека  $\langle k+1 \rangle, \langle k+2 \rangle, \langle 2k+3 \rangle$  се непарни броеви. Последното значи дека равенката  $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$  нема решенија за кои  $k \geq 2$ .

28. Дадени се две кружници како на цртежот десно. Поголемата кружница има центар  $S$  и радиус  $r$ , а отсечката  $XU$  е дија-



метар на помалата кружница. Колкава е плоштината на осенчениот дел на цртежот?

- A)  $\frac{\pi r^2}{6}$       B)  $\frac{\pi r^2 \sqrt{3}}{12}$       C)  $\frac{r^2}{2}$       D)  $\frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$       E) друг одговор

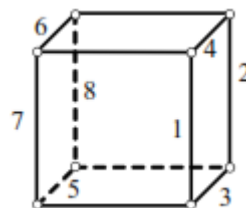
**Решение. C).** Од Талесовата теорема следува дека триаголникот  $XYS$  е правоаголен, па затоа важи  $\overline{XY} = r\sqrt{2}$ . Според тоа, отсечката  $XY$  е страна на квадратот впишан во поголемата кружница. Затоа плоштината на помалиот отсечок од големиот круг соодветен на тетивата  $XY$  е еднаква на  $\frac{\pi r^2 - 2r^2}{4}$ . За плоштината на осенчениот дел добиваме  $\frac{1}{2} \pi \left(\frac{\overline{XY}}{2}\right)^2 - \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4} = \frac{r^2}{2}$ .

29. Колку множества од четири раба од една коцка имаат својство, било кои два раба од тоа множество немаат заедничка точка?

- A) 6      B) 8      C) 9      D) 12      E) 18

**Решение. C).** Јасно, рабовите кои припаѓаат на едно такво множество припаѓаат на пар спротивни ѕидови на коцката.

Да земеме два спротивни зида на коцката и нивните рабови да ги означиме со 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (види цртеж). Лесно се гледа дека имаме четири множества кои ги задоволуваат



условите на задачата:  $\{1, 2, 7, 8\}$ ,  $\{1, 2, 5, 6\}$ ,  $\{3, 4, 7, 8\}$ ,  $\{3, 4, 5, 6\}$ . Меѓутоа, множествата  $\{1, 2, 7, 8\}$  и  $\{3, 4, 5, 6\}$  ќе се појават во уште два други пара спротивни ѕидови, за секој пар по едно множество. Затоа, вкупниот број множества со саканото својство е  $3 \cdot 4 - \frac{1}{2}(2 + 2 + 2) = 9$ .

30. За кои вредности на  $n$ ,  $0 < n < 9$  може да се обојат неколку единечни квадрати во квадрат  $5 \times 5$  така што секој  $3 \times 3$  квадрат содржи точно  $n$  обоени единечни квадратчиња.

- A) 1      B) 1 и 2      C) 1, 2 и 3      D) 1, 2, 7 и 8

E) сите вредности на  $n$  од 1 до 8

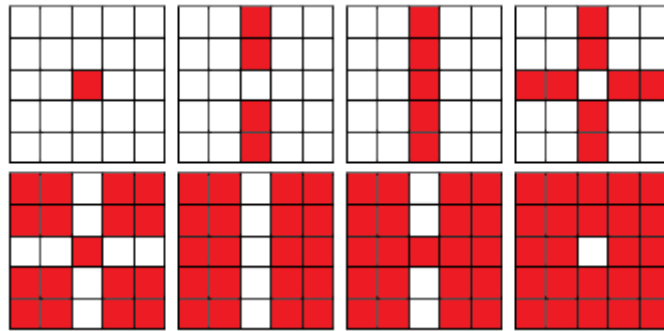
**Решение. E).** Во квадрат  $5 \times 5$  секој  $3 \times 3$  го содржи централното квадратче, па затоа за  $n = 1$  доволно е да го обоиме само централното квадратче.

Понатаму, секој  $3 \times 3$  квадрат содржи по 3 квадратчиња од средната колона (средниот ред), па затоа за  $n = 2$  доволно е да ја обоиме средната колона без централното квадратче.

Јасно, за  $n = 3$  доволно е да ја обоиме средната колона.

Сега, ако ги обоиме средната колона и средниот ред, без централното квадратче, тогаш секој  $3 \times 3$  квадрат ќе содржи по 2 обоени полиња од средната колона и средниот ред, т.е. вкупно  $n = 4$ .

На крајот за  $n = 5, 6, 7, 8$  треба да ги направиме спротивните боење кои ги направивме за  $k = 1, 2, 3, 4$ , соодветно.



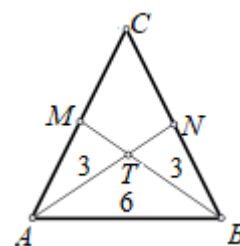
## Junior (прва и втора година) 2012

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Точките  $M$  и  $N$  се средини на краците на триаголникот  $ABC$ ,  $\overline{AC} = \overline{BC}$ . На цртежот се означени плоштините на трите триаголници. Колку е плоштината на четириаголникот  $MTNC$ ?



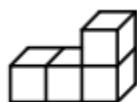
- A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

**Решение. D).** Плоштината на триаголникот  $ABC$  е два пати поголема од плоштината на триаголникот  $ABN$  (Зошто?). Значи, плоштината на триаголникот  $ABC$  е еднаква на  $2 \cdot (6 + 3) = 18$ . Според тоа, плоштината на четириаголникот  $MTNC$  е еднаква на  $18 - (3 + 6 + 3) = 6$ .

2. Пресметај ја вредноста на изразот  $11,11 - 1,111$ ?
- A) 9,009      B) 9,0909      C) 9,99      D) 9,999      E) 10

**Решение. D).** Имаме  $11,11 - 1,111 = 9,999$ .

3. Паралелопипедот на цртежот десно е составен од три дела. Секој дел е составен од 4 истобојни коцки. Како изгледа белиот дел?



A)



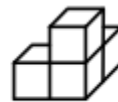
B)



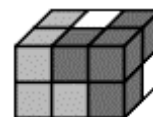
C)



D)



E)



**Решение. D).** Трите коцки во долниот заден ред се бели и бела е средната коцка во горниот заден ред. Тоа е делот D.

4. Кога Ана сака да и испрати порака на Јана, таа користи шифра:

-  $A = 01, B = 02, C = 03, D = 04, \dots, Z = 26,$

- по претворањето на секоја буква во број, таа го множи бројот со 2 и додава 9.

Така пораката е претворена во низа броеви. Денес Јана примила порака 25-19-45-38 и ја дешифрирала. Која била почетната порака?

A) HERO      B) HELP      C) HEAR      D) HERS

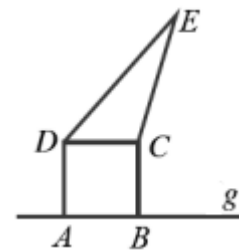
E) Ана направила грешка

**Решение. E).** Бидејќи секој од броевите од 1 до 26 се множи со 2 и се додава бројот 9, секоја буква се заменува со непарен број. Но, пораката која ја примила Јана го содржи бројот 38 кој е парен број, што значи дека Ана направила грешка.

5. Должината на страната на квадратот  $ABCD$  е  $4\text{ cm}$ , и тој има еднаква плоштина со триаголникот  $DCE$  (види цртеж). Колкаво е растојанието од точката  $E$  до правата  $g$ ?

A)  $8\text{ cm}$     B)  $4 + 2\sqrt{3}\text{ cm}$     C)  $12\text{ cm}$     D)  $10\sqrt{2}\text{ cm}$

E) зависи од положбата на точката  $E$



**Решение. C).** Со  $h$  да ја означиме висината на триаголникот соодветна на страната  $DC$ . Тогаш  $\frac{4h}{2} = 4^2$ , од каде добиваме  $h = 8$ . Конечно,  $g = h + 4 = 12$ .

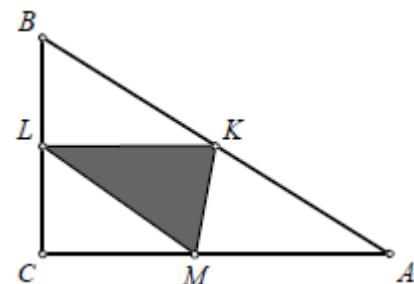
6. Ако ги собереме цифрите на еден седумцифрен број добиваме збир 6. Колку е производот на неговите цифри?

A) 0      B) 6      C) 7      D) 7!      E) 5

**Решение. A).** Бројот 6 може да се претстави како збир на најмногу шест ненулни едноцифрени броеви, при што  $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ . Тоа значи дека барем една од цифрите на седумцифрениот број мора да е еднаква на 0, па затоа производот на неговите цифри е еднаков на 0.

7. Катетите на правоаголниот триаголник  $ABC$  имаат должини 6 и 8, а точките  $K, L, M$  се средини на неговите страни. Колку е периметарот на триаголникот  $KLM$ ?

A) 20      B) 12      C) 5      D) 6      E) 24



**Решение. В).** Хипотенузата на триаголникот е 12. Отсечките  $KL, LM, MK$  се средни линии на триаголникот  $KLM$ , што значи дека нивните должини се еднакви на половина од должините на соодветните на нив страни, т.е. 3, 4, 5, во некој редослед. Значи, периметарот на триаголникот  $KLM$  е еднаков на  $3+4+5=12$ .

8. Во четири од дадените бројни изрази бројот 8 може да се замени со друг позитивен број и се добива иста бројна вредност. Кој од дадените бројни изрази го нема ова својство?

- A)  $(8+8-8):8$       B)  $8+(8:8)-8$       C)  $8:(8+8+8)$   
 D)  $8-(8:8)+8$       E)  $8\cdot(8:8):8$

**Решение. D).** Ако  $a \neq 0$ , тогаш:

$$\begin{aligned}(a+a-a):a &= a:a=1, \\ a+(a:a)-a &= a+a-1=1, \\ a:(a+a+a) &= a:(3a)=1:3, \\ a-(a:a)+a &= a-1+a=2a-1, \\ a\cdot(a:a):a &= a\cdot 1:a=a:a=1.\end{aligned}$$

Значи вредноста на изразот зависи од  $a$  само во четвртиот случај.

9. Должините на две страни на еден четириаголник се 1 и 4. Една негова дијагонала има должина 2 и го дели четириаголникот на два рамнокраки триаголника. Колку е периметарот на овој четириаголник?

- A) 8      B) 9      C) 10      D) 11      E) 12

**Решение. D).** Четириаголникот не може да има две страни со должина 1, бидејќи тогаш од тоа што дијагоналата со должина 2 го дели на два рамнокраки триаголници и од од неравенството на триаголник ќе следува  $2 < 1+1$ , што е противречност. Исто така, четириаголникот не може да има само една страна со должина 4, бидејќи тогаш од слични причини како погоре ќе следува  $4 < 2+2$ . Значи, четириаголникот има две страни со должини 4, една страна со должина 1 и една страна со должина 2. Неговиот периметар е еднаков на  $4+4+2+1=11$ .

10. При делење со еден ист број броевите 144 и 200 даваат остаток 11. Кој е тој број?

- A) 7      B) 11      C) 15      D) 19      E) 38

**Решение. Д).** Ако од броевите 144 и 220 одземеме 11 ги добиваме броевите 133 и 209. Најголемиот заеднички делител на овие два броја е

$$\text{НЗД}(133, 209) = \text{НЗД}(133, 76) = \text{НЗД}(76, 57) = \text{НЗД}(57, 19) = 19$$

и тоа е бараниот делител на двата броја при што се добива остаток 11.

11. Ана и Јана фрлаат паричка. Ако на паричката падне писмо победник е Јана и Ана треба да и даден 2 бомбона, а ако падне грб победник е Ана и Јана треба да и даде 3 бомбони. По триесет фрлања секоја од нив има еднаков број бомбони како на почетокот на играта. Во колку фрлања победила Ана?

A) 6      B) 12      C) 18      D) 24      E) 30

**Решение. В).** Нека  $a$  е бројот на победите на Ана. Тогаш  $30 - a$  е бројот на победите на Јана. Бидејќи по 30 фрлања секое девојче има еднаков број бомбони како на почетокот на играта добиваме  $3a = 2(30 - a)$ , од каде добиваме  $a = 12$ . Значи, Ана победила 12 пати.

12. Ако Ангел се качи на масата, а Милан стои на подот, тогаш Ангел ќе биде повисок 80 cm од Милан, а ако ги заменат местата тогаш Милан ќе биде 1 m повисок од Ангел. Колку е висока масата?

A) 20 cm      B) 80 cm      C) 90 cm

D) 100 cm      E) 120 cm



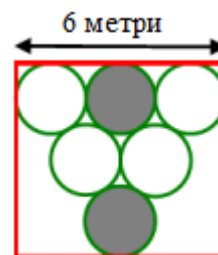
**Решение. С).** Со  $a, m$  и  $x$  да ги означиме височините на Ангел, Милан и масата, соодветно. Тогаш  $a + x = m + 80$  и  $m + x = a + 100$ . Ако ги собереме последните равенки добиваме  $a + m + 2x = a + m + 180$ , т.е.  $x = 90$  cm.

13. Во правоаголник со основа  $6 m$  е впишан „рамностран триаголник“ составен со допирање на шест кругови (види цртеж). Колку е најкраткото растојание меѓу сивите кругови?

A)  $1 m$       B)  $\sqrt{2} m$       C)  $2\sqrt{3} - 2 m$       D)  $\frac{\pi}{2} m$       E)  $2 m$

**Решение. С).** Дијаметарот на секој круг е еднаков на

$6 : 3 = 2 m$ , па затоа неговиот радиус е  $1 m$ . Центрите на двата најгорни бели кругови и на долниот сив круг се темиња на рамностран триаголник. Значи, должи-



ната на страната на овој триаголник е  $4m$ . Неговата висина е еднаква на  $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}m$ , што значи дека најкраткото растојание меѓу сивите кругови е еднакво на  $2\sqrt{3} - 2m$ .

14. Во сабата на Борјан на секој од четирите сида има по еден часовник и ниту еден часовник не покажува точно време. Првиот часовник отстапува 2 минути, вториот часовник отстапува 3 минути, третиот 4 минути и четвртиот 5 минути. Еден ден Борјан сакајќи да го знае точното време на неговите часовници го видел следново: 6 минути пред 3 часот, 3 минути пред 3 часот, 3 часот и 2 минути и 3 часот и 3 минути. Колку е точното време?

A) 3:00      B) 2:57      C) 2:58      D) 2:59      E) 3:01

**Решение. D).** Ако точното време е 3:00, тогаш нема да има часовник кој побрзува или заостанува 5 минути.

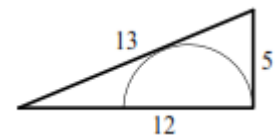
Ако точното време е 2:57, тогаш еден од часовниците ќе покажува точно време, што е противречност.

Ако точното време е 2:58, тогаш еден од часовниците покажува време кое се разликува за 1 минута, а таков часовник нема.

Ако точното време е 3:01, тогаш еден од часовниците покажува време кое се разликува за 1 минута, а таков часовник нема.

Ако точното време е 2:59, тогаш се исполнети сите услови на задачата. Значи, точното време е 2:59.

15. Должините на страните на правоаголниот триаголник на цртежот се 5, 12 и 13. Определи ја должината на радиусот на полукругот впишан во него.



A)  $\frac{7}{3}$       B)  $\frac{10}{3}$       C)  $\frac{12}{3}$       D)  $\frac{13}{3}$       E)  $\frac{17}{3}$

**Решение. B).** Ако го надополниме триаголникот со триаголникот кој е симетричен на катетата со должина 12, тогаш добиваме рамнокрак триаголник со основа 10 и висина 12. Плоштината на овој триаголник е  $P = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60$ . Ако

$r$  е радиусот на впишаната кружница, тогаш  $P = \frac{(13+13+10)r}{2} = 18r$ .

Според тоа,  $18r = 60$ , од каде следува  $r = \frac{10}{3}$ .

16. Цифрата на стотките на еден четирицифрен број е 3. Збирот на преостанатите три цифри исто така е 3. Колку такви броеви постојат?

A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**Решение. Е).** Бидејќи  $3 = 3 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1$ , тоа се броевите 3300, 2310, 2301, 1302, 1320 и 1311. Значи, постојат 6 броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

17. Во полињата на правоаголната шема прикажана на цртежот десно се запишани едноцифрени броеви така што збиравите на броевите во трите реда се еднакви и збиравите на броевите во четирите колони се еднакви. Кој број е запишан во сивото поле?

2	4		2
	3	3	
6		1	

A) 1      B) 4      C) 6      D) 8      E) 9

**Решение. В).** При ознаки како на цртежот десно имаме

$$2 + 4 + a + 2 = 6 + d + 1 + e \text{ и } 4 + 3 + d = a + 3 + 1,$$

односно  $8 + a = 7 + d + e$  и  $a = d + 3$ . Ако од втората равенка замениме во првата добиваме  $8 + d + 3 = 7 + d + e$ , т.е.  $e = 4$ .

2	4	$a$	2
$b$	3	3	$c$
6	$d$	1	$e$

18. Три спортисти Миле, Симо и Иво учествувале во маратон. Пред почетокот четири гледачи разговарале за нивниот пласман во трката.

Првиот гледач рекол: *Ќе победи Миле или Симо.*

Вториот гледач рекол: *Ако Симо е втор, ќе победи Иво.*

Третиот гледач рекол: *Ако Симо е трет, Миле нема да победи.*

Четвртиот гледач рекол: *Симо или Иво ќе биде втор.*

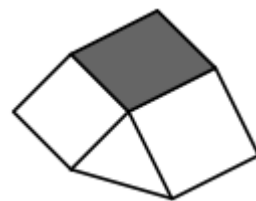
По завршувањето на трката се покажало дека сите четворица гледачи биле во право. Во кој редослед Миле, Симо и Иво ја завршиле трката?

A) Миле, Симо, Иво      B) Миле, Иво, Симо      C) Иво, Симо, Миле  
D) Симо, Иво, Миле,      E) Симо, Миле, Иво

**Решение. D).** Ако е точен редоследот A), тогаш вториот гледач не е во право. Ако е точен редоследот B), тогаш третиот гледач не е во право. Ако е точен редоследот C), тогаш првиот гледач не е во право. Ако е точен редоследот E),

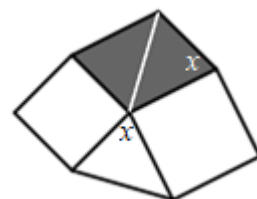
тогаш четвртиот гледач не е во право. Во случај на редоследот D) сите гледачи се во право и тоа е бараниот редослед.

19. На цртежот десно е даден фигура составена од два квадрати со страни  $4\text{ cm}$  и  $5\text{ cm}$ , триаголник со плоштина  $8\text{ cm}^2$  и обоен паралелограм. Колку е плоштината на паралелограмот?



- A)  $15\text{ cm}^2$       B)  $16\text{ cm}^2$       C)  $18\text{ cm}^2$       D)  $20\text{ cm}^2$       E)  $21\text{ cm}^2$

**Решение. B).** Дијагоналата на паралелограмот на цртежот десно го дели на два складни триаголника со должини на страни  $4\text{ cm}$  и  $5\text{ cm}$ , а аголот меѓу нив е еднаков на  $x$ .



Вториот агол на паралелограмот е еднаков на  $180^\circ - x$ , па затоа аголот на триаголникот меѓу страните на двата квадрати е еднаков на  $360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 180^\circ - x) = x$ . Според тоа, дадениот триаголник е складен со два триаголници на кои го поделивме паралелограмот, па затоа плоштината на паралелограмот е  $P = 2 \cdot 8 = 16\text{ cm}^2$

20. Ана го запишала бројот 2012 како  $2012 = m^m(m^k - k)$  за некои природни броеви  $m$  и  $k$ . Колку е  $k$ ?
- A) 2      B) 3      C) 4      D) 9      E) 11

**Решение. D).** Имаме,  $2012 = 2^2 \cdot 503 = 2^2(2^9 - 9)$ , од каде добиваме  $k = 9$ .

21. Златар има 12 делови од по 2 поврзани алки од еден синџир (види цртеж) и сака да направи еден затворен синџир. Кој е најмалиот број алки што треба да ги отвори златарот за да го направи синџирот?



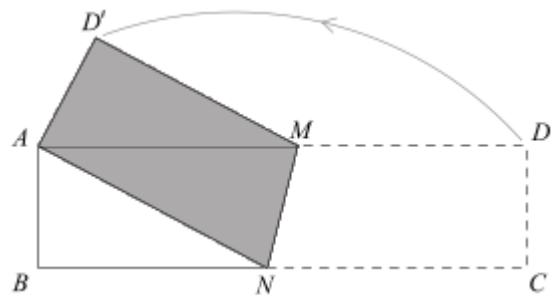
- A) 8      B) 9      C) 10      D) 11      E) 12

**Решение. A).** Ако златарот отвори еден дел составен од 2 алки тој може да поврзе три од дадените 12 делови. Така ќе добие синџир составен од  $4 \cdot 2 = 8$

алки и ќе му останат уште 8 делови. Потоа, ако отвори уште еден дел составен од 2 алки, тој може да го поврзе синцирот од 8 алки и уште 2 од расположливите делови. На тој начин златарот ќе добие синцир од  $8+3\cdot 2=14$  алки и ќе му останат уште 5 делови. Сега, ако отвори уште еден дел составен од 2 алки, тој може да го поврзе синцирот составен од 14 алки и уште 2 од расположливите делови. Така, тој ќе добие синцир од  $14+3\cdot 2=20$  алки и ќе му останат уште 2 од расположливите делови. На крајот, ако отвори уште еден дел составен од 2 алки, тој со едната алка го поврзува синцирот составен од 20 алки со последниот расположлив дел, а со другата алка го затвора синцирот. На овој начин добивме дела со 8 алки златарот може да го состави синцирот.

Ова е најмалиот можен број алки што треба да се отворат, бидејќи најмал број поврзувања се добива ако меѓусебно се поврзуваат цели делови составени од по 2 алки.

22. Хартија  $ABCD$  во облик на правоаголник со страни  $4\text{ cm}$  и  $16\text{ cm}$  е превиткана преку права  $MN$  така да темето  $C$  се совпадне со темето  $A$  (види цртеж). Колкава е плоштината на пентаголот  $ABNMD'$ ?



- A)  $17\text{ cm}^2$       B)  $27\text{ cm}^2$       C)  $37\text{ cm}^2$       D)  $47\text{ cm}^2$       E)  $57\text{ cm}^2$

**Решение. D).** Ако  $\overline{BN} = x$ , тогаш  $\overline{CN} = \overline{NA} = 16 - x$ . Сега од Питагоровата теорема применета на  $\triangle ABN$  имаме  $4^2 + x^2 = (16 - x)^2$ , од каде добиваме  $\overline{BN} = x = 7,5\text{ cm}$  и  $\overline{CN} = 16 - x = 8,5\text{ cm}$ . Понатаму, правата  $AN$  е трансферзала на паралелните прави  $BC$  и  $AD$ , па затоа  $\angle BNA = \angle NAM$ . Исто така, правата  $AD$  е трансферзала на паралелните прави  $AN$  и  $MD'$ , па затоа  $\angle AMD' = \angle NAM$ . Сега,  $\triangle ABN$  и  $\triangle AD'M$  се правоаголници, имаат еднаков остар агол и една еднаква катета  $\overline{AB} = \overline{AD'}$  и од признакот АСА следува дека тие се складни. Од оваа складност следува  $\overline{AM} = \overline{AN} = 8,5\text{ cm}$ . Според тоа,

$$\begin{aligned} P_{ABNMD'} &= P_{ABN} + P_{ANM} + P_{AMD'} = 2P_{ABN} + P_{ANM} \\ &= 2 \cdot \frac{7,5 \cdot 4}{2} + \frac{8,5 \cdot 4}{2} = 30 + 17 = 47\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

23. Воз со должина  $A$  минува покрај даден знак за 8 секунди, по што се разминува со воз со должина  $B$  за 9 секунди, кој пак минува покрај знакот за 12 секунди. Што може да се заклучи за должините на возовите?

A)  $A = 2B$     B)  $A = B$     C)  $2B = 3A$     D)  $B = 2A$     E) друг одговор

**Решение. А).** Брзината на првиот воз е  $\frac{A}{8}$ , а брзината на вториот воз е  $\frac{B}{12}$ , па разминување на двата воза можеме да го поистоветиме како движење на материјална точка која поминува пат со должина  $A+B$  со брзина  $\frac{A}{8} + \frac{B}{12}$ . Но времето на разминување на возовите е 9 секунди, па затоа брзината на материјалната точка е  $\frac{A+B}{9}$ . Значи,  $\frac{A}{8} + \frac{B}{12} = \frac{A+B}{9}$ , од каде добоваме  $9A + 6B = 8A + 8B$ , односно  $A = 2B$ .

24. Која е последната ненулта цифра во декадниот запис на бројот  $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ ?
- A) 1    B) 2    C) 4    D) 6    E) 9

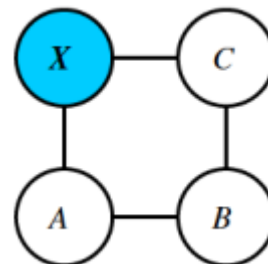
**Решение. С).** Имаме

$$2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53} = (2 \cdot 5)^{53} \cdot 2^6 \cdot 3^4 = 10^{53} \cdot 64 \cdot 81,$$

од каде следува дека последната ненулта цифра е еднаква на цифрата на единиците на производот  $64 \cdot 81$ , а тоа е 4.

25. Еден кенгур може да скока само во соседни кругчиња кои се поврзани со линии. Тој тргнува од полето  $C$  и ако дојде во полето  $X$  тој престанува да скока. На колку начини може да стигне од  $C$  во  $X$  со точно 13 скока?

A) 12    B) 32    C) 64    D) 144    E) 1024



**Решение. С).** Јасно првиот скок кенгурот може да го направи само од  $C$  во  $B$ . Понатаму, тој може да се врати во  $C$  или да продолжи во  $A$ . Притоа, за да стигне во  $X$ , тој треба да направи  $x$  скокови од  $B$  во  $C$  и  $y$  скокови од  $B$  во  $A$ , при што важи  $x + y = 6$ . Според тоа, секоја низа од 6 знаци  $x$  и  $y$  определува точно еден начин на кој кенгурот може да стигне од  $C$  во  $X$  со точно 13 скока. Притоа за секој од шести знаци имаме по 2 можности, па од принципот на производ следува дека  $C$  во  $X$  со точно 13 скока може да се стигне на  $2^6 = 64$  начини.

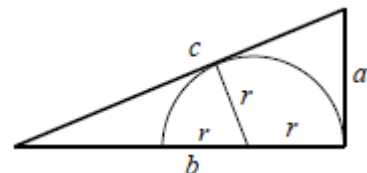
26. Дадени се шест различни природни броеви, од кои најголемиот е  $n$ . Постои само еден пар од овие броеви таков што помалиот број не е делител на поголемиот број. Која е најмалата можна вредност на  $n$ ?

A) 18            B) 20            C) 24            D) 36            E) 45

**Решение. C).** Од условот на задачата следува дека  $n \geq 6$  и бројот  $n$  мора да има најмалку четири различни делители кои се помали од  $n$ . Според тоа,  $n$  не може да е прост број.

- Бројот 9 има два различни делители кои се помали од 9, па затоа  $n \neq 9$ ,
- За бројот 16 делители помали од него се 1, 2, 4 и 8, па мора сите да се меѓу избраните шест броја. Но, тогаш не е можно да го избереме шестиот број (Зошто?), па затоа  $n \neq 16$ .
- Бројот 8, има три различни делители кои се помали од бројот 8, а истото важи и за броевите 10, 14, 15 и 22, па затоа овие броеви отпаѓаат,
- За бројот 12 различни делители помали од 12 се 1, 2, 3, 4 и 6, па затоа мора точно четири или сите пет да се меѓу избраните броеви. Ако точно четири се меѓу избраните броеви, тогаш шестиот избран број мора да е некој од броевите 5, 7, 8, 9, 10 или 11, што не е можно (Зошто?). Ако се избрани сите пет броеви, тогаш бидејќи 3 не е делител на 4 и 4 не е делител на 6, следува  $n \neq 12$ .
- За бројот 18 делители помали од него се 1, 2, 3, 6 и 9, па мора точно четири или сите пет да се меѓу избраните броеви. Аналогно како за бројот 12 се покажува дека ова не е можно, па затоа  $n \neq 18$ . Провери!
- За бројот 20 делители помали од него се 1, 2, 4, 5 и 10, па мора точно четири или сите пет да се меѓу избраните броеви. Аналогно како за бројот 12 се покажува дека ова не е можно, па затоа  $n \neq 20$ . Провери!
- За бројот 24 делители помали од него се 1, 2, 3, 4, 6, 8 и 12. Сега лесно се гледа дека броевите 1, 2, 4, 6, 12 и 24 го задоволуваат условот на задачата, бидејќи само за парот 4 и 6 не важи дека помалиот број е делител на поголемиот број.

27. Даден е правоаглен триаголник со должини на страни  $a, b, c$  (цртеж десно). Колку е радиусот  $r$  на впишаниот полукруг?



- A)  $\frac{a(c-a)}{2b}$       B)  $\frac{ab}{a+b+c}$       C)  $\frac{ab}{b+c}$       D)  $\frac{2ab}{a+b+c}$       E)  $\frac{ab}{a+c}$

**Решение. Е).** Страните со должини  $a$  и  $c$  се тангенти на полуокружот, па затоа соодветните тангентни отсечки имаат должина  $a$ . Сега, за плоштината на триаголникот добиваме  $P = \frac{ab}{2}$  и  $P = \frac{2ar}{2} + \frac{(c-a)r}{2}$ , па затоа  $\frac{ab}{2} = \frac{2ar}{2} + \frac{(c-a)r}{2}$ , од каде добиваме  $r = \frac{ab}{a+c}$ .

28. Павел ги запишал сите трицифрени броеви и за секој од нив поединечно го пресметал производот на неговите цифри. Потоа го пресметал збирот на вака добиените производи. Кој збир го добил Павел?

- A) 45      B)  $45^2$       C)  $45^3$       D)  $2^{45}$       E)  $3^{45}$

**Решение. С).** Производот на цифрите на трицифрениот број кај кој цифрата на десетките или цифрата на стотките е 0 е еднаков на 0. Овие броеви не влијаат на збирот кој го добил Павел.

Ако ги разгледаме броевите од втората стотка, тогаш:

1) збирот на производите на цифрите на броевите 111, 112, 113, ..., 118, 119 е еднаков на  $1+2+\dots+8+9=45$ ,

2) збирот на производите на цифрите на броевите 121, 122, 123, ..., 128, 129 е еднаков на  $2 \cdot (1+2+\dots+8+9) = 2 \cdot 45$ ,

.....

9) збирот на производите на цифрите на броевите 191, 192, 193, ..., 198, 199 е еднаков на  $9 \cdot (1+2+\dots+8+9) = 9 \cdot 45$ .

Според тоа, збирот на производите на цифрите на броевите од втората стотка е

$$45 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + \dots + 9 \cdot 45 = 45 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 45^2.$$

Слично се добива дека збирот на производите на цифрите на броевите од третата стотка е  $2 \cdot 45^2$ , од четвртата стотка е  $3 \cdot 45^2$  итн. од последната стотка е  $9 \cdot 45^2$ . Според тоа, Павел го добил збирот

$$45^2 + 2 \cdot 45^2 + 3 \cdot 45^2 + \dots + 9 \cdot 45^2 = 45^2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 45^3.$$

29. Броевите од 1 до 120 се запишани во 15 реда, како што е прикажано во долната табела. Во која колона (левата колона ја сметаме за прва) збирот на броевите е најголем?

1							...	
2	3						...	
4	5	6					...	
7	8	9	10				...	
11	12	13	14	15			...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
106	107	108	109	110	111	112	...	120

- A) 1-ва      B) 5-та      C) 7-ма      D) 10-та      E) 13-та

**Решение. B).** Броевите по колони се:

- прва колона: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92 и 106, а нивниот збир е 575,
- втора колона: 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, 57, 68, 80, 93 и 107, а нивниот збир е 588,
- трета колона: 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, 48, 58, 69, 81, 94 и 108, а нивниот збир е 598,
- четврта колона: 10, 14, 19, 25, 32, 40, 49, 59, 70, 82, 95 и 109, а нивниот збир е 604,
- петта колона: 15, 20, 26, 33, 41, 50, 60, 71, 83, 96 и 110, а нивниот збир е 605,
- шеста колона: 21, 27, 34, 42, 51, 61, 72, 84, 97 и 111, а нивниот збир е 600,
- седма колона: 28, 35, 43, 52, 62, 73, 85, 98 и 112, а нивниот збир е 588,
- осма колона: 36, 44, 53, 63, 74, 86, 99 и 113, а нивниот збир е 568,
- деветта колона: 45, 54, 64, 75, 87, 100 и 114, а нивниот збир е 539,
- десетта колона: 55, 65, 76, 88, 101 и 115, а нивниот збир е 500,
- единаесетта колона: 66, 77, 89, 102 и 116, а нивниот збир е 450,
- дванаесетта колона: 78, 90, 103 и 117, а нивниот збир е 388,
- тринаесетта колона: 91, 104 и 118, а нивниот збир е 313,
- четиринаесетта колона: 105 и 119, а нивниот збир е 224,
- петнаесетта колон: 120 и збирот е 120.

Конечно, најголем збир имаат броевите запишани во 5-тата колона.

30. Нека  $A, B, C, D, E, F, G, H$  се осум поделователни темиња на конвексен осум-аголник. Избираме теме меѓу  $C, D, E, F, G, H$  и повлекуваме отсечка меѓу него и темето  $A$ , а потоа повторно избираме теме меѓу темињата  $C, D, E, F, G, H$  и повлекуваме отсечка меѓу него и темето  $B$ . Колкава е веројатноста дека осум-аголникот е поделен со овие две отсечки на точно три области?

- A)  $\frac{1}{6}$       B)  $\frac{1}{4}$       C)  $\frac{4}{9}$       D)  $\frac{5}{18}$       E)  $\frac{1}{3}$

**Решение. D).** За отсечките повлечени од темето  $A$  имаме 6 можности (види цртеж), а исто така за отсечките повлечени од темето  $B$  имаме 6 можности. Според тоа вкупниот број можности е  $6 \cdot 6 = 36$ .

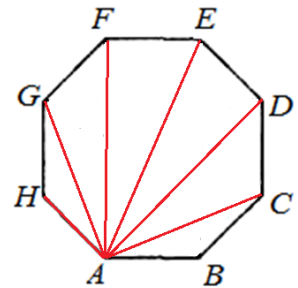
За да имаме поделба на осумаголникот на три дела повлечените отсечки не смеат да се сечат и ниту една од нив не треба да се совпаѓа со страна на многуаголникот. Затоа темето  $A$  може да е поврзано само со темињата  $D, E, F, G$ .

Притоа поволените можности се:

$AG$  и  $BG$ ,  $AG$  и  $BF$ ,  $AG$  и  $BE$ ,  $AG$  и  $BD$ ,  
 $AF$  и  $BF$ ,  $AF$  и  $BE$ ,  $AF$  и  $BD$ ,  
 $AE$  и  $BE$ ,  $AE$  и  $BD$ ,  
 $AD$  и  $BD$ ,

што значи дека имаме  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  поволни случаи.

Конечно, бараната веројатност е  $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ .



## Junior (прва и втора година) 2013

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

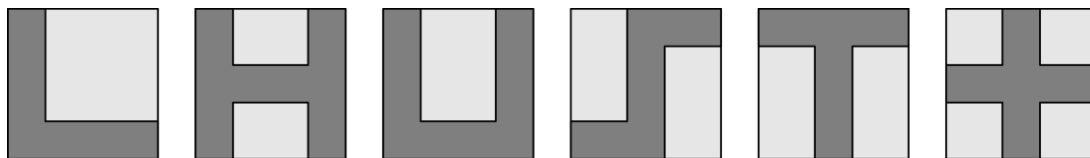
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Кој од дадените броеви не е делител на разликата  $20013 - 2013$

A) 2      B) 3      C) 5      D) 7      E) 11

**Решение. D).** Имаме,  $20013 - 2013 = 198000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11$ , од каде следува дека дадената е делива со 2, 3, 5 и 11, но не е делива со 7.

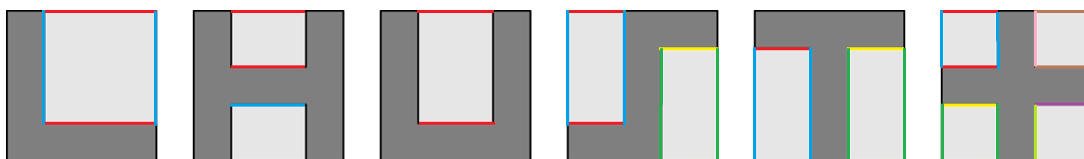
2. Михаил нацртал 6 еднакви квадрати, при што во секој од нив обоил област, како на цртежот.



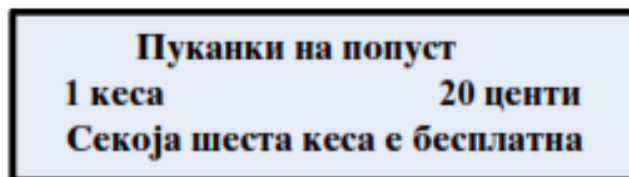
Колку од овие области имаат периметар, еднаков на периметарот на целиот квадрат?

A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**Решение. C).** На долните цртежи, за секој квадрат, отсечките со еднакви должини се обоени со иста боја, па затоа ако отсечката од фигурата ја транслатираме на страната на квадратот се добива периметарот на квадратот. Притоа, на втората и третата фигура останаа црни отсечки, па затоа периметрите на овие две фигури се поголеми од периметарот на квадратот. Според тоа, 4 фигури имаат еднаков периметар со периметарот на квадратот.



3. Денес чичко Павел дал попуст на пуканките и госпоѓата Мартина купила по 4 кеси пуканки за секој член од своето четиричлено семејство. На таблата пишувало:



Колку пари платила Мартина за пуканките?

- A) 0,80 €      B) 1,20 €      C) 2,80 €      D) 3,20 €      E) 80 €

**Решение. C).** Г-ѓата Мартина купила  $4 \cdot 4 = 16$  кеси пуканки. Тоа значи дека добила 2 кеси бесплатно (шестата и дваесеттата). Значи, Мартина платила за 14 кеси и потрошила  $14 \cdot 0,20 = 2,80$  €.

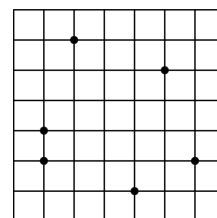
4. Три од броевите 2, 4, 16, 25, 50 и 125 имаат производ 1000. Колку е нивниот збир?

- A) 70              B) 77              C) 131              D) 143

E) ниту еден од понудените одговори

**Решение. C).** Имаме,  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ , па затоа меѓу трите броја мора или да е бројот 125 или да се броевите 25 и 50. Но,  $25 \cdot 50 = 1250$ , што значи дека еден од трите броја е бројот 125. Сега, производот на другите два броја мора да е 8, па затоа другите два броја се 2 и 4. Конечно, бараниот збир е  $2 + 4 + 125 = 131$ .

5. Во квадратна мрежа од полиња со димензии  $1 \times 1$  се обележани 6 точки како што е прикажано на цртежот десно. Павел избрал три од овие точки за темиња на триаголник. Колкава е најмалата можна плоштина на таков триаголник?



- A)  $\frac{1}{4}$               B)  $\frac{1}{3}$               C)  $\frac{1}{2}$               D) 1              E) 2

**Решение. C).** Лесно се гледа дека должините на страните и должините на висините на сите триаголници се поголеми или еднакви на 1. Триаголникот чии темиња се на левата страна на мрежата има должина на страна 1 и должина на соодветна висина висина 1, па затоа тој има најмала плоштина која е еднаква на  $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ .

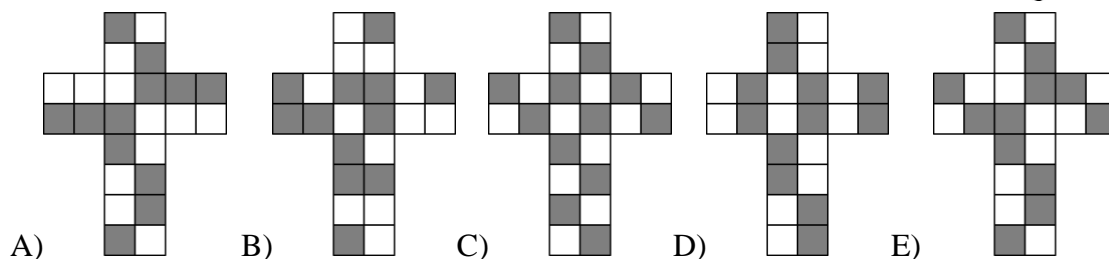
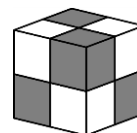
6. Кој од дадените броеви е еднаков на збирот  $4^{15} + 8^{10}$ ?

- A)  $2^{10}$       B)  $2^{15}$       C)  $2^{20}$       D)  $2^{30}$       E)  $2^{31}$

**Решение. Е).** Имаме

$$4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}.$$

7. Коцката прикажана на цртежот десно е составена од четири бели и четири сиви коцки. Која е мрежата на оваа коцка?



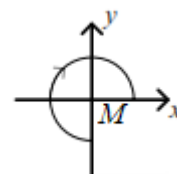
**Решение. Е).** На секој ѕид на дадена коцка има по два сиви и два бели квадрати кои се дијагонално распоредени. Тоа не е случај на мрежите А, В и D, па затоа овие мрежи отпаѓаат. Понатаму, при дадените расекувања на мрежата во две темиња на централниот квадрат мора да има три сиви, а во другите две темиња 3 бели квадратчиња. Тоа е случај само кај мрежата Е и таа е бараната мрежа.

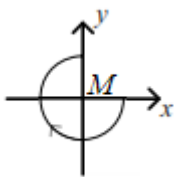
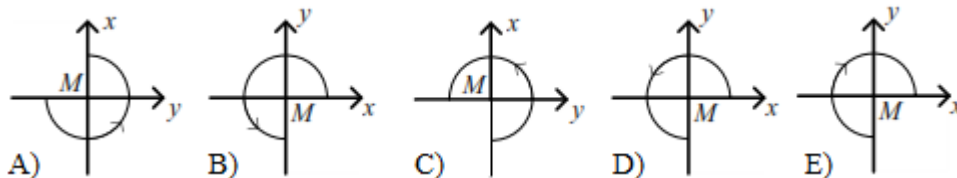
8. Нека  $n$  е најголемиот природен број за кој бројот  $4n$  е трицифрен, а  $m$  е најмалиот природен број за кој бројот  $4m$  е трицифрен. Колку е разликата  $4n - 4m$ ?

- A) 900      B) 899      C) 896      D) 225      E) 224

**Решение. С).** Бидејќи  $4n$  е најголемиот трицифрен содржател на бројот 4, добиваме  $4n = 996$ . Понатаму,  $4m$  е најмалиот трицифрен содржател на бројот 4, па затоа  $4m = 100$ . Според тоа,  $4n - 4m = 896$ .

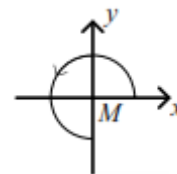
9. Дадени се лак еднаков на три четвртини од кружница со центар  $M$  и ориентација како на цртежот десно. Дамјан, прво го заротирал лакот за  $90^\circ$  обратно од движењето на стрелката на часовникот, а потоа симетрично го пресликал во однос на  $x$ -оската. Кој цртеж го добил Дамјан?





**Решение. D).** При ротацијата на лакот за агол од  $90^\circ$  обратно од движењето на стрелката на часовникот Дамјан го добил цртежот прикажан лево.

Понатаму, при осната симетрија на новиот цртеж во однос на  $x$ -оската како оска на симетријаа Дамјан го добил цртежот кој е прикажан десно.



10. Кој од дадените броеви е најголем?

- A)  $\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}$     B)  $\sqrt{20} \cdot 13$     C)  $20 \cdot \sqrt{13}$     D)  $\sqrt{201} \cdot 3$     E)  $\sqrt{2013}$

**Решение. C).** Од очигледните неравенства:

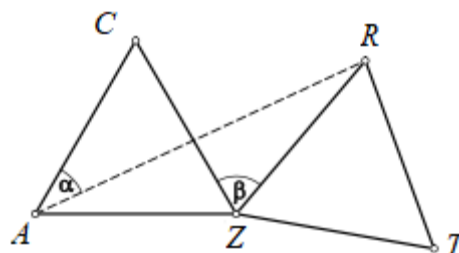
$$20 \cdot 13 < 20 \cdot 13^2 < 20^2 \cdot 13,$$

$$201 \cdot 9 < 2013 < 20^2 \cdot 13,$$

следува дека најголем е бројот  $20 \cdot \sqrt{13}$ .

11. Триаголникот  $RZT$  е добиен со ротација на рамностраниот триаголник  $AZC$  околу точката  $Z$ , каде  $\beta = \angle CZR = 70^\circ$ . Определи ја мерката на агоот  $\alpha = \angle CAR$ .

- A)  $20^\circ$     B)  $25^\circ$     C)  $30^\circ$   
D)  $35^\circ$     E)  $40^\circ$



**Решение. D).** Имаме,  $\angle AZC = 60^\circ$ , како агол на рамностран триаголник. Понатаму,  $\overline{AZ} = \overline{ZR}$  како должини на страни на рамностран триаголник и триаголник добиен со ротација од него. Значи,  $\triangle AZR$  е рамнокрак со основа  $AR$ . Според тоа,  $\angle RAZ = \angle ZRA = \frac{180^\circ - (60^\circ + 70^\circ)}{2} = 25^\circ$ , па затоа  $\alpha = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$ .

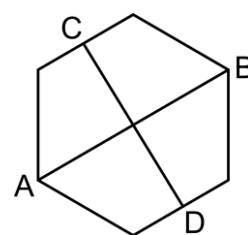
12. На цртежот десно е претставен цик-цак примерок составен од шест квадрати со димензија  $1 \times 1$ . Периметарот му е 14. Колку е периметарот на цик-цак примерокот кој е составен од 2013 квадрати?



A) 2022      B) 4028      C) 4032      D) 6038      E) 8050

**Решение. В).** Со додавање на секој нов квадрат периметарот се зголемува за 2. За да го добиеме новиот примерок треба на првиот квадрат да му додадеме 2012 квадрати. Значи, бараниот периметар е  $4 + 2012 \cdot 2 = 4028$ .

13. Отсечката  $AB$  поврзува дце спротивни темиња на правилен шестаголник, а отсечката  $CD$  ги поврзува средините на две негови спротивни страни. Плоштината на шестаголникот е 60. Колку е  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ ?



A) 40      B) 50      C) 60      D) 80      E) 100

**Решение. Д).** Имаме,  $\overline{AB} = 2a$ ,  $\overline{CD} = 2h_a$ , каде  $a$  и  $h_a$  се должините на страната на шестаголникот и висината на рамностраните триаголници од кои е составен.

Затоа важи  $6 \frac{ah_a}{2} = 60$ , од каде добиваме  $ah_a = 20$ . Конечно,

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 4ah_a = 80.$$

14. Сите ученици од едно одделение правеле тест. Ако секое момче има 3 поени повеќе на тестот, тогаш просечниот резултат на тестот ќе се зголеми за 1,2 поени. Колкав е процентот на девојчињата во тоа одделение?

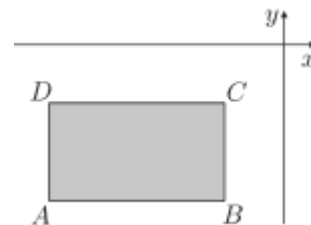
A) 20%      B) 30%      C) 40%      D) 60%

E) не е можно да се определи

**Решение. Д).** Нека во одделението има  $a$  момчиња и  $c$  девојчиња. Бидејќи зголемувањето на просечниот број поени е аритметичка средина од зголемувањето на бодовите кај момчињата и девојчињата, добиваме  $\frac{3 \cdot a + 0 \cdot c}{a + c} = 1,2$ . Од последното равенство добиваме  $c = 1,5a$ . Значи, процентуалното учество на девојчињата

во ова одделение е  $\frac{c}{a+c} = \frac{1,5a}{a+1,5a} = 0,6 = 60\%$ .

15. Правоаголникот  $ABCD$  лежи под апсцисата и е лево од ординатата, а неговите страни се паралелни со координатните оски. За секое теме  $A, B, C, D$  е формиран количникот од неговата ордината  $y$  и неговата апсциса  $x$ . За кое теме овој количник е најмал?



- A) A      B) B      C) C      D) D  
E) зависи од димензиите на правоаголникот

**Решение. D).** Нека должините на страните на правоаголникот  $ABCD$  се  $a$  и  $b$ ,  $a > b$  и нека  $C(-c', -c'')$ . Тогаш  $D(-c'-a, -c'')$ ,  $A(-c'-a, -c''-b)$ ,  $B(-c', -c''-b)$ . Според тоа,

$$\begin{aligned} \frac{-c''}{-c'-a} &= \frac{c''}{c'+a} < \frac{c''}{c'}, \\ \frac{-c''}{-c'-a} &= \frac{c''}{c'+a} < \frac{c''+b}{c'+a} = \frac{-c''-b}{-c'-a}, \\ \frac{-c''}{-c'-a} &= \frac{c''}{c'+a} < \frac{c''+b}{c'} = \frac{-c''-b}{-c'}, \end{aligned}$$

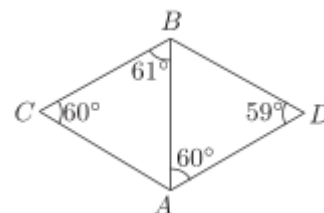
па затоа бараното теме е D.

16. Денес, 21.03.2013 година, Симон и неговиот син ги слават своите родендени. Симон ги помножил своите години и годините на синот и го добил бројот 2013. Која година е роден Симон?

- A) 1981      B) 1982      C) 1953      D) 1952      E) не е можно да се определи

**Решение. D).** Имаме,  $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ , па како не постои човек кој има  $11 \cdot 61 = 671$  или  $3 \cdot 61 = 183$  години, добиваме дека единствено разумно решение е Симон да има 61, а неговиот син да има  $3 \cdot 11 = 33$  години. Значи, годината на раѓање на Симон е  $2013 - 61 = 1952$ .

17. Димитар сакал од картон да направи два идентични рамнострани триаголника со чија помош ќе состави ромб. Кога завршил тој измерил четири агли и заклучил дека тие не се еднакви. Која од дадените отсечки има најголема должина?



- A)  $AD$       B)  $AC$       C)  $AB$       D)  $BC$       E)  $BD$

**Решение. A).** Бидејќи во триаголник спроти поголем агол лежи поголема страна, од триаголниците  $ABC$  и  $ABD$  следуваат неравенствата  $\overline{AC} > \overline{AB} > \overline{BC}$  и

$\overline{AD} > \overline{BD} > \overline{AB}$ . Понатаму, триаголниците  $ABC$  и  $ABD$  се слични, па затоа важи  $\overline{AD} : \overline{AC} = \overline{AB} : \overline{BC} > 1$ . Конечно, од горните неравенства следува дека најголема должина има отсечката  $AD$

18. Јован сака да запише пет последователни природни броја такви што збирот на три од нив е еднаков на збирот на преостанатите два. Колку такви различни петорки може да запише Јован?

A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**Решение. C).** Нека Јован ги запишал броевите  $a-2, a-1, a, a+1, a+2$ , за  $a \geq 3$ . Понатаму, од условот на задачата следува:

$$a-2+a-1+a \leq a+1+a+2,$$

од каде добиваме  $a \leq 6$ . Сега бидејќи збирот на три од дадените броеви е еднаков на збирот на преостанатите два заклучуваме дека збирот на петте броја е парен, т.е.

$$a-2+a-1+a+a+1+a+2=5a$$

е парен број, па затоа  $a$  е парен број. Според тоа,  $a=4$  или  $a=6$ .

За  $a=4$  ги добиваме броевите 2, 3, 4, 5, 6 за кои важи  $2+3+5=6+4$ .

За  $a=6$  ги добиваме броевите 4, 5, 6, 7, 8 за кои важи  $4+5+6=7+8$ .

Значи, Јован можел да запише две петорки природни броеви со саканото својство.

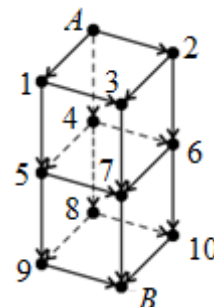
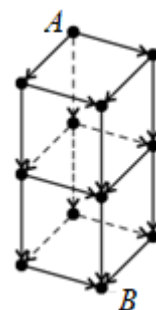
19. Колку различни патишта во дадениот дијаграм постојат од точката  $A$  до точката  $B$ , ако се движиме само во насока на стрелките на дијаграмот?

A) 6      B) 8      C) 9      D) 12      E) 15

**Решение. D).** При ознаки како на цртежот лево движејќи се на дозволен начин од точката  $A$  до точката  $B$  можеме да стигнеме по патиштата:

$A, 1, 3, 7, B$	$A, 1, 5, 9, B$	$A, 4, 6, 7, B$
$A, 2, 3, 7, B$	$A, 2, 6, 10, B$	$A, 4, 6, 10, B$
$A, 1, 5, 7, B$	$A, 4, 5, 7, B$	$A, 4, 8, 9, B$
$A, 2, 6, 7, B$	$A, 4, 5, 9, B$	$A, 4, 8, 10, B$

Според тоа, постојат 12 различни патишта по кои на дозволен



начин во дадениот дијаграм може да се стигне од точ-ката  $A$  до точката  $B$ .

20. Даден е шестцифрен број, кај кој збирот на неговите цифри е парен, а производот на неговите цифри е непарен број. Кое тврдење е точно за таков број?

- A) Или две или четири негови цифри се парни.  
 B) Таков број не постои.  
 C) Во записот на бројот има непарен број непарни цифри.  
 D) Таков број постои и неговите цифри се по парови различни.  
 E) Ниту едно од горните тврдења.

**Решение. E).** Бидејќи производот на цифрите е непарен број, добиваме дека сите цифри се непарни и притоа збирот на неговите цифри е парен број. Тоа значи дека тврдењата A и C не се точни. Таков број постои, на пример бројот 111111, па затоа тврдењето B не е точно. Тврдењето D не е точно, бидејќи немаме шест непарни цифри. Значи, не може да се каже ниту едно од првите четири тврдења, т.е. точно е E.

21. Бројот  $\frac{1}{1024000}$  е запишан како децимален број со најмал можен број цифри.

Колку цифри има по децималната запирка?

- A) 10                      B) 12                      C) 13                      D) 14                      E) 1024000

**Решение. C).** Имаме,

$$\frac{1}{1024000} = \frac{1}{1024 \cdot 1000} = \frac{1}{2^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{10^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{10^{13}}.$$

Цифрата на единиците на бројот  $5^{10}$  е 5, па затоа при делење со  $10^{13}$  се добиваат 13 децимални места.

22. На еден остров имало 2013 жители. Некои од нив се витези, а останатите се лажговци. Витезите секогаш ја зборуваат вистината, а лажговците секогаш лажат. Секој ден еден од жителите велел: По моето заминување од островот, бројот на витези на островот ќе биде ист со бројот лажговци, и потоа заминувал од островот. По 2013 искажувања сите жители на островот заминале. Колку од нив биле лажговци?

- A) 0                      B) 1006                      C) 1007                      D) 2013  
 E) не е можно да се определи

**Решение. В).** Бидејќи по 2013 кажувања сите жители на островот заминале, т.е. останале 0 жители, последниот жител кој заминал бил витез. Јасно, претпоследниот жител кој заминал не може да биде витез, бидејќи ако е витез, тогаш ќе останел само еден жител, а витезите не лажат. Понатаму, пред да останат 2 жители, лицето кое заминало мора да е витез, а пред да останат три жители лицето кое заминало мора да е лажго. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека од назад последователно заминувал: витез, лажго, витез, лажго, витез итн. што значи дека на островот имало 1007 витези и 1006 лажговци.

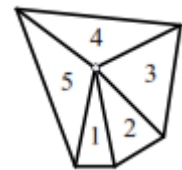
23. Во бројниот ребус  $\overline{AB} + \overline{BA} = 187$  на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Колку е производот  $A \cdot B$  ?  
 А) 0      В) 16      С) 17      Д) 56      Е) 72

**Решение. Е).** Последователно добиваме

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BA} &= 187, \\ 10A + B + 10B + A &= 187, \\ 11(A + B) &= 187, \\ A + B &= 17.\end{aligned}$$

Збир на две цифри е еднаков на 17 ако и само тоа се цифрите 8 и 9. Според тоа,  $A \cdot B = 9 \cdot 8 = 72$ .

24. На цртежот се прикажани пет рамнокраки триаголници со агли наспроти основите  $24^\circ, 48^\circ, 72^\circ, 96^\circ$  и  $120^\circ$ , кои се последователни содржатели на најмалиот агол меѓу нив. Сакаме да нацртајме цртеж со најголем можен број такви триаголници. Колку во тој случај треба да има најмалиот агол во низата, ако степенските мерки на сите агли се природни броеви?



- А)  $1^\circ$       В)  $2^\circ$       С)  $3^\circ$       Д)  $6^\circ$       Е)  $8^\circ$

**Решение. С).** Збирот на  $n$  последователни содржатели на бројот  $k$  е  $\frac{n(n+1)}{2}k$ .

Притоа овој збир треба да биде еднаков на  $360^\circ$ . Последователно ја решаваме равенката  $\frac{n(n+1)}{2}k = 360$ , за  $k = 1, 2, 3, \dots$  се додека не ја добиеме равенка која како едно решение има природен број.

За  $k = 1$  имаме  $n(n+1) = 720$  и во овој случај немаме решение природен број.

За  $k = 2$  имаме  $n(n + 1) = 360$  и во овој случај немаме решение природен број.

За  $k = 3$  имаме  $n(n + 1) = 240$  и во овој случај добиваме  $n = 15$ , т.е. можеме да нацртаме 15 рамнокраки триаголници кои го задоволуваат условот на задачата и притоа најмалиот агол има  $3^\circ$ .

25. Симон група од три броја во еден чекор ја менува во друга група од три броја на следниов начин: секој од броевите го менува со збирот на другите два броја. На пример од броевите 3, 4, 6 ги добива броевите 10, 9, 7, а од нив ги добива броевите 16, 17, 19. Колку чекори треба да реализира Симон за да тргнувајќи од броевите 1, 2, 3 добие група во која ќе биде бројот 2013?

A) 8            B) 9            C) 10            D) повеќе од 10

E) бројот 2013 не може да се појави

**Решение. E).** *Прв начин.* Последователно добиваме:

$$1, 2, 3 \rightarrow 5, 4, 3 \rightarrow 7, 8, 9 \rightarrow 17, 16, 15 \rightarrow 31, 32, 33 \rightarrow 65, 64, 63 \rightarrow 127, 128, 129 \\ \rightarrow 257, 256, 255 \rightarrow 511, 512, 513 \rightarrow 1025, 1024, 1023 \rightarrow 2047, 2048, 2049.$$

Збележуваме дека трите броја во последната група се поголеми од 2013, па затоа на опишаниот начин не може да се добие бројот 2013.

*Втор начин.* Како во првиот начин за првите четири чекори имаме:

$$1, 2, 3 \rightarrow 5, 4, 3 \rightarrow 7, 8, 9 \rightarrow 17, 16, 15 \rightarrow 31, 32, 33.$$

Забележуваме дека во секој чекор добиваме група од три последователни броја при што средниот број е секогаш парен. Бројот 2013 може да се запише како  $1006 + 1007$ . Броевите 1006 и 1007 од три последователни броја можеме да ги добиеме од броевите 502, 503, 504. Притоа средниот број во оваа тројка е непарен, а двата крајни се парни, но ваква тројка не може да се добие почнувајќи од тројката 1, 2, 3. Значи, бројот 2013 не може да се добие на опишаниот начин.

26. Од природните броеви од 1 до 22 се формирани единаесет дробки, при што секој број е употребен точно еднаш. Колку од добиените дробки најмногу може да имаат целобројна вредност?

A) 7            B) 8            C) 9            D) 10            E) 11

**Решение. D).** Прости броеви помали од 22 се: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Броевите 13, 17 и 19 се деливи само со 1, а не се делители на ниту еден од другите броеви, па затоа два од овие три броја не може да се запишат во броител или именител

на дробка која ќе има целобројна вредност. Значи, бројот на дробките кои ќе имаат целобројна вредност е помал или еднаков на десет. На пример, тоа се дробките:

$$\frac{22}{11}, \frac{21}{7}, \frac{20}{4}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{15}{3}, \frac{14}{2}, \frac{13}{1}, \frac{12}{6}, \frac{10}{5}.$$

Постојат и други примери на десет дробки кои имаат целобројни вредности. Обиди се да најдеш барем уште еден пример.

27. Определи го бројот на триаголниците чии темиња се меѓу темињата на правилен 13-аголник, при што центарот на опишаната кружница околу 13-аголникот е во внатрешноста на триаголникот.

A) 72                      B) 85                      C) 91                      D) 100                      E) друг број

**Решение. C).** Имаме  $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286$  триаголници чии темиња се меѓу темињата на правилниот 13-аголник. Понатаму бројот на триаголниците кои не го содржат центарот на опишаната кружница околу 13-аголникот е еднаков на  $\frac{13 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 195$ . Според тоа, бараниот број триаголници е  $286 - 195 = 91$ .

28. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 произволно се распоредени на кружница. Потоа истовремено секој број се собира со своите два соседи, при што се добиваат нови десет броеви. Која е најголемата можна вредност на најмалиот од вака добиените броеви?

A) 14                      B) 15                      C) 16                      D) 17                      E) 18

**Решение. B).** Збирот на броевите запишани на почетокот е

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.$$

Бидејќи секој број истовремено се додава на двата негови соседни броеви збирот на новите броеви е трипати поголем, односно тој е еднаков на  $3 \cdot 55 = 165$ . Понатаму, ако меѓу новите броеви најмалиот број е  $A$ , тогаш  $10A \leq 165$  и како  $A$  е природен број добиваме  $A \leq 16$ .

Нека на почетокот во насока на движењето на стрелката на часовникот се запишани броевите  $a_i, i = 1, 2, \dots, 10, a_i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ . Потоа на опишаниот начин на местото на овие броеви се добиени броевите

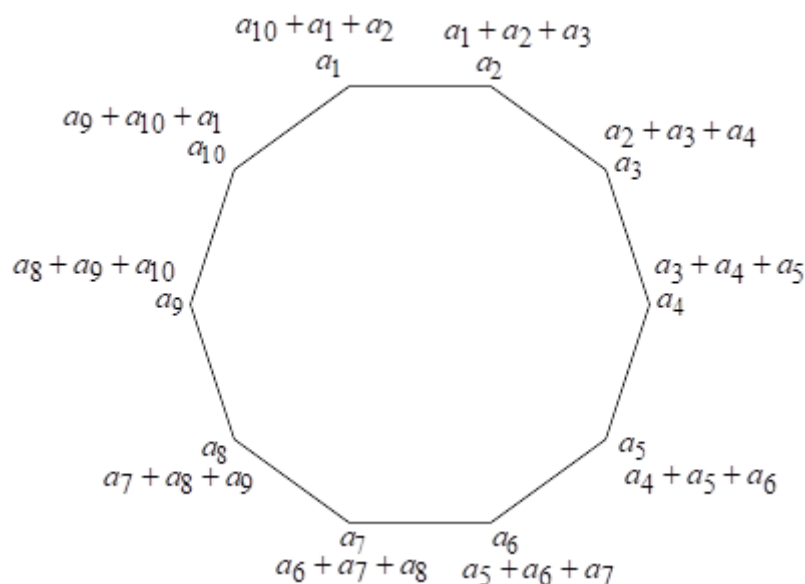
$$a_{10} + a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, a_3 + a_4 + a_5, a_4 + a_5 + a_6, \\ a_5 + a_6 + a_7, a_6 + a_7 + a_8, a_7 + a_8 + a_9, a_8 + a_9 + a_{10}, a_9 + a_{10} + a_1,$$

(види цртеж).

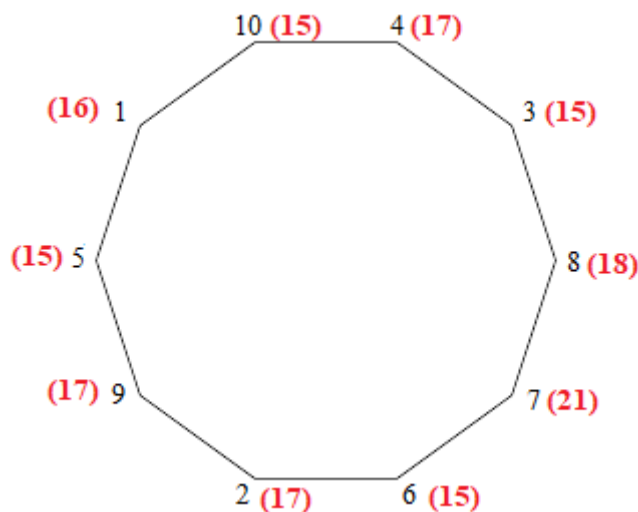
Ако најмалиот од новите броеви е  $A=16$ , тогаш

$$55 = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + a_{10} \\ \geq 3 \cdot 16 + a_{10} = 48 + a_{10}$$

од каде добиваме  $a_{10} \leq 7$ . На потполно идентичен начин, со циклично поместување на броевите во збирот добиваме дека  $a_i \leq 7, i = 1, 2, \dots, 9$ .



Последното не е можно бидејќи меѓу запишаните броеви се и броевите 8, 9 и 10. Од добиената противречност следува дека најголемата можна вредност на најмалиот од вака добиените броеви е помала или еднаква на 15. На долниот цртеж е даден пример кога најмалиот запиша број е еднаков на 15.



29. Автомобил тргнал од точката  $A$  и се движи со рамномерна брзина од  $50 \text{ km/h}$ . Потоа на секој час од точката  $A$  тргнува нов автомобил и секој автомобил е за  $1 \text{ km/h}$  побрз од претходниот. Последниот автомобил тргнал 50 часа по првиот автомобил (со брзина  $100 \text{ km/h}$ ). Со која брзина се движи автомобилот кој е на почетокот на колоната по 100 часа од поаѓањето на првиот автомобил?
- A)  $50 \text{ km/h}$     B)  $66 \text{ km/h}$     C)  $75 \text{ km/h}$     D)  $84 \text{ km/h}$     E)  $100 \text{ km/h}$

**Решение. C).** Знаеме дека изминатиот пат е  $s = vt$ . Автомобилот кој е  $n$ -ти по поаѓање од точката  $A$  има брзина  $50 + n \text{ km/h}$  и патувал  $100 - n$  часа. Тоа значи дека тој поминал пат  $s(n) = (50 + n)(100 - n)$ . Значи треба да најдеме најголема можна вредност на последниот израз. Имаме,

$$s(n) = (50 + n)(100 - n) = 5000 + 50n - n^2 = 5625 - (n - 25)^2 \leq 5625,$$

од каде добиваме дека најголемата можна вредност на добиениот израз е 5625 и истата се достигнува за  $n_0 = 25$ . Значи, тоа е 25-тиот автомобил и неговата брзина е  $50 + 25 = 75 \text{ km/h}$ .

30. На една страна на патот треба да се посадат 100 садници на даб и бреза. Притоа меѓу било кои две дабови садници не смее да има пет садници (било какви). Кој е најголемиот можен број дабови садници што смее да се посадат?
- A) 48            B) 50            C) 52            D) 60
- E) таков распоред не е можен

**Решение. C).** Ако меѓу било кои две дабови садници не смее да има 5 садници, тогаш по 6 дабови садници мора да има 6 брези, по што повторно може да има дабови садници. Понатаму, бидејќи  $100 = 16 \cdot 6 + 4$  најголем број дабови садници ќе има ако наизменично садиме 6 дабови садници и 6 брези и на крајот посади-ме 4 дабови садници.

Значи, најголемиот можен број дабови садници е  $6 \cdot 8 + 4 = 52$ .

## Junior (прва и втора година) 2014

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Датумот за одржување на меѓународниот натпревар Кенгур е третиот четврток во месец март. Кој е првиот можен датум за одржување на овој натпревар?  
 А) 14            В) 15            С) 20            Д) 21            Е) 22

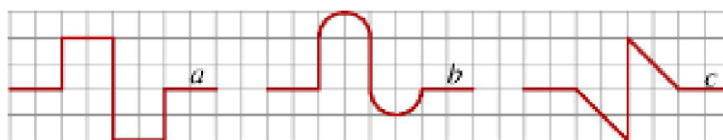
**Решение. В).** Првиот четврток најрано може да е на 1-ви, вториот на 8-ми и третиот на 15-ти март. Значи, првиот можен датум за одржување на натпреварот е 15-ти март.

2. Товарниот брод MSC Fibula го држи рекордот помеѓу товарните бродови кои влегле во заливот на Сан Франциско. Тој носел 12500 контејнери, кои ако се стават еден по друг по должина се добива низа контејнери долга  $75 \text{ km}$ . Колку е должината на еден контејнер?  
 А)  $6 \text{ m}$             В)  $16 \text{ m}$             С)  $60 \text{ m}$             Д)  $160 \text{ m}$             Е)  $600 \text{ m}$

**Решение. А).** Должината на еден контејнер е

$$75 \text{ km} : 12500 = 75000 \text{ m} : 12500 = 6 \text{ m}.$$

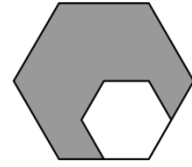
3. Нека  $a, b, c$  се должини на линиите дадени на цртежот. Кој од следните одговори е точен?



- А)  $a < b < c$             В)  $a < c < b$             С)  $b < a < c$             Д)  $b < c < a$             Е)  $c < b < a$

**Решение. Е).** Без ограничување на општоста можеме да земеме дека должината на страната на едно квадратче е 1. Тогаш  $a = 16$ ,  $b = 8 + 2\pi$ ,  $c = 8 + 4\sqrt{2}$ , па затоа  $c < b < a$ .

4. Страната на поголемиот правилен шестаголник е двапати поголема од страната на помалиот правилен шестаголник (види цртеж). Малиот шестаголник има плоштина  $4\text{ cm}^2$ . Колку е плоштината на големиот шестаголник?



- A)  $16\text{ cm}^2$       B)  $14\text{ cm}^2$       C)  $12\text{ cm}^2$       D)  $10\text{ cm}^2$       E)  $8\text{ cm}^2$

**Решение. А).** *Прв начин.* Коэффициентот на сличност на двете фигури е  $k=2$ : Нивните плоштини се однесуваат како  $k^2=4$ , па затоа плоштината на големиот шестаголник е четири пати поголема од плоштината на малиот шестаголник, т.е. таа е еднаква на  $4 \cdot 4 = 16\text{ cm}^2$ .

*Втор начин.* Ако должината на страната на малиот шестаголник е  $a$ , тогаш неговата плоштина е  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 4$ . Должината на страната на големиот шестаголник е  $2a$ , па затоа неговата плоштина е  $\frac{3(2a)^2\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot 4 = 16\text{ cm}^2$ .

5. Кој број е на средина меѓу  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{4}{5}$ ?

- A)  $\frac{11}{15}$       B)  $\frac{7}{8}$       C)  $\frac{3}{4}$       D)  $\frac{6}{15}$       E)  $\frac{5}{8}$

**Решение. А).** Средната вредност на  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{4}{5}$  е  $\frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10+12}{15} = \frac{11}{15}$ .

6. Во бројот 2014 последната цифра е поголема од збирот на претходните три цифри. Пред колку години ова последен пат се случило истото?

- A) 1      B) 3      C) 5      D) 7      E) 11

**Решение. С).** Пред 2014 година се годините: 2013, 2012, 2011, 2010, 2009, 2008, ... Имаме,

$$2+0+1=3, 2+0+1>2, 2+0+1>1, 2+0+1>0, 2+0+0<9,$$

т.е. ова последен пат се случило во 2009 година, а тоа е пред  $2014-2009=5$  години.

7. Како гласи негацијата на исказот: „Секој реши повеќе од 20 задачи“.

- A) Никој не реши повеќе од 20 задачи  
B) Некој реши помалку од 21 задача

- C) Секој реши помалку од 21 задача\  
 D) Некој реши точно 20 задачи  
 E) Некој реши повеќе од 20 задачи

**Решение. В).** Негацијата на даденото тврдење е: *Постои човек кој реши најмногу 20 задачи.* Ова тврдење е еквивалентно на тврдењето *Некој реши помалку од 21 задача.*

8. Во еден координатен систем Марко нацртал квадрат. Едната негова дијагонала лежи на  $x$ -оската, а нејзини крајни точки се  $(-1,0)$  и  $(5,0)$ . Која од следните точки е теме на квадратот?

- A)  $(2,0)$       B)  $(2,3)$       C)  $(2,-6)$       D)  $(3,5)$       E)  $(3,-1)$

**Решение. В).** Средината на дијагоналата на квадратот е средината од отсечката чии крајни точки се  $(-1,0)$  и  $(5,0)$ . Тоа е точката  $(2,0)$ . Дијагоналите на квадратот се заемно нормални, имаат еднакви должини и се половат. Значи, втората дијагонала минува низ точката  $(2,0)$ , нормална е на  $x$ -оската и секое теме на квадратот е оддалечено за 3 од неговиот центар. Според тоа, преостанатите две ремиња на квадратот се  $(2,3)$  и  $(2,-3)$ . Направи цртеж!

9. Во едно село односот меѓу возрасни мажи и возрасни жени е  $2:3$ , а односот меѓу возрасни жени и децата е  $8:1$ . Колку е односот меѓу возрасните (мажи и жени) и децата?

- A)  $5:1$       B)  $10:3$       C)  $13:1$       D)  $12:1$       E)  $40:3$

**Решение. Е).** Од условот на задачата следува дека  $m = \frac{2}{3}z$ ,  $z = 8d$ . Значи,

$$m + z = \frac{2}{3}z + z = \frac{5}{3}z = \frac{5}{3} \cdot 8d = \frac{40}{3}d, \text{ т.е. } (m + z) : d = 40 : 3.$$

10. Големото тркало на еден велосипед има периметар 4,2 метри. Малото тркало има периметар 0,9 метри. Во еден момент вентилите на двете тркала се во најниска точка (најблиску до земјата). По колку метри вентилите на двете тркала првпат повторно истовремено ќе бидат најблиску до земјата?



- A)  $4,2 m$       B)  $6,3 m$       C)  $12,6 m$       D)  $25,2 m$       E)  $37,8 m$

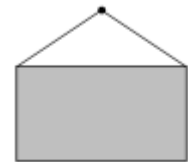
**Решение. C).** Периметарот на големото тркало е  $4,2 m = 42 dm$ , а периметарот на малото тркало е  $0,9 m = 9 dm$ . Вентилите за прв пат повторно ќе бидат најблиску до земјата кога двете тркала за прв пат ќе поминат ист пат правејќи секое цел број завртувања. Јасно, тоа е за  $HЗС(42,9) = 126 dm = 12,6 m$ .

11. Оваа 2014 година збирот на годините на бабата, нејзината ќерка и нејзината внука е 100. Која година е родена внуката ако нивните години се степени на бројот 2?

- A) 1998      B) 2006      C) 2010      D) 2012      E) 2013

**Решение. C).** Степени на бројот 2, кои се помали од 100, се броевите: 2, 4, 8, 16, 32 и 64. Бројот 100 како збир на три од овие броеви можеме да го добиеме на единствен начин и тоа:  $64 + 32 + 4 = 100$ . Според тоа, внуката е родена пред 4 години.

12. На шајки заковани на ѕид на  $2,5 m$  од подот, Мартин обесил слики на конци со должина  $2 m$  (види цртеж). Која од следните слики е најблиску до подот (димензиите на сликите се во сантиметри)?



- A)  $60 \times 40$       B)  $120 \times 50$       C)  $120 \times 90$       D)  $160 \times 60$       E)  $160 \times 100$

**Решение. C).** Оддалеченост на сликата од подот ќе ја добиеме кога од  $2,5 m$  ќе ја одземеме оддалеченост на шајката од сликата и висината на сликата. Оддалеченоста на шајката од сликата ја добиваме со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник кај кој хипотенузата е половина од конечот, а едната катета е еднаква на половина од ширината на сликата. Ако димензиите на сликата ги означиме со  $a \times b$  (во метри), тогаш оддалеченоста на сликата од подот е дадена со изразот  $2,5 - (b - \sqrt{1 + (\frac{a}{2})^2})$ . Сега, лесно се пресметува дека тоа е сликата со димензии  $120 \times 90$ . Провери!

13. Шест девојки седат во ист стан кој има две купатила. Наутро точно во 07:00 часот тие почнуваат да ги користат купатилата, и влегуваат во нив една по една, секоја девојка влегува еднаш во едно од купатилата. Кога последната девојка ќе излезе од купатило, тие седнуваат заедно да појадуваат. Во купатило тие се за-

држуваат 9, 11, 13, 18, 22, 23 минути соодветно. Кога најрано тие може да седнат да појадуваат?

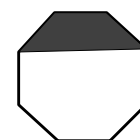
- A) 07:48      B) 07:49      C) 07:50      D) 07:51      E) 08:03

**Решение. B).** Девојките вкупно купатилата ги користат

$$9+11+13+18+22+23=96 \text{ минути.}$$

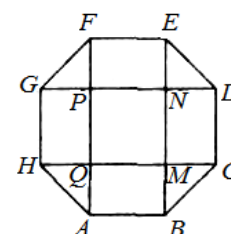
Бидејќи дадените броеви не може да се поделат во две групи чии зборови се 48, следната можност е поделба на две групи чии зборови се 47 и 49 минути. Ова е можно и тоа:  $9+18+22=49$  и  $11+13+23=47$ . Значи, девојките најрано може да појадуваат по 49 минути, односно во 07:49.

14. На цртежот е даден правилен осумаголник. Осенчениот негов дел има плоштина  $3 \text{ cm}^2$ . Колку е плоштината на осумаголникот изразена во  $\text{cm}^2$ ?



- A)  $8+4\sqrt{2}$       B) 9      C)  $8\sqrt{2}$       D) 12      E) 14

**Решение. D).** Нека должина на страната на осумаголникот е  $a$ . Тогаш неговата плоштина е  $P = 2a^2(1 + \sqrt{2})$ . При ознаки како на цртежот десно имаме



$$\overline{FE} = a, \overline{GP} = \overline{FP} = \overline{EN} = \overline{DN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Според тоа, плоштината на осенчениот дел е

$$P' = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = a^2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} a^2 (1 + \sqrt{2}) = \frac{1}{4} P.$$

Конечно,  $P = 4P' = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$ .

15. Во Африка е откриен нов вид на крокодили. Должината на неговата опашка е една третина од вкупната негова должина. Неговата глава е долга  $93 \text{ cm}$  и нејзината должина е една четвртина од должината на неговото тело без неговата опашка. Колку е должината на крокодилот изразена во  $\text{cm}$ ?

- A) 558      B) 496      C) 490      D) 372      E) 186

**Решение. A).** Со  $k$  да ја означиме должината на целиот крокодил, а со  $o$  должината на неговата опашка. Тогаш

$$o = \frac{1}{3} k, \quad 93 = \frac{1}{4} (k - o) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} k,$$

т.е.  $k = 93 \cdot 6 = 558 \text{ cm}$ .

16. На цртежот е дадена специјална коцка. Збирите на броевите на нејзините спротивни ѕидови се еднакви меѓу себе. Броевите кои не ги гледаме се прости броеви. Кој број е спротивен на бројот 14?



- A) 11      B) 13      C) 17      D) 19      E) 23

**Решение. Е).** *Прв начин.* Бидејќи броевите 18 и 14 се парни, а броевите кои се спроти нив се прости заклучуваме дека збирот на броевите на спротивните ѕидови мора да е непарен број. Затоа наспроти бројот 35 мора да е бројот 2 (единствен парен прост број). Сега, збирот на броевите на спротивните ѕидови е  $35 + 2 = 37$ . Значи, наспроти бројот 14 е бројот  $37 - 14 = 23$ , а наспроти бројот 18 е бројот  $37 - 18 = 19$ .

*Втор начин.* Нека наспроти бројот 35 е бројот  $a$ . Тогаш наспроти бројот 18 е бројот  $35 + a - 18 = a + 17$ , а наспроти бројот 14 е бројот  $35 + a - 14 = 21 + a$ . Но, броевите  $a, a + 17, a + 21$  се прости само ако  $a = 2$ , па затоа наспроти бројот 14 е бројот  $21 + 2 = 23$ .

17. Ана треба да помине растојание од  $8 \text{ km}$  и кога оди нејзината брзина е  $4 \text{ km/h}$ . Кога трча нејзината брзина е  $8 \text{ km/h}$ . Колку време таа треба да трча за да просечната брзина со која ќе го помине даденото растојание е  $5 \text{ km/h}$ ?
- A) 15 min      B) 24 min      C) 30 min      D) 36 min      E) 40 min

**Решение. Е).** Првите  $8 \text{ km}$  Ана ги поминала за  $8 : 4 = 2$  часа. Ако  $a$  часа трчала со брзина  $8 \text{ km/h}$ , таа поминала пат  $8a \text{ km}$ . Значи, Ана вкупно поминала  $8 + 8a \text{ km}$  за  $2 + a$  часа, па затоа  $\frac{8+8a}{2+a} = 5$ , од каде добиваме  $a = \frac{2}{3} \text{ h} = 40 \text{ min}$ .

18. Шахистот Боби на еден шаховски турнир одиграл 40 партии и освоил 25 поени (за победа се добива еден поен, за нерешено се добива половина поен, а за пораз се добиваат нула поени). Колку повеќе партии победил отколку што загубил на турнирот?
- A) 5      B) 7      C) 10      D) 15      E) 12

**Решение. С).** Со  $p$  да го означиме бројот на победите, а со  $r$  бројот на партиите кои завршиле нерешено. Тогаш Боби загубил  $40 - p - r$  партии. Не интересира разликата  $p - (40 - p - r) = 2p + r - 40$ . Знаеме дека  $p + \frac{r}{2} = 25$ , од каде добиваме  $2p + r = 50$ . Според тоа, бројот на партиите во кои Боби победил е за

$$2p + r - 40 = 50 - 40 = 10$$

поголем од бројот на партиите во кои загубил.

19. Јана, Даниела и Хана сакале да купат исти капи. Но, на Јана и недостигало  $\frac{1}{3}$  од цената на капата, на Даниела  $\frac{1}{4}$  од цената на капата и на Хана и недостигало  $\frac{1}{5}$  од цената на капата. Во сезонскиот попуст цената на капата е намалена за 9,40 €. Тие ги здружиле своите пари и имале доволно да си купат по една капа, при што ги потрошиле сите пари. Колку е цената на капата пред намалувањето?

A) 12 €      B) 16 €      C) 28 €      D) 36 €      E) 112 €

**Решение. D).** Нека  $a$  е цената на капата пред намалувањето. Јана има  $\frac{2}{3}a$ , Даниела има  $\frac{3}{4}a$  и Хана има  $\frac{4}{5}a$  евра. Цената на три капи по намалувањето е  $3(a - 9,4)$ , па затоа  $\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}a + \frac{4}{5}a = 3(a - 9,4)$ . Од последната равенка добиваме  $a = 36$ .

20. Нека  $p, q, r$  се позитивни цели броеви такви што  $p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{25}{19}$ . Колку изнесува производот  $pqr$ ?

A) 6      B) 10      C) 18      D) 36      E) 42

**Решение. С).** Имаме

$$\frac{25}{19} = 1 + \frac{6}{19} = 1 + \frac{1}{\frac{19}{6}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}},$$

од каде добиваме  $p = 1, q = 3, r = 6$ , па затоа  $pqr = 18$ .

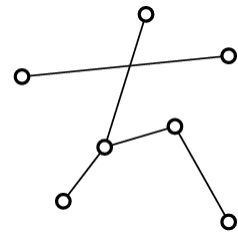
21. Во равенката  $N \cdot U(M + B + E + R) = 33$ , на различни букви соодветствуваат различни цифри. Колку решенија има оваа равенка?

A) 12      B) 24      C) 30      D) 48      E) 60

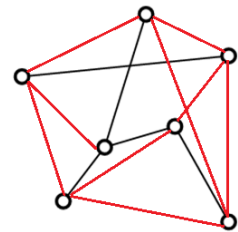
**Решение. D).** Имаме,  $33 = 1 \cdot 3 \cdot 11$ , па затоа  $NU = 1 \cdot 3$ ,  $M + B + E + R = 11$ . Понатаму, бројот 11 како збир на четири едноцифрени броеви различни од 1 и 3 може да се запише на единствен начин и тоа  $0 + 2 + 4 + 5 = 11$ . Според тоа, цифрите  $N$  и  $U$  може да се изберат на 2 начина, а цифрите  $M, B, E, R$  може да се изберат на  $4! = 24$  начина. Значи, дадената равенка вкупно има  $2 \cdot 24 = 48$  решенија.

22. На цртежот Марко сака да доцрта отсечки, така што секоја од точките да има ист број на врски со останатите точки. Кој е најмалиот број на отсечки кои Марко мора да ги доцрта?

A) 4      B) 5      C) 6      D) 9      E) 12

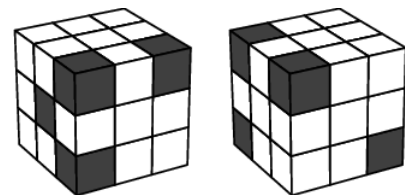


**Решение. D).** Најмногу отсечки кои излегуваат од една точка се 3. Кога би сакале од секоја точка да излегуваат 3 отсечки треба да доцртаме  $\frac{7 \cdot 3}{2} - 5 = \frac{11}{2}$  отсечки, што не е можно (бројот на отсечките е природен број). За да има по 4 отсечки треба да доцртаме  $\frac{7 \cdot 4}{2} - 5 = 9$  отсечки. На цртежот десно е прикажано доцртувањето на овие 9 отсечки.

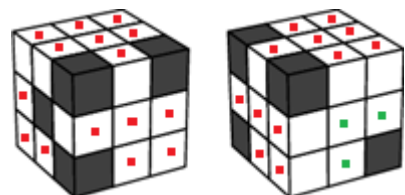


23. На цртежот се дадени два различни погледи на една иста коцка. Таа е составена од 27 единечни коцки, од кои некои се бели, а некои се црни. Колку најмногу единечни коцки може да бидат црни?

A) 5      B) 7      C) 8      D) 9      E) 10



**Решение. D).** Можеме да преброиме колку мали коцки мора задолжително да се бели. За таа цел прво ќе ги означиме белите коцки на левиот цртеж, при што добиваме дека 15 бели коцки се видливи (секоја од овие коцки е означена со по едно црвено квадратче).



Сега, ако на десниот цртеж ги означиме белите коцки кои се видливи и на левиот цртеж (повторно со по едно црвено квадратче), добиваме дека големата коцка мора да има барем уште 3 бели коцки, кои на десниот цртеж се означени со

зелено квадратче. Според тоа, најмалку мора да имаме  $15 + 3 = 18$  единечни бели коцки, па затоа најголемиот можен број единечни црни коцки е  $27 - 18 = 9$ .

24. На еден остров имало два вида на жаби: зелени и сини. Бројот на сините жаби се зголемил за 60%, а бројот на зелените жаби се намалил за 60%. По промената односот на сините жаби наспрема зелените жаби е ист како пред промената но во обратен редослед. За кој процент се променил бројот на жабите на островот?  
 A) 0%            B) 20%            C) 30%            D) 40%            E) 50%

**Решение. В).** Ако со  $s$  го означиме бројот на сините жаби, тогаш новиот број на сини жаби е  $1,6s$ . Ако со  $z$  го означиме бројот на зелените жаби, тогаш новиот број зелени жаби е  $0,4z$ . Од равенството  $\frac{1,6s}{0,4z} = \frac{z}{s}$  следува  $z = 2s$ . Според тоа,  $\frac{1,6s + 0,4z}{s + z} = \frac{2,4s}{3s} = 0,8$ , од што следува дека сега на островот има 20% помалку жаби.

25. Мартина на таблет запишала повеќе позитивни цели броеви, кои не се поголеми од 100. Нивниот производ не бил делив со 18. Кој е најголемиот број на броеви што таа може да ги запишала на таблата?  
 A) 5            B) 17            C) 68            D) 69            E) 90

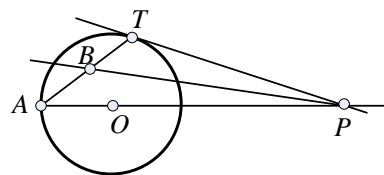
**Решение. С).** Имаме,  $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ , па затоа меѓу запишаните броеви не смее да има два броја кои се деливи со 3, односно не смее да има број кој е делив со 9. Ако ги избришеме сите броеви кои се деливи со 3, освен бројот 3, тогаш ќе избришеме  $\lfloor \frac{100}{3} \rfloor - 1 = 33 - 1 = 32$  броја. Според тоа, Мартина може да запишала најмногу  $100 - 32 = 68$  броја.

26. Секои три темиња на една коцка формираат триаголник. Кој е бројот на триаголници чии темиња се темиња на коцката што не лежат на еден негов ѕид?  
 A) 16            B) 24            C) 32            D) 40            E) 48

**Решение. С).** Вкупно имаме  $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$  триаголници чии темиња се темињата на коцката. На секој ѕид на коцката имаме по  $\binom{4}{3} = 4$  триаголници чии темиња се темиња на ѕидот. Коцката има 6 ѕида, па затоа од вкупниот број

триаголници треба да одземеме  $6 \cdot 4 = 24$  триаголници. Според тоа, бараниот број триаголници е  $56 - 24 = 32$ .

27. На цртежот  $PT$  е тангента на кружницата  $k$  со центар  $O$ , а  $PB$  е симетрала на аголот  $\angle TPA$ . Колку е аголот  $\angle TPB$ ?

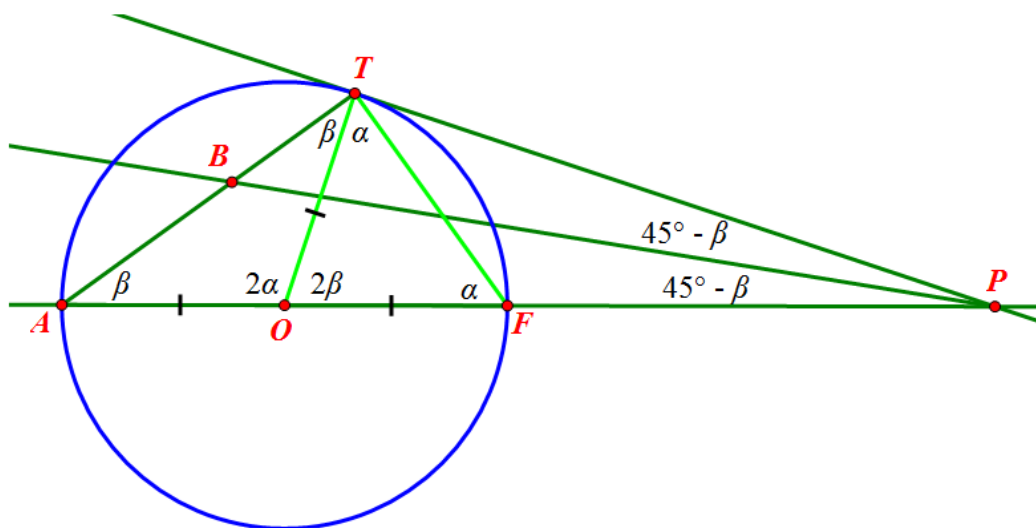


- A)  $30^\circ$       B)  $45^\circ$       C)  $60^\circ$       D)  $75^\circ$

E) зависи од изборот на точката  $P$

**Решение. B).** Нека правата  $AP$  по втор пат ја сече кружницата во точката  $F$ .

Од Талесовата теорема следува  $\angle ATF = 90^\circ$ . Понатаму тангентата е нормална на радиусот на кружницата во допирната точка, па затоа  $\angle OTP = 90^\circ$ . Сега, ако искористиме дека триаголниците  $AOT$  и  $OFT$  се рамнокраки и дека надворешниот агол на триаголникот е еднаков на збирот на двата несоседни внатрешни агли, ги добиваме односите прикажани на долниот цртеж.



Од триаголникот  $BTF$  следува

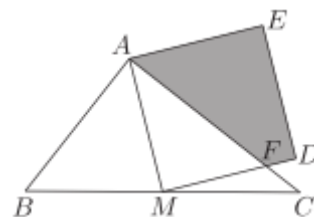
$$\angle TBP + (45^\circ - \beta) + (90^\circ + \beta) = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle TBP = 45^\circ.$$

28. Мартин на табла во растечки редослед ги запишал сите седумцифрени броеви запишани со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 така што во секој запишан број секоја цифра се јавува по еднаш. Кој е последниот број од првата половина од запишаните броеви?

- A) 1234567      B) 3765421      C) 4123567      D) 4352617      E) 4376521

**Решение. Е).** Мартин вкупно запишал  $7! = 5040$  броеви. Според тоа, треба да го определиме бројот кој се наоѓа на 2520-тото место. Најмали се броевите кои на првото место имаат цифра 1 и нив ги има  $6! = 720$ . Потоа имаме  $6! = 720$  броеви кои на првото место имаат цифра 2 и  $6! = 720$  броеви кои на првото место имаат цифра 3. Досега имаме  $3 \cdot 720 = 2160$  броеви. Следуваат  $6! = 720$  броеви кои на првото место имаат цифра 4. Значи, треба во оваа група броеви треба да го определиме бројот кој се наоѓа на 360-тото место. Меѓу нив има  $5! = 120$  кај кои втората цифра е 1, потоа  $5! = 120$  кај кои втората цифра е 2 и  $5! = 120$  кај кои втората цифра е 3. Бидејќи  $3 \cdot 120 = 360$ , ние всушност треба да го определиме најголемиот број кај кој втората цифра е 3, а тоа е бројот 4376521.

29. Во триаголникот  $ABC$  важи  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ ,  $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$  и  $\overline{BC} = 10 \text{ cm}$ , а  $M$  е средина на страната  $BC$ . Четириаголникот  $AMDE$  е квадрат при што  $MD$  ја сече  $AC$  во точката  $F$ . Определи ја плоштината на четириаголникот  $AFDE$  во  $\text{cm}^2$ .



- A)  $\frac{124}{8}$       B)  $\frac{125}{8}$       C)  $\frac{126}{8}$       D)  $\frac{127}{8}$       E)  $\frac{128}{8}$

**Решение. В).** Според обратната Питагорова теорема триаголникот  $ABC$  е правоаголен, со прав агол во темето  $A$ . Затоа  $M$  е центар на опишаната кружница околу овој триаголник, односно важи

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = 5 \text{ cm} \text{ и } \angle ABM = \angle MAB, \angle MAC = \angle ACM.$$

Сега, од признакот AA триаголниците  $ABC$  и  $AMF$  се слични. Од оваа сличност следува  $\overline{MF} = \frac{\overline{MA} \cdot \overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5 \cdot 6}{8} = \frac{15}{4} \text{ cm}$ . Плоштината на четириаголникот  $AFDE$  е еднаква на разликата на плоштината на квадратот  $AMDE$  и триаголникот  $AMF$ , т.е. на  $5^2 - \frac{5 \cdot 15}{2} = \frac{125}{8} \text{ cm}^2$ .

30. Во еден ред стојат 2014 луѓе. Секој од нив е или лажго или витез. Лажливците секогаш лажат, а витезите секогаш ја зборуваат вистината. Секој од нив вели: „Постојат повеќе лажливци на мојата лева страна отколку витези на мојата десна страна“. Колку лажливци има во редот?

A) 0      B) 1      C) 1007      D) 1008      E) 2014

**Решение. C).** Нека претпоставиме дека има витез кој се наоѓа лево од некој лажливец: ...ВЛ... Нека бројот на лажливците лево од овој витез е  $a$ , а бројот на витезите десно од него е  $b$ . Од неговата изјава следува дека  $a > b$ . Сега лево од лажливецот има  $a$  лажливци, а десно од него има  $b$  витези. Бидејќи лажливецот секогаш лаже, добиваме дека бројот на лажливците лево од него е помал или еднаков на бројот витезите десно од него, односно  $a \leq b$ . Од добиените неравенства следува  $b \geq a > b$ , што е противречност. Од добиената противречност следува дека секој лажливец е лево од секој витез, т.е. прво се наредени лажливците, а потоа се наредени витезите. Нека имаме  $x$  лажливци и  $y$  витези. Од изјавата на првиот витез одлево во редот следува  $x > y - 1$ , а од изјавата на последниот лажливец од лево во редот следува  $x - 1 \leq y$ . Значи,  $y + 1 \geq x > y - 1$ , од каде следува  $x = y$  или  $x = y + 1$ . Случајот  $x = y + 1$  не е можен бидејќи тогаш  $2y + 1 = 2014$ , а  $x = y$  следува дека во редот има 1007 лажливци и 1007 витези.

## Junior (прва и втора година) 2015

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Кој од следниве броеви е најблиску до бројот  $20,15 \cdot 51,02$  ?

A) 100      B) 1000      C) 10000      D) 100000      E) 1000000

**Решение. B).** Имаме,  $20,15 \cdot 51,02 = 1028,053$ , што значи дека најблизок е бројот 1000.

2. Мајката ги испрала алиштата и ги закачила маиците да се сушат во линија на една жица. Потоа им рекла на своите деца меѓу секои две маици да стават по еден чорап. Сега на жицата има вкупно 29 парчиња облека. Колку маици има на жицата?

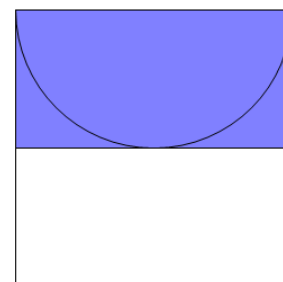
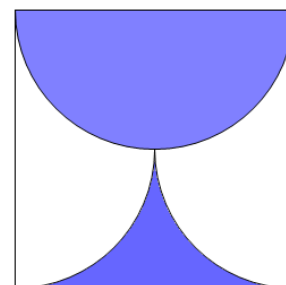
A) 10      B) 11      C) 13      D) 14      E) 15

**Решение. E).** Ако извадиме една крајна маица (од лево или од десно), тогаш на жицата има 28 парчиња облека и притоа е еднаков број маици и чорапи. Значи, на жицата има  $28 : 2 = 14$  чорапи и  $14 + 1 = 15$  маици.

3. Обоениот дел од квадратот со страна  $a$  е ограничен со полукружница и два лаци кои соодветствуваат на половина од истата полукружница (види цртеж). Колкава е неговата плоштина?

A)  $\frac{\pi a^2}{8}$       B)  $\frac{a^2}{2}$       C)  $\frac{\pi a^2}{2}$       D)  $\frac{a^2}{4}$       E)  $\frac{\pi a^2}{4}$

**Решение. B).** Ако долниот обоен дел го поделиме на половина и добиените делови ги преместиме како на цртежот десно, добиваме дека плоштината на обоениот

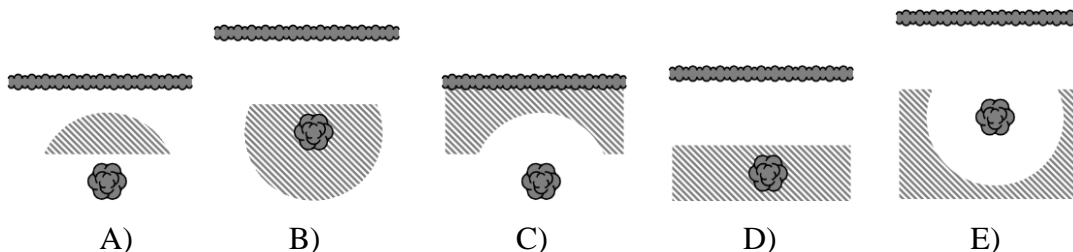


дел е еднаква на половина од плоштината на квадратот, т.е. на  $\frac{a^2}{2}$ .

4. Три сестри Ана, Бети и Сара купиле пакување со вкупно 30 колачиња. Секоја од нив добила по 10 колачиња. Ана платила 80 центи, Бети платила 50 центи, а Сара платила 20 центи. Ако ги поделат колачињата пропорционално на сумата пари која ја платиле, колку повеќе колачиња ќе добие Ана?
- A) 10      B) 9      C) 8      D) 7      E) 6

**Решение. Е).** Колачињата треба да ги поделиме во однос 8:5:2, т.е. Ана треба да добие  $8a$  колачиња, Бети треба да добие  $5a$  и Сара треба да добие  $2a$  колачиња. Од  $8a + 5a + 2a = 30$  добиваме  $a = 2$ . Значи, Ана треба да добие  $8 \cdot 2 = 16$  колачиња, односно уште 6 колачиња.

5. Господинот Скржавко сака да го откопа богатството што го закопал во неговата градина пред повеќе години. Тој се сеќава само дека богатството го закопал најмалку 5 m од оградата на градината и најмногу 5 m оддалечено од стеблото на старата круша. Која од овие слики го покажува местото на кое господин Скржавко треба да го бара неговото закопано богатство?



**Решение. В).** Станува збор за делот од градината кој е ограничен со кругот со центар во стеблото на крушата и радиус 5 m и се наоѓа „под“ правата која од оградата е оддалечена 5 m. Јасно, тоа е сликата В).

6. Која е цифрата на единиците на вредноста на изразот

$$2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5 ?$$

- A) 1      B) 5      C) 6      D) 7      E) 9

**Решение. С).** Нултиот степен на секој број е еднаков на 1, а како секој ненулти степен на бројот 2015 има цифра на единиците 5, заклучуваме дека цифрата на единиците на вредноста на изразот е еднаква на цифрата на единиците на  $5 + 1 + 5 + 5 = 16$ , односно таа е 6.

7. Во едно одделение има 33 ученици. Нивните омилен предмет се информатика и физичко образование. Тројца одговориле дека и двата предмети им се омилен. Од останатите, бројот на ученици на кои омилен предмет им е само информатика е двојно поголем од оние на кои омилен предмет им е само физичко воспитување. На колку ученици информатика им е омилен предмет?
- A) 15            B) 16            C) 20            D) 22            E) 23

**Решение. Е).** Нека  $a$  е бројот на учениците на кои омилен предмет им е само физичко образование. Тогаш само информатика е омилена на  $2a$  ученици. Затоа важи  $a + 2a + 3 = 33$ , од каде добиваме  $a = 10$ . Значи, информатика е омилена на  $2a + 3 = 23$  ученици.

8. Кој од следниве броеви не е ниту полн квадрат, ниту полн куб на некој број?
- A)  $6^{13}$             B)  $5^{12}$             C)  $4^{11}$             D)  $3^{10}$             E)  $2^9$

**Решение. А).** Еден број е точен квадрат ако степените на сите прости множители во каноничното разложување се парни броеви, а е точен куб ако тие се деливи со 3. Јасно,  $5^{12}$ ,  $3^{10}$  и  $4^{11} = 2^{22}$  се точни квадрати, а  $2^9$  е точен куб. Но,  $6^{13} = 2^{13} \cdot 3^{13}$ , па затоа овој број не е ниту точен квадрат, ниту точен куб.

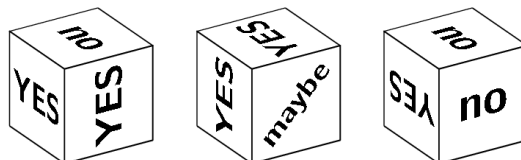
9. Господин Попоски купил 100 свеќи. Тој секој ден палел по една свеќа и задолжително правел нова свеќа од остатоците од свеќите што ги палел во минатите седум дена. После колку дена господинот Попоски ќе треба да оди и повторно да купи нови свеќи?
- A) 112            B) 114            C) 115            D) 116            E) 117

**Решение. D).** Бидејќи  $100 = 7 \cdot 14 + 2$ , од искористените 100 свеќи Попоски ќе направи 14 свеќи и остатокот од 2 свеќи нема да го употреби. Сега од остатокот на  $14 + 2 = 16$  свеќи, заради  $16 = 7 \cdot 2 + 2$  тој ќе направи 2 свеќи и остатокот од 2 свеќи нема да го употреби. Потоа има остаток од  $2 + 2 = 4$  свеќи и Попоски не може да направи нова свеќа. Значи, по  $100 + 14 + 2 = 116$  Попоски мора да купи нови свеќи.

10. Бројот на правите агли на конвексен петаголник е  $n$ . Кои се сите можни вредности на  $n$ ?
- A) 1, 2, 3            B) 0, 1, 2, 3, 4            C) 0, 1, 2, 3            D) 0, 1, 2            E) 1, 2

**Решение. С).** Збирот на агли на конвексен петаголник е  $(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$ . Ако петаголникот има 4 прави агли, тогаш петтиот агол треба да е еднаков на  $540^\circ - 4 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ , што не е можно, бидејќи агол на многуаголник не е еднаков на рамниот агол. Правилниот петаголник нема прави агли, па лесно се скицираат конвексни петаголници со 0, 1, 2 и 3 прави агли.

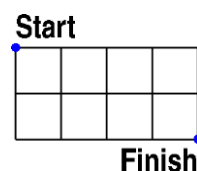
11. На сликата е прикажана коцка за фрлање во три различни положби. Колкава е веројатноста на горната страна на коцката да падне YES?



- A)  $\frac{1}{3}$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{5}{9}$       D)  $\frac{2}{3}$       E)  $\frac{5}{6}$

**Решение. В).** Јасно, најмногу на три сида на коцката е запишан зборот YES. Притоа, бидејќи на првиот и третиот цртеж поставеноста на зборовите по и YES на два соседни сида е различна заклучуваме дека на коцката точно три пати е запишан зборот YES. Според тоа, бараната веројатност е  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

12. Должината на страните на секој квадрат на цртежот десно е 1. Која е најмалата можна должина на пат кој треба да се помине за да од точката Start стигнеме до точката Finish, ако е дозволено движење само долж страните или дијагоналите на оделните квадрати?



- A)  $2\sqrt{5}$       B)  $\sqrt{10} + \sqrt{2}$       C)  $2 + 2\sqrt{2}$       D)  $4\sqrt{2}$       E) 6

**Решение. С).** Од неравенството на триаголник следува дека најкраткиот пат е кога движејќи се одгоре-надолу поминуваме најголем можен број дијагонали. Значи, треба да поминеме по две дијагонали (секоја со должина  $\sqrt{2}$ ) и две страни (секоја со должина 1). Според тоа, должината ба најкраткиот пат е  $2 + 2\sqrt{2}$ .

13. Секој жител на планетата Вингер има најмалку две уши. Тројца жители Ими, Дими и Трими се сретнале во еден кратер. Ими рекол: „Јас можам да видам 8 уши.“ Дими рекол: „Јас можам да видам 7 уши.“ Трими рекол: „Чудно, но јас можам да видам 5 уши.“ Ниту еден од нив не може да си ги види своите уши.

Колку уши има Трими?

- A) 2            B) 4            C) 5            D) 6            E) 7

**Решение. C).** Со  $i, d, t$  да го означиме бројот на ушите на Ими, Дими, Трими, соодветно. Од условот на задачата следува  $d+t=8$ ,  $i+t=7$  и  $i+d=5$ . Ако ги собереме трите равенки добиваме  $2i+2d+2t=20$ , т.е.  $i+d+t=10$ . Конечно,  $t=10-(i+d)=5$ .

14. Сад во форма на права призма чија основа е квадрат со страна  $10\text{ cm}$ , е наполнет со вода до висина од  $h\text{ cm}$ . Полна коцка со рабови со должина  $2\text{ cm}$  е ставена во водата. Која е најмалата можна вредност на  $h$  таква што коцката може целосно да е потопена во водата? а

- A)  $1,92\text{ cm}$     B)  $1,93\text{ cm}$     C)  $1,90\text{ cm}$     D)  $1,91\text{ cm}$     E)  $1,94\text{ cm}$

**Решение. A).** Волуменот на коцката е  $2^3 = 8\text{ cm}^3$ . Откако ќе ја потопиме коцката во садот висината на водата треба да е еднаква на висината на коцката  $2\text{ cm}$ . Затоа волуменот на водата и коцката заедно треба да биде  $10^2 \cdot 2 = 200\text{ cm}^3$ . Значи, волуменот на водата во коцката треба да е  $200 - 8 = 192\text{ cm}^3$ . Конечно, најмалата можна вредност на  $h$  е  $h = \frac{192}{10^2} = 1,92\text{ cm}$ .

15. Даден квадрат  $ABCD$  има плоштина  $80$  квадратни единици (види цртеж). Точките  $E, F, G$  и  $H$  се на страните на квадратот и важи

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} \text{ и } \overline{AE} = 3\overline{EB}.$$

Колку изнесува плоштината на обоениот дел на квадратот?

- A) 20    B) 25    C) 30    D) 35    E) 40

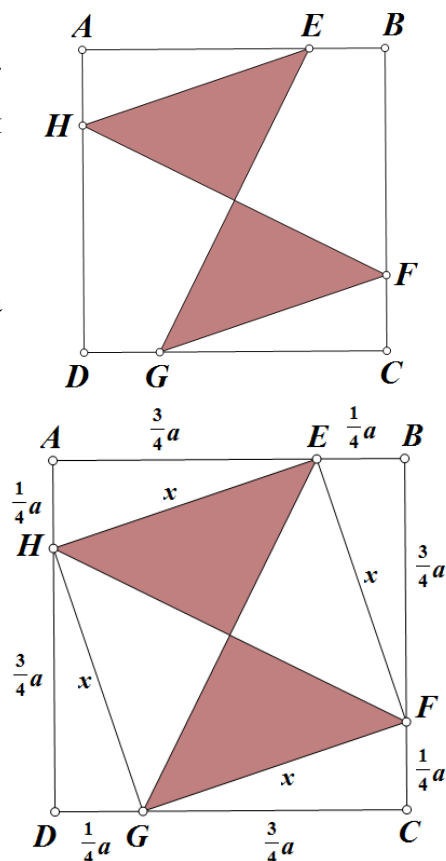
**Решение. B).** Нека  $a$  е должината на страната на квадратот  $ABCD$ . Тогаш

$$\overline{AE} = \frac{3a}{4}, \overline{EB} = \frac{a}{4}.$$

При ознаки како на цртежот десно имаме

$$x = \overline{HE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}.$$

Сега, од Питагоровата теорема следува



$$x^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}a^2.$$

Значи,

$$P_{EFGH} = x^2 = \frac{5}{8}a^2 = 50,$$

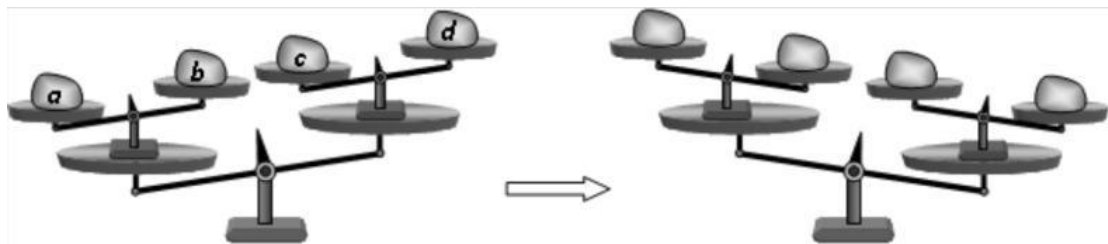
па затоа плоштината на обоениот дел е  $\frac{1}{2}P_{EFGH} = 25$

16. Денес, производот на годините на еден татко и неговиот син е 2015. Колкава е разликата на нивните години?

A) 26            B) 29            C) 31            D) 34            E) 36

**Решение. D).** Го разложуваме бројот 2015 на прости множители:  $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ . Комбинацијата која има смисла е таткото да има  $5 \cdot 13 = 65$  години, а синот да има 31 година. Разликата на нивните години е 34.

17. Четири вреќички со различни маси  $a, b, c, d$  се ставени на вага (види цртеж). Откако на две вреќички им се заменети местата, како резултат е добиена положба на вагата како на десниот цртеж. Кои вреќички ги замениле местата?



A)  $a$  и  $b$             B)  $b$  и  $d$             C)  $b$  и  $c$             D)  $a$  и  $d$             E)  $a$  и  $c$

**Решение. D).** Имаме  $a > b, c > d, a + b > c + d$ . Бидејќи по замената на местата на две вреќички се менува рамнотежата на големите тасови на вагата, мора да има замена на местата на една од вреќичките со маси  $a, b$  со една од вреќичките со маси  $c, d$ . Можни се четири случаи и сите одделно ќе ги разгледаме.

- 1) Ако местата ги заменат  $a$  и  $c$ , тогаш важи  $b > c, d > a, a + d > b + c$ . Според тоа,  $d > a > b > c > d$ , што е противречност.
- 2) Ако местата ги заменат  $b$  и  $c$ , тогаш важи  $c > a, d > b, b + d > a + c$ . Според тоа,  $a + b + b + d > c + d + a + c$ , од каде добиваме  $b > c$ . Значи,  $b > c > a > b$ , што е противречност.

- 3) Ако местата ги заменат  $b$  и  $d$ , тогаш важи  $d > a, b > c, b + c > a + d$ . Според тоа,  $d > a > b > c > d$ , што е противречност.
- 4) Ако местата ги заменат  $a$  и  $d$ , тогаш важи  $b > d, a > c, a + c > b + d$ . Според тоа,  $a + b + a + c > c + d + b + d$ , од каде добиваме  $a > d$ . Тоа значи дека најголема маса има вреќичката  $a$ , најмала маса има вреќичката  $d$  и при промена на местата на овие две вреќички се добива саканата положба на вагата.

18. Ако двата корени на равенката  $x^2 - 85x + c = 0$  се прости броеви, која е вредноста на збирот на цифрите на бројот  $c$ ?
- A) 12            B) 13            C) 14            D) 15            E) 21

**Решение. B).** Од Виетовите формули следува  $x_1 x_2 = c$ ,  $x_1 + x_2 = 85$ . Единствени прости броеви чиј збир е 85 се броевите 2 и 83, па затоа  $c = 2 \cdot 83 = 166$ . Конечно, збирот на цифрите на бројот  $c$  е 13.

19. Колку трицифрени позитивни цели броеви постојат кај кои што било кои две соседни цифри се разликуваат за три?
- A) 12            B) 14            C) 16            D) 20            E) 27

**Решение. D).** Тоа се броевите: 141, 147, 252, 258, 303, 363, 369, 414, 474, 525, 585, 630, 636, 696, 741, 747, 852, 858, 963, 969. Значи, имаме 20 трицифрени броеви со саканото својство

20. Што е контрапример на тврдењето:

Ако  $n$  е прост број, тогаш точно еден од броевите  $n-2$  и  $n+2$  е прост број?

- A)  $n = 11$       B)  $n = 19$       C)  $n = 21$       D)  $n = 29$       E)  $n = 37$

**Решение. E).** Бројот  $n = 21$  не е прост, па затоа тоа не е бараниот контрапример.

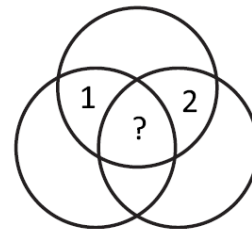
За  $n = 11$  имаме  $n-2 = 9$  и  $n+2 = 13$ , т.е. тврдењето е точно.

За  $n = 19$  имаме  $n-2 = 17$  и  $n+2 = 21$ , т.е. тврдењето е точно.

За  $n = 29$  имаме  $n-2 = 27$  и  $n+2 = 31$ , т.е. тврдењето е точно.

За  $n = 37$  имаме  $n-2 = 35$  и  $n+2 = 39$ , па како двата броја се сложени ова е бараниот контрапример.

21. На цртежот се прикажани седум области ограничени со три кружници. Во секоја област е запишан број. Познато е дека бројот запишан во било која област е еднаков на збирот на броевите во сите негови соседни области. (Се смета дека две области се соседни, ако нивната граница има повеќе од една заедничка точка.) Два од броевите се познати (види цртеж). Кој број е напишан во централната област?



- A) 0      B) -3      C) 3      D) -6      E) 6

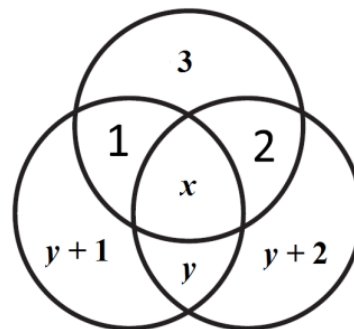
**Решение. А).** При ознаки како на цртежот десно добиваме

$$x = 1 + 2 + y, \quad y = y + 1 + x + y + 2,$$

т.е. го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} x = y + 3, \\ y = 2y + x + 3, \end{cases}$$

чије решение е  $x = 0, y = -3$ .



22. Петра има три различни речници и два различни романи. На колку различни начини таа може да ги подреди книгите на полица, ако сака речниците да бидат еден до друг и романите да бидат еден до друг.

- A) 12      B) 24      C) 30      D) 60      E) 120

**Решение. В).** Да забележиме дека прво може да ги стави речниците, а потоа романите и обратно. Понатаму, трите речници може да ги нареди еден до друг на  $3! = 6$  начини, а двата романи на  $2! = 2$  начини. Значи, вкупниот број распореди на романите и речниците на саканиот начин е  $2 \cdot 3! \cdot 2! = 24$ .

23. Колку двоцифрени броеви може да се запишат како збир на точно шест различни степени на бројот 2, вклучувајќи го како степен и бројот  $2^0$ ?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**Решение. С).** Степени на бројот 2 кои се помали од бројот 100 се:

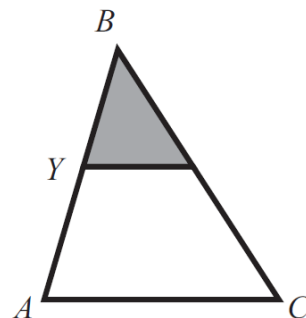
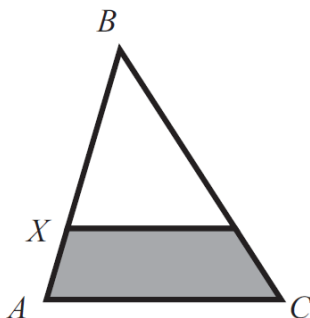
$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64.$$

Значи, имаме седум степени и треба збирот на шест од нив да е помал од 100. Јасно, не е можно броевите 64 и 32 истовремено да учествуваат во збирот на

шесте броја, бидејќи тогаш најмалиот можен збир е  $1+2+4+8+32+64=111$  и тоа е трицифрен број. Значи, имаме две можности

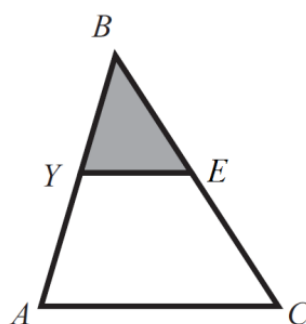
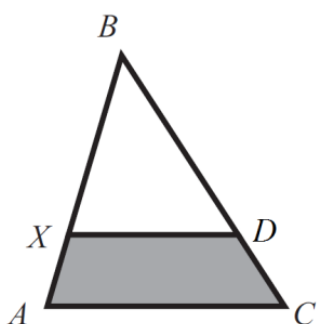
$$1+2+4+8+16+32=63 \text{ и } 1+2+4+8+16+64=95.$$

24. Во триаголник  $ABC$  низ точките  $X$  и  $Y$  се повлечени прави паралелни на страната  $AC$  (види цртеж). Плоштините на обоените области (види цртеж) се еднакви и важи  $\overline{BX} : \overline{XA} = 4:1$ . Колку е размерот  $\overline{BY} : \overline{YA}$ ?



А) 1:1    В) 2:1    С) 3:1    Д) 3:2    Е) 4:3

**Решение. Д).** При ознаки како на цртежот десно триаголниците  $ABC$  и  $XBD$  се слични со коефициент на сличност  $\frac{4}{5}$ . Со  $p$  да ја означиме плоштината триаголникот  $ABC$ .

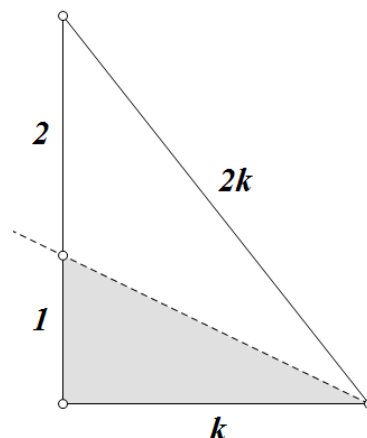


Тогаш плоштината на четириаголникот  $AXDC$  е  $p - (\frac{4}{5})^2 p = (\frac{3}{5})^2 p$ . Триаголниците  $ABC$  и  $YEB$  се слични со коефициент на сличност  $k$ . Значи, плоштината на триаголникот  $YEB$  е еднаква на  $k^2 p$ . Според тоа,  $k^2 p = (\frac{3}{5})^2 p$ , од каде добиваме  $k = \frac{3}{5}$ . Конечно,  $\overline{BY} : \overline{YA} = 3:2$ .

25. Во правоаголен триаголник, симетралата на едниот остар агол ја дели спротивната страна на отсечки со должина 1 и 2. Колкава е должината на симетралата?

- А)  $\sqrt{2}$     В)  $\sqrt{3}$     С)  $\sqrt{4}$     Д)  $\sqrt{5}$     Е)  $\sqrt{6}$

**Решение. С).** Должината на едната катета на триаголникот е 3. Од теоремата за симетралата на агол следува дека должината на другата катета е  $k$ , а на



хипотенузата е  $2k$ . Сега, од Питагоровата теорема следува  $(2k)^2 = k^2 + 3^2$ , па затоа  $k = \sqrt{3}$ . Повторно од Питагоровата теорема за должината на симетралата на аголот наоѓаме  $s = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ .

26. Нека  $a, b, c$  се различни цифри. На колку начини може да се изберат цифрите  $a, b, c$  така што да важи  $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ ?

A) 84            B) 96            C) 125            D) 201            E) 502

**Решение. A).** Од неравенствата  $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$  следува  $a < b < c$ . Начините на избор на цифрите  $a, b, c$  се дадени во следната табела:

$a$	$b$	$c$	Број на избори
1	2	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	28
	3	4, 5, 6, 7, 8, 9	
	4	5, 6, 7, 8, 9	
	5	6, 7, 8, 9	
	6	7, 8, 9	
	7	8, 9	
	8	9	
2	3	4, 5, 6, 7, 8, 9	21
	4	5, 6, 7, 8, 9	
	5	6, 7, 8, 9	
	6	7, 8, 9	
	7	8, 9	
	8	9	
3	4	5, 6, 7, 8, 9	15
	5	6, 7, 8, 9	
	6	7, 8, 9	
	7	8, 9	
	8	9	
4	5	6, 7, 8, 9	10
	6	7, 8, 9	
	7	8, 9	
	8	9	
5	6	7, 8, 9	6
	7	8, 9	
	8	9	
6	7	8, 9	3
	8	9	
7	8	9	1
Вкупно избори			84

27. Дадени се броевите  $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ . Еден од овие броеви е отстранет и е добиено дека аритметичката средина на останатите броеви е еднаква на  $4,75$ . Кој број е отстранет?

A) 5      B) 7      C) 8      D) 9      E) Не е можно да се определи

**Решение. B).** Со  $a \in \mathbb{N}$  да го означиме бројот кој е отстранет.

Збирот на преостанатите  $n-1$  е  $\frac{n(n+1)}{2} - a$ , па затоа важи  $\frac{n(n+1)}{2} - a = 4,75(n-1)$ ,

од каде добиваме  $a = \frac{n(n+1)}{2} - 4,75(n-1)$ . Бидејќи  $\frac{n(n+1)}{2}$  е природен број, за да

$a \in \mathbb{N}$  треба  $n-1$  да е делив со 4.

За  $n-1=4$ , т.е.  $n=5$  добиваме  $a=-4$ , што не е можно.

За  $n-1=8$ , т.е.  $n=9$  добиваме  $a=7$  и тоа е едно решение.

Ако  $n-1=4k$ ,  $k \geq 3$ , т.е.  $n=4k+1$ ,  $k \geq 3$ , тогаш најмалата аритметичка средина која може да се добие со исфрлање на еден од броевите  $1, 2, 3, \dots, n-1, n$  ќе биде

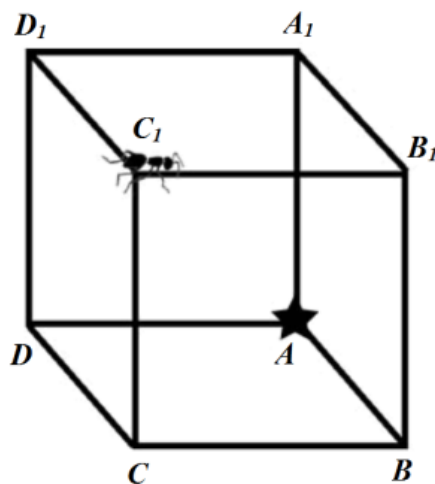
$$\frac{4k(4k+1)}{2 \cdot 4k} = \frac{4k+1}{2} \geq \frac{4 \cdot 3 + 1}{2} = 6,5$$

и како  $6,5 > 4,75$  заклучуваме дека во овој случај немаме решение на задачата.

28. Мравката Оги почнала да шета по еден од рабовите на коцка со раб со должина 1. Таа сака да оди долж секој раб на коцката и да се врати во нејзината почетна положба, така што патот што ќе го измине да е најкраток. Која е должината на нејзината патека?

A) 12      B) 14      C) 15      D) 16      E) 20

**Решение. D).** Од секое теме на коцката излегуваат по 3 раба. Затоа за да се помине по сите рабови на коцката мора секое теме да го посети по два пати. Затоа должината на патот по кој ќе помине мравката Оги не може да е помала од 16. При ознаки како на цртежот десно можна е прошетка со должина 16 и ако почнеме од темето  $A$  темињата низ кои Оги последователно ќе поминува се:



$$B - B_1 - B - C - C_1 - C - D - D_1 - D - A - A_1 - D_1 - C_1 - B_1 - A_1 - A.$$

29. Запишани се десет различни броеви. Секој број кој што е производ на останатите девет броеви е подцртан. Колку најмногу броеви може да бидат подцртани?  
 А) 1      В) 2      С) 3      Д) 9      Е) 10

**Решение. В).** Сигурно може да се подцрта еден број, на пример, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 362880.

Може да бидат подцртани и два броја доколку имаме два спротивни броја, а производот на другите 8 броја е  $-1$ . На пример,  $-2$  0,5 4 0,25 8 0,125 10 0,1 9 -9.

Да претпоставиме дека може да бидат подцртани три броја  $a, b, c$ . Со  $x$  да го означиме производот на другите 7 броеви. Тогаш важи  $a = bcx$ ,  $b = acx$ ,  $c = abx$ , па затоа  $a^2 = abcx$ ,  $b^2 = abcx$ ,  $c^2 = abcx$ , т.е.  $a^2 = b^2 = c^2$ , што противречи на претпоставката дека броевите  $a, b, c$  се различни.

30. На една права се означени неколку точки и ги разгледуваме сите можни отсечки чии крајни точки се две од овие точки. Една од точките припаѓа на 80 од овие отсечки, а друга точка припаѓа на 90 отсечки (не сметајќи ги отсечките на кои оваа точка е крајна). Колку точки се означени на правата?  
 А) 20      В) 22      С) 80      Д) 90      Е) Не е можно да се определи.

**Решение. В).** Ако набљудуваме една точка забележуваме дека таа припаѓа на  $k \cdot l$  од конструираните отсечки (не сметајќи ги отсечките на кои оваа точка е крајна), каде  $k$  е бројот на точките лево од точката која ја набљудуваме, а  $l$  е бројот на точките десно од неа. Во овој случај вкупниот број означени точки е  $k + l + 1$ . Во долните табели се дадени можностите една точка да припаѓа на 80, односно 90 отсечки (за  $k \leq l$ ):

$k$	$l$	$k+l+1$
1	80	82
2	40	42
4	20	25
5	16	22
8	10	19

$k$	$l$	$k+l+1$
1	90	92
2	45	48
3	30	34
5	18	24
6	15	22
9	10	20

Гледаме дека бројот на точките се совпаѓа само за 22 и тоа е решение.

**Junior (прва и втора година) 2016**

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Аритметичката средина на четири броја е 9. Кој е четвртиот број, ако трите броеви се 5, 9 и 12?

A) 6      B) 8      C) 9      D) 10      E) 36

**Решение. D).** Имаме,  $\frac{5+9+12+a}{4} = 9$ , од каде добиваме  $26+a=36$ , т.е.  $a=10$ .

2. До кој број најблиску се наоѓа вредноста на дробката  $\frac{17 \cdot 0,3 \cdot 20,16}{999}$  ?

A) 0,01      B) 0,1      C) 1      D) 10      E) 100

**Решение. B).** Имаме,

$$\frac{17 \cdot 0,3 \cdot 20,16}{999} = \frac{5,1 \cdot 20,16}{999} \approx \frac{5 \cdot 20}{1000} = 0,1$$

или

$$\frac{17 \cdot 0,3 \cdot 20,16}{999} = \frac{5,1 \cdot 20,16}{999} = \frac{102,816}{999} = 0,10291(891) \approx 0,1.$$

3. На еден тест се дадени 30 прашања. Дијана одговорила на сите прашања. На колку прашања таа одговорила точно, ако бројот на нејзините точни одговори е 50% поголем од бројот на нејзините погрешни одговори?

A) 10      B) 12      C) 15      D) 18      E) 20

**Решение. D).** Нека со  $a$  го означиме бројот на неточните одговори. Тогаш бројот на точните одговори е  $1,5a$ , па затоа  $a+1,5a=30$ , од каде добиваме  $a=12$ . Значи, Дијана неточно одговорила на 12, а точно одговорила на 18 прашања.

4. Во правоаголен координатен систем четири од посочените точки се темиња на квадрат. Која точка не е теме на квадратот?

- A)  $A(-1;3)$     B)  $B(0;-4)$     C)  $C(-2;-1)$     D)  $D(1;1)$     E)  $E(3;-2)$

**Решение. А).** Имаме,

$$\overline{AB} = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{50},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{17},$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{8},$$

па како  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ ,  $\overline{AB} \neq \overline{AD}$ ,  $\overline{AC} \neq \overline{AD}$  точката  $A$  сигурно не е теме на квадрат чии темиња се другите четири точки. Навистина, од

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-1 - (-4))^2} = \sqrt{13},$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{26},$$

$$\overline{BE} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - (-4))^2} = \sqrt{13},$$

следува  $\overline{BC} = \overline{BE}$ ,  $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2$ , т.е. четириаголникот  $BCDE$  е квадрат.

5. При делење со 6 природниот број  $x$  дава остаток 3. Кој е остатокот, кога  $3x$  ќе се подели со 6?  
A) 4    B) 3    C) 2    D) 1    E) 0

**Решение. В).** Имаме  $x = 6a + 3$ , за некој  $a \in \mathbb{N}$ . Според тоа,

$$3x = 3(6a + 3) = 18a + 9 = 6(3a + 1) + 3,$$

што значи дека при делење на  $3x$  со 6 се добива количник  $3a + 1$  и остаток 3.

6. На колку седмици се еднакви 2016 часови?  
A) 6    B) 8    C) 10    D) 12    E) 16

**Решение. Д).** Во една седмица има  $7 \cdot 24 = 168$  часови. Сега од  $2016 : 168 = 12$  следува дека 2016 часови се еднакви на 12 седмици.

7. Малата Роза измислила нов начин за запишување на негативните цели броеви. Според нејзиниот начин записот на последователните цели броеви во опаѓачки редослед е: ..., 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000 итн. Како, според начинот на Роза, треба да се запише збирот  $000 + 0000$ ?  
A) 1    B) 00000    C) 000000    D) 0000000    E) 00000000

**Решение. С).** Според запишувањето на Роза  $000 + 0000$  претставува  $-2 + (-3)$ , што е  $-5$ . Роза тоа би го запишала како 000000.

8. Точките на една обична коцка за играње се заменети со соодветните броеви. Освен тоа, пред непарните броеви е запишан знакот минус и наместо броевите 1, 3 и 5 се добиени броевите  $-1$ ,  $-3$  и  $-5$ . Новата коцка се фрла последователно два пати. Кој од дадените броеви не може да се добие како збир на броеви паднати во две фрлања?
- A) 3      B) 4      C) 5      D) 7      E) 8

**Решение. D).** Сите броеви кои може да се добијат при две фрлања на дадената коцка се дадени во следната табела

+	-1	2	-3	4	-5	6
-1	-2	1	-4	3	-6	5
2	1	4	-1	6	-3	8
-3	-4	-1	-6	1	-8	3
4	3	6	1	8	-1	10
-5	-6	-3	-8	-1	-10	1
6	5	8	3	10	1	12

Знач, не може да се добие само бројот 7.

9. Во неколку чекори од даден збор може да се добие друг збор, при што во еден чекор е допуштено да можат да се заменат местата на две соседни букви во зборот. Во колку најмалку чекори од зборот КОСА може да се добие зборот САКО?
- A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

**Решение. B).** За да буквата С дојде на почеток мора да се направат 2 чекори и притоа се добива зборот СКОА. Сега за да буквата А дојде на свое место мора да се направат 2 чекори и притоа се добива зборот САКО. Значи, потребни се најмалку 4 чекори.

10. Калина на таблата запишала пет различни ненулни едноцифрени броеви и констатирала, дека збирот на било кои два од запишаните броеви не е еднаков на 10. Кој од дадените броеви со сигурност е запишан на таблата?
- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. E).** Да ги разгледаме паровите броеви (1,9), (2,8), (3,7) и (4,6). Од секој од овие четири пара Калина можела да запише по еден број, бидејќи во спротивно ќе има два броја чиј збир е 10. Според тоа, таа од може да запише

најмногу четири броја од множеството  $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ , па затоа петтиот запишан број мора да е 5.

11. Ако  $a+5=b^2-1=c^2+3=d-4$ , кој од броевите  $a, b, c$  и  $d$  е најголем?  
 А)  $a$     В)  $b$     С)  $c$     D)  $d$     Е) не е можно да се определи

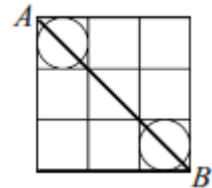
**Решение. D).** Имаме,  $d = a + 9 > a$ .

Понатаму, од  $b^2 - b + 3 = (b - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} > 0$  следува  $d = b^2 + 3 > b$ . Аналогно од

$c^2 - c + 7 = (c - \frac{1}{2})^2 + \frac{27}{4} > 0$  следува  $d = c^2 + 7 > c$ .

Значи, најголем е бројот  $d$ .

12. Квадрат  $3 \times 3$  е разделен на 9 единечни квадратчиња и во две од нив са впишани кружници (види цртеж). Определи го растојанието меѓу двете најблиски точки од кружниците, кои лежат на дијагоналата  $AB$  на квадратот.



- А)  $2\sqrt{2}-1$     В)  $2\sqrt{2}+1$     С)  $2\sqrt{2}$     D) 2    Е) 3

**Решение. А).** Бараното растојание е еднакво на збирот на должината на дијагоналата на единичниот квадрат и двете еднакви растојанија од темето на единичниот квадрат до кружницата. Според тоа, бараното растојание е еднаков на

$$\sqrt{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 1.$$

13. Дадени се 6 од резултатите на четвртфиналињата, полуфиналињата и финалето на тениски турнир, во кој победениот отпаѓа: Бојана ја победила Ана, Соња ја победила Донка, Даница ја победила Христина, Даница ја победила Соња, Соња ја победила Бојана и Ева ја победила Јана. Кој резултат недостасува?

- А) Даница ја победила Бојана    В) Соња ја победила Ана  
 С) Ева ја победила Соња    D) Бојана ја победила Христина  
 Е) Даница ја победила Ева

**Решение. Е).** Четвртфиналето отпаднале девојчињата кои одиграле само по еден натпревар, т.е. тие се среќават само по еднаш и тоа на второ место во паровите: (Бојана, Ана), (Соња, Донка), (Даница, Христина), (Даница, Соња), (Соња, Бојана) и (Ева, Јана). Јасно, тоа се Ана, Донка, Христина и Јана. Понатаму,

Соња се појавува во три пара, па затоа таа играла во финалето и бидејќи е на второ место во парот со Даница, заклучуваме дека второто девојче во финалето е Даница. Сега лесно се пополнува табелата:

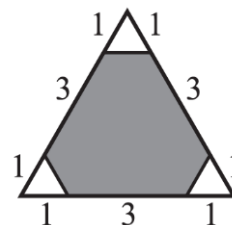
Бојана и Ана	Соња и Бојана	Даница и Соња
Соња и Донка		
Даница и Христина	Даница и Ева	
Ева и Јана		

Значи, неостасува резултатот: *Даница ја победила Ева.*

14. Колку проценти од плоштината на големиот триаголник, цртеж десно, е плоштината на обоениот дел?

A) 80      B) 85      C) 88      D) 90

E) не е можно да се определи



**Решение. C).** Должината на страната на големиот рамностран триаголник е 5, а на малите рамнострани триаголници е 1. Плоштината на големиот триаголник е  $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ , а плоштината на еден мал триаголник е  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Плоштината на обоениот дел е  $\frac{25\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{22\sqrt{3}}{4}$ , па затоа бараниот процент е

$$\frac{\frac{22\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}} \cdot 100\% = \frac{22}{25} \cdot 100\% = 88\% .$$

15. На цртежот десно е даден  $3 \times 3$  квадрат. Броевите 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100 се распоредени во единечните квадратчиња, по еден во секое квадратче така што производите на броевите во трите реда, трите колони и двете дијагонали се еднакви. Кој број треба да стои на местото прашалниот знак?

20	1	
		?

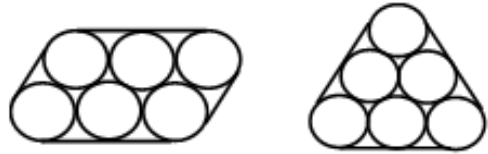
A) 2      B) 4      C) 5      D) 10      E) 25

**Решение. B).** Производот на сите броеви е  $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 100 = 1000^3$ . Но, производот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала е еднаков, па како имаме три реда, производот на броевите запишани во еден ред е 1000. Значи, во горното десно аголно квадратче е бројот 50. Според тоа, производот на другите два броја запишани во третата колона треба да е 20, па како броевите 1 и 20 се веќе запишани останува другите два броја во третата

колона да се во некој редослед броевите 4 и 5. Сега лесно се добива пополнувањето кое е прикажано на цртежот десно. Значи, на местото на прашалниот знак е бројот 4.

20	1	50
25	10	4
2	100	5

16. Шест цилиндри, секој со дијаметар  $2\text{ cm}$ , се врзани со ленти на два различни начина, како што е прикажано на долните цртежи. Спореди ги должините на двете ленти!



- A) левата лента е за  $\pi\text{ cm}$  пократка      B) левата лента е за  $4\text{ cm}$  пократка  
 C) десната лента е за  $\pi\text{ cm}$  пократка      D) десната лента е за  $4\text{ cm}$  пократка  
 E) лентите се со иста должина

**Решение. E).** Ако со  $a$  го означиме дијаметарот на цилиндрите, тогаш ако од центрите на кружниците повлечеме нормали кон тангентните прави добиваме дека должините на двете ленти се еднакви на  $6a + \pi a$  (шест дијаметри и еден периметар на кружница со радиус  $\frac{a}{2}$ ).

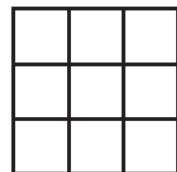
17. Во осум неозначени идентични пликови се запишани осум последователни степени на бројот 2 и тоа: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и 128. Иван избрал неколку пликови и го пресметал збирот на броевите кои се запишани во нив. Коста го пресметал збирот на броевите кои се запишани во останатите пликови и констатирал, дека тој е за 31 помал од збирот кој го добил Иван. Колку пликови избрал Иван?  
 A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**Решение. D).** Збирот на сите запишани броеви е

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255.$$

Според тоа, збирот на броевите кои ги собрал Коста е  $\frac{255-31}{2} = 112$ . Значи, Иван го избрал бројот 128. Сега, лесно се гледа дека Коста ги собрал броевите 16, 32 и 64. Значи, Иван ги избрал броевите 1, 2, 4, 8 и 128, т.е. избрал пет броја.

18. Рампо сака да ги обои единечните квадратчиња на  $3 \times 3$  квадратот, цртеж десно, но така што секој од трите реда, секоја од трите колони и секоја од двете дијагонали да не содржи квад-



ратчиња обоени со иста боја. Колку бои најмалку треба да искористи Рампо?

- A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

**Решение. C).** За првиот ред се потребни три бои, на пример црвена, зелена и сина, во овој редослед. Понатаму, заради втората колона и дијагоналите во централното поле мора да има нова боја, на пример жолта. Сега, заради дијагоналите во агол-

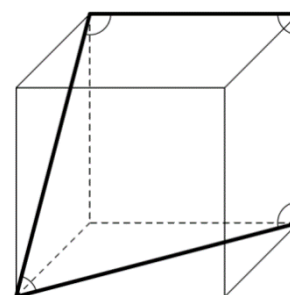


ните полиња на третиот ред не смее да има црвена, жолта и сина боја, па едно од овие полиња може да се обои со зелена боја, но за другото ни е потреба нова боја, на пример кафеава. Значи, за саканото обојување ни се потребни 5 или повеќе бои. Обојување со 5 бои е прикажано на цртежот десно.

19. На цртежот десно е прикажана коцка. Определи го збирот на четирите обележени агли.

- A)  $315^\circ$       B)  $330^\circ$       C)  $345^\circ$       D)  $360^\circ$       E)  $375^\circ$

**Решение. B).** Дијагоналите на сидовите на коцката се еднакви, па затоа три од нив формираат рамностран триаголник, т.е. едниот агол е еднаков на  $60^\circ$ , а другите



три агли се еднакви на  $90^\circ$  (сидот на коцката е квадрат, а дијагоналниот пресек на коцката е правоаголник). Според тоа, збирот на четирите агли е еднаков на  $60^\circ + 3 \cdot 90^\circ = 330^\circ$ .

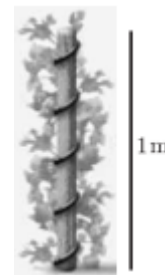
20. Во Република Кенгурија живеат 2016 кенгурчиња, кои се сиви или кафеави. Од секоја боја има барем по едно кенгурче. За секое кенгурче  $K$  го пресметуваме количникот на бројот на кенгурчињата со спротивна боја на  $K$  и бројот на кенгурчињата со бојата на  $K$ , вклучувајќи го и  $K$ . Определи го збирот на сите количници.

- A) 2016      B) 1344      C) 1008      D) 672      E) не може да се определи

**Решение. A).** Нека имаме  $a$  кафеави и  $2016 - a$  сиви кенгурчиња. Според условот на задачата добиваме  $a$  количници од видот  $\frac{2016 - a}{a}$  и  $2016 - a$  количници од видот  $\frac{a}{2016 - a}$ . Според тоа, бараниот збир е

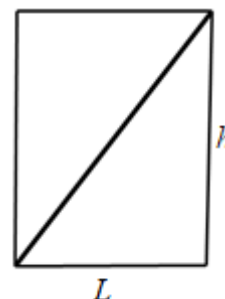
$$a \cdot \frac{2016 - a}{a} + (2016 - a) \cdot \frac{a}{2016 - a} = 2016 - a + a = 2016.$$

21. Едно растение точно 5 пати обвиткало цилиндричен столб со висина 1 m и периметар на основата 15 cm. Определи ја должината на растението, ако обвиткувањето околу столбот е резултат на растењето на растението и е под ист агол во однос на оската на столбот. (Дебелината на растението се занемарува.)



A) 0,75 m    B) 1 m    C) 1,25 m    D) 1,5 m    E) 1,75 m

**Решение. C).** Ако одвиткаме една петтина од растението ќе добиеме правоаголник (омотачот на цилиндар) со должини на страни  $L = 15 \text{ cm}$  и  $h = \frac{1}{5} m = 20 \text{ cm}$ . Должината на одвитканото растение е еднаква на должината на дијагоналата на правоаголникот, односно на  $\sqrt{L^2 + h^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ cm}$ .



Според тоа, должината на целото растение е еднаква на  $5 \cdot 25 = 125 \text{ cm} = 1,25 \text{ m}$ .

22. Кој е најголемиот остаток кој може да се добие при делење на двоцифрен број со збирот на неговите цифри?  
A) 13    B) 14    C) 15    D) 16    E) 17

**Решение. C).** Ако двоцифрениот број е  $\overline{ab} = 10a + b$ , тогаш збирот на неговите цифри е  $a + b$ . Ако при делењето се добива количник  $k$  и остаток  $n$ , тогаш

$$10a + b = k(a + b) + n, \quad n < a + b.$$

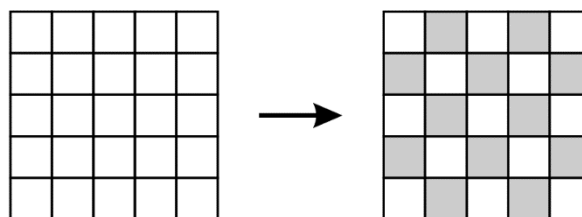
Ако  $a + b = 18$ , тогаш  $(a, b) = (9, 9)$  и како  $99 = 18 \cdot 5 + 9$  остатокот е 9.

Ако  $a + b = 17$ , тогаш  $(a, b) = (9, 8), (8, 9)$  и како  $98 = 17 \cdot 5 + 13$  и  $89 = 17 \cdot 5 + 4$ , остатоците се 13 и 4.

Ако  $a + b = 16$ , тогаш  $(a, b) = (9, 7), (8, 8), (7, 9)$  и како  $97 = 16 \cdot 6 + 1$ ,  $88 = 16 \cdot 5 + 8$ , и  $79 = 16 \cdot 4 + 15$  остатоците се 1, 8 и 15.

Ако  $a + b \leq 15$ , тогаш остатокот е помал од 15, па затоа најголемиот можен остаток е 15.

23. Табла  $5 \times 5$  е разделена на 25 единечни квадратчиња. Две единечни квадратчиња се соседни, ако имаат заедничка страна. На почетокот си-



те единечни квадратчиња се бели. Во еден чекор се избираат две соседни квадратчиња и им се менува бојата, т.е. ако квадратчето е бело тоа станува црно, а ако квадратчето е црно тоа станува бело. Кој е најмалиот потребен број на чекори за да се добие шаховското боење на таблата прикажано на цртежот десно?

- A) 11      B) 12      C) 13      D) 14      E) 15

**Решение. В).** Бидејќи треба да добиеме 12 сиви квадратчиња кои не се соседни, заклучуваме дека се потребни 12 и повеќе потези. Ќе покажеме како целта може да се постигне со точно 12 потези. На левата табла се прикажани првите 6 потези со кои добиваме точно 12 сиви обоени полиња. На десната табла се прикажани следните 6 потези со кои го добиваме саканото боење.

	1		2							
	1		2			7	7	8	8	9
3		4		5		10	10	11	11	9
3		4		5						
		6	6				12	12		

24. Моторен чамец по течението на реката го минува растојанието од местото  $A$  до местото  $B$  за 4 часа, а растојанието од местото  $B$  до местото  $A$ , спротивно на течението на реката, го минува за 6 часа. За колку часа, по течението на реката, сплав ќе го помине растојанието од местото  $A$  до местото  $B$ ?
- A) 5      B) 10      C) 12      D) 20      E) 24

**Решение. Е).** Кога чамецот патува по течението на реката на неговата брзина  $v_c$  се додава брзината на реката  $v_r$ , па затоа  $4 = \frac{s}{v_c + v_r}$ , т.е.  $\frac{1}{4} = \frac{v_c + v_r}{s}$ . Кога чамецот патува спротивно од течението на реката од неговата брзина  $v_c$  се одзема брзината на реката  $v_r$ , па затоа  $6 = \frac{s}{v_c - v_r}$ , т.е.  $\frac{1}{6} = \frac{v_c - v_r}{s}$ . Според тоа,

$$\frac{v_c + v_r}{s} - \frac{v_c - v_r}{s} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}, \text{ т.е. } \frac{2v_r}{s} = \frac{1}{12}.$$

Конечно,  $\frac{s}{v_r} = 24$  и тоа е бараното време.

25. Во Република Кенгурија секој месец има 40 денови, нумерирани со броевите од 1 до 40. Деновите за одмор се оние кои се нумерирани со прости броеви или со броеви кои се деливи со бројот 6. Колку пати во месецот се појавува работен ден кој се наоѓа меѓу два денови за одмор?
- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. А).** Деновите за одмор се обоени со црвена боја:

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22,  
23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.**

Според тоа, само 4-тиот ден во месецот е работен ден кој се наоѓа меѓу два дена за одмор.

26. Должините на две од висините на еден триаголник се  $10\text{ cm}$  и  $11\text{ cm}$ . Која од дадените вредности не може да биде должина на третата висина?

A)  $5\text{ cm}$     B)  $6\text{ cm}$     C)  $7\text{ cm}$     D)  $10\text{ cm}$     E)  $100\text{ cm}$

**Решение. А).** За плоштината на триаголникот имаме  $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ , од каде

добиваме  $a = \frac{2P}{h_a}$ ,  $b = \frac{2P}{h_b}$ ,  $c = \frac{2P}{h_c}$ . Понатаму, од неравенството на триаголник

следува  $c < a + b$ , па затоа  $\frac{2P}{h_c} < \frac{2P}{h_a} + \frac{2P}{h_b}$ , т.е.  $\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$ . Во нашиот случај

имаме  $\frac{1}{h_c} < \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$ , односно  $h_c > \frac{110}{21} > 5$ .

27. Јане запишал четири последователни природни броеви. Тој ги пресметал четирите можни зборови на по три од запишаните броеви и констатирал, дека ниту еден збир не е прост број. Кој е најмалиот можен број, кој го запишал Јане?

A) 12    B) 10    C) 7    D) 6    E) 3

**Решение. С).** Почнувајќи од бројот 1 добиваме:

Броеви	Зборови	
1, 2, 3, 4	9, 8, 7, 6	Не, 7 е прост број
2, 3, 4, 5	12, 11, 10, 9	Не, 11 е прост број
3, 4, 5, 6	15, 14, 13, 12	Не, 13 е прост број
4, 5, 6, 7	18, 17, 16, 15	Не, 17 е прост број
5, 6, 7, 8	21, 20, 19, 18	Не, 19 е прост број
6, 7, 8, 9	24, 23, 22, 21	Не, 23 е прост број
7, 8, 9, 10	27, 26, 25, 24	Да, сите броеви се сложени

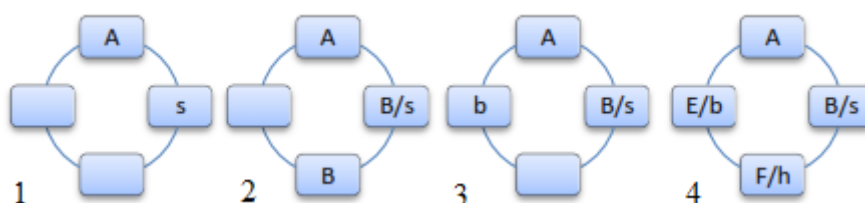
Значи, најмалиот број кој Јане можел да го запише е бројот 7.

28. Четири соученици спортуваат четири различни спортови: скијање, брзо лизгање, хокеј и сноуборд. Тие седнале околу тркалезна маса, така што скијачот е лево од Андријана, брзиот лизгач седи наспроти Борис, Ева и Филип седат еден до друг, а лево од хокејарот седело девојче. Со кој спорт за занимава Ева?

A) брзо лизгање    B) скијање    C) хокеј    D) сноуборд

Е) не може да се определи

**Решение. А).** Спортистите да ги означиме со буквите на нивните имиња ( $A, B, E, F$ ), а спортовите со почетните букви на нивните имиња ( $s, b, h, sb$ ). Скијачот седи лево од Ана (цртеж 1). Брзиот лизгач седи наспроти Борис, па затоа Борис може да седи на двете места прикажани на цртеж 2. Но, ако Борис седи наспроти Андријана, тогаш Ева и Филип не може да седат еден до друг, па затоа ја имаме состојбата прикажана на цртеж 3. Сега од податокот дека лево од хокејарот седи девојче лесно се добива распоредот прикажан на цртежот 4. Значи, Ева се занимава со брзо лизгање.



29. Датите можат да се запишуваат на следниот начин: дд.мм.гггг. На пример, датата 17 март 2016 г. на овогодишниот математички натпревар „Европски кенгур“ може да се запише на следниов начин: 17.03.2016. Во кој месец е најблиската дата, која на дадениот начин се запишува со 8 различни цифри?

А) март    В) јуни    С) јули    Д) август    Е) декември

**Решение. В).** Ако годината е од видот 20xx, тогаш месеците не може да се од видот 0x, туку само 10, 11 или 12, но сите тие отпаѓаат бидејќи или имаат 0 или 2 или имаат еднакви цифри.

Ако годината е од видот 21xx, тогаш на местото на месеците треба да биде 0x, но тогаш деновите имаат вид 3x, а тоа се само две можности: 30 отпаѓа бидејќи 0 е во месеците, 31 отпаѓа бидејќи 1 е во годината.

Годината 22xx не е можна бидејќи има две исти цифри.

Ако годината е од видот 23xx, тогаш месеците се или од видот 0x или 10 (02, 03, 11 и 12 не се можни). Тогаш деновите мора да се од видот 1x (цифрите 2 и 3 се употребени во годината, а 0 во месеците). Најраната година која ги исполнува овие услови е 2345. Тогаш најмалиот можен месец е 06 (2, 3, 4 и 5 се употребени за годината, а 1 ни треба за деновите). Најраниот ден е 17. Значи, најраната дата е 17.06.2345.

30. На един собир учествувале 2016 лица, кои биле регистрирани од У1 до У2016. Секој учесник од У1 до У2015 се ракувал точно по еднаш со онолку лица, колку што бил неговиот регистрационен број. Со колку лица се ракувал учесникот У2016?

А) 0      В) 1      С) 1008      Д) 2015      Е) не може да се определи

**Решение. С).** Учесникот У2015 се ракувал со сите преостанати учесници. Оттука следува дека учесникот У1 се ракувал само со У2015.

Учесникот У2014 се ракувал со сите освен со У1. Оттука следува дека У2 се ракувал само со У2015 и У2014.

Учесникот У2013 се ракувал со сите освен со У1 и У2. Значи, У3 се ракувал само со У2015, У2014 и У2013.

Продолжувајќи на истиот начин заклучуваме дека У2016 се ракувал со учесниците од У1008 до У2015, односно со половина од сите учесници на собирот.

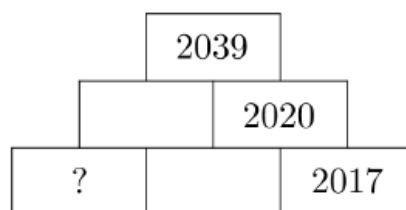
## Junior (прва и втора година) 2017

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. На цртежот десно секој број е еднаков на збирот на двата броја кои се запишани во полињата што се непосредно под полето во кое се наоѓа тој број. Кој број треба да биде запишан во полето во кое се наоѓа прашалниот знак?



- A) 15      B) 16      C) 17      D) 18      E) 19

**Решение. B).** Последователно добиваме

$$2039 - 2020 = 19, \quad 2020 - 2017 = 3, \quad 19 - 3 = 16.$$

Значи, на местото на прашалниот знак треба да е бројот 16.

2. Петар го напишал зборот KANGAROO на парче стакло (види цртеж десно). Што видел Петар кога стаклото прво го превртел на десната страна, а потоа го ротирал за половина круг?



- A)       B)       C)   
 D)       E) 

**Решение. C).** Кога парчето стакло го превртел на десната страна

Петар ја видел симетричната слика на зборот во однос на



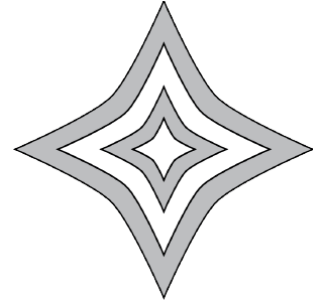
десната вертикална права (цртеж десно). Потоа, кога парчето стакло го ротирал

за половина круг, тој всушност ја добил симетричната слика на



слика на почетниот збор во однос на хоризонталната права (цртеж лево).

3. Ангела направила декорација со сиви и бели фигури (цртеж десно). Плоштините на фигурите се еднакви на  $1\text{ cm}^2$ ,  $4\text{ cm}^2$ ,  $9\text{ cm}^2$  и  $16\text{ cm}^2$ . Определи ја вкупната плоштина на видливите сиви области?



- A)  $9\text{ cm}^2$       B)  $10\text{ cm}^2$       C)  $11\text{ cm}^2$   
D)  $12\text{ cm}^2$       E)  $13\text{ cm}^2$

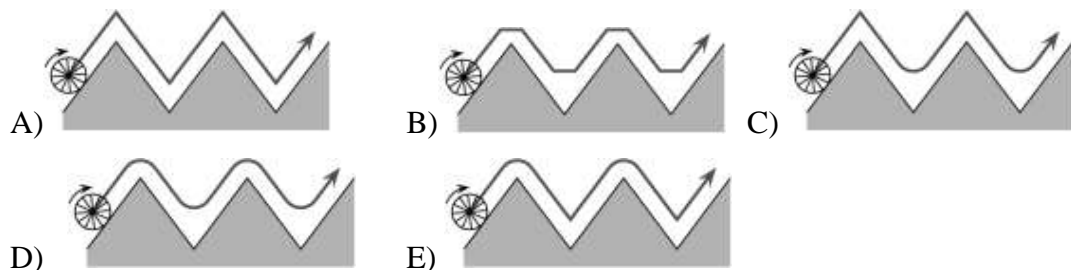
**Решение. В).** Плоштината на надворешната сива област е еднаква на разликата на плоштините на двете најголеми фигури, а плоштината на внатрешната сива област е еднаква на разликата на плоштините на двете најмали фигури. Значи, вкупната плоштина на видливите сиви области е  $16 - 9 + 4 - 1 = 10\text{ cm}^2$ .

4. Марија има 24 €. Секој од нејзините тројца браќа има по 12 €. По колку пари Марија треба да му даде на секој од браќата, така што секое од четирите деца да има иста сума пари?

- A) 1 €      B) 2 €      C) 3 €      D) 4 €      E) 6 €

**Решение. С).** Четворицата заедно имаат  $24 + 3 \cdot 12 = 60$  €. Според тоа, секој треба да има по  $60 : 4 = 15$  €. Оттука добиваме дека Марија на секој брат треба да му даде по  $15 - 12 = 3$  €.

5. На кој цртеж е прикажана траекторијата на центарот на тркалото, кое последователно се искачува и спушта во дадената насока?



**Решение. Е).** Кога тркалото слегува по падината тоа во еден момент ќе ги допре двете падини и центарот одејќи по права линија паралелна со падината ќе падне во најниската точка. Потоа тркалото се искачува и центарот се движи по права линија паралелна со падината. Ваква ситуација е прикажана на патеките А и Е, па затоа другите патеки отпаѓаат. Центарот на тркалото во секој момент е еднак-

во оддалечен од падината, било тркалото да се искачува или слегува. Од пате-ките А и Е тоа е случај само со патеката Е и тоа е бараната патека.

6. Група девојки танцува во круг. Антонија е петта по ред од левата страна на Бјанка и е осма по ред од десната страна на Бјанка. Колку девојки се во групата?  
 А) 11      В) 12      С) 13      Д) 14      Е) 15

**Решение. С).** Од лево на Бјанка до Антонија и 4 девојки, а од десно на Бјанка до Антонија има 7 девојки. Според тоа, танцувале вкупно  $1+4+1+7=13$  девојки.

7. Круг со радиус 1 се тркала по правата ли-нија од точката  $K$  до точката  $L$  (види цр-теж десно). Ако  $\overline{KL}=11\pi$ , на кој цртеж е



прикажана положбата на кругот во крајната точка  $L$  на тркалањето?

- А)    В)    С)    Д)    Е)

**Решение. Е).** Периметарот на кругот е еднаков на  $2\pi$ . Бидејќи  $11\pi=5\cdot 2\pi+\pi$  кругот ќе напарви 5 цели завртувања и уште половина завртување. Значи, по-ложбата на кругот е прикажана на цртежот Е).

8. Мартин учествува на шаховски турнир. Тој одиграл 15 партии, при што победил во 9 партии и не ремизирал ниту една партија. Мартин треба да одигра уште 5 партии. Колкав процент на успех ќе има Мартин, ако ги победи преостанатите 5 партии?  
 А) 60%      В) 65%      С) 70%      Д) 75%      Е) 80%

**Решение. С).** На турнирот Мартин ќе одигра 20 партии шах и ќе победи во 14 партии. Значи, неговата стапка на успех е биде  $\frac{14}{20}=0,7=70\%$ .

9. На една прослава една осмина од гостите се деца, а три седмини од возрасните гости се мажи. Колкав дел од гостите на прославата се возрасните жени?  
 А)  $\frac{1}{2}$       В)  $\frac{1}{3}$       С)  $\frac{1}{5}$       Д)  $\frac{3}{7}$       Е)  $\frac{5}{8}$

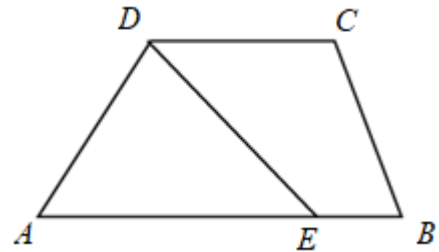
**Решение. А).** Возрасните се  $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$  од вкупниот број гости. Жените се  $1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$  од возрасните гости. Значи, жените се  $\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$  од сите гости.

10. Кој е најмалиот број на топчиња што треба да ги извадиме без да гледаме од кутија со 203 црвени, 117 бели и 28 сини топчиња, за да сме сигурни, дека меѓу извадените топчиња има 3 истобојни?

A) 3            B) 203            C) 7            D) 320            E) 31

**Решение. C).** Ако извадиме 6 топчиња, тогаш може да се случи да се по 2 топчиња од секоја боја. Но, ако извадиме 7 топчиња, тогаш бидејќи  $7 = 3 \cdot 2 + 1$  мора да има 3 топчиња од иста боја.

11. Даден е траpez  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Точката  $E$  припаѓа на страната  $AB$  и отсечката  $DE$  ја полови плоштината на траpezот. Ако  $\overline{AB} = 50$  и  $\overline{CD} = 20$ , определи ја должината на отсечката  $AE$ .



A) 25            B) 30            C) 35            D) 40            E) 45

**Решение. B).** Имаме,  $\overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AB}$  и  $\frac{\overline{AE} \cdot h}{2} = \frac{(\overline{EB} + \overline{CD}) \cdot h}{2}$ , од каде добиваме

$$\overline{AE} + \overline{EB} = 50 \text{ и } \overline{AE} = \overline{EB} + 20.$$

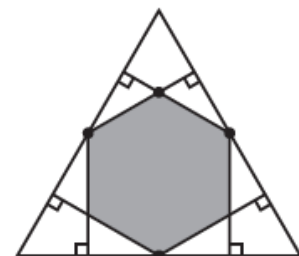
Решението на последниот систем е  $\overline{AE} = 35$ ,  $\overline{EB} = 15$ .

12. Колку природни броеви го имаат својството: точно еден од броевите  $n$  и  $n+20$  е четирицифрен?

A) 19            B) 20            C) 38            D) 39            E) 40

**Решение. E).** Најмалиот четирицифрен број е 1000, па затоа тврдењето важи кога  $n$  е некој од трицифрените броеви 980, 981, ..., 999 и тогаш  $n+20$  е четирицифрен број. Најмалиот петцифрен број е 10000, па затоа тврдењето важи кога  $n$  е некој од четирицифрените броеви 9980, 9981, ..., 9999 и тогаш  $n+20$  е петцифрен број. Значи, имаме 40 броеви со саканото својство.

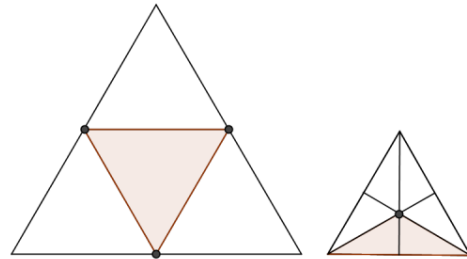
13. Од средините на страните на рамностран триаголник кон неговите страни се повлечени шест нормали (види цртеж). Колкав дел од плоштината на триаголникот е плоштината на вака добиениот шестаголник, кој е обоен на цртежот?



- A)  $\frac{1}{3}$       B)  $\frac{2}{5}$       C)  $\frac{4}{9}$       D)  $\frac{1}{2}$       E)  $\frac{2}{3}$

**Решение. D).** Со  $P$  да ја означиме плоштината на почетниот триаголник. Средните линии го делат рамностраниот триаголник на четири складни триаголници, секој со плоштина  $\frac{1}{4}P$ .

Ако секое теме на трите делбените рамнострани триаголници кои содржат и бел дел го поврземе со неговиот центар, тогаш добиваме по три складни триаголници, секој со плоштина  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}P$ , од кои едниот е обоен. Според



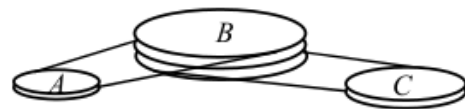
тоа, плоштината на обоениот шестаголник е еднаква на  $\frac{1}{4}P + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}P = \frac{1}{2}P$ .

14. Збирот на квадратите на три последователни природни броеви е 770. Определи го најголемиот од тие броеви.

- A) 15      B) 15      C) 17      D) 18      E) 19

**Решение. C).** Од равенката  $(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = 770$  следува  $3a^2 = 768$ , од каде бидејќи броевите се природни добиваме  $a=16$ . Значи, станува збор за броевите 15, 16, 17, а најголемиот меѓу нив е 17.

15. Ременски преносен систем е составен од три дискови  $A, B$  и  $C$ , кои се вртат без лизгање. Кога  $B$  прави 4 целосни завртувања,



$A$  прави 5 целосни завртувања, а кога  $B$  прави 6 целосни завртувања,  $C$  прави 7 целосни завртувања. Определи го периметарот на  $A$  ако периметарот на  $C$  е  $30\text{ cm}$ .

- A)  $27\text{ cm}$       B)  $28\text{ cm}$       C)  $29\text{ cm}$       D)  $30\text{ cm}$       E)  $31\text{ cm}$

**Решение. B).** Периметарот на  $A$  е  $\frac{4}{5}$  од  $B$ , а периметарот на  $B$  е  $\frac{7}{6}$  од периметарот на  $C$ . Значи, периметарот на  $B$  е  $\frac{7}{6} \cdot 30 = 35\text{ cm}$ , па затоа периметарот на  $A$  е  $\frac{4}{5} \cdot 35 = 28\text{ cm}$ .

16. Методиј сака да направи седмичен распоред за трчање, така што секоја седмица да трча во едни и исти три дена, но притоа никогаш да не трча во два последователни дена. Колку такви распореди може да направи Методиј?

A) 6            B) 7            C) 9            D) 10            E) 35

**Решение. B).** Еден распоред се добива ако не постојат и два последователни дена во кои Методиј нема да трча и тоа е распоредот ПВСЧПеСаН (со црвена боја се деновите во кои Методиј не трча). Сега, ако постојат два последователни дена во кои Методиј не трча, тогаш распоредот е еднозначно определен. Изборот на тие два дена може да се направи на 6 начини, што значи дека имаме уште шест распореди и тоа:

ПВСЧПеСаН, ПВСЧПеСаН, ПВСЧПеСаН,  
ПВСЧПеСаН, ПВСЧПеСаН, ПВСЧПеСаН.

Конечно, Методиј може да направи 7 различни распореди.

17. Четворица пријатели се со различни висини. Тодор е понизок од Виктор онолку самтиметри, колку што е повисок од Петар, а Огнен е понизок од Петар за истата разлика. Колку е висок Огнен, ако Тодор е висок 184 *cm* и просечната височина на четворицата е 178 *cm* ?

A) 160 *cm*    B) 166 *cm*    C) 172 *cm*    D) 184 *cm*    E) 190 *cm*

**Решение. A).** Со  $a$  да ја означиме разликата меѓу височините на Огнен и Петар, т.е. Петар и Тодор, т.е. Тодор и Виктор. Бидејќи Тодор е висок 184 *cm*, добиваме дека Петар е висок  $184 - a$ , Виктор е висок  $184 + a$  и Огнен е висок  $184 - 2a$ . Бидејќи просечната височина на четворицата е 178 *cm* добиваме  $\frac{4 \cdot 184 - 2a}{4} = 178$ , од каде наоѓаме  $a = 12$ . Значи, Огнен е висок  $184 - 2 \cdot 12 = 160$  *cm*.

18. За време на мојот годишен одмор дожд врнеше 7 пати. Кога врнеше наутро, попладне беше сончево, а кога врнеше попладне, наутро беше сончево. Вкупно имаше 5 сончеви претпладниња и 6 сончеви попладниња. Колку денови ми траеше годишниот одмор?

A) 7            B) 8            C) 9            D) 10            E) 11

**Решение. C).** Бидејќи ниту еден ден не врнело и прејладне и попладне добиваме дека дожд имало вкупно 7 попладниња или претпладниња. Сончево било

$5+6=11$  претпладниња или попладниња. Значи, одморот траел  $7+11=18$  претпладниња и попладниња, односно  $18:2=9$  дена.

19. Дадената  $3 \times 3$  табела (цртеж десно) треба да се дополни со броеви така што збирите на броевите запишани во сите  $2 \times 2$  квадрати се еднакви. Кој број треба да се запише во полето во кое е запишан прашалникот?

3		1
2		?

A) 5      B) 4      C) 2      D) 0      E) не може да се определи

**Решение. D).** При ознаки како на цртежот десно важи

$$a+b+c+3=b+c+e+2,$$

$$d+c+e+x=a+c+d+1.$$

3	$a$	1
$b$	$c$	$d$
2	$e$	$x$

Ако ги собереме горните равенства, по средувањето добиваме  $x=0$ .

20. Седум природни броеви  $a, b, c, d, e, f$  и  $g$  се запишани еден по друг во низа. Нивниот збир е еднаков на 2017, а апсолутната вредност на разликата на било кои два соседни броја е еднаква на 1. Кои од броевите може да се еднакви на 286?
- A) само  $a$  или  $g$       B) само  $b$  или  $f$       C) само  $c$  или  $e$   
 D) само  $d$       E) било кој од броевите

**Решение. A).** Нека најмалиот меѓу запишаните броеви е  $x$ . Ако тој не е на левиот или десниот крај на низата, тогаш двата негови соседни броја се еднакви на  $x+1$  и низата го добива видот  $\dots, x+1, x, x+1, \dots$ . Понатаму, од условот следува дека најголем можен збир имаме ако низата е од видот

$$x+1, x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5 \text{ или } x+5, x+4, x+3, x+2, x+1, x, x+1,$$

а најмал можен збир се добива ако низата е од видот  $x+1, x, x+1, x, x+1, x, x+1$ .

Според тоа,  $7x+4 \leq 2017 \leq 7x+16$ , од каде следува  $\frac{2001}{7} \leq x \leq \frac{2013}{7}$ . Но,  $x$  е природен број, па затоа  $x=286$  или  $x=287$ . За  $x=286$  најголем можен збир дава низата 287, 286, 287, 288, 289, 290, 291 и тој е еднаков на 2018, а додека низата 287, 286, 287, 288, 289, 290, 289 дава збир 2016. Според тоа, бројот 286 не може да е ниту еден од броевите  $b, c, d, e, f$ . Ако  $x=287$ , тогаш бројот 286 не може

да е ниту еден од броеви, а низата 288, 287, 288, 287, 288, 289, 290 ги задоволува условите на задачата.

Ако најмалиот член  $x$  е на левиот или десниот крај на низата тогаш најголем можен збир имаме ако низата е од видот

$$x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6 \text{ или } x+6, x+5, x+4, x+3, x+2, x+1, x,$$

а најмал можен збир се добива ако низата е од видот  $x, x+1, x, x+1, x, x+1, x$ .

Според тоа,  $7x+3 \leq 2017 \leq 7x+21$ , од каде следува  $\frac{1996}{7} \leq x \leq \frac{2014}{7}$ . Но,  $x$  е природен број, па затоа  $x=286$  или  $x=287$ . За  $x=286$  ја имаме низата 286, 287, 288, 289, 290, 289, 288, односно низата 288, 289, 290, 289, 288, 287, 286. Ако  $x=287$ , тогаш бројот 286 не може да е ниту еден од запишаните броеви, но и не постои низа која ги задоволува условите на задачата.

Значи, бројот 286 може да е само  $a$  или  $g$ .

21. Четворица братучеди се на различни возрасти и се помлади од 18 години. Определи го збирот на нивните години, ако годините им се природни броеви чиј производ е еднаков на 882.
- A) 23      B) 25      C) 27      D) 31      E) 33

**Решение. D).** Имаме  $882 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$ . Четири различни множители на бројот 882 помали од 18 се броевите 1, 7, 9, 14 и нивниот збир е  $1+7+9+14=31$ .

22. Имаме две еднакви коцки за играње на чии страни се запишани броевите  $-3, -2, -1, 0, 1$  и  $2$ . Коцките без да се лизгаат ги фрламе на рамна површина. Колкава е веројатноста на настанот: Производот на паднатите броеви е негативен.
- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{4}$       C)  $\frac{11}{36}$       D)  $\frac{13}{36}$       E)  $\frac{1}{3}$

**Решение. E).** За позитивните и негативните вредности на паднатите броеви ја имаме табелата:

.	-	-	-	0	+	+
-	+	+	+	0	-	-
-	+	+	+	0	-	-
-	+	+	+	0	-	-
0	0	0	0	0	0	0
+	-	-	-	0	+	+
+	-	-	-	0	+	+

Значи, имаме 36 можни производи, од кои 12 се негативни, па затоа бараната веројатност е  $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

23. Со помош на цифрите  $a$  и  $b$  е запишан шестцифрениот број  $\overline{ababab}$ . Со кој од дадените броеви е делив овој број?  
 A) 2                      B) 5                      C) 7                      D) 9                      E) 11

**Решение. C).** Имаме:  $\overline{ababab} = \overline{ab} + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} \cdot 10000 = \overline{ab} \cdot 10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$ .

Според тоа, од дадените броеви бројот  $\overline{ababab}$  е делив со 7.

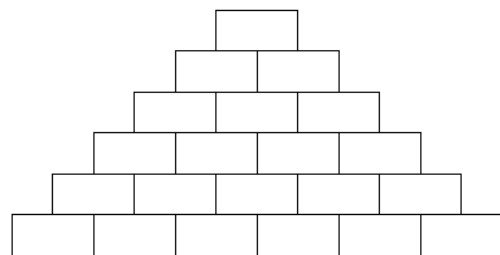
24. Леонид сака да направи шифра од седум цифри, така што во комбинацијата секоја цифра да ја искористи онолку пати колку што е нејзината вредност. При тоа сака истите цифри да се запишани последователно една до друга. Примери за такви шифри се 4444333 и 1666666. Колку различни шифри може да направи Леонид?  
 A) 6                      B) 7                      C) 10                      D) 12                      E) 13

**Решение. E).** Бидејќи секој цифра се појавува онолку пати колку што е нејзината вредност, заклучуваме дека збирот на користените цифри треба да е еднаков на 7. Можни се следниве случаи:

- 7 со еден редослед
- 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, при што во секој случај имаме по два редоследи,
- 1, 2 и 4 со  $3! = 6$  можни редоследи.

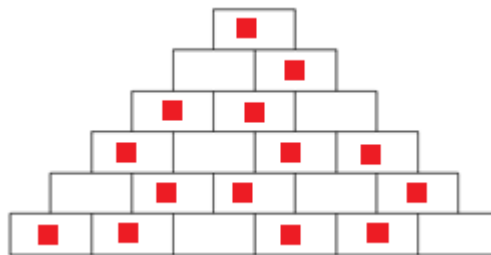
Според тоа, Леонид може да направи  $1 + 3 \cdot 2 + 3! = 13$  различни шифри.

25. Павле во секое поле на цртежот десно запишува по еден природен број, но така што секој број е еднаков на збирот на двата броја кои се запишани во полињата што се непосредно под полето во кое се наоѓа бројот. Колку најмногу непарни броеви може да запише Павле?



- A) 13                      B) 14                      C) 15                      D) 16                      E) 17

**Решение. В).** Знаеме дека збир на два броја со иста парност е парен број, а збир на два броја со различна парност е непарен број. Во фигурата десно со црвено квадратче се означени непарните броеви. Понатаму, распоредот на парните и непарните броеви во целата фигура е определен со распоредот на парните и непарните броеви во долниот ред. Фигурата десно покажува дека во неа може да има 14 непарни броеви. Лесно се гледа дека ако во долниот ред на било кој број ја промениме парноста, тогаш целата фигура ќе има помалку непарни броеви (Провери!).



26. Марија ги собирала мерните броеви, изразени во степени, на аглиите на конвексен многуаголник. Но, таа испуштила еден агол и добила збир  $2017^\circ$ . Колку степени е испуштениот агол?

A)  $37^\circ$       B)  $53^\circ$       C)  $97^\circ$       D)  $127^\circ$       E)  $143^\circ$

**Решение. Е).** Збирот на аглиите на конвексен  $n$ -аголник е  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Ако го поделиме  $2017^\circ$  со 180 добиваме 11 и остаток 37. Резултатот требаше да е 12, што значи дека збирот на аглиите на многуаголникот е  $12 \cdot 180 = 2160^\circ$ . Сега е јасно дека Марија го испуштила аголот  $2160^\circ - 2017^\circ = 143^\circ$ .

27. 30 танчери се застанати во круг, свртени кон центарот на кругот. На командата „На лево!“ некои од нив се свртеле на лево за  $90^\circ$ , а останатите се свртеле на десно за  $90^\circ$ . Секои двајца танчери свртени со лицата еден кон друг си кажале „Здраво“. Точно 10 танчери кажале „Здраво“. Потоа следувала команда „На лево круг!“, при која танчерите се свртеле за  $180^\circ$  и секои двајца со лицата свртени еден кон друг си кажале „Здраво“. Колку танчери кажале „Здраво“ по втората команда?

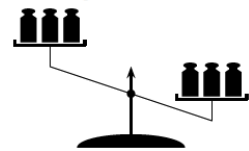
A) 10      B) 20      C) 8      D) 15      E) Не може да се определи

**Решение. А).** Танчерите кои по командата „На лево!“ биле завртени со лицата еден кон друг по командата „На лево круг!“ ќе бидат завртени со грбовите еден

кон друг и обратно (положбата  $\blacktriangleleft\blacktriangleright$  преминува во положба  $\blacktriangleright\blacktriangleleft$ ). Низата танчери кои се еден до друг и кои по командата „На лево!“ гледала лево, сега ќе гледа десно и целата оваа низа можеме да ја поистоветиме со еден танчер. Низата танчери кои се еден до друг и кои по командата „На лево!“ гледале десно, сега ќе гледа лево и целата оваа низа можеме да ја поистоветиме со еден танчер.

На пример, низата  $\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleleft$  можеме да ја набљудуваме како низата  $\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleleft$ . По командата „На лево круг!“ ја имаме низата  $\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright$  (со тоа што првиот и последниот танчер се еден до друг во кругот). Сега лесно се гледа дека бројот на танчерите кои се поздравиле првиот пат е еднаков на бројот на танчетите кои се поздравиле вториот пат.

28. Дадени се шест тегови со маси: 101 g, 102 g, 103 g, 104 g, 105 g и 106 g . На вага, на секој од двата таса, случајно се поставуваат по три од дадените тегови (цртеж десно). Во колку проценти од случаите тегот од 106 g се наоѓа на страната која претегнува (десната страна)?



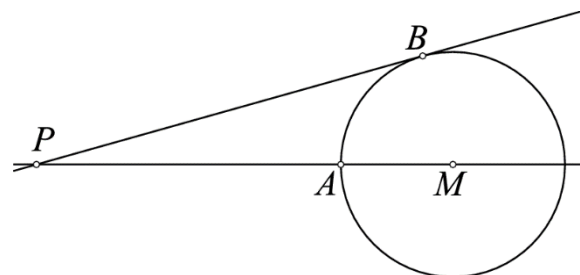
- A) 75%    B) 80%    C) 90%    D) 95%    E) 100%

**Решение. B).** Вкупната маса на теговите е еднаква на 621 g . За да десната страна има поголема маса на таа страна треба да има најмалку 311 g . Постојат 10 комбинации кои го задоволуваат овој услов и тоа:

(106, 101, 104); (106, 101, 105); (106, 102, 103); (106, 102, 104); (106, 102, 105);  
(106, 103, 104); (106, 103, 105); (106, 104, 105); (105, 102, 104); (105, 103, 104).

Во 8 од овие 10 комбинации се наоѓа тегот со маса од 106 g , па затоа бараната веројатност е  $\frac{8}{10} = 80\%$  .

29. Дадени се кружница со центар  $M$  и точка  $A$  на кружницата. На правата  $AM$  надвор од кружницата е земена точка  $P$  , при што должината на отсечката  $PA$  е целобројна. Тангентата низ точката  $P$  ја допира кружни-

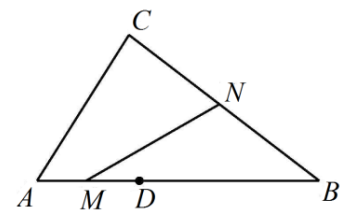


тата во точка  $B$  и притоа важи  $\overline{PB} = \overline{PA} + 6$ . Определи го бројот на можните вредности на должината на радиусот на кружницата, ако таа исто така е целобројна.

- A) 0      B) 2      C) 4      D) 6      E) 8

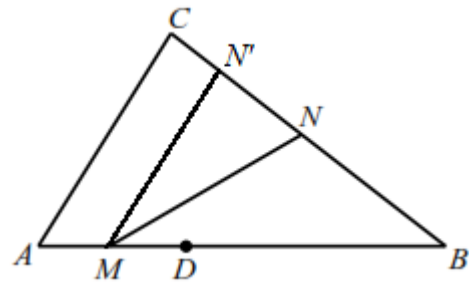
**Решение. D).** Бидејќи правата  $PB$  е тангента на кружницата во точката  $B$  триаголникот  $PMB$  е правоаголен (со прав агол во темето  $B$ ). Да означиме  $\overline{PA} = x$ ,  $\overline{MB} = \overline{MA} = r$ . Тогаш  $\overline{PB} = x + 6$ . Со примена на Питагоровата теорема на триаголникот  $PMB$  добиваме  $(x+r)^2 = (x+6)^2 + r^2$  од што следува  $r = 6 + \frac{18}{x}$ . За да  $r$  е природен број  $x$  може да биде 1, 2, 3, 6, 9, 18, т.е.  $r$  може да има шест различни вредности.

30. Даден е триаголник  $ABC$  ( $\overline{AB} > \overline{AC}$ ) и точка  $D$  на страната  $AB$  таква што  $\overline{DB} = \overline{AC}$ . Точките  $M$  и  $N$  се средини на отсечките  $AD$  и  $BC$ , соодветно. Определи го  $\sphericalangle BAC$  ако  $\sphericalangle BMN = 15^\circ$ .



- A)  $30^\circ$       B)  $75^\circ$       C)  $60^\circ$       D)  $45^\circ$       E)  $80^\circ$

**Решение. A).** Низ точката  $M$  повлекуваме права паралелна со страната  $AC$  и во пресекот со страната  $BC$  ја наоѓаме точката  $N'$ . Тогаш триаголниците  $ABC$  и  $MBN'$  се слични. При ознаки  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  и  $\overline{BC} = a$ , од условот на задачата следува



$\overline{MB} = \frac{b+c}{2}$ . Сега од  $\triangle ABC \sim \triangle MBN'$  следува  $\overline{MN'} = \frac{b(b+c)}{2c}$  и  $\overline{BN'} = \frac{a(b+c)}{2c}$ . Според тоа

$$\overline{BN} : \overline{NN'} = \frac{a}{2} : \left( \frac{a(b+c)}{2c} - \frac{a}{2} \right) = \frac{c}{b} \text{ и } \overline{MB} : \overline{MN'} = \frac{b+c}{2} : \frac{b(b+c)}{2c} = \frac{c}{b}.$$

Значи,  $\overline{BN} : \overline{NN'} = \overline{MB} : \overline{MN'}$ , па затоа  $MN$  е симетрала на  $\sphericalangle BMN' = \sphericalangle BAC$  и како  $\sphericalangle BMN = 15^\circ$  заклучуваме дека  $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ .

## Junior (прва и втора година) 2018

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

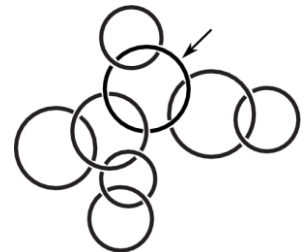
1. Во моето семејство, секое дете има најмалку двајца браќа и најмалку една сестра. Кој е најмалиот можен број деца во моето семејство?

A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

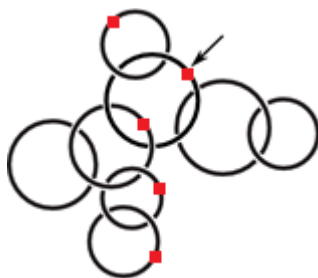
**Решение. C).** Во семејството мора да има најмалку две сестри и тројца браќа. Значи, мора да има најмалку 5 деца.

2. Некои од алките на цртежот десно формираат синцир во кој се наоѓа алката која е означена со стрелката. Колку алки има во најдолгиот ваков синцир?

A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7



**Решение. C).** Во синцирот две алки се соседни ако на



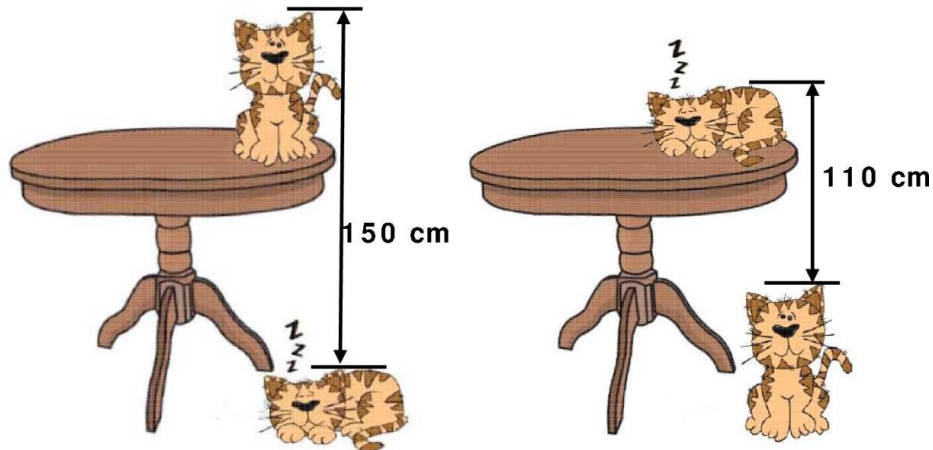
цртежот кружниците со кои се претставени се прекинуваат меѓу себе, т.е. првата кружница ја прекинува втората и втората кружница ја прекинува првата. Ваквите кружници на цртежот лево се означени со црвени квадратчиња. Значи, најдолгиот ваков синцир има 5 алки.

3. Должините на две страни на еден триаголник се 5 и 2, а должината на третата страна е непарен природен број. Определи ја должината на третата страна.

A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

**Решение. C).** Со  $a$  да ја означиме должината на третата страна. Од неравенството на триаголник добиваме  $|5 - 2| < a < 5 + 2$ , т.е.  $3 < a < 7$ . Но како должината е непарен природен број заклучуваме дека  $a = 5$ .

4. Растојанието од мацката што седи исправена на масата до мацката што спие на подот е  $150\text{ cm}$ . Растојанието од мацката што спие на масата до мацката што седи исправена на подот е  $110\text{ cm}$ . Се мери секогаш од највисокиот дел на едната до највисокиот дел на другата мацка, како што е прикажано на долниот цртеж. Колкава е височината на масата?



- A)  $110\text{ cm}$       B)  $120\text{ cm}$       C)  $130\text{ cm}$       D)  $140\text{ cm}$       E)  $150\text{ cm}$

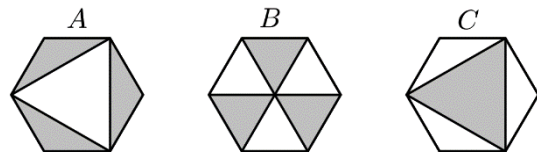
**Решение. C).** Со  $x$  да ја означиме височината на мацката додека спие, а со  $y$  да ја означиме височината на мацката додека седи. Тогаш за височината на масата добиваме  $150 - y + x = 110 - x + y$ . Од оваа равенка следува  $y = x + 20$ . Според тоа, височината на масата е  $150 - y + x = 150 - x - 20 + x = 130\text{ cm}$ .

5. Збирот на пет последователни природни броеви е  $10^{2018}$ . Кој е средниот број?  
 A)  $10^{2013}$       B)  $5^{2017}$       C)  $10^{2017}$       D)  $2^{2018}$       E)  $2 \cdot 10^{2017}$

**Решение. E).** Од  $(a-2) + (a-1) + a + (a+1) + (a+2) = 10^{2018}$  следува  $5a = 10^{2018}$ .

Според тоа,  $a = \frac{10^{2018}}{5} = \frac{10 \cdot 10^{2017}}{5} = 2 \cdot 10^{2017}$ .

6. Дадени се три складни правилни шест-аголници, цртеж десно. Со  $X, Y, Z$  е означена вкупната плоштина на затемнетиот дел на фигурите  $A, B, C$ , соодветно. Кое од следниве тврдења е точно?



- A)  $X = Y = Z$       B)  $Y = Z - X$       C)  $Z = X - Y$       D)  $X = Y - Z$

Е) Секоја од трите плоштини  $X, Y, Z$  има различна вредност

**Решение. А).** Правилниот шестаголник го делиме на три складни ромба. Потоа ги повлекуваме подолгите дијагонали на делбените ромбови и го добиваме цртежот десно, на кој се обоени надвореш-



ните триаголници. Според тоа, обоени се три од шесте складни триаголници, што значи дека обоениот и необоениот дел на фигурата А имаат еднаква плоштина. Истото важи и за фигурите В и С. Конечно, точно е равенството  $X = Y = Z$ .

7. Марија има 42 јаболка, 60 кајсии и 90 цреша. Таа сака користејќи ги сите плодови да направи идентични купчиња, а потоа на секој свој пријател да му даде по едно купче. Кој е најголемиот број на купчиња што таа може да ги направи?

А) 3      В) 6      С) 10      Д) 14      Е) 42

**Решение. В).** Бидејќи секое купче содржи еднаков број од секое овошје заклучуваме дека бројот на купчињата е делител на 42, 60 и 90. Бидејќи се бара најголемиот број купчиња, треба да најдеме НЗД од трите броја. Значи, најголемиот број купчиња е  $\text{НЗД}(42, 60, 90) = 6$ .

8. На цртежот десно е прикажано точно собирање на два броја, а потоа некои од цифрите на собирците се заменети со буквите  $P, Q, R$  и  $S$ . Определи го збирот  $P + Q + R + S$  ?

А) 14      В) 15      С) 16      Д) 18      Е) 24

$P$	$4$	$5$
$+$	$Q$	$R$
$S$		
$6$	$5$	$4$

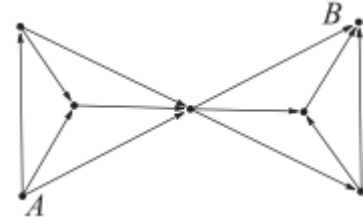
**Решение. В).** Од собирањето на единиците следува дека  $S = 9$  и имаме 1 пренос. Сега, од собирањето на десетките следува дека мора да важи  $1 + 4 + R = 5$ , па затоа  $R = 0$ . Понатаму, од собирањето на стотките имаме  $P + Q = 6$ . Конечно,  $P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$ .

9. Колку е збирот на 25% од 2018 и 2018% од 25?

А) 1009      В) 2016      С) 2018      Д) 3027      Е) 5045

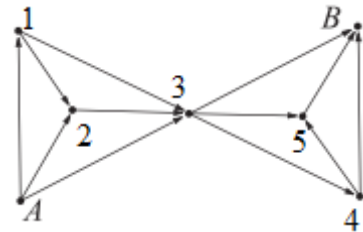
**Решение. А).** Бараниот збир е еднаков на  $\frac{25}{100} \cdot 2018 + \frac{2018}{100} \cdot 25 = 2 \cdot \frac{2018 \cdot 25}{100} = 1009$ .

10. На цртежот десно е прикажан дијаграм во кој точките се поврзани со стрелки. Дозволено е движење само во насоките кои ги покажуваат стрелките. На колку различни начини може да се стигне од точката  $A$  до точката  $B$ ?



- A) 20      B) 16      C) 12      D) 9      E) 6

**Решение. В).** При ознаки како на цртежот десно од точката  $A$  до точката 3 може да се стигне по следниве патишта:  $A123$ ,  $A13$ ,  $A23$  и  $A3$ , што значи имаме 4 различни начини. Понатаму, од точката 3 до точката  $B$  може да се стигне по следни-



ве патишта:  $3B$ ,  $34B$ ,  $345B$  и  $35B$ , што значи начини 4 различни начини. Сега, од принципот на производ добиваме дека од точката  $A$  до точката  $B$  може да се стигне на  $4 \cdot 4 = 16$  различни начини.

11. Две згради се лоцирани на улица на растојание 250 метри една од друга. Во првата зграда живеат 50 жители, а во втората 75 жители. Каде треба на улицата да се постави автобуска постојка така што при еднократно одење вкупното растојание што сите станари на овие две згради ќе го поминуваат до автобуската постојка да биде најмало можно?

- A) пред првата зграда      B) на 100 метри од првата зграда  
C) на 100 метри од втората зграда      D) пред втората зграда  
E) било каде меѓу двете згради

**Решение. D).** Ако автобуската постојка е на  $a$  метри од втората зграда, тогаш тоа ќе биде на  $250 - a$  метри од првата зграда. Притоа вкупното растојание кои сите станари ќе го поминат при еднократно одење до автобуската постојка ќе биде  $75a + 50 \cdot (250 - a) = 75 \cdot 250 + 25a$  и ова растојание ќе биде најмало кога  $a = 0$ . Значи, автобуската постојка треба да се постави пред втората зграда.

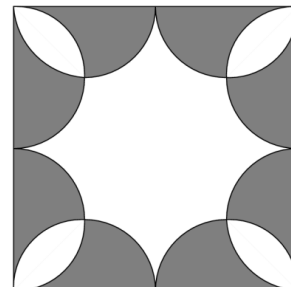
12. Во низа се запишани 105 броеви: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, ... (Секој број  $n$  е запишан точно  $n$  пати). Колку броеви од оваа низа се деливи со 3?

- A) 4      B) 12      C) 21      D) 30      E) 45

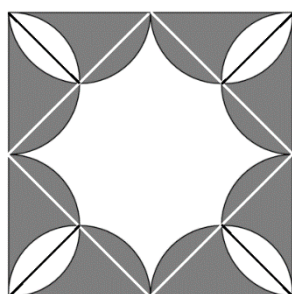
**Решение. D).** Имаме,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 105$  следува дека  $n = 14$ . Природни броеви помали или еднакви на 14 и деливи со 3 се: 3, 6, 9 и 12. Според тоа,  $3 + 6 + 9 + 12 = 30$  броеви од оваа низа се деливи со 3.

13. Осум идентични полукругови се нацртани во внатрешноста на квадрат со страна со должина 4 (цртеж десно). Колкава е плоштината на белиот дел од квадратот?

A)  $2\pi$       B) 8      C)  $6 + \pi$       D)  $3\pi - 2$       E)  $3\pi$



**Решение. B).** На цртежот лево се поврзани средините на страните на квадратот, со што е добиен квадрат со должина на страна  $2\sqrt{2}$ .



Потоа секој од белите делови е поделен на два складни отсечоци, кои се над агол од  $90^\circ$ . Но, и добиените сиви отсечоци се над агол од  $90^\circ$ , па затоа сите добиени отсечоци се складни, т.е. имаат еднакви плоштини. Оттука следува дека плоштината на белиот дел од квадратот е еднаква на плоштината на квадратот со страна  $2\sqrt{2}$ , т.е. на  $(2\sqrt{2})^2 = 8$ .

14. Во еден ден сообраќале вкупно 40 возови на директни линии кои поврзуваат точно два од градовите  $M, N, O, P$  и  $Q$ , и тоа: 10 возови сообраќале од или до градот  $M$ , 10 возови сообраќале од или до градот  $N$ , 10 возови сообраќале од или до градот  $O$ , 10 возови сообраќале од или до градот  $P$ . Колку возови сообраќале од или до градот  $Q$ ?

A) 0      B) 10      C) 20      D) 30      E) 40

**Решение. E).** За секој воз имаме почетна и крајна станица. Тоа значи дека секој воз кој сообраќа од и до некој град се брои двапати. Затоа важи  $\frac{4 \cdot 10 + Q}{2} = 40$ , од каде добиваме  $Q = 40$ .

15. На еден Универзитет по општествени науки студентите може да студираат јазици, историја и филозофија. Англиски јазик студираат 35% од студентите што студираат јазици, а 13% од вкупниот број на студенти на Универзитетот ги

студираат сите останати јазици освен англискиот. Нема студенти кои студираат повеќе од еден јазик. Определи го процентот на студентите кои студираат јазици?

- A) 13%      B) 20%      C) 22%      D) 48%      E) 65%

**Решение. B).** Јазик кој не е англиски студираат 65% од студентите кои студираат јазици. Оттука добиваме дека  $65\%J = 13\%S$ , па затоа

$$J = \frac{15}{65}S = \frac{1}{5}S = 20\%S.$$

Според тоа, јазици студираат 20% од студентите.

16. Петар сакал да купи книга, но немал пари. Книгата ја купил со помош на татко му и неговите двајца браќа. Таткото дал половина од сумата што тој ја добил од браќата. Постариот брат на Петар му дал една третина од сумата што тој ја добил од татко му и од неговиот помал брат. Помалиот брат на Петар му дал 10 евра. Колку евра чинела книгата?

- A) 24 €      B) 26 €      C) 28 €      D) 30 €      E) 32 €

**Решение. A).** Нека цената на книгата е  $a$  евра. Бидејќи таткото дал половина од сумата која Петар ја добил од браќата, тој дал третина од цената на книгата, т.е. дал  $\frac{1}{3}a$  евра. Таткото и помалиот брат дале  $\frac{1}{3}a + 10$  евра, што значи дека постариот брат дал  $\frac{1}{3}(\frac{1}{3}a + 10)$  евра. Значи,  $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}a + 10) + 10 = a$ , од каде добиваме  $a = 24$  €.

17. Колку има трицифрени броеви такви што двоцифрениот број што се добива кога ќе се избрише средната цифра е еднаков на една деветтина од дадениот трицифрен број?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. D).** Од условот на задачата следува  $\frac{1}{9}\overline{abc} = \overline{ac}$ , од каде добиваме  $\frac{1}{9}(100a + 10b + c) = 10a + c$ , т.е.  $c = \frac{5}{4}(a + b)$ . Бидејќи  $a, b, c$  се цифри и  $a \neq 0$  мора да важи  $a + b = 4$ . Но,  $a \neq 0$ , па затоа  $(a, b) = (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$ . Значи, имаме 4 трицифрени броја со саканото својство.

18. Дадено е равенството

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + \dots + 2018^2} = 2018^{10}.$$

Колку пати бројот  $2018^2$  е собран под коренот?

- A) 5      B) 8      C) 18      D)  $2018^8$       E)  $2018^{18}$

**Решение. Е).** Ако бројот  $2018^2$  е  $a$  пати собран под коренот, тогаш важи

$$a \cdot 2018^2 = 2018^{20}, \text{ т.е. } a = 2018^{18}.$$

19. Колку цифри има бројот кој е еднаков на вредноста на изразот

$$\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1) ?$$

- A) 2017      B) 2018      C) 4035      D) 4036      E) 4037

**Решение. D).** Имаме,

$$\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1) = \frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot \underbrace{999\dots999}_{2018 \text{ цифри}} = \frac{111\dots111}{2018 \text{ цифри}} \frac{000\dots000}{2018 \text{ цифри}}.$$

Според тоа, вредноста на дадениот израз има  $2018 + 2018 = 4036$  цифри.

20. Во правилен 2018-аголник, темињата се означени со броевите од 1 до 2018. Во многуаголникот се повлечени две дијагонали и тоа едната меѓу темињата означени со броевите 18 и 1018, а другата меѓу темињата означени со броевите 1018 и 2000. На овој начин се добиени три многуаголници. Колку страни има секој од вака добиените многуаголници?

- A) 38, 983, 1001      B) 37, 983, 1001      C) 38, 982, 1001  
D) 37, 982, 1000      E) 37, 983, 1002

**Решение. А).** Многуаголникот кој се добива со повлекување на дијагоналата меѓу темињата 18 и 1018 има  $1018 - 17 = 1001$  темиња, многуаголникот кој се добива со повлекување на дијагоналата меѓу темињата 1018 и 2000 има  $2000 - 1017 = 983$  темиња. Значи двата многуаголници имаат по 983 и 1001 страна. Бидејќи секоја од двете дијагонали се брои двапати, трите многуаголници имаат  $2018 + 2 \cdot 2 = 2022$  страни. Конечно, третиот многуаголник има  $2022 - (983 + 1001) = 38$  страни.

21. Неколку цели броеви се запишани на табла, вклучувајќи го и бројот 2018. Збирот на овие броеви е 2018. Нивниот производ е исто така 2018.

Кој од следниве броеви може да биде бројот на броеви што се запишани на таблата?

- A) 2016      B) 2017      C) 2018      D) 2019      E) 2020

**Решение. В).** За да бидат исполнети дадените услови покрај бројот 2018 на таблата може да се запишани само броевите 1 и  $-1$  и тоа двата броја еднаков број пати, а бројот  $-1$  мора да е запишан парен број пати. Последното значи дека бројот на запишаните броеви без бројот 2018 мора да е делив со 4. Од дадените броеви тоа важи само за бројот 2017, бидејќи  $2017-1$  е делив со 4.

22. Дадени се четири позитивни броеви. Избираме три од нив, ја пресметуваме нивната аритметичка средина и потоа истата ја собираме со четвртиот број. Ова може да се направи на четири различни начини. Резултатите што се добиваат се 17, 21, 23 и 29. Колку е најголемиот од дадените четири броеви?

- A) 12      B) 15      C) 21      D) 24      E) 29

**Решение. С).** Дадените броеви да ги означиме со  $a, b, c, d$ . Имаме,

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} + d = 17, \\ \frac{a+b+d}{3} + c = 21 \\ \frac{a+c+d}{3} + b = 23 \\ \frac{b+c+d}{3} + a = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+3d = 51 \\ a+b+3c+d = 63 \\ a+3b+c+d = 69 \\ 3a+b+c+d = 87 \end{cases} \Rightarrow 6(a+b+c+d) = 270$$

односно  $a+b+c+d = 45$ . Сега лесно се добива дека  $a = 21$ ,  $b = 12$ ,  $c = 9$ ,  $d = 3$ . Значи, најголемиот од четирите броеви е еднаков на 21.

23. Точките  $A_0, A_1, A_2, \dots$  припаѓаат на една права. Притоа  $\overline{A_0A_1} = 1$  и за секој ненегативен цел број  $n$  точката  $A_n$  е средина на отсечката  $A_{n+1}A_{n+2}$ . Колку изнесува должината на отсечката  $A_0A_{11}$ ?

- A) 171      B) 341      C) 512      D) 587      E) 683

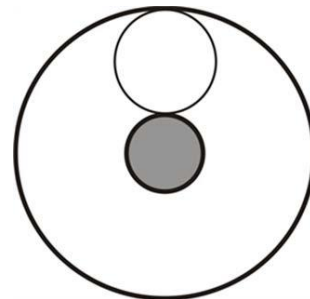
**Решение. Е).** Според условот на задачата важи  $\overline{A_{n+1}A_{n+2}} = 2\overline{A_nA_{n+1}}$ , од што следува дека  $\overline{A_nA_{n+1}} = 2^n$ , за  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . Понатаму сите точки со непарни индекси се на едната страна од точката  $A_0$ , на пример десната страна, а сите

точки со парни индекси се на другата страна од точката  $A_0$  (левата страна).

Исто така важи  $\overline{A_{2n-1}A_{2n+1}} = \frac{1}{2} \overline{A_{2n}A_{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n} = 2^{2n-1}$ . Затоа

$$\begin{aligned} \overline{A_0A_{11}} &= \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_3} + \overline{A_3A_5} + \overline{A_5A_7} + \overline{A_7A_9} + \overline{A_9A_{11}} \\ &= 1 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 \\ &= 1 + 2 + 8 + 32 + 128 + 512 = 683. \end{aligned}$$

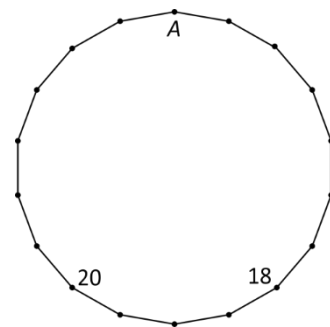
24. Две концентрични кружници со радиуси 1 и 9 формираат прстен. Во внатрешноста на прстенот нацртани се без преклопување  $n$  кружници така што секоја од нив ги допира двете почетни кружници (еден пример е даден на цртежот, само со други радиуси, за случајот  $n=1$ ). Која е најголемата можна вредност на  $n$ ?



- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. C).** Центрите на сите впишани кружници се наоѓаат на кружница со радиус 5 и центар во центарот на кружниот прстен. Нивните радиуси се еднакви на 4. Центрите на впишаните кружници се темиња на многуаголник впишан во кружницата со радиус 5. Во најдобар случај две впишани кружници се допираат, па растојанијата меѓу центрите, т.е. должините на страните на впишаниот многуаголник не може да се помали од 8. Притоа за периметарот на впишаниот многуаголник мора да важи  $L < 2\pi \cdot 5 = 10\pi \approx 31,415\dots$ . Според тоа, впишаниот многуаголник не може да има повеќе од три страни чии должини се поголеми или еднакви на 8, што значи дека на саканиот начин можеме да впишеме најмногу 3 кружници.

25. На секое теме на еден 18-аголник прикажан на цртежот десно, треба да се придружи еден број, кој што треба да е еднаков на збирот од броевите придружени на двете соседни темиња. Два од овие броеви се дадени. Кој број треба да се придружи на темето А?



- A) 2018      B) -20      C) 18  
D) 38      E) -38



празните простори го сече во ромб чија дијагонала е нормална на страната на пресечниот шестаголник. Притоа дијагоналите на трите добиени ромба се сечат во центарот на шестаголникот и формираат шесткрака ѕвезда. Ваква фигура единствено е прикажана на цртежот А).

28. Секој број од множеството  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  е запишан точно еднаш во секое од полињата на табела  $2 \times 3$ , така што збирот на броевите во секоја редица и во секоја колона е делив со 3. На колку начини може вака да се запишат броевите?

A) 36      B) 42      C) 45      D) 48      E) друг број

**Решение. D).** Во колоните мора да се збировите:

$$1+5, 2+4, 3+6 \text{ или } 1+2, 5+4, 3+6.$$

1	2	3
5	4	6

1	5	3
2	4	6

Така се добиени табелите прикажани на цртежите десно. Во секоја од овие табели колоните може да ги распоредиме на  $3!$  начини. Понатаму, редовите можеме да ги распоредиме на 4 начини (со замена на цели редоци или со замена само на броевите 3 и 6). Според тоа, имаме  $2 \cdot 3! \cdot 4 = 48$  можни распореди.

29. Павел направил голема коцка со помош на исти мали коцки и обоил некои од нејзините ѕидови. Колку ѕидови обоил Павел, ако точно 45 од малите коцки немаат обоено ниту еден ѕид?

A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**Решение. C).** Нека коцката е направена од  $a^3$  единечни коцка. Тогаш во внатрешноста на коцката има  $(a-2)^3$  единечни коцки и овие коцки немаат обоено ниту еден ѕид. Затоа важи  $(a-2)^3 \leq 45 < 64$ , од каде ако се има предвид дека  $a$  е природен број добиваме  $a \leq 5$ . Понатаму, бројот на сите коцки мора да е поголем или еднаков на бројот на необоените коцки, па затоа  $45 \leq a^3$ , од каде добиваме  $4 \leq a$ . Значи, работ на коцката која ја боел Павел е  $a = 4$  или  $a = 5$ .

Ако  $a = 4$ , тогаш коцката е составена од  $4^3 = 64$  мали коцки, па како 45 немаат ниту еден обоен ѕид заклучуваме дека  $64 - 45 = 19$  коцки имаат барем по еден обоен ѕид. Но, на еден ѕид од големата коцка има 16 мали коцки, па затоа при боене на ѕидови на големата коцка не може да има 19 мали коцки со барем еден обоен ѕид.

Ако  $a=5$ , тогаш во внатрешноста на коцката има  $3^3=27$  мали коцки кои немаат обоено ниту еден ѕид, па на ѕидовите на големата коцка се наоѓаат  $45-27=18$  мали коцки кои немаат ниту еден обоен ѕид. Ова е можно само ако два спротивни ѕида не се обоени, а другите четири ѕида се обоени (Зошто?). Значи, на големата коцка се обоени точно 4 ѕида.

30. Во кружница со дијаметар  $AD$  се повлечени тетивите  $AB$  и  $AC$ . Познато е дека

$$\angle BAC = 60^\circ, BE \perp AC, \overline{EC} = 3 \text{ cm}$$

(види цртеж). Определи ја должината на тетивата  $BD$ ?

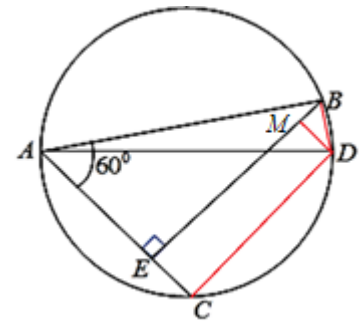
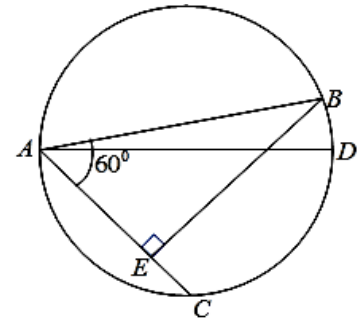
- А)  $\sqrt{3}$     В)  $2\sqrt{3}$     С) 3    Д) 2    Е)  $3\sqrt{2}$

**Решение. В).** Триаголникот  $ABE$  е правоаголен, па затоа  $\angle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Понатаму  $AD$  е дијаметар, па затоа  $DC \perp AC$  и ако  $M$  е подножјето на нормалата повлечена од  $D$  на  $BE$ , тогаш четириаголникот  $CEMD$  е правоаголник, од каде добиваме  $\overline{MD} = \overline{EC} = 3 \text{ cm}$ . Но,

$$\angle MBD = \angle ABD - \angle ABE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

т.е.  $MBD$  е половина од рамностран триаголник. Затоа  $\overline{BD}^2 - (\frac{1}{2}\overline{BD})^2 = \overline{MD}^2$ ,

па е  $\overline{BD} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{MD} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ .



## Junior (прва и втора година) 2019

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Вредноста на изразот  $20 \cdot 19 + 20 + 19$  е еднаква на:

A) 389      B) 399      C) 409      D) 419      E) 429

**Решение. D).** Имаме:

$$20 \cdot 19 + 20 + 19 = 20 \cdot (19 + 1) + 19 = 20 \cdot 20 + 19 = 400 + 19 = 419.$$

2. Модел на воз кружната патека ја минува за 1 минута и 11 секунди. За колку време возот патеката ќе ја мине шест пати?


A) 6 минути и 56 секунди    B) 7 минути и 6 секунди  
 C) 7 минути и 16 секунди    D) 7 минути и 26 секунди  
 E) 7 минути и 36 секунди

**Решение. B).** Имаме,  $1 \text{ min } 11 \text{ s} = (60 + 11) \text{ s} = 71 \text{ s}$ , па затоа вкупното време е

$$6 \cdot 71 \text{ s} = 426 \text{ s} = (7 \cdot 60 + 6) \text{ s} = 7 \text{ min } 6 \text{ s}.$$

3. Берберот сака да го напише зборот SHAVE на табла така што клиентот кој зборот го гледа во огледалото истиот го чита правилно. Што треба да напише берберот на таблата?

A) SHAVE    B) SHAVĒ    C) ĒVAHŠ    D) EVAHŠ    E) ĒVAHŠ

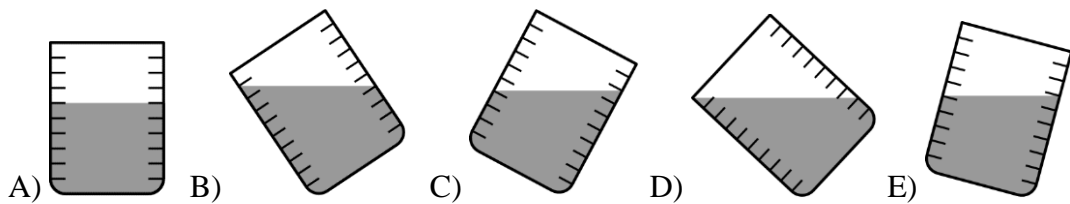
**Решение. E).** Кога гледаме во огледало ние всушност ја гледаме сликата на зборот која се добива при осна симетрија во однос на вертикалната права. Тоа значи дека берберот треба да ја напише сликата на дадениот збор при оваа осна симетрија. Истата е прикажана на цртежот десно, т.е.  берберот треба да го запише зборот **ĒVAHŠ**.

4. Колку различни зборови на точки може да добиеш ако истовремено фрлиш три стандардни коцки за играње?

A) 14          B) 15          C) 16          D) 17          E) 18

**Решение. C).** Најмалиот можен збир е 3 (на сите три коцки да падне по 1 точка), а најголемиот можен збир е 18 (на сите три коцки да паднат по 6 точки). Сите зборови меѓу 3 и 18 се можни, што значи дека вкупно имаме 16 зборови.

5. Во пет идентични чаши е турена вода. Четирите чаши содржат еднакво количество вода, а петтата чаша содржи различно количество вода. Која чаша содржи различно количество вода?



**Решение. B).** Најголемо количество вода содржи чашата која има најголема сива плоштина. Дното на сите чаши е сиво, па затоа за да извршиме споредба треба да ги пресметаме плоштините над дното. Ако ширината на чашата ја означиме со  $a$  и растојанието меѓу две цртички го означиме со  $c$ , тогаш:

- за чашата A) плоштината е  $5ac$ ,
- за чашата B плоштината е  $\frac{3c+8c}{2}a = 5,5ac$ ,
- за чашата C плоштината е  $\frac{3c+7c}{2}a = 5ac$ ,
- за чашата D плоштината е  $\frac{c+9c}{2}a = 5ac$ ,
- за чашата E плоштината е  $\frac{4c+6c}{2}a = 5ac$ .

Значи, чашата B содржи различно количество вода од другите чаши.

6. Еден парк има пет порти низ кои може да се влезе или излезе од паркот. Моника сака да влезе низ една, а да излезе низ друга порта. На колку начини тоа може да го направи?

A) 25          B) 20          C) 26          D) 15          E) 10

**Решение. B).** Моника може да избере една од 5 врати за влез и една од преостанатите 4 врати за излез од паркот. Значи, таа вкупно има  $5 \cdot 4 = 20$  можности.

7. Масата на секој од трите кенгури, изразена во килограми, е различен природен број. Вкупната маса на кенгурите е  $97\text{ kg}$ . Определи ја најголемата маса која може да ја има најмалиот кенгур.

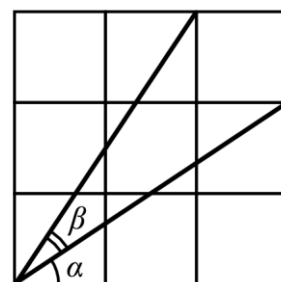
A)  $1\text{ kg}$       B)  $30\text{ kg}$       C)  $31\text{ kg}$       D)  $32\text{ kg}$       E)  $33\text{ kg}$

**Решение. C).** Најмалиот кенгур не може да има  $32\text{ kg}$  или поголема маса, бидејќи тогаш најмалите можни маси за другите два кенгури се  $33\text{ kg}$  и  $34\text{ kg}$ , па вкупната маса на трите кенгури ќе биде најмалку  $32+33+34 > 97$ . Меѓутоа, ако најмалиот кенгур има  $31\text{ kg}$ , тогаш другите два кенгури може да имаат  $32\text{ kg}$  и  $34\text{ kg}$  и тогаш важи  $31+32+34 = 97$ .

8. Големиот квадрат на цртежот десно е составен од девет идентични квадрати. Кое од следниве равенства важи за означените агли  $\alpha$  и  $\beta$ ?

A)  $\alpha = \beta$       B)  $2\alpha + \beta = 90^\circ$       C)  $\alpha + \beta = 60^\circ$

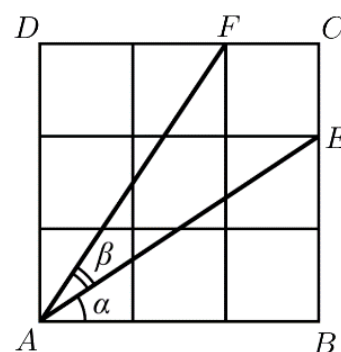
D)  $\alpha + 2\beta = 90^\circ$       E)  $\alpha + \beta = 45^\circ$



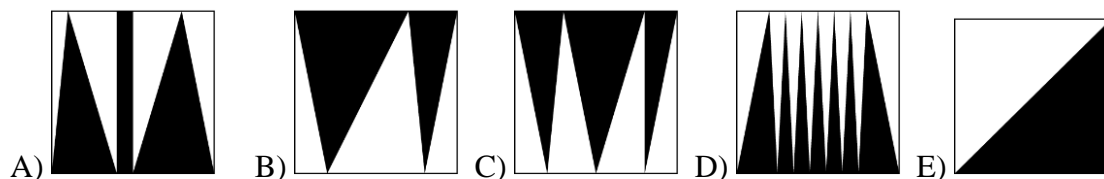
**Решение. B).** При ознаки како на цртежот десно триаголниците  $ABE$  и  $ADF$  се складни (САС, бидејќи се правоаголници и имаат еднакви катети). Според тоа,  $\angle BAE = \angle DAF = \alpha$ . Оттука следува дека

$$\angle BAE + \angle DAF + \angle EAF = 90^\circ,$$

односно  $2\alpha + \beta = 90^\circ$ .



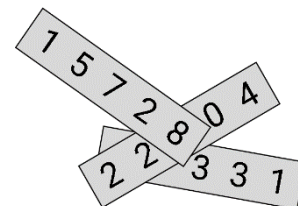
9. Во секој од петте квадрати дел од површината е обоен со црна боја. Во кој квадрат црната површина има најголема плоштина?



**Решение. A).** На квадратите B, C, D и E обоените површини имаат плоштина еднаква на половина од плоштината на квадратот (плоштината на секој триаголник е половина од производот на должините на основата и висината над таа

страна, а збирот на должините на сите страни е еднаков на должината на страната на квадратот). Во квадратот  $A$  имаме обоена површина со поголема плоштина и тоа за половина од плоштината на црниот правоаголник (Зошто?).

10. На цртежот десно се прикажани три картончиња, на секое од кои е запишан по еден петцифрен број. Три цифри од запишаните броеви се покриени. Збирот на запишаните броеви е еднаков на 57263. Кои се покриените цифри?



- A) 0, 2 и 2    B) 1, 2 и 9    C) 2, 4 и 9  
D) 2, 7 и 8    E) 5, 7 и 8

**Решение. В).** Збирот на двата броја кои имаат покриени цифри е

$$57263 - 15728 = 41535.$$

Понатаму, кај едниот број е покриена цифрата на стотките  $a$ , па затоа тој број е  $22000 + 100a + 4$ , а кај другиот број се покриени цифрите на десетилјадите  $b$  и илјадите  $c$ , па затоа тој број е  $10000b + 1000c + 331$ . Според тоа,

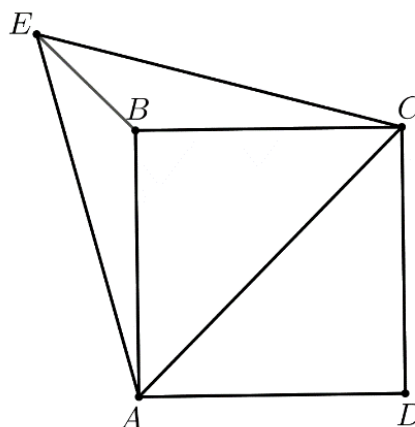
$$22000 + 100a + 4 + 10000b + 1000c + 331 = 41535,$$

$$100 \cdot \overline{bca} = 19200,$$

$$\overline{bca} = 192.$$

Конечно, покриените цифри се 1, 9 и 2.

11. Темињата на квадрат  $A, B, C, D$  во овој редослед се означени во насока на движењето на стрелките на часовникот. Потоа е конструиран рамностран триаголник чии темиња во редослед  $A, E, C$  се означени во насока на движењето на стрелките на часовникот. Определи ја големина на  $\angle CBE$ , изразена во степени.



- A)  $30^\circ$     B)  $45^\circ$     C)  $135^\circ$     D)  $145^\circ$     E)  $150^\circ$

**Решение. С).** Триаголниците  $ABE$  и  $CBE$  се складни (признак ССС). Според тоа,

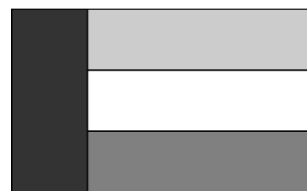
$$\angle ABE = \angle CBE = \frac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ) = 135^\circ.$$

12. Нека  $a, b, c, d$  се различни природни броеви кои се поголеми или еднакви на 1 и се помали или еднакви на 10. Определи ја најмалата можна вредност на изразот  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$  ?

A)  $\frac{2}{10}$       B)  $\frac{3}{19}$       C)  $\frac{14}{45}$       D)  $\frac{29}{90}$       E)  $\frac{25}{72}$

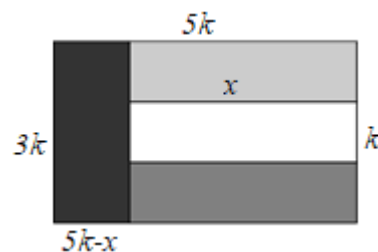
**Решение. C).** Најмалата можна вредност се добива ако именителите се најголемите можни броеви, а броителите се најмалите можни броеви. Имаме,  $\frac{1}{10} + \frac{2}{9} = \frac{29}{90}$  и  $\frac{2}{10} + \frac{1}{9} = \frac{28}{90}$ . Помал е збирот  $\frac{28}{90} = \frac{14}{45}$ .

13. Знамето на државата Кенгурија е во форма на правоаголник чии должини на страни се однесуваат како 3:5. Знамето е поделено на четири правоаголници со еднакви плоштини (цртеж десно). Определи го односот на должините на страните на белиот правоаголник.

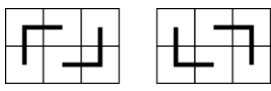


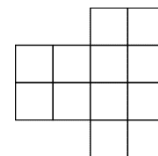
A) 1:3      B) 1:4      C) 2:7      D) 3:10      E) 4:15

**Решение. E).** Должините на страните на знамето се од видот  $3k$  и  $5k$ . Значи, висината на секој хоризонтален дел од знамето е  $k$ . Ако со  $x$  ја означиме ширината на хоризонталните делови од знамето, тогаш ширината на вертикалниот дел од знамето ќе биде  $5k - x$ . Затоа важи  $k \cdot x = (5k - x) \cdot 3k$ , од каде добиваме  $x:k = 15:4$ .



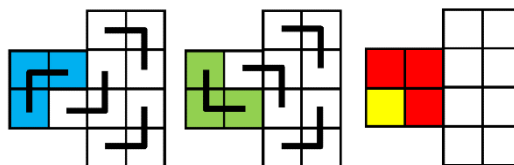
14. Правоаголник со димензии  $3 \times 2$  може со L-тримина  да биде покриен на

два различни начина и тоа: . На колку различни начини може да биде покриена фигурата прикажана на цртежот десно.



A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. B).** Во левиот квадрат триминото може да се постави така што ќе ја покрие првата колона или нема да ја по-



крие првата колона. Покривањето на првата колона може да се направи на два начина и притоа имаме две покривања на целата фигура (види цртеж). Ако триминото не ја покрива првата колона, тоа може да се постави на два начина, од кои едниот е прикажан на горниот цртеж. Јасно, притоа не е можно покривање на целата фигура со тримина. Другиот случај се разгледува аналогно. Значи, фигурата може да се покрие на два начина.

15. Натпреварот во триатлон се состои од пливање, трчање и возење велосипед. Возењето велосипед е три четвртини од вкупната должина на патеката, трчањето е една петтина од вкупната должина на патеката и пливањето е  $2\text{ km}$ . Колкава е должината на патеката во овој триатлон?

A)  $10\text{ km}$       B)  $20\text{ km}$       C)  $38\text{ km}$       D)  $40\text{ km}$       E)  $60\text{ km}$

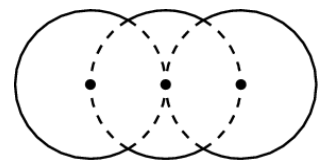
**Решение. D).** Возењето велосипед и трчањето се  $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$  од должината на патеката. Значи, пливањето е  $\frac{1}{20}$  од должината на патеката и како тоа е  $2\text{ km}$ , заклучуваме дека должината на патеката е  $20 \cdot 2 = 40\text{ km}$ .

16. Сок се прави од концентрат од портокал ( $p$ ) и вода ( $v$ ) во сооднос на волумените  $p : v = 1 : 7$ . Концентратот од портокал е во шише од  $1\text{ l}$  и шишето е полно до половина. Колкав дел од овој концентрат ќе се искористи при правење на  $2\text{ l}$  сок?

A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{2}{7}$       D)  $\frac{4}{7}$       E) Целиот концентрат

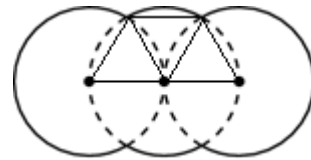
**Решение. B).** За  $1\text{ l}$  се потребни  $\frac{1}{8}\text{ l}$  концентрат. Значи, за  $2\text{ l}$  се потребни  $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\text{ l}$  концентрат, а тоа е половина од концентратот кој бил во шишето.

17. Фигурата на цртежот десно е составена од внатрешноста на три кружници со еднакви радиуси  $R$ , чии центри лежат на една права. Средната кружница минува низ центрите на крајните две кружници. Определи го периметарот на оваа фигура.



A)  $\frac{10\pi R}{3}$       B)  $\frac{5\pi R}{3}$       C)  $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$       D)  $2\pi R\sqrt{3}$       E)  $4\pi R$

**Решение. А).** Триаголниците прикажани на цртежот десно се рамнострани (Зошто?). Според тоа, периметарот на дадената фигура се состои од 10 кружни лаци кои припаѓаат на централен агол од  $60^\circ$ . Значи, периметарот на фигурата е еднаков на 10 шестини од периметарот на кружницата, т.е. на  $10 \cdot \frac{2R\pi}{6} = \frac{10R\pi}{3}$ .



18. Збирот на цифрите на бројот  $\overline{aaabbbb}$  е еднаков на бројот  $\overline{ab}$ . Определи го збирот  $a+b$ .

A) 20            B) 15            C) 10            D) 11            E) 12

**Решение. С).** Од условот на задачата следува  $3a+4b=10a+b$ , од каде добиваме  $7a=3b$ . Но,  $a$  и  $b$  се цифри, па како  $\text{НЗД}(3,7)=1$ , добиваме  $a=3, b=7$ . Конечно,  $a+b=10$ .

19. Имаме 60 јаболка и 60 круши кои се пакуваат во кутии, така што секоја кутија содржи еднаков број јаболка, а не постојат две кутии кои содржат еднаков број круши. Кој е најголемиот можен број кутии кои што може да се спакуваат на овој начин?

A) 20            B) 15            C) 12            D) 10            E) 6

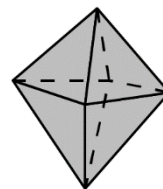
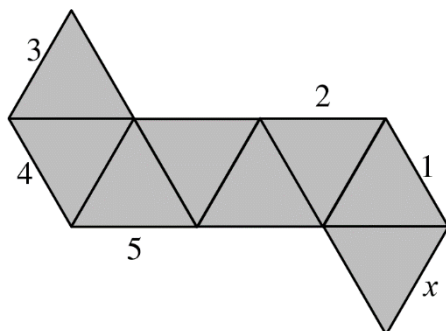
**Решение. D).** Бидејќи во секоја кутија има еднаков број јаболка, сите плодови може да се спакуваат во 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 или 60 кутии. Но, секоја кутија содржи различен број круши и како

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 < 60,$$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66 > 60$$

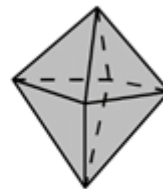
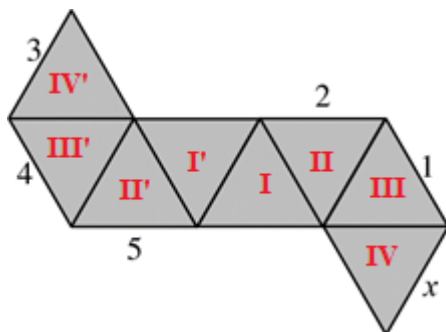
добиваме дека најголемиот можен број кутии е 10. Пакувањето во 10 кутии може да се направи така што во секоја кутија ќе се стават по 6 јаболка, а бројот на крушите по кутии ќе биде, на пример, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 15.

20. На долните цртежи се прикажани октаедар и неговата мрежа. Некои отсечки на мрежата се означени со броевите 1, 2, 3, 4 и 5, а една отсечка е означена со  $x$ . Од мрежата се формира октаедарот. Која отсечка ќе се поклопи со отсечката означена со  $x$ ?

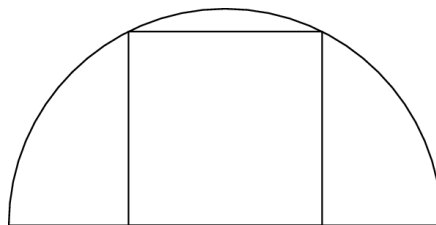


- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. Е).** Ако рамностраните триаголници од кои е составена мрежата ги означиме како на долниот цртеж, тогаш предниот (видливиот) дел од октаедарот ќе биде составен од триаголниците I, II, III, IV гледано од горниот лев триаголник во насока на движењето на стрелката на часовникот. Задниот (невидливиот) дел од октаедарот ќе биде составен од триаголниците I', II', III', IV' гледано од горниот лев триаголник во насока обратна од насоката на движењето на стрелката на часовникот. Тоа значи дека со триаголникот IV ќе се допре триаголникот II', т.е. отсечката  $x$  ќе се поклопи со отсечката 5.

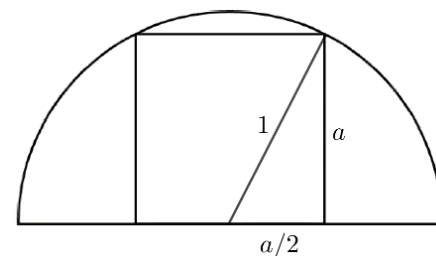


21. На цртежот десно две темиња на квадратот се наоѓаат на полукружницата, а другите две темиња се наоѓаат на дијаметарот на полукружницата. Радиусот на кружницата е еднаков на  $1\text{ cm}$ . Определи ја плоштината на квадратот.



- A)  $\frac{4}{5}\text{ cm}^2$       B)  $\frac{\pi}{4}\text{ cm}^2$       C)  $1\text{ cm}^2$   
 D)  $\frac{4}{3}\text{ cm}^2$       E)  $\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ cm}^2$

**Решение. А).** Должината на страната на квадратот да ја означиме со  $a$  (цртеж десно).



Тогаш од Питагоровата теорема следува  $a^2 + (\frac{a}{2})^2 = 1^2$ , од каде следува  $a^2 = \frac{4}{5}$ , а тоа е плоштината на квадратот.

22. Две точки се означени во круг кој ротира околу својот центар. Растојанието на едната точка до центарот на кругот е за  $3\text{ cm}$  поголемо од растојанието на другата точка до центарот на кругот. Подалечната точка се движи со брзина која е  $2,5$  поголема од брзината на точката која е поблиску до центарот на кругот. Определи го растојанието меѓу подалечната точка и центарот на кругот.
- A)  $10\text{ cm}$       B)  $9\text{ cm}$       C)  $8\text{ cm}$       D)  $6\text{ cm}$       E)  $5\text{ cm}$

**Решение. Е).** Ако поблиската точка до центарот на кругот е на растојание  $a$  од кругот, тогаш подалечната е на растојание  $a+3$  од центарот на кругот. Поблиската точка при едно завртување минува пат  $2\pi a$ , а подалечната точка минува пат  $2\pi(a+3)$ . Бидејќи точките за исто време прават едно завртување, заклучуваме дека нивните брзини се пропорционални со патиштата поминати за едно завртување. Значи,  $2\pi(a+3) : 2\pi a = 2,5$ , од каде добиваме  $a = 2$ . Конечно, растојанието меѓу подалечната точка и центарот на кругот е  $5\text{ cm}$ .

23. Природните броеви од 1 до 99 се запишани во растечки редослед без празни места меѓу нив. Потоа добиената низа цифри се дели на тројки цифри:

$$123456789101112\dots9798999 \rightarrow (123)(456)(789)(101)(112)\dots(979)(899).$$

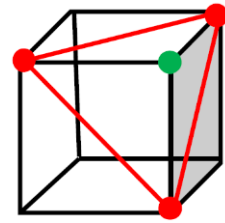
Која од следните тројки цифри не е една од тројките добиени со оваа поделба?

- A) (222)      B) (444)      C) (464)      D) (646)      E) (888)

**Решение. В).** Првите три тројки во поделбата можеме да ги занемариме. Ви сите преостанати тројки двоцифрениот број на кој цифрите му се разделуваат (11, 14, 17, 20, ...) при делење со 3 дава остаток 2. Кога ќе видиме како дадените тројки може да се добијат овој услов е задоволен за сите тројки освен за тројката (444). Навистина, (222) се добива од 22 и 23, потоа (464) од 46 и 47, па (646) од 64 и 65, а (888) од 88 и 89. Тројката (444) може да се добие само од 44 и 45, но остатокот при делење на 45 со 3 е 0.

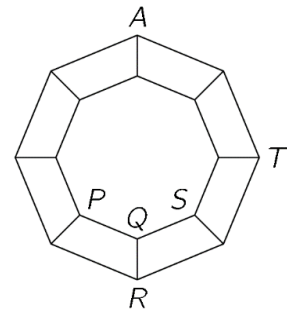
24. Колку рамнини содржат точно три темиња на дадена коцка?
- A) 1      B) 2      C) 4      D) 8      E) 12

**Решение. D).** Знаеме дека три неколинерани точни определуваат рамнина. Бидејќи рамнините треба да содржат точно три темиња на коцката, не може да избираме три темиња кои се на еден ѕид на коцката, ниту три темиња кои се на ист дијагонален пресек на коцката (такви рамнини ќе содржат по 4 темиња на коцката). Значи, мораме да избираме темиња како на цртежот десно (означени со црвено). Забележуваме дека за секоја таква рамнина едно од другите темиња (означено со зелена боја) е на едната страна на рамнината, а другите 4 темиња се на другата страна од рамнината. Според тоа, бројот на бараните рамнини е еднаков на бројот на темињата на коцката, т.е. на 8.

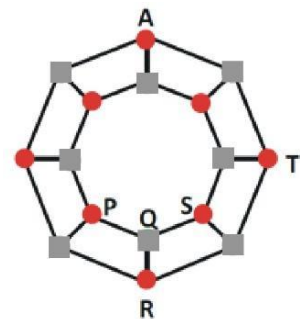


25. Фигурата на цртежот десно се состои од 16 темиња и отсечки кои поврзуваат некои од темињата. На почетокот мравка се наоѓа во темето  $A$ . Во еден потег таа оди од темето во кое се наоѓа во моментот во негово соседно теме (две темиња се соседни ако се поврзани со отсечка). Во кое од означените темиња  $P, Q, R, S, T$  мравката може да се најде по 2019 потези?

- A) само во  $P, R$  или  $S$ , но не во  $Q$  и  $T$   
 B) само во  $P, R, S$  или  $T$ , но не во  $Q$   
 C) само во  $Q$   
 D) само во  $T$   
 E) во секое од наведените темиња



**Решение. C).** На цртежот десно со зелени четириаголници се означени темињата во кои мравката може да се најде по непарен број потези, а со црвени кругови се означени темињата во кои мравката може да се најде по парен број потези. Бидејќи 2019 е непарен број мравката може да се најде само во темето  $Q$ . Еден начин е по



5 потези таа да дојде во темето  $Q$ , а потоа 1007 пати да отиде во  $S$  и да се врати во  $Q$ .

26. Природните броеви  $a, b$  и  $c$  се трицифрени и се такви што кај секој од нив цифрите не единиците и стотките се еднакви. Исто така, важи  $b = 2a + 1$  и  $c = 2b + 1$ . Колку можности постојат за бројот  $a$ ?
- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) повеќе од 3

**Решение. С).** Имаме,  $c = 2b + 1 = 2(2a + 1) + 1 = 4a + 3$  и како  $c$  е трицифрен број, добиваме дека  $4a + 3 \leq 999$ , односно  $a \leq 249$ . Тоа значи дека  $a = \overline{1x1}$  или  $a = \overline{2x2}$ .

Ако  $a = \overline{1x1} = 100 + 10x + 1$ , тогаш  $b = 2a + 1 = 200 + 20x + 3$ , па затоа цифрата на стотките на  $b$  е 3, од каде следува  $b = \overline{3y3}$ . Значи,  $300 + 10y + 3 = 200 + 20x + 3$ , од каде добиваме  $y = 2x - 10$ . Сега имаме  $c = 2b + 1 = 600 + 20y + 7$ , па затоа цифрата на стотките на  $c$  е 7, од каде следува  $c = \overline{7z7}$ . Значи,  $700 + 10z + 7 = 600 + 20y + 7$ , од каде добиваме  $z = 2y - 10$ . Според тоа,  $z = 2(2x - 10) - 10 = 4x - 30$  и како  $x$  и  $z$  се цифри, добиваме  $x = 8$  или  $x = 9$ . За  $x = 8$  добиваме  $y = 6$  и  $z = 2$ , т.е. ги добиваме броевите 181, 363 и 727, кои ги задоволуваат условите на задачата. За  $x = 9$  добиваме  $y = 8$  и  $z = 6$ , т.е. ги добиваме броевите 191, 383 и 767, кои ги задоволуваат условите на задача.

Ако,  $a = \overline{2x2} = 200 + 10x + 2$ , тогаш  $b = 2a + 1 = 400 + 20x + 5$ , па затоа цифрата на стотките на  $b$  е 5, од каде следува  $b = \overline{5y5}$ . Но, тогаш бројот  $c = 2b + 1$  не е трицифрен, па затоа во овој случај не постојат броеви со саканото својство.

Конечно, за бројот  $a$  имаме две можности.

27. На секое теме на даден квадрат е придружен по еден природен број. За секои два броја придружени на соседни темиња едниот број е содржател на другиот. Освен тоа, за секои два броја кои се придружени на темињата на една дијагонала ниту еден од броевите не е содржател на другиот број. Кој е најмалиот можен збир на четирите придружени броја?

A) 12            B) 24            C) 30            D) 35            E) 60

**Решение. D).** На ниту едно теме не може да биде придружен бројот 1, бидејќи тогаш бројот кој е на дијагоналата која го содржи ќе биде негов содржател. Понатаму, дијагонално спротивните броеви мора да имаат барем еден прост множител во кој се разликуваат. Сега, бидејќи бараме најмал можен збир да земеме дека двата дијагонално спротивни броја се 2 и 3 (најмали можни броеви). Во преостанатите две темиња мора да се содржатели на броевите 2 и 3 (значи содржатели на бројот 6), но кои не се содржатели еден на друг. Тоа значи дека мора да имаат најмалку еден прост множител во кој се разликуваат. Бидејќи бараме најмал можен збир, да земеме дека тие два множители се 2 и 3, т.е.

дека другите два броја се  $6 \cdot 2 = 12$  и  $6 \cdot 3 = 18$ . Тогаш го добиваме збирот  $2 + 3 + 12 + 18 = 35$ .

28. Определи го најмалиот број елементи кои треба да се избришат од множеството  $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$  така што производот на елементите кои остануваат во множеството е точен квадрат?

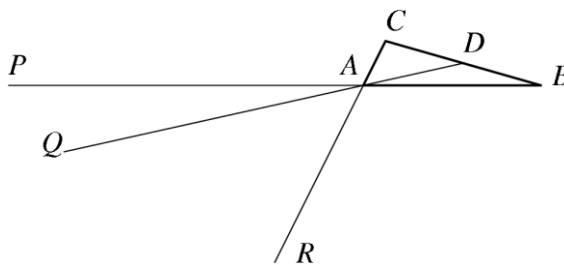
A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. B).** Ако дадените броеви ги разложиме на множители ќе видиме дека множител 7 се јавува само во бројот 70, па затоа овој број треба да го избришеме. Производот на преостанатите броеви е  $2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^9$ . Еден број е точен квадрат ако степените на сите прости множители се парни броеви. Тоа значи дека треба степените на 2 и 5 да се парни, а тоа може да се постигне, на пример, ако го избришеме бројот  $10 = 2 \cdot 5$ . Притоа ќе се добие производот

$$2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^8 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4)^2,$$

кој е точен квадрат. Значи, најмалку треба да избришеме два броја.

29. Даден е триаголник  $ABC$  со плоштина  $W$ . Нека  $D$  е средината на страната  $BC$ . Точките  $P, Q, R$  припаѓаат на продолженијата на отсечките  $BA, DA, CA$  преку точката  $A$ ,



соодветно и се такви што  $\overline{AP} = 2\overline{AB}$ ,  $\overline{AQ} = 3\overline{AD}$  и  $\overline{AR} = 4\overline{AC}$  (види цртеж).

Определи ја плоштината на триаголникот  $PQR$ ?

A)  $W$       B)  $2W$       C)  $3W$       D)  $\frac{1}{2}W$

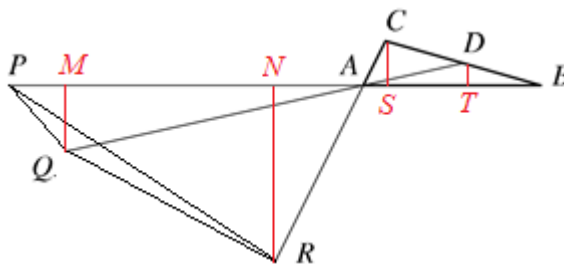
E) 0, т.е. точките  $P, Q, R$  се колинеарни

**Решение. A).** Нека  $QM, RN,$

$CS$  и  $DT$  се нормални на  $PB$ .

Тогаш

$$\begin{aligned} P_{APR} &= \frac{\overline{AP} \cdot \overline{NR}}{2} = \frac{2\overline{AB} \cdot 4\overline{CS}}{2} \\ &= 8P_{ABC} = 8W, \end{aligned}$$



$$P_{APQ} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{MQ}}{2} = \frac{2\overline{AB} \cdot 3\overline{DT}}{2} = \frac{2\overline{AB} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\overline{CS}}{2} = 3P_{ABC} = 3W.$$

Аналогно се докажува дека  $P_{ARQ} = 6P_{ABC} = 6W$ . Конечно,

$$P_{PQR} = P_{APQ} + P_{ARQ} - P_{APR} = 3W + 6W - 8W = W.$$

30. Даден е четирицифрен број таков што ако се избрише било која цифра, тогаш добиениот трицифрен број е делител на дадениот четирицифрен број. Колку четирицифрени броеви го имаат ова својство?

A) 5      B) 9      C) 14      D) 19      E) 23

**Решение. C).** Нека  $\overline{abcd}$  е број со саканото својство. Тогаш тој е делив со  $\overline{abc}$ , па затоа и бројот  $\overline{abcd} - 10\overline{abc} = d$  е делив со  $\overline{abc}$ , од што следува дека  $d = 0$ , т.е. бројот е од видот  $\overline{abc0}$ .

Според претпоставката бројот  $\overline{abc0}$  е делив со  $\overline{ab0}$ , од што следува дека  $\overline{abc}$  е делив со  $\overline{ab}$ . Оттука следува дека бројот  $\overline{abc} - 10\overline{ab} = c$  е делив со  $\overline{ab}$ , па затоа  $c = 0$ . Значи, бараниот број е од видот  $\overline{ab00}$ .

Според претпоставката  $\overline{ab00}$  е делив со  $\overline{a00}$ , па затоа  $\overline{ab}$  е делив со  $a$ . Но, тоа значи дека  $\overline{ab} - 10a = b$  е делив со  $a$ . Исто така  $\overline{ab00}$  е делив со  $\overline{b00}$ , па затоа  $\overline{ab}$  е делив со  $b$ . Оттука следува дека  $\overline{ab} - b = 10a$  е делив со  $b$ .

Од  $b = ka$  и  $10a = lb = kla$  следува дека  $b = a, b = 2a, b = 5a$ . Сега, бидејќи  $a$  и  $b$  се цифри, добиваме дека бараните четирицифрени броеви се: 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800 и 1500. Значи, имаме 14 броеви со саканите својства.

## Junior (прва и втора година) 2020

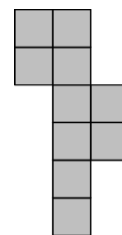
Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Дадената фигура е составена од десет квадрати, секој со страна 1 *cm* поврзани со спојување на две страни. Колкав е нејзиниот периметар изразен во сантиметри?

A) 14                      B) 18                      C) 30                      D) 32                      E) 40



**Решение. B).** Ако ги изброиме страните на квадратите кои се надворешни за фигурата ќе добиеме дека периметарот е 18.

2. Кога ќе ги подредиме вредностите на следниве изрази од најмалиот до најголемиот, кој од нив ќе биде во средината?

A)  $1+2345$       B)  $12+345$       C)  $123+45$       D)  $1234+5$       E)  $12345$

**Решение. D).** Броевите што се добиваат редоследно се 2346, 357, 168, 1239, 12345. Подредени по големина се 168, 357, 1239, 2346, 12345, па во средина е бројот 1239 и одговорот е D).

3. Која е мајката на ќерката на мајката на мајката на Ана?

A) сестрата на Ана      B) внуката на Ана      C) мајката на Ана  
D) тетката на Ана      E) бабата на Ана

**Решение. E).** Мајката на мајката на Ана е бабата на Ана. Нејзина ќерка е мајката на Ана, а нејзината мајка е бабата на Ана, па одговорот е E).

4. Кога Кочо ја носи неговата нова кошула како што треба (сликата лево), хоризонталните линии формираат седум затворени прстени. Утрово тој ја закопчал кошулата погрешно, како што е прикажа-



но на сликата десно. Колку затворени прстени формираат линиите на кошулата на Кочо ова утро?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**Решение. А).** Кога Кочо кошулата ја закопчал погрешно, нејзините линии направиле спирала, па нема ниту еден круг, значи одговорот е 0.

5. Во пресметките на цртежот една буква заменува една цифра. Тие се искористени да претстават некои двоцифрени броеви. Збирот на двата броја од лево е 79. Колку е збирот на четирите броеви од десно?

		A D
		+ C D
A B		+ A B
+ C D		+ C B
7 9		?

- A) 79      B) 158      C) 869      D) 1418      E) 7979

**Решение. В).** Имаме  $79 = \overline{AB} + \overline{CD} = 10(A+C) + (B+D)$ . Затоа

$$\begin{aligned} \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AB} + \overline{CB} &= 10A + D + 10C + D + 10A + B + 10C + B \\ &= 2(10(A+C) + (B+D)) = 2 \cdot 79 = 158. \end{aligned}$$

6. Збирот на четири последователни цели броеви е 2. Кој е најмалиот број меѓу овие четири броја?

- A) -3      B) -2      C) -1      D) 0      E) 1

**Решение. С).** Ако бараните броеви се по ред чочнуваји од најмалиот тогаш  $x, x+1, x+2, x+3$ , па затоа  $x+x+1+x+2+x+3=2$ , т.е.  $4x=-4$ , од каде добиваме  $x=-1$ .

7. Годините 2020 и 1717 во своите записи имаат двоцифрен број кој е повторен два пати. Колку години по 2020 година ќе биде првата година која ќе го има ова својство?

- A) 20      B) 101      C) 120      D) 121      E) 202

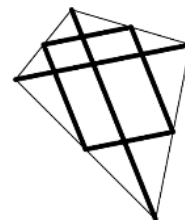
**Решение. В).** Следната ваква година е 2121, а тоа е 101 година подоцна.

8. Маја имала десет парчиња хартија, од кои неколку квадрати, а останатите се триаголници. Таа пресекала три квадрати долж нивната дијагонала. Потоа, го избројала вкупниот број на темиња на тринаесетте добиени парчиња хартија и заклучила дека има 42 темиња. Колку триаголници имала Маја пред сечењето?

- A) 8      B) 7      C) 6      D) 5      E) 4

**Решение. Е).** Ако бројот на триаголници го означиме со  $x$ , а бројот на квадрати со  $y$ , од условите на задачата имаме  $x + y = 10$ ,  $3(x + 6) + 4(y - 3) = 42$ . Решение на добиениот систем е  $x = 4$ ,  $y = 6$ .

9. Мартин направил змеј со сечење на дрвена прачка на 6 парчиња. Две од нив со должини  $120\text{ cm}$  и  $80\text{ cm}$  ги искористил како дијагонали. Останатите четири парчиња ги поврзуваат средините на страните на змејот како што е прикажано на сликата. Колку долга била прачката на почетокот пред таа да биде исечена?

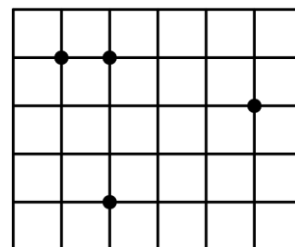


- A)  $300\text{ cm}$       B)  $370\text{ cm}$       C)  $400\text{ cm}$       D)  $410\text{ cm}$       E)  $450\text{ cm}$

**Решение. С).** Бидејќи останатите четири парчиња ги поврзуваат средините на страните на змејот, тие се средни линии во триаголниците формирани од страните и дијагоналите на змејот, соодветно за секоја од нив. Тоа значи дека нивните должини се половина од должината на соодветната дијагонала, која е основа во триаголникот. Значи, должината на прачката е

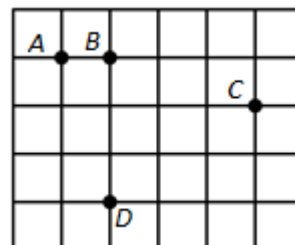
$$40 + 40 + 80 + 60 + 60 + 120 = 400\text{ cm}.$$

10. Во дадена решетка, составена од квадрати со страна со должина 1, означени се 4 точки (види цртеж). Колку е најмалата плоштина на триаголникот определен со три од овие четири точки?



- A)  $\frac{1}{2}$       B) 1      C)  $\frac{3}{2}$       D) 2      E)  $\frac{5}{2}$

**Решение. А).** При ознаки како на цртежот десно најмала е плоштината на  $\triangle ABC$ , бидејќи има најмала основа,  $\overline{AB} = 1$  и најмала висина 1, што е оддалеченоста на точката  $C$  до основата  $AB$ . Во овој случај плоштината е  $P = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ .



11. Елена сака во последователни 18 дена да ја посети нејзината баба. Бабата на Елена ги чита нејзините книги со приказни во вторниците, саботите и неделите.

Ако Елена сака за време на нејзиниот престој кај баба и да има најмногу денови во кои таа чита приказни, во кој ден треба да отиде кај баба и?

- A) понеделник    B) вторник    C) петок    D) сабота    E) недела

**Решение. D).** Осумнаесет последователни дена се денови во повеќе од две седмици. Ако во следниот цртеж се означени со по едно квадратче деновите од седмицата, а со затемнето квадратче деновите во кои бабата на Елена чита приказни,



тогаш двете седмици во средината спаѓаат во осумнаесетте денови и остануваат уште 4 денови. Затоа е добро да се вклучат и двата дена последни во првата седмица и двата први дена од четвртата седмица, при што ќе се добие уште еден затемнет ден. Значи, Елена треба да отиде кај баба ѝ во сабота.

12. Ако  $a, b, c$  и  $d$  се цели броеви кои го задоволуваат равенството  $ab = 2cd$ , кои од следниве броеви не може да бидат вредност на производот  $abcd$ ?

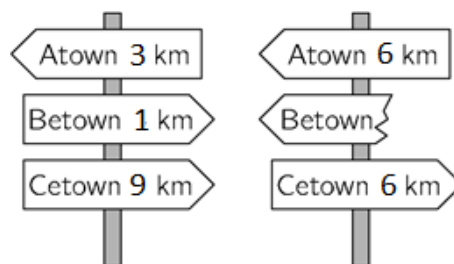
- A) 50    B) 100    C) 200    D) 450    E) 800

**Решение. B).** Според условот,  $abcd = 2(ab)^2$ . Имаме,

$$50 = 2 \cdot 5^2, \quad 200 = 2 \cdot 10^2, \quad 450 = 2 \cdot 15^2, \quad 800 = 2 \cdot 20^2,$$

па само бројот 100 не може да се запише во саканиот вид.

13. Најкраткиот пат од градот Atown до Cetown минува низ градот Betown. Одејќи од Atown до Cetown прво ќе најдеме на патоказите прикажани лево. Подоцна ќе најдеме на патоказите прикажани десно. Кое растојание е прикажано на скршениот патоказ?

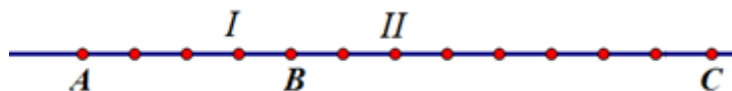


- A) 1 km    B) 2 km    C) 3 km    D) 4 km    E) 5 km

**Решение. B).** Нека положбите на градовите и знаците ќе ги претставиме на бројната права, при што растојанието меѓу секои две точки е 1 km.

Од патоказите заклучуваме дека градот Atown (A) е лево од знаците I и II. Ако градот A го поставиме во крајната лева точка, тогаш до знаците I и II има соодветно 3 и 6 растојанија. Сега градот Betown (B) е на 1 растојание десно од знакот I, што значи дека растојанието меѓу градовите Atown и Betown е

$3+1=4\text{ km}$ . Но, знакот II е на  $6\text{ km}$  од градот Atown, па затоа градот Betown е меѓу знакот II и градот Atown и е на растојание  $6-4=1\text{ km}$  од знакот II. Значи, на скршениот знак е запишано растојанието  $2\text{ km}$ .



*Коментар.* Како што можеме да видиме при решавањето на задачата воопшто не ги искористивме податоците за градот Cetown. Задачата може да се реши и ако ги искористиме податоците за градовите Betown и Cetown, т.е. ако не се користат податоците за градот Atown. Според тоа, дадената задача е преопределена, т.е. има повеќе информации отколку што се потребни за нејзино решавање. Обиди се задачата да ја решиш само со користење на податоците за градовите Betown и Cetown.

14. Рамнокрак триаголник има страна со должина  $20\text{ cm}$ . За другите две страни важи дека едната од нив има должина што е  $\frac{2}{5}$  од должината на другата страна.

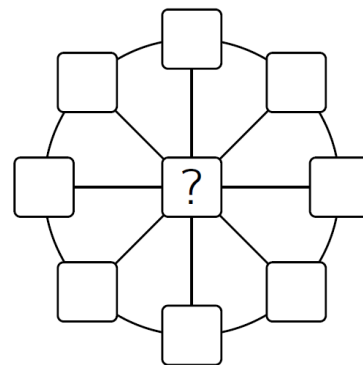
Која од следниве вредности е периметарот на овој триаголник?

- A)  $36\text{ cm}$     B)  $48\text{ cm}$     C)  $60\text{ cm}$     D)  $90\text{ cm}$     E)  $120\text{ cm}$

**Решение. B).** Триаголникот е рамнокрак, па дадената страна може да биде основа или крак. Бидејќи другите две страни се различни, дадената страна е крак на триаголникот. Значи, основата ќе биде  $\frac{2}{5} \cdot 20 = 8\text{ cm}$ , од каде што периметарот на триаголникот е  $L = 8 + 20 + 20 = 48\text{ cm}$ .

15. Во секое од деветте квадратчиња од фигурата прикажани на цртежот е запишан по еден број, така што збирот на трите броеви во секој дијаметар е 13, а збирот на осумте броеви кои се наоѓаат на кружницата е 40. Кој број мора да биде запишан во централното квадратче?

- A) 3    B) 5    C) 8    D) 10    E) 12



**Решение. A).** Ако во централното квадратче е запишан бројот  $a$ , тогаш збирот на другите два броја запишани на секој дијаметар е  $13-a$ . Имаме четири

дијаметри на кои се наоѓаат осумте броја запишани во квадрачињата распоредени на кружницата па затоа нивниот збир е  $4(13-a)$ . Но, збирот на осумте броеви кои се наоѓаат на кружницата е 40, па затоа  $4(13-a) = 40$ , од каде добиваме  $a = 3$ .

16. Марта ставила знак за множење меѓу втората и третата цифра на бројот 2020 и забележала дека производот  $20 \cdot 20$  е полн квадрат. Колку броеви меѓу 2010 и 2099 (вклучувајќи го и 2020) го имаат истото својство?

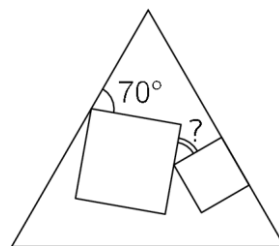
A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. C).** Сите производи кои ги разгледуваме се од видот  $20 \cdot \overline{ab} = 2^2 \cdot 5 \cdot \overline{ab}$ .

Сега, за да производот биде точен квадрат треба да важи  $\overline{ab} = 5n^2$  и  $5n^2$  треба да е двоцифрен број. Последното е можно само за  $n \in \{2, 3, 4\}$  и притоа се добиваат броевите 2020, 2045 и 2080.

17. Два различни квадрати се нацртани во внатрешноста на рамностран триаголник. Една страна на еден од овие два квадрати лежи на една страна на триаголникот како на цртежот. Колкав е аголот означен со прашалниот знак?

A)  $25^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $35^\circ$       D)  $45^\circ$       E)  $50^\circ$



**Решение. E).** Збирот на агли на неконвексниот пентаголник за кој горното теме на рамностранниот триаголник е заедничко е еднаков на  $540^\circ$ . Четирите негови агли имаат  $70^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 270^\circ$ . Значи, аголот означен со прашалниот знак има

$$540^\circ - (70^\circ + 60^\circ + 90^\circ + 270^\circ) = 50^\circ.$$

18. Лука тргнал на пат долг  $520 \text{ km}$  со автомобил во чиј резервоар имало 14 литри гориво. Неговиот автомобил троши 1 литар на секои  $10 \text{ km}$ . Откако извозил  $55 \text{ km}$ , видел патоказ на кој го пишува растојанието од таа точка до пет бензински пумпи понатаму по патот. Овие растојанија се  $35 \text{ km}$ ,  $45 \text{ km}$ ,  $55 \text{ km}$ ,  $75 \text{ km}$  и  $95 \text{ km}$ . Капацитетот на резервоарот е 40 литри и Лука сака да застане само еднаш за да го наполни резервоарот. Колку е оддалечена бензинската пумпа на која што би требало да застане Лука?

- A) 35 km      B) 45 km      C) 55 km      D) 75 km      E) 95 km

**Решение. D).** Во моментот кога Лука го видел знакот, тој имал гориво уште за  $14 \cdot 10 - 55 = 85 \text{ km}$ , што значи дека најдалеку може да стигне до четвртата бензиска која е оддалечена  $75 \text{ km}$ . Лука треба да застане на оваа бензиска, бидејќи од третата бензиска треба да вози уште  $520 - (55 + 55) = 410 \text{ km}$ , а со полн резервоарт може да помине само  $400 \text{ km}$ .

19. Нека  $17x + 51y = 102$ . Која е вредноста на изразот  $9x + 27y$  ?

- A) 54      B) 36      C) 34      D) 18

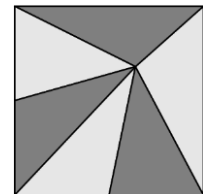
E) Вредноста не може да се определи

**Решение. A).** Имаме

$$\begin{aligned} 17x + 51y &= 102, \\ 17(x + 3y) &= 102, \\ x + 3y &= 6, \end{aligned}$$

од каде што  $9x + 27y = 9(x + 3y) = 9 \cdot 6 = 54$ .

20. Прозорец составен од стакло со плоштина  $81 \text{ dm}^2$ , направен е од шест триаголници со иста плоштина (види цртеж). Мува застанала на точката која е заедничка за сите шест триаголници. Колку е оддалечена положбата на мувата од дното на прозорецот?



- A) 3 dm      B) 5 dm      C) 5,5 dm      D) 6 dm      E) 7,5 dm

**Решение. D).** Должината на страната на квадратот е  $9 \text{ dm}$ . Понатаму, основите на двата триаголници што се најдолу се  $4,5 \text{ dm}$ , бидејќи имаат исти висини и исти плоштини, па мора да имаат еднакви основи. Ако оддалеченоста на мувата од долниот крај на прозорот ја означиме со  $h$ , тогаш имаме (ги изедначуваме плоштините на еден од најдолните триаголници и најгорниот триаголник):

$$\frac{4,5 \cdot h}{2} = \frac{9(9-h)}{2}, \text{ па затоа } h = 6 \text{ dm}.$$

21. Цифрите од 1 до 9 се напишани по случаен редослед во еден деветцифрен број. Која е веројатноста дека добиениот број е делив со 18?

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{4}{9}$       C)  $\frac{5}{9}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{3}{4}$

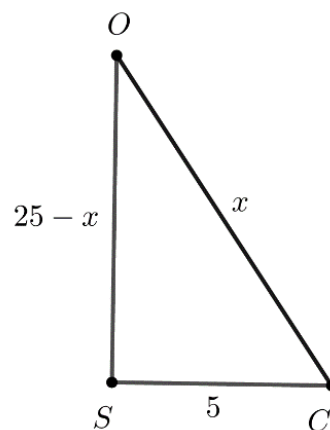
**Решение. В).** Збирот на цифрите на бројот е запишан со сите цифри од 1 до 9, употребени точно еднаш, е 45, па затоа тоа е делив со 9. За да биде делив со 18, треба уште да е делив со 2, што значи дека последната цифра треба да е парна. Од 1 до 9 има 4 парни цифри, па бараната веројатност е  $\frac{4}{9}$ .

22. Желка и зајак се натпреварувале во трчање на праволиниска патека долга  $5\text{ km}$ . Зајакот е пет пати побрз од желката. Зајакот по грешка почнал да трча нормално на патеката. По извесно време, тој ја сфатил својата грешка и почнал да трча директно кон целта, каде што стигнал во исто време со желката. Колкаво е растојанието од точката каде што зајакот сфатил дека трча по погрешна патека до целта?
- A)  $11\text{ km}$       B)  $12\text{ km}$       C)  $13\text{ km}$       D)  $14\text{ km}$       E)  $15\text{ km}$

**Решение. С).** Бидејќи зајакот е пет пати побрз од желката тој претрчал  $25\text{ km}$ . Ако од точката  $O$  од која завртел до целта  $C$  има  $x\text{ km}$ , тогаш од стар-тот  $S$  до точката  $O$  има  $25 - x\text{ km}$  (види цртеж). Затоа од Питагоровата теорема следува

$$5^2 - (25 - x)^2 = x^2,$$

од каде добиваме  $x = 13\text{ km}$ .

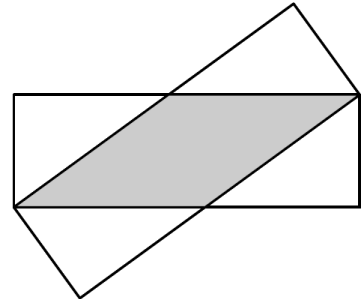


23. На масата има триаголници и квадрати. Некои од нив се сини, а останатите се црвени. Некои од овие фигури се големи, а останатите се мали. Знаеме дека:
- 1) Ако фигурата е голема, тогаш таа е квадрат.
  - 2) Ако фигурата е сина, тогаш таа е триаголник.
- Кое од понудените тврдења мора да е точно?
- A) Сите црвени фигури се квадрати.  
 B) Сите квадрати се големи.  
 C) Сите мали фигури се сини.  
 D) Сите триаголници се сини.  
 E) Сите сини фигури се мали.

**Решение. Е).** Според 1) сите големи фигури се квадрати, па заклучуваме дека сите триаголниците се мали. Според 2) сите сини фигури се триаголници, па како сите триаголници се мали, заклучуваме дека сите сини фигури се мали, т.е. точно е тврдењето е Е).

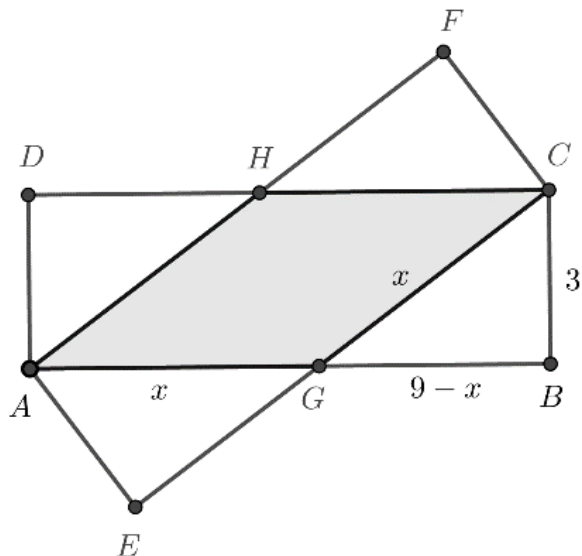
24. Два складни правоаголници со страни  $3\text{ cm}$  и  $9\text{ cm}$  се преклопени како на цртежот. Колкава е плоштината на фигурата во која се преклопуваат двата правоаголници?

- A)  $12\text{ cm}^2$     B)  $13,5\text{ cm}^2$     C)  $14\text{ cm}^2$   
 D)  $15\text{ cm}^2$     E)  $16\text{ cm}^2$



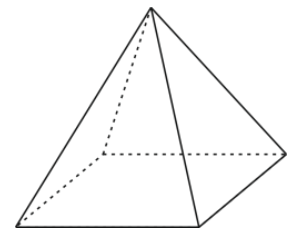
**Решение. D).** При ознаки како на цртежот десно правоаголните триаголници  $AEG$  и  $CBG$  се складни бидејќи  $\overline{AE} = \overline{BC}$  и аглиите во темето  $G$  се еднакви (накрсни агли). Ја применуваме Питагоровата теорема на триаголникот  $CBG$  и добиваме

$$\begin{aligned}(9-x)^2 &= x^2 + 9, \\ 81 - 18x + x^2 &= x^2 + 9, \\ x &= 4.\end{aligned}$$



Фигурата во која се преклопуваат двата правоаголници е ромб и нејзината плоштина е  $P = 9 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 15\text{ cm}^2$ .

25. Кире ги обележил темињата на правилна четириаголна пирамида со броевите 1, 2, 3, 4 и 5, употребувајќи го секој од нив само по еднаш. За секој ѕид Кире го пресметал збирот на броевите со кои се обележани неговите темиња. Четири од овие зборови се 7, 8, 9 и 10. Кој е збирот на петтиот ѕид?



- A) 11    B) 12    C) 13    D) 14    E) 15

**Решение. С).** Збирот на броевите запишани во темињата на основата е поголем или еднаков на  $1+2+3+4=10$ . Затоа броевите 7, 8 и 9 се сигурно зборови на броевите запишани во темињата на бочните сидови на пирамидата. Понатаму, бројот 5 не може да биде запишан во врвот на пирамидата, бидејќи тогаш најмалиот збир на броевите запишани на бочните сидови ќе биде  $1+2+5=8$ . Значи, бројот 5 е запишан во теме на основата на пирамидата. Сега, збирот на броевите запишани во темињата на основата е поголем или еднаков на  $1+2+3+5=11$ , па затоа бројот 10 е збир на броевите запишани во темињата на бочен сид. Значи, зборовите на броевите запишани во темињата на бочните сидови се 7, 8, 9 и 10. Ако ги собереме сите броеви запишани во темињата на бочните сидови ќе видиме дека броевите 1, 2, 3, 4 и 5 се јавуваат по два пати и бројот  $A$  запишан во врвот на пирамидата се јавува уште два пати. Значи,

$$2(1+2+3+4+5)+2A=7+8+9+10, \text{ т.е. } A=2.$$

Значи, во темињата на основата се запишани броевите 1, 3, 4 и 5 и нивниот збир е 13.

26. Голема коцка е направена со помош на 64 идентични помали коцки. Три од сидовите на големата коцка се обоени. Кој е најголемиот можен број на мали коцки кои имаат точно еден обоен сид?

A) 27                      B) 28                      C) 32                      D) 34                      E) 40

**Решение. С).** Ако на коцката се обојат три сида кои имаат заедничко теме, тогаш бројот на малите коцки со точно еден обоен сид е  $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27$ , а ако се обојат два спротивни сида и било кој од сидовите кои имаат по еден заеднички раб со овие два, на пример лево, десно и долу, тогаш бројот на малите коцки со точно еден обоен сид е  $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 32$ .

27. Во секое од полињата на квадратната шема прикажана на цртежот, треба да се запише еден број, така што збирот на четирите броеви во секоја редица и во секоја колона да биде ист. Кој број ќе биде запишан во сивото поле?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

A) 5                      B) 6                      C) 7                      D) 8                      E) 9

**Решение. С).** Нека ги означиме празните полиња од шемата како на цртежот десно.

1	$x$	6	3
$z$	2	2	8
$a$	7	$t$	4
$c$	$b$	7	$y$

Првиот ред и втората колона имаат заедничко поле, па затоа

$$1+6+3=2+7+b, \text{ т.е. } b=1.$$

Исто така, четвртиот ред и четвртата колона имаат заедничко поле, па затоа важи

$$c+1+7=3+8+4, \text{ т.е. } c=7.$$

На сличен начин може да се определат и другите непознати броеви.

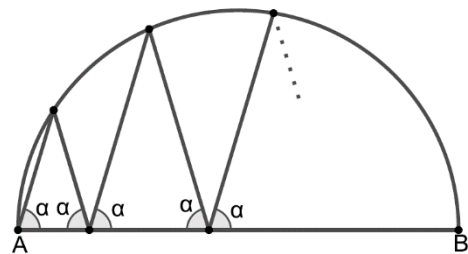
28. Ана, Билјана и Кате се натпреварувале во борење со рака. Во секој натпревар се борат две девојки, а третата се одмара. По секој натпревар, победничката се натпреварува со девојката што се одмара. Ана се натпреварувала 10 пати, Билјана 15 пати, а Цвета 17 пати. Која од девојките изгубила во вториот натпревар?
- A) Ана            B) Билјана            C) Цвета
- D) или Ана или Билјана би можеле да изгубат во вториот натпревар
- E) или Билјана или Цвета би можела да изгуби во вториот натпревар

**Решение. A).** Девојките се натпреварувале вкупно

$$\frac{10+15+17}{2} = 21 \text{ пат.}$$

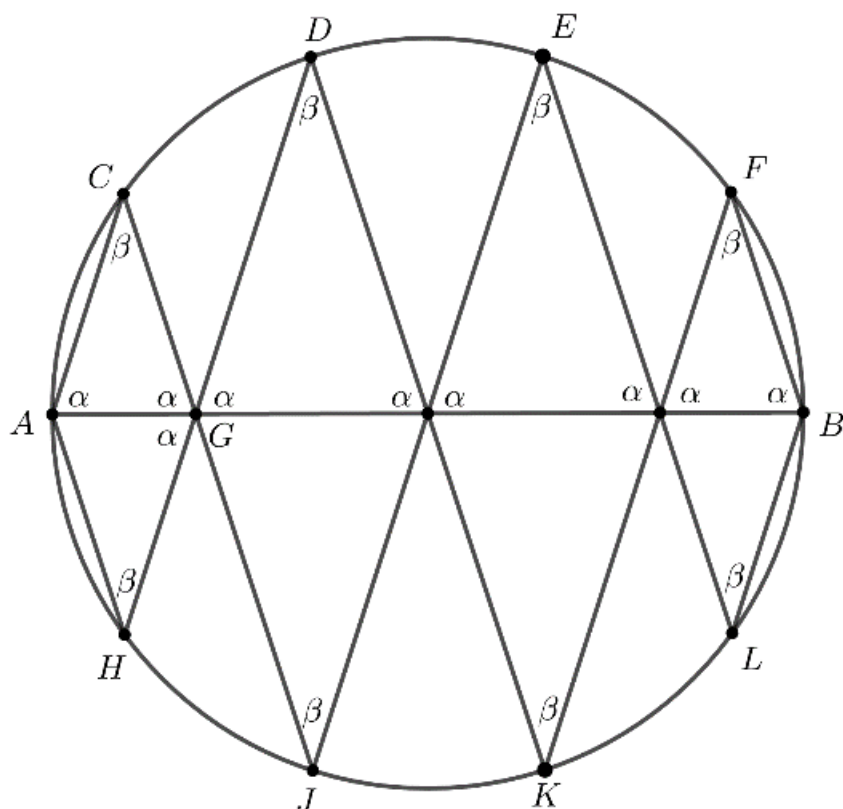
Ана одмарала  $21-10=11$  пати. Бидејќи никоја не може да се одмара два пати еднопо-друго, заклучуваме дека Ана се одмарала во секоја непарна игра. Тоа значи дека таа загубила во втората игра. Ваквото сценарио е можно: првите девет игри може да бидат BC, AB, BC, AB, BC, AB, BC, AB, BC, а потоа следните дванаесет се AC, BC, AC, BC, ..., BC.

29. Искршена линија почнува во точката A, на едниот крај од дијаметарот AB на една кружница. Секој од аглиите меѓу искршената линија и дијаметарот AB е еднаков на  $\alpha$ , како што е прикажано на цртежот. По четири врвови искршената линија завршува во точката B. Колкава е големината на аголот  $\alpha$ ?



- A)  $60^\circ$             B)  $72^\circ$             C)  $75^\circ$             D)  $80^\circ$             E) Друг одговор

**Решение. B).** При осна симетрија во однос на дијаметарот AB добиваме кружница во која важи  $AC = AH$ ,  $CD = HJ$  итн. (види цртеж).



Притоа, заради еднаквоста на аглие точките  $D, G, H$  се колинеарни, а правите  $AC$  и  $HD$  се паралелни. Оттука следува дека четириаголникот  $AHDC$  е рамнокрак трапез, па затоа  $AC = AH = CD = HJ$ . На потполно ист начин се докажува дека сите лаци се со еднаква должина, што значи дека десетаголникот  $ACDEFBLKJH$  е правилен. Неговиот внатрешен агол е еднаков на  $144^\circ$ , па затоа  $\alpha = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$ .

30. Осум последователни трицифрени природни броеви го имаат следново својство: секој од нив е делив со својата последна цифра. Колкав е збирот на цифрите на најмалиот од овие осум броеви?

A) 10      B) 11      C) 12      D) 13      E) 14

**Решение. D).** *Прв начин.* Цифрата на единиците на овие осум броеви не може да е 0, па затоа осумте броеви се од видот  $\overline{ab1}, \overline{ab2}, \overline{ab3}, \overline{ab4}, \overline{ab5}, \overline{ab6}, \overline{ab7}, \overline{ab8}$  или од видот  $\overline{ab2}, \overline{ab3}, \overline{ab4}, \overline{ab5}, \overline{ab6}, \overline{ab7}, \overline{ab8}, \overline{ab9}$ . Според тоа, меѓу осумте броеви сигурно се броевите  $\overline{ab2}, \overline{ab3}, \overline{ab4}, \overline{ab5}, \overline{ab6}, \overline{ab7}, \overline{ab8}$ . Јасно е дека какви и да се

првите две цифри,  $2|\overline{ab2}$  и  $5|\overline{ab5}$ . Од  $4|\overline{ab4}$  следува  $4|\overline{b4}$ , па затоа  $b \in \{0, 2, 4, 8\}$ . Од  $3|\overline{ab3}$  следува  $3|a+b$ , од каде што следува  $6|\overline{ab6}$ . Сега:

- ако  $b=0$ , тогаш  $a \in \{3, 6, 9\}$

- ако  $b=2$ , тогаш  $a \in \{1, 4, 7\}$

- ако  $b=4$ , тогаш  $a \in \{2, 5, 8\}$

- ако  $b=0$ , тогаш  $a=1$ .

Од сите овие можности, само  $7|847$  и  $8|848$ . Бидејќи 9 не е делител на 849, бараните броеви се 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847 и 848. Збирот на цифрите на најмалиот од овие броеви е 13.

*Втор начин.* Цифрата на единиците на овие осум броеви не може да е 0. Според тоа, цифрите на единиците на последователните броеви може да се 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ако  $\overline{abc}$  е бараниот број, тогаш  $c$  е делител и на бројот  $\overline{abc} - c = \overline{ab0}$ .

*Прв случај.* Бројот  $\overline{ab0}$  е делив со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Најмал таков број е  $\text{НЗС}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = 840$ . Најмалиот од овие броеви е бројот 841, чиј збир на цифри е 13.

*Втор случај.* Бројот  $\overline{ab0}$  е делив со броевите 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Најмал таков број е  $\text{НЗС}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2520$  и овој случај отпаѓа бидејќи бројот е четирицифрен.

## Junior (прва и втора година) 2021

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

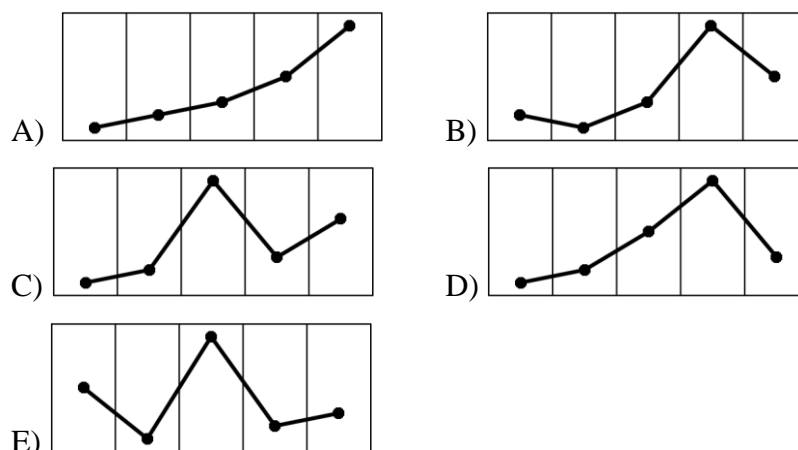
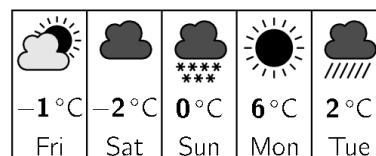
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Секоја година, третиот четврток во Март се обележува како Ден на Кенгурот. Датумите на Денот на Кенгурот за следните неколку години се прикажани подолу, со една грешка. Кој од дадените датуми не може да е Ден на Кенгурот?

A) 13.4.2022    B) 16.3.2023    C) 14.3.2024    D) 20.3.2025    E) 19.3.2025

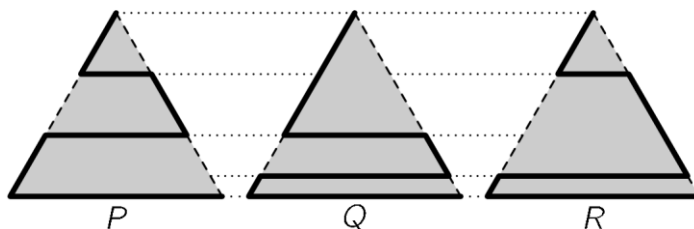
**Решение. C).** Третиот четврток може да е најрано на 15-тиот ден во месецот.

2. Апликацијата за временска прогноза на Јана ја покажува временската прогноза со максималните температури за следните пет денови (цртеж десно). Кој од следните графикони ги прикажува на максималните дневни температури за тој период?



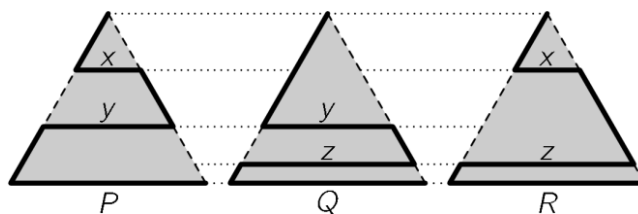
**Решение. B).** Четвртиот ден е најтопол, па затоа можни се само дијаграмите B) и C). Но, вториот ден е најстуден, а од двата можни дијаграми тоа е на дијаграмот B) и тоа е бараниот дијаграм/

3. На цртежот се дадени три складни рамнокраки триаголници. Кое од дадените тврдења за должините  $P$ ,  $Q$  и  $R$  означени со подебели линии е точно?



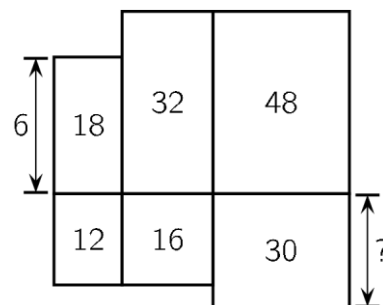
- A)  $P < Q < R$     B)  $P < R < Q$     C)  $P < Q = R$     D)  $P = R < Q$     E)  $P = Q = R$

**Решение. В).** Деловите од патеките на рабовите на рамностраните триаголници се еднакви во сите случаи, затоа треба да ги споредиме само хоризонталните делови од патеките. Нека тие делови од патеките имаат должини  $x, y, z$ . Бидејќи  $x < y < z$  имаме  $x + y < x + z < y + z$  од каде следува  $P < R < Q$ .



4. Шест правоаголници се наредени како на цртежот.

Горниот правоаголник од левата страна има висина  $6 \text{ cm}$ . Броевите во правоаголниците ги означуваат нивните плоштини изразени во  $\text{cm}^2$ . Колкава е висината на долниот правоаголник од десната страна?



- A)  $4 \text{ cm}$     B)  $5 \text{ cm}$     C)  $6 \text{ cm}$     D)  $7,5 \text{ cm}$     E)  $10 \text{ cm}$

**Решение. В).** Ширината на горниот лев правоаголник е  $18 : 6 = 3 \text{ cm}$ , па затоа и долниот лев правоаголник има ширина  $3 \text{ cm}$  и висина  $12 : 3 = 4 \text{ cm}$ . Сега во втората колона ширината на долниот правоаголник е  $16 : 4 = 4 \text{ cm}$ , па затоа висината на горниот правоаголник е  $32 : 4 = 8 \text{ cm}$ . Значи, ширината на горниот десен правоаголник е  $48 : 8 = 6 \text{ cm}$ , што значи дека висината на долниот десен правоаголник е  $30 : 6 = 5 \text{ cm}$ .

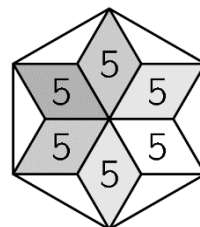
5. Резултатот на полувреме на ракометен меч беше  $9:14$ , што значи гостинскиот тим имаше пет гола предност. Како последица на инструкциите на тренерот кои ги доби на полувреме, домашниот тим доминираше во втората половина и по-

стигна дуplo повеќе голови од неговиот противник. Домашниот тим победи со еден гол разлика. Кој е крајниот резултат на мечот?

- A) 20:19      B) 21:20      C) 22:21      D) 23:22      E) 24:23

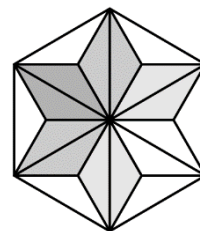
**Решение. B).** Со  $a$  да го означиме бројот на головите кои ги постигнал гостинскиот тим. Од условот на задачата следува  $9 + 2a = 14 + a + 1$ . Решението на последната равенка е  $a = 6$ . Значи, конечниот резултат 21:20.

6. Шест складни ромбови, секој со плоштина  $5 \text{ cm}^2$ , формираат ѕвезда. Врвовите на ѕвездата се поврзани така што формираат правилен шестаголник, како на цртежот. Колкава е плоштината на шестаголникот?



- A)  $36 \text{ cm}^2$       B)  $40 \text{ cm}^2$       C)  $45 \text{ cm}^2$       D)  $48 \text{ cm}^2$       E)  $60 \text{ cm}^2$

**Решение. C).** Шестаголникот може да биде поделен на 18 складни триаголници. Секој триаголник има плоштина од  $2,5 \text{ cm}^2$ , од каде следува дека целата плоштина изнесува  $18 \cdot 2,5 = 45 \text{ cm}^2$ .

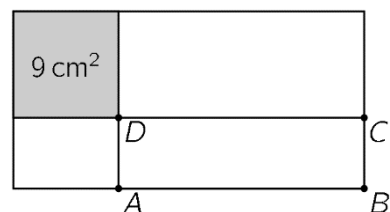


Навистина, почетните ромбови се складни и имаат заедничко теме во центарот на кружницата, што значи дека имаат агли:  $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ . Значи, доцртаните триаголници се рамнокраки со агли  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ , што значи дека се складни со триаголниците на кои се поделени ромбовите (признак САС).

7. Во џез бенд Ѓуро свири на саксафон, Сребре на труба и Елка пее. Тие сите се на иста возраст. Има уште три члена на бендот, кои имаат 19, 20 и 21 година, соодветно. Просечната возраст на бендот е 21 година. Колку години има Елка?
- A) 20      B) 21      C) 22      D) 23      E) 24

**Решение. C).** Ако Елка има  $a$  години, тогаш  $\frac{3a+19+20+21}{6} = 21$ , од каде добиваме  $a = 22$ .

8. Правоаголник со периметар  $30 \text{ cm}$  е поделен на четири делови со една вертикална и една хоризон-

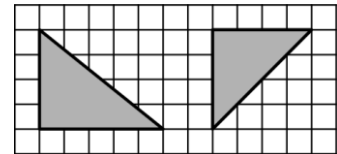


тална права. Еден од деловите е квадрат со плоштина  $9\text{ cm}^2$ , види цртеж. Колку изнесува периметарот на правоаголникот  $ABCD$ ?

- A)  $14\text{ cm}$       B)  $16\text{ cm}$       C)  $18\text{ cm}$       D)  $21\text{ cm}$       E)  $24\text{ cm}$

**Решение. C).** Збирот на периметарот на квадратот и периметарот на правоаголникот  $ABCD$  е еднаков на периметарот на почетниот правоаголник. Периметарот на квадратот е  $12\text{ cm}$ , од каде следува дека периметарот на правоаголникот  $ABCD$  е  $30 - 12 = 18\text{ cm}$ .

9. Ана нацртал три триаголници на мрежа. Точно два од нив имаат иста плоштина, точно два се рамнокраки и точно два се правоаголни триаголници. Два од триаголниците се прикажани на цртежот. Кој може да биде третиот триаголник?



- A) B) C) D) E)

**Решение. D).** Бидејќи двата триаголници на цртежот се правоаголни, нивните плоштини се 10 и 8, и само едниот од нив е рамнокрак, бараме триаголник кој е рамнокрак, кој не е правоаголен и има плоштина 10 или 8. Триаголникот A) не е рамнокрак, триаголникот B) има плоштина  $12 - (\frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2}) = 3$ , триаголникот C) има плоштина 12 и триаголникот E) е правоаголен. Значи, D) е единственото можно решение бидејќи е рамнокрак триаголник со плоштина 8.

10. Маја избрала посебен број. Таа добива ист резултат кога одзема  $\frac{1}{10}$  од избраниот број, како и кога го множи со  $\frac{1}{10}$ . Кој е избраниот број?

- A)  $\frac{1}{100}$       B)  $\frac{1}{11}$       C)  $\frac{1}{10}$       D)  $\frac{11}{100}$       E)  $\frac{1}{9}$

**Решение. E).** Ако избраниот број е  $a$ , тогаш  $a - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}a$ , од каде добиваме  $10a - 1 = a$ , односно  $a = \frac{1}{9}$ .

11. Томи имал десет прскалицы со исти димензии. Тој ја запалил првата. Кога само десетина од неа останала, ја запалил втората. Кога само десетина од втората

останала, ја запалил третата итн. Прскалките горат со иста брзина по целата нивна должина. Една прскалица гори за 2 минути. Колку време било потребно за сите 10 прскалици да изгорат?

A) 18 min 20 sec B) 18 min 12 sec C) 18 min D) 17 min E) 16 min 40 sec

**Решение. B).** Секоја прскалица гори за 2 минути или 120 секунди. Значи, кога една прскалица ќе гори 1,8 минути Томи пали следна прскалица. Првите 9 прскалици ќе горат по 1,8 минути и десеттата прскалица ќе гори 2 минути, што значи дека сите 10 прскалици ќе изгорат за  $9 \cdot 1,8 + 2 = 18,2$  минути, односно за 18 min 12 sec

12. Алекса искачува 8 скалила со чекор од 1 или 2 скалила. На шестото скалило има дупка, па не може да го користи тоа скалило. На колку различни начини Алекса може да стигне до најгорното скалило?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**Решение. C).** Постои еден начин да се стигне од петтото до седмото скалило (1 чекор од 2 скалила) и само еден начин од седмото до осмото скалило (1 чекор од 1 скалило). Според тоа, бројот на различни начини да се стигне до осмото скалило е еднаков на бројот на начините на кои може да се стигне до петтото скалило.

Ако не направи ниту еден чекор од по 2 скалила, тогаш на петтото скалило може да се стигне на 1 начин.

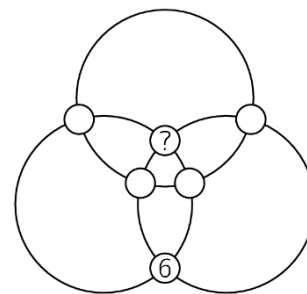
Ако направи само 1 чекор од по 2 скалила, тогаш на петтото скалило Алекса може да стигне на 4 начини.

Ако направи 2 чекори од по 2 скалила, тогаш на петтото скалило Алекса може да стигне на 3 начини.

Значи, на петтото скалило Алекса може да стигне на  $1 + 3 + 4 = 8$  начини.

13. Броевите од 1 до 6 се распоредени во кругчињата во пресекот на трите кружници (види цртеж). Положбата на бројот 6 е дадена на цртежот. Збирот на броевите запишани на секоја кружница е ист. Кој број стои во кругчето со прашалниот знак?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



**Решение. А).** Секој од запишаните броеви се наоѓа на по две кружници, па затоа збирот на броевите на сите три кружници е еднаков на  $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$ . Значи, збирот на броевите запишани во кругчињата на една кружница е еднаков на  $42 : 3 = 14$ . Збирот на броевите кои се запишани во кругчињата кои се на кружницата на која е бројот 6 мора да е 8. Меѓу броевите 1, 2, 3, 4 и 5 единствени тројки броеви чиј збир е 8 се: 1, 2, 3 и 1, 3, 4. Во кругчето во кое е прашалниот знак се наоѓа заедничкиот број на овие две тројки и тоа е бројот 1.

14. Бројот 2021 има остаток 5 кога се дели со броевите 6, 7, 8 и 9. Колку природни броеви, помали од 2021, го имаат ова својство?

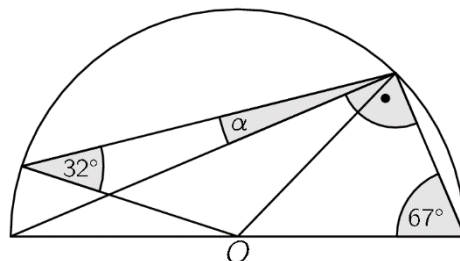
A) 4      B) 3      C) 2      D) 1      E) 0

**Решение. А).** Ако  $A$  е број со опишаното својство, тогаш  $A - 5$  е делив со 6, 7, 8 и 9. Но, НЗС(6, 7, 8, 9) = 504, па затоа Тоа се броевите

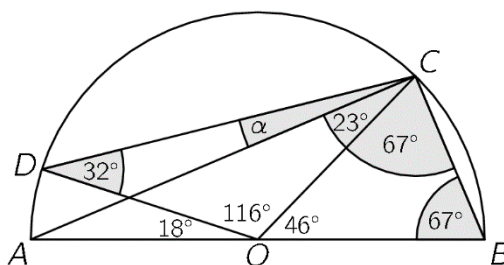
$$504 \cdot 0 + 5 = 5, \quad 504 \cdot 1 + 5 = 509, \quad 504 \cdot 2 + 5 = 1013, \quad 504 \cdot 3 + 5 = 1517.$$

15. На цртежот е дадена полукружница со центар  $O$ . Дадени се и два од аглиите. Колку изнесува во степени аголот  $\alpha$  ?

A)  $9^\circ$       B)  $11^\circ$       C)  $16^\circ$   
D)  $17,5^\circ$       E)  $18^\circ$



**Решение. А).** Да воведеме ознаки како на долниот цртеж. Од рамнокракиот триаголник  $OBC$  добиваме  $\angle BCO = 67^\circ$ . Понатаму триаголникот  $ABC$  е правоаголен, па затоа  $\angle OCA = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$ . Сега, триаголникот  $OCD$  е рамнокрак, па затоа  $\angle OCD = 32^\circ$ . Конечно,



$$\alpha = \angle OCD - \angle OCA = 32^\circ - 23^\circ = 9^\circ.$$

16. Во натпревар во стрелање има пет тимови кои чекаат да почне натпреварот. Секој тим се состои или само од момчиња или само од девојчиња. Броевите на членовите на одделните тимови се 9, 15, 17, 19 и 21. Откако сите членови од првиот тим го почнаа натпреварот, бројот на девојчиња кои сè уште не го

почнаа е три пати поголем од бројот на момчиња кои сè уште не го почнаа натпреварот. Колку членови има тимот кој го започнал натпреварот?

- A) 9      B) 15      C) 17      D) 19      E) 21

**Решение. Е).** Вкупниот број на играчи од сите тимови е 81. Кога првиот тим ќе го почне натпреварот остануваат  $81 - 9 = 72$ ,  $81 - 15 = 66$ ,  $81 - 17 = 64$ ,  $81 - 19 = 62$  и  $81 - 21 = 60$  играчи кои не го започнале натпреварот. Бидејќи бројот на девојчињата кои не го започнале натпреварот е трипати поголем од бројот на момчињата кои не го започнале натпреварот, добиваме дека бројот на момчињата кои не го започнале натпреварот е четвртина од бројот на сите деца кои не го започнале натпреварот. Меѓу броевите 72, 66, 64, 62 и 60 деливи со 4 се броевите 72, 64 и 60. Затоа натпреварот не го започнале 72, 64 или 60 деца. Но, бројот на момчињата кои не го започнале натпреварот е четвртина од бројот на сите деца кои не го започнале натпреварот. Значи, натпреварот не го започнале  $72 : 4 = 18$ ,  $64 : 4 = 16$ ,  $60 : 4 = 15$  момчиња. Сега, бидејќи тимовите се состојат само од момчиња и девојчиња, а од добиените броеви само бројот 15 е број на членови на некој тим, заклучуваме дека 60 деца не го започнале натпреварот. Значи, натпреварот го започнал тимот со 21 член.

17. Пет коли учествувале во трка, со почетни позиции како на сликата.



Кога една кола претркува друга кола, се доделува поен. Колите стигнале на целта во следниот редослед:








Колку изнесува најмалиот број на поени кои вкупно може да се доделат?

- A) 10      B) 9      C) 8      D) 7      E) 6

**Решение. Е).** За колата II да премини во водство, мора најмалку да ги претекне колите III, IV и V (3 поени). Колата IV мора да ја претекне колата V бидејќи завршува пред колата V (1 поен). За I да стигне до третото место, мора најмалку да ги претекне колите III и V, бидејќи тие завршуваат зад колата I (2 поени). Според тоа, минимумот од поени е 6.

18. На почеток во секое од полињата на квадрат со димензии  $3 \times 3$  е бројот 0. Во првиот чекор сите четири броеви во еден подквадрат со димензии  $2 \times 2$  се зголемуваат за 1. Оваа операција се пов-

0	0	0		18	
0	0	0		47	
0	0	0	13		?

торува неколку пати за да се добие пополнувањето десно. За жал, некои броеви во ова пополнување се скриени. Кој број е во квадратот со знак прашалник?

- A) 14            B) 15            C) 16            D) 17            E) 19

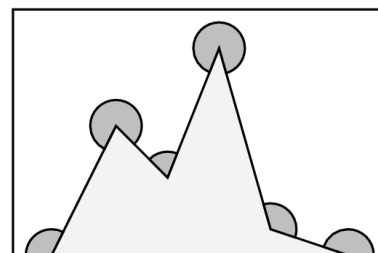
**Решение. C).** По неколку такви операции завршуваме со квадрат како на цртежот десно. Сега од дадениот квадрат добиваме

$$d = a + b + c + d - (a + b) - c = 47 - 18 - 13 = 16.$$

$a$	$a+b$	$b$
$a+c$	$a+b+c+d$	$b+d$
$c$	$c+d$	$d$

19. Колку е збирот на сите означени агли на цртежот десно?

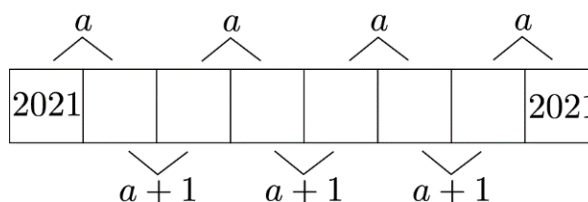
- A)  $360^\circ$             B)  $900^\circ$             C)  $1080^\circ$   
D)  $1120^\circ$             E)  $1440^\circ$



**Решение. C).** Шесте означени агли, заедно со чети-

рите агли на правоаголната рамка формираат десетаголник, чиј збир на внатрешни агли е еднаков на  $(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$ . Значи, збирот на шесте означени агли е еднаков на  $1440^\circ - 4 \cdot 90^\circ = 1080^\circ$ .

20. Во лентата на цртежот има осум кутии. Броевите од соседни кутии имаат збир  $a$  или  $a+1$ , како на цртежот. Броевите во првата и осмата кутија се 2021. Колку е  $a$ ?

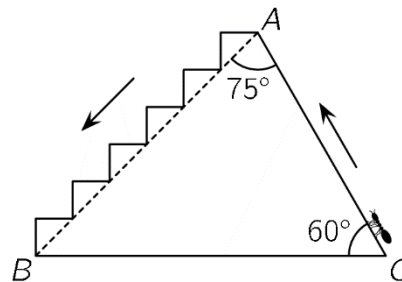


- A) 4041            B) 4042            C) 4043            D) 4044            E) 4045

**Решение. E).** *Прв начин.* Бројот 2022 треба да биде напишан на третата позиција бидејќи збирот на овој број со оној на втората позиција е за 1 поголем од оние на првата и втората позиција. Користејќи го истиот метод можеме да добиеме дека 2023 е на петтата позиција и 2024 е на седмата позиција. Значи  $a = 4045$ .

Втор начин. Од условот следува дека  $4a = 3(a+1) + 2 \cdot 2021$ , од каде добиваме  $a = 4045$ .

21. Мравка се икачува од  $C$  до  $A$  по пат  $CA$  и слегува од  $A$  до  $B$  по скали, како што е покажано на цртежот. Кој е односот на должините на патеката по која се искачува и патеката по која слегува мравката?



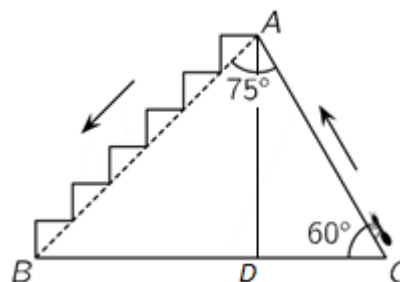
- A) 1      B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{1}{3}$       D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       E)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Решение. Е).** Ја повлекуваме висината  $AD$ .

Бидејќи аголот во темето  $B$  е  $45^\circ$  следува дека  $\overline{BD} = \overline{AD}$ . Понатаму, збирот на должините на хоризонталните делови на скалата е еднаков на  $\overline{BD}$ , а збирот на должините на вертикалните делови на скалата е еднаков на  $\overline{AD}$ . Затоа должината на скалата е  $\overline{BD} + \overline{AD} = 2\overline{AD}$ .

Сега, триаголникот  $ACD$  е половина од рамностран триаголник, па затоа  $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AC}$ . Конечно, бараниот однос е

$$\overline{AC} : (2\overline{AD}) = \overline{AC} : (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AC}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



22. За броевите  $a, b, c$  е исполнето  $a+b+c=0$  и  $abc=78$ . Колкава е вредноста на изразот  $(a+b)(b+c)(c+a)$ ?

- A)  $-156$       B)  $-39$       C)  $78$       D)  $156$       E) друг резултат

**Решение. Е).** Имаме,  $a+b=-c$ ,  $b+c=-a$ ,  $c+a=-b$ , па затоа

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (-a)(-b)(-c) = -abc = -78.$$

23. Нека  $A$  е најмалиот природен број чиј збир на цифри е 2021. Колкав е збирот на цифрите на бројот  $A+2021$ ?

- A) 10      B) 12      C) 19      D) 28      E) 2021

**Решение. А).** Јасно,  $A = 59\dots 9$ . Сега

$$A + 2021 = A + 1 + 2020 = \underset{224}{60\dots0} + \underset{220}{2020},$$

па затоа збирот на цифрите на бројот  $A + 2021$  е еднаков на  $6 + 2 + 2 = 10$ .

24. Три момчиња играле игра во која секое од нив запишало по 10 зборови. За збор кој само едно момче го запишало тоа освојувало 3 бода. За збор кој точно две момчиња го запишале, тие добивале по 1 бод. Не биле давани поени за зборови кои трите момчиња ги запишале. Кога ги пресметале нивните резултати, откриле дека секој од нив имал различен резултат. Симон имал 19 поени, што бил најслаб резултат, а Ласте имал најдобар резултат. Колку поени освоил Ласте?
- A) 20            B) 21            C) 23            D) 24            E) 25

**Решение. Е).** Ако Симон имал само 4 збора кои ги немале другите двајца, тогаш тој можел да освои најмногу  $4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18 < 19$  бодови, а ако имал 7 зборови кои другите ги немале, тогаш тој ќе освои најмалку  $7 \cdot 3 = 21 > 19$  бодови. Значи, Симон можел сам да има 5 или 6 зборови.

Ако  $19 = 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0$ , тоа значи дека Симон запишал три збора кои ги имаат и другите двајца, па затоа тие може да имаат најмногу по  $7 \cdot 3 = 21$  бод. Со еден од играчите Симон има заеднички збор, па затоа тој може да има најмногу  $6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 19$  бодови. Но, ова противречи на условот дека сите имаат различен број бодови.

Затоа  $19 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$  е начинот на кој Симон ги освоил бодовите, а другите двајца добиваат бодови за 9 свои зборови. Можни бодови на Ласте се:

а)  $9 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 27$ , па тогаш третиот играч ќе има 4 заеднички зборови со Симон и ќе освои  $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 19$  бодови, што е противречност.

б)  $8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 25$ , па тогаш имаме:

б1) третиот играч има три заеднички збора со Симон, па ќе освои  $6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 21$  бод и овој случај е можен,

б2) третиот играч има еден заеднички збор со Ласте и четири заеднички збора со Симон, па ќе освои  $4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 17$  бодови, што не е можно бидејќи треба да има повеќе од 19 бодови.

в)  $7 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 23$ , па тогаш имаме:

в1) третиот играч има два заеднички збора со Симон и тој ќе освои  $7 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 23$  што е противречност,

в2) третиот играч има еден заеднички збор со Ласте и три заеднички збора со Симон и тој ќе освои  $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$  бодови, што е противречност,

в3) третиот играч има два заеднички збора со Ласте и четири заеднички збора со Симон и тој ќе освои  $3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 15$  бодови, што е противречност.

Значи, единствена можност е Ласте да освои 25 бодови (случајот б1).

25. Помалиот квадрат на цртежот има плоштина 16 и сивиот триаголник има плоштина 1. Колку е плоштината на поголемиот квадрат?

A) 17      B) 18      C) 19      D) 20      E) 21

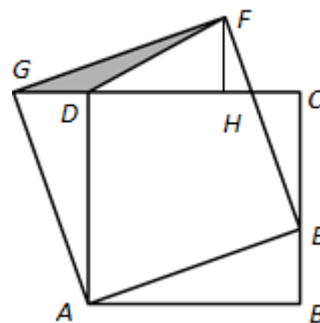
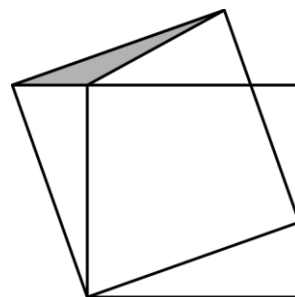
**Решение. B).** Да ги воведеме ознаките како на долниот цртеж. За триаголниците  $ABE$  и  $ADG$  важи  $\overline{AB} = \overline{AD}$ ,  $\overline{AE} = \overline{AG}$  и  $\angle BAE = \angle DAG$ , па од признакот САС следува дека тие се складни.

Понатаму, за триаголниците  $ADG$  и  $GHF$  важи  $\overline{AG} = \overline{GF}$  и  $\angle HGF = \angle DAG$ ,  $\angle AGD = \angle GFH$  (агли со нормални краци), па од признакот АСА следува дека тие се складни. Од овие складности следува  $\overline{BE} = \overline{DG} = \overline{HF}$ . Според тоа,  $1 = P_{GDF} = \frac{\overline{DG} \cdot \overline{HF}}{2}$ , т.е.

$\overline{DG}^2 = 2$ . Но,  $\overline{AD}^2 = 16$ , па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AG}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{AD}^2 = 18$$

и тоа е бараната плоштина.



26. Секој од броевите  $a$  и  $b$  е точен квадрат. Разликата  $a - b$  е прост број. Кој од следните броеви може да е  $b$ ?

A) 100      B) 144      C) 256      D) 900      E) 10000

**Решение. D).** Имаме,  $a = m^2, b = n^2$ , па како  $a - b = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$  е прост број добиваме дека  $m - n = 1$ . Тогаш  $a - b = 2n + 1$  е прост број.

За  $b = 100$ , добиваме  $a - b = 2 \cdot 10 + 1 = 21$  е сложен број.

За  $b = 144$ , добиваме  $a - b = 2 \cdot 12 + 1 = 25$  е сложен број.

За  $b = 256$ , добиваме  $a - b = 2 \cdot 16 + 1 = 33$  е сложен број.

За  $b = 900$ , добиваме  $a - b = 2 \cdot 30 + 1 = 61$  е прост број.

За  $b = 10000$ , добиваме  $a - b = 2 \cdot 100 + 1 = 201$  е сложен број.

27. На табла со димензии  $4 \times 4$  некои полиња мора да бидат обоени со црна боја. Броевите десно и под таблата покажуваат колку полиња во тој ред или колона мора да се обоени црно. На колку начини оваа табла може да биде обоена?

				2
				0
				2
				1
2	0	2	1	

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 5      E) повеќе од 5

**Решение. D).** Добивањето на сите боења редоследно е прикажано на долните цртежи.

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X		X	2
X	X	X	X	0
	X		X	2
X	X	X		1
2	0	2	1	

	X		X	2
X	X	X	X	0
	X			2
X	X		X	1
2	0	2	1	

	X		X	2
X	X	X	X	0
	X			2
X	X		X	1
2	0	2	1	

	X		X	2
X	X	X	X	0
	X			2
X	X		X	1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
X	X		X	1
2	0	2	1	

	X		X	2
X	X	X	X	0
	X		X	2
X	X	X		1
2	0	2	1	

	X		X	2
X	X	X	X	0
	X			2
X	X		X	1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
X	X		X	1
2	0	2	1	

28. Колку петцифрени природни броеви имаат производ на нивните цифри еднаков на 1000?

- A) 10      B) 20      C) 30      D) 40      E) 60

**Решение. D).** Имаме,  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$  па затоа мора да имаме 3 петки и пар од цифри чиј производ е 8. Тие се (1,8) и (2,4). Случаите се симетрични, затоа ќе го разгледаме само првиот. Можеме да ја избереме позицијата на 1 на 5 начини, а позицијата на 8 на 4 начини, што дава  $4 \cdot 5 = 20$  начини. Во вториот случај имаме уште 20 начини, што значи вкупно 40 петцифрени броеви чиј производ на цифри е 1000.

29. Кристина има осум монети чии маси изразени во грамови се различни природни броеви. Кога Кристина ќе стави било кои две монети на едната страна на вага и било кои две на другата страна, страната која ја содржи монетата со најголема маса секогаш претегнува. Која е најмалата можна маса на монета со најголема маса?
- A) 8      B) 12      C) 34      D) 128      E) 256

**Решение. C).** Нека  $a < b < c < d < e < f < g < h$  се масите на монетите. Нека претпоставиме дека  $a = 1$  (во спротивно одземаме  $a - 1$  од сите монети). Тогаш  $b \geq 2, c \geq 3$  и  $d + 1 > b + c$ , односно  $d \geq b + c \geq 5$ . Аналогно,

$$e \geq c + d \geq 8, f \geq d + e \geq 13, g \geq e + f \geq 21, h \geq f + g \geq 34.$$

Броевите 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и 34 го задоволуваат условот на задачата.

30. Во еден ред се наредени 2021 топки и се нумерирани од 1 до 2021. Секоја топка е обоена со една од четирите бои: зелена, црвена, жолта или сина. Меѓу било кои пет последователни топки има точно една црвена, една жолта и една сина топка. По секоја црвена следува жолта топка. Топките нумерирани со броеви 2, 20 и 202 се зелени. Во која боја е обоена топката нумерирана со број 2021?
- A) зелена    B) црвена    C) жолта    D) сина
- E) не е можно да се определи

**Решение. D).** Меѓу било кои пет последователни топки има една црвена, една жолта, едно сина и две зелени. Да ги разгледаме било кои шест последователни топки. Горе споменатото е точно за првите пет и последните пет топки. Следува дека првата и шестата топка имаат иста боја. Значи бојата на било која топка се повторува по пет последователни топки. Тогаш топката со реден број 20 има иста боја како и топката со реден број 5 (бидејќи  $20 = 5 \cdot 3 + 5$ ). Топката со реден број 202 има иста боја како и топката со реден број 2 (бидејќи  $202 = 5 \cdot 40 + 2$ ). Тогаш топките со реден број 2 и 5 се зелени. Топката со реден број 2021 ја има истата боја како и топката со реден број 1 (бидејќи  $2021 = 5 \cdot 404 + 1$ ). Следува дека, топката со реден број 3 е црвена, со реден број 4 е жолта и со реден број 1 е сина. Значи топката со реден број 2021 е сина.

## Junior (прва и втора година) 2022

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Катерина има кутија со 30 чкорчиња и сака со нив да го напише бројот 2022, на начин како што е прикажано на цртежот десно. Колку чкорчиња ќе останат во кутијата по запишување на бројот 2022?



- A) 20                  B) 19                  C) 10                  D) 9                  E) 5

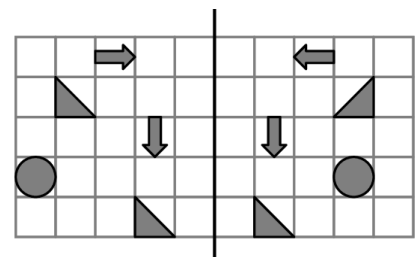
**Решение. D).** За цифрите 0 и 2 се потребни по 6 и 5 чкорчиња, соодветно. Значи., за бројот 2022 се потребни  $6+3\cdot 5=21$  чкорче. Според тоа, ќе останат  $30-21=9$  чкорчиња.

2. Рамностран триаголник со должина на страна 12 има еднаков периметар со квадрат со страна  $a$ . Колку е  $a$ ?

- A) 9                  B) 12                  C) 16                  D) 24                  E) 36

**Решение. A).** Од условот на задачата следува  $4a = 3 \cdot 12$ , од каде добиваме  $a = 9$ .

3. На лист хартија се нацртани десет фигури, како што е прикажано на цртежот десно. Матео листот хартија го преклопил по вертикалната линија прикажана на цртежот. Колку фигури кои се на левата страна на листот потполно ќе се преклопат со фигури кои се на десната страна на листот?




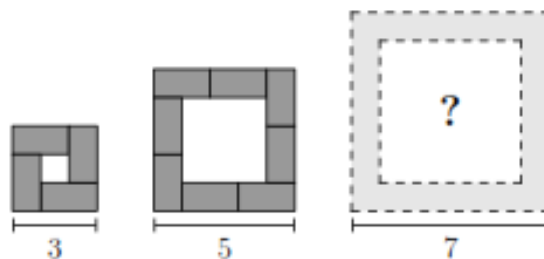
- A) 1                  B) 2                  C) 3                  D) 4                  E) 5

**Решение. C).** Ќе се преклопат фигурите кои се симетрични во однос на вертикалната линија. Тоа се хоризонталните стрелки, горните триаголници и вертикалните стрелки. Круговите нема да се преклопат бидејќи се наоѓаат во петтото

и четвртото квадратче лево и десно од линијата, а долните триголници нема да се преклопат бидејќи темињата на правите агли не се осносиметрични во однос на вертикалната линија.

4. Андреј поврзува правоаголни плочки

 со димензии  $2 \times 1$  за да ги направи фигурите прикажани на цртежите десно. Сите три фигури се со квадратен облик. Ако за првата фигура Андреј употребил 4, за средната 8 плочки, колку плочки ќе употреби за третата фигура?



- A) 10            B) 11            C) 12            D) 14            E) 16

**Решение. C).** Бидејќи  $7 = 3 \cdot 2 + 1$ , Андреј треба на секоја страна да стави по 3 плочки со димензии  $2 \times 1$ . Според тоа, тој вкупно е употреби  $4 \cdot 3 = 12$  плочки.

5. На цртежот десно е дадена таблица за множење така што секој број во даден квадрат е еднаков на производот на броевите на почетокот на редот и над колоната во која е бројот. Само еден број во табелата е познат. Ако  $x$  и  $y$  се природни броеви и ако  $x$  е поголем од  $y$ , колку е  $x$ ?

	$x$	$x+1$
$y$		
$y+1$		77

- A) 6            B) 7            C) 8            D) 10            E) 11

**Решение. D).** Бројот 77 како производ на два природни броја поголеми од 1 може да се запише на единствен начин и тоа  $77 = 7 \cdot 11$ . Понатаму, од  $x > y$  следува  $x+1 > y+1$ , па како  $(x+1)(y+1) = 77 = 7 \cdot 11$ , добиваме  $x+1 = 11$ , т.е.  $x = 10$ .

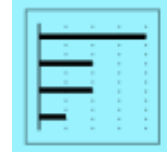
6. Збирот на бројот  $x$  е неговиот квадрат е еднаков на нула. Ако бројот  $x$  е помал од својата половина, кој е бројот  $x$ ?

- A) -2            B) -1            C) 0            D) 1            E) 2

**Решение. B).** Од условот на задачата следува  $x + x^2 = 0$ , т.е.  $x(1+x) = 0$ . Од последната равенка наоѓаме  $x = 0$  или  $x = -1$ .

Но,  $x < \frac{1}{2}x$  и како  $0 = \frac{1}{2} \cdot 0$  и  $-1 < -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-1)$ , добиваме дека  $x = -1$ .

7. Дијаграмот на цртежот десно покажува колку време Горјан користел четири апликации на својот телефон во текот на минатата седмица. Оваа седмица Горјан го преполовил времето кое го поминал користејќи две апликации, додека за другите две апликации потрошил исто толку време како и минатата седмица. На кој од следните дијаграми може да е претставено времето кое Горјан го поминал користејќи ги оваа седмица четирите апликации?



- A) B) C) D) E)

**Решение. C).** На дијаграмот A е преполовено времето на три апликации, па тоа не е бараниот дијаграм.

На дијаграмот B е преполовено времето на една апликација, па тоа не е бараниот дијаграм.

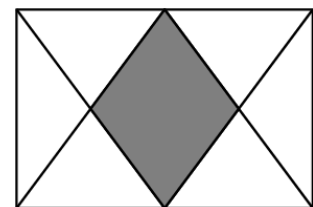
На дијаграмот D е преполовено времето на две апликации и е намалено времето на уште една апликација, па тоа не е бараниот дијаграм.

На дијаграмот E е преполовено времето на три апликации, па тоа не е бараниот дијаграм.

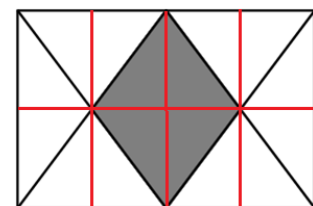
На дијаграмот C е преполовено времето точно на две апликации и тоа е бараниот дијаграм.

8. На цртежот е прикажан правоаголник на кој средините на подолгите страни се поврзани со темињата на правоаголникот. Колкав дел од плоштината на правоаголникот зафаќа обоената фигура?

- A)  $\frac{1}{5}$       B)  $\frac{1}{4}$       C)  $\frac{2}{7}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{2}{5}$



**Решение. B).** Со повлекување на четирите црвени отсечки прикажани на цртежот десно, дадениот правоаголник е поделен на 16 складни правоаголни триаголници (Зошто?). Од нив 4 се обоени, па затоа обоената фигура зафаќа  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$  од плоштината на правоаголникот.

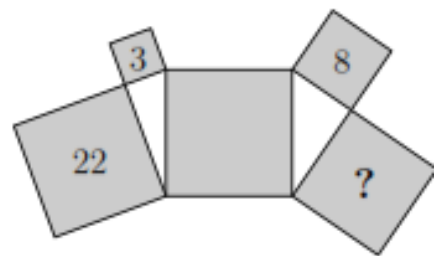


9. На изборите за претседател на Заедницата ученици од прва година се пријавиле пет кандидати. По пребројувањето а 90% од гласовите, добиени се следниве резултати: Алекса 14, Бранко 11, Васко 10, Гордана 8, Даница 2. Колку ученици имаат можност да победат по пребројувањето на сите гласови?

A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

**Решение. C).** До сега се преброени  $14+11+10+8+2=45$  гласови, што е 90% од гласовите. Според тоа, на изборите гласале  $\frac{45}{90} \cdot 100 = 50$  ученици, што значи дека не се преброени само уште 5 гласови. Најдобро сценарио за победникот е тој да ги добие сите преостанати гласови. Ако сите овие гласови ги добие Гордана, тогаш таа ќе има 13 гласови и не може да победи бидејќи Алекса веќе има 14 гласови. Јасно, на изборите меже да победат Алекса, Бранко и Васко, што значи 3 ученици.

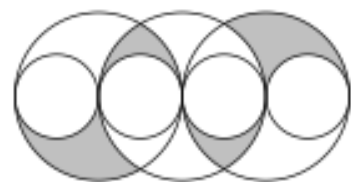
10. На цртежот десно се дадени пет квадрати, при што страните на некои од нив формираат два правоаголни триаголника. Броевите запишани во квадратите се нивните плоштини изразени во  $m^2$ . Колку е плоштината на квадратот во кој е прашалниот знак?



A)  $14 m^2$               B)  $15 m^2$               C)  $16 m^2$               D)  $17 m^2$               E)  $18 m^2$

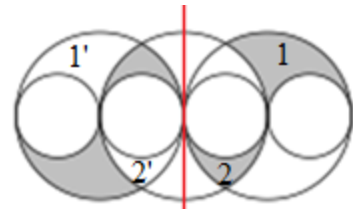
**Решение. D).** Според Питагоровата теорема должината на страната на средниот квадрат е еднаква на  $\sqrt{\sqrt{22}^2 + \sqrt{3}^2} = 5 m$ . Повторно според Питагоровата теорема должината на страната на десниот квадрат е еднаква на  $\sqrt{5^2 - \sqrt{8}^2} = \sqrt{17} m$ , па затоа неговата плоштина е  $\sqrt{17}^2 = 17 m^2$ .

11. На цртежот десно се прикажани три големи кружници со еднакви радиуси и четири помали кружници со радиуси еднакви на 1. Центрите на сите седум кружници се колинеарни. Коку е плоштината на сивиот дел од фигурата?

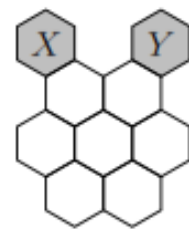


A)  $\pi$                       B)  $2 \pi$                       C)  $3 \pi$                       D)  $4 \pi$                       E)  $6 \pi$

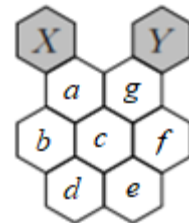
**Решение. В).** Дијаметрите на малите кружници се еднакви на 2, па затоа дијаметрите на големите кружници се еднакви на 4. Значи, радиусите на големите кружници се еднакви на 2. Дадената фигура е осносиметричка и една оска на симетрија е заедничката тангента на првиот и третиот круг. Затоа деловите 1 и 1', односно 2 и 2' имаат еднакви плоштини. Конечно, плоштината на сивиот дел од фигурата е еднаква на  $2^2\pi - 2 \cdot 1^2\pi = 4\pi - 2\pi = 2\pi$ .



12. Пабло треба да го поврзе шестаголникот означен со  $X$  со шестаголникот означен со  $Y$ , поврзувајќи меѓусебно соседни шестаголници. Два шестаголника се соседни ако имаат заедничка страна. На колку различни начини може тоа да го направи, ако мора да помине низ секој бел шестаголник и тоа само еднаш?
- A) 2                      B) 3                      C) 4                      D) 5                      E) 6



**Решение. Д).** Белите шестаголници да ги означиме како на цртежот десно. Јасно, во првиот чекор мора се поврзе шестаголникот  $a$ . Во вториот чекор мора да се поврзе еден од шестаголниците  $b$  или  $c$ . Ако во вториот чекор се поврзе шестаголникот  $c$ , тогаш натамошното поврзување е еднозначно и тоа е  $XacbdefgY$ . Ако во вториот чекор се поврзе шестаголникот  $b$ , тогаш во третиот чекор мора да се поврзе еден од шестаголниците  $c$  или  $d$ . Ако се поврзе шестаголникот  $c$ , тогаш натамошното поврзување е еднозначно и тоа е  $XabcdefgY$ . Ако се поврзе шестаголникот  $d$ , тога лесно се гледа дека имаме уште три можности и притоа поврзувањата се  $XabdcefgY$ ,  $XabdecfgY$  и  $XabdefcgY$ . Според тоа, вкупно имаме 5 начини на поврзувања кои ги задоволуваат условите на задачата.



13. Броевите на годините на шест братучеди се последователни природни броеви. Секој од братучедите точно одговорил на прашањето колку години има неговиот најстар братучед. Ако е  $a$  збирот на броевите на дадените одговори, кој од дадените броеви сигурно не може да биде еднаков на  $a$ ?
- A) 95                      B) 125                      C) 167                      D) 205                      E) 233

**Решение. D).** Од условот на задачата следува дека петте најмлади братучеди го кажале бројот на годините на најстариот братучед, да го означиме со  $x$ , а најстариот братучед го казал бројот на годините на братучедот кој е петти по старост, па како нивните години се последователни природни броеви, тој го казал бројот  $x-1$ . Според тоа, збирот на годините на сите братучеди е број од видот  $5x+x-1=6x-1$ . Имаме,

$$95 = 6 \cdot 16 - 1, \quad 125 = 6 \cdot 21 - 1, \quad 167 = 6 \cdot 28 - 1, \quad 205 = 6 \cdot 35 - 5, \quad 233 = 6 \cdot 39 - 1,$$

што значи дека само бројот 205 не е број од дадениот вид, па затоа само тој не може да е еднаков на збирот на годините на шесте братучеди.

14. Теодора направила низа од 2022 бонбони. Александар ја зел секоја шеста бонбона од оваа низа, а потоа Никола ја зел секоја петта од преостанатите бонбони во низата. Потоа Матео ја зел секоја четврта бонбона од преостанатите бонбони во низата и на крајот Владимир ги зел преостанатите бонбони. Колку бонбони зел Владимир?

A) 0      B) 337      C) 674      D) 1011      E) 1348

**Решение. D).** По Александар останале  $2022 \cdot \frac{5}{6}$  бонбони. По Никола останале  $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5}$  бонбони. По Матео останале  $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = 2022 \cdot \frac{3}{6} = 1011$  бонбони, кои ги зел Владимир.

15. Тројца внуци ја прашале нивната баба колку години има. Бабата ги замолила да погодат, по што тие одговориле дека бабата има 75, 78 и 81 година, редоследно. Се покажало дека еден внук згрешил за една, еден за две и еден за четири години. Колку години има бабата?

A) 76      B) 77      C) 79      D) 80      E) не може да се определи

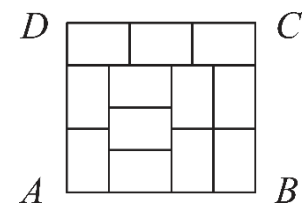
**Решение. E).** Според условиите на задачата бабата може да има

$$77 = 75 + 2 = 78 - 1 = 81 - 4 \quad \text{или} \quad 79 = 75 + 4 = 78 + 1 = 81 - 2 \quad \text{години.}$$

Според тоа, не може да се определи колку години има бабата.

16. На цртежот е прикажан правоаголник  $ABCD$  кој е поделен на 12 складни правоаголници. Колку е односот  $\overline{AD} : \overline{DC}$  ?

A) 8:9      B) 5:6      C) 7:8      D) 2:3      E) 9:8

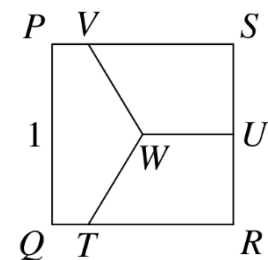


**Решение. А).** Пократката страна на малите правоаголници да ја означиме со  $a$ , а подолгата со  $b$ . Од равенството  $\overline{AB} = \overline{DC}$  следува  $3a + b = 3b$ , т.е.  $b = \frac{3}{2}a$ . Според тоа,  $\overline{AD} : \overline{DC} = (2b + a) : 3b = (3a + a) : (\frac{9}{2}a) = 8 : 9$ .

17. Зајак и еж се тркале на 550 метри по кружна патека. Зајакот трчал со постојана брзина од  $10 \text{ m/s}$ , а ежот трчал со постојана брзина од  $1 \text{ m/s}$ . Тие тргнале истовремено од стартната линија, но ежот згрешил и тргнал да трча во спротивна насока од насоката во која трчал зајакот. Откако се сретнале на патеката, ежот се свртел и продолжил да трча по зајакот. Колку секунди поминале од моментот кога зајакот стигнал на целта до моментот кога ежот стигнал на целта?
- А) 45                      В) 50                      С) 55                      Д) 100                      Е) 505

**Решение. А).** Зајакот целата патека ја претрчува за  $\frac{550}{10} = 55$  секунди. За време  $t$  зајакот претрчал  $10t$  метри, а ежот претрчал  $t$  метри. Збирот на патиштата кои ги претрчале е еднаков на должината на патеката, па затоа  $10t + t = 550$ , од каде добиваме  $t = 50$  секунди. Според тоа, зајакот трчал уште 5 секунди, а на ежот му требале уште 50 секунди да се врати до целта. Значи, ежот на целта ќе стигне 45 секунди по зајакот.

18. На цртежот десно е даден квадрат  $PQRS$  со должина на страна 1. Точката  $U$  е средината на страната  $RS$ , а точката  $W$  е пресекот на дијагоналите на квадратот. Ако отсечките  $TW$ ,  $UW$  и  $VW$  го делат квадратот на три дела со еднакви плоштини, колкава е должината на отсечката  $SV$ ?

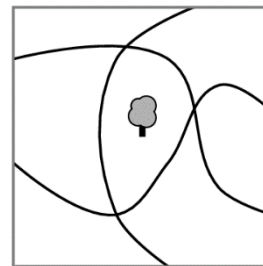


- А)  $\frac{1}{2}$       В)  $\frac{2}{3}$       С)  $\frac{3}{4}$       Д)  $\frac{4}{5}$       Е)  $\frac{5}{6}$

**Решение. Е).** Бидејќи точката  $U$  е средината на страната  $RS$ , а точката  $W$  е пресекот на дијагоналите на квадратот, важи  $\overline{SU} = \overline{UW} = 0,5$ . Плоштината на квадратот е 1, па затоа плоштината на секој од добиените делови е  $\frac{1}{3}$ . Сега, за плоштината на правоаголниот траpez  $SVWU$  добиваме  $\frac{\overline{SV} + \overline{UW}}{2} \cdot \overline{SU} = \frac{1}{3}$ , т.е.

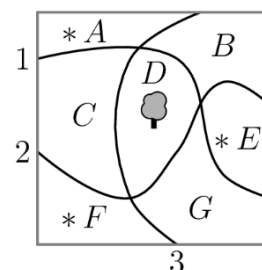
$$\frac{\overline{SV} + 0,5}{2} \cdot 0,5 = \frac{1}{3}, \text{ односно } \overline{SV} = \frac{5}{6}.$$

19. Низ градскиот парк минуваат три патеки, а во средината на паркот е засадено дрво (види цртеж десно). Кој е најмалиот број дрва што треба да се засадат во паркот така што од двете страни на секоја патека да има еднаков број дрва?

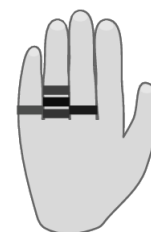


- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. C).** Патеките и областите на паркот да ги означиме како на цртежот десно. Гледајќи ја патеката 1 заклучуваме дека барем едно дрво мора да биде засадено во една од областите  $A$ ,  $B$ ,  $E$ . Гледајќи ја патеката 2 заклучуваме дека барем едно дрво мора да биде засадено до една од областите  $E$ ,  $F$ ,  $G$ . Гледајќи ја патеката 3 заклучуваме дека барем едно дрво мора да биде засадено во една од областите  $A$ ,  $C$ ,  $F$ . Бидејќи овие три тројки немаа пресек, мораме да засадиме барем три стебла, т.е. за секоја тројка по едно стебло. Та се постигнува со засадување на стебла во заедничките области за секој пар тројки, а тоа се областите  $E$ ,  $F$ ,  $A$ .



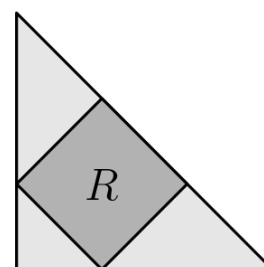
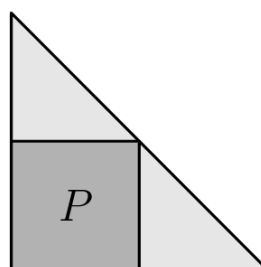
20. Вања носи пет прстени на раката, како што е прикажано на цртежот десно. Ако вади прстен по прстен, на колку различни начини тоа може да го направи?



- A) 16      B) 20      C) 24      D) 30      E) 45

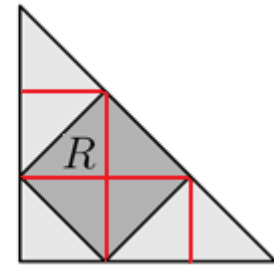
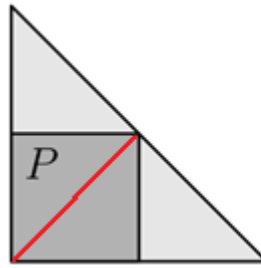
**Решение. B).** Ако Вања има по еден прстен на секој прст, тогаш таа прстените може да ги извади од раката на  $5! = 120$  начини. Но, таа на еден прст има 3 прстени, па затоа бројот на начините на вадење на прстените се намалува  $3! = 6$  пати. Значи, Вања прстените може да ги извади на  $120 : 6 = 20$  начини.

21. Во складни рамнокраки правоаголни триаголника се впишани квадрати, како што е прикажано на цртежот десно. Ако плоштината на квадратот означен со  $P$  е 45, колкава е плоштината на квадратот означен со  $R$ ?



- A) 35      B) 40      C) 45      D) 50      E) 60

**Решение. В).** Да го поделиме квадратот  $P$  со дијагонала, како што е прикажано на цртежот десно. Тогаш големиот триаголник е поделен на четири складни помали триаголника (Докажи!). Затоа плоштината на големиот триаголник е еднаква на  $2 \cdot 45 = 90$ .



Во квадратот  $R$  да ги повлечеме дијагоналите и во средните триаголници да ги повлечеме висините кон хипотенузите, како што е прикажано на цртежот горе. Тогаш големиот триаголник е поделен на девет складни помали триаголника (Докажи!). Затоа плоштината на квадратот  $R$  е еднаква на  $\frac{4}{9} \cdot 90 = 40$ .

22. На фудбалски турнир учествувале осум екипи и секои две екипи меѓусебно одиграле точно по еден натпревар. Екипата која победува освојува 3 бода, во случај на пораз не се освојуваат бодови, а во случај на нерешен резултат двете екипи добиваат по 1 бод. Сите екипи вкупно освоиле 61 бод. Кој е најголемиот број бодови што можела да го освои екипата која победила на турнирот?
- A) 21      B) 19      C) 18      D) 17      E) 16

**Решение. D).** На турнирот вкупно се одиграни  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  натпревари. Ако  $a$  натпревари завршиле со победа на едната екипа, тогаш на овие натпревари се освоени  $3a$  бодови. Притоа,  $28 - a$  натпревари завршиле нерешено и на нив се освоени  $2(28 - a)$  бодови. Според тоа,  $3a + 2(28 - a) = 61$ , од каде следува  $a = 5$ . Победникот на турнирот ќе освои најмногу бодови ако ги победил овие 5 натпревари и на другите два натпревари одиграл нерешено. Значи, победникот може да освои најмногу  $3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$  бодови.

23. Група пирати, по извршената кражба, поделиле 200 златници и 600 сребреници. Секој офицер добил по 5 златници и 10 сребреници, секој морнар добил по 3 златници и 8 сребреници, додека секој член на послугата добил по 1 златник и 6 сребреници. Колку луѓе вкупно учествувале во поделбата?
- A) 50      B) 60      C) 72      D) 80      E) 90

**Решение. D).** Нека во поделбата учествувале  $x, y, z$  офицери, морнари, слуги, соодветно. Тогаш

$$\begin{aligned}5x + 3y + z &= 200, \\10x + 8y + 6z &= 600.\end{aligned}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме  $5x + 5y + 5z = 400$ , од каде наоѓаме  $x + y + z = 80$ . Значи, во поделбата учествувале 80 луѓе.

24. Производот на цифрите на природниот број  $N$  е еднаков на 20. Кој од понудените броеви не може да е производот на цифрите на бројот  $N+1$ ?
- A) 40            B) 30            C) 25            D) 35            E) 24

**Решение. D).** Имаме  $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ , што значи дека бројот  $N$  може да биде запишан само со цифрите 1, 2, 4 и 5.

За  $N = 2251$  добиваме  $N+1 = 2252$  и производот на неговите цифри е еднаков на  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$

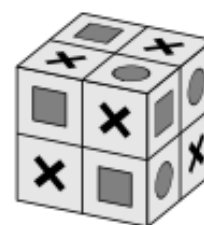
За  $N = 2512$  добиваме  $N+1 = 2513$  и производот на неговите цифри е еднаков на  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

За  $N = 54$  добиваме  $N+1 = 55$  и производот на неговите цифри е еднаков на  $5 \cdot 5 = 25$

За  $N = 45$  добиваме  $N+1 = 46$  и производот на неговите цифри е еднаков на  $4 \cdot 6 = 24$ .

Но, за бројот 35 имаме  $5 \cdot 7 = 35$ , што значи дека бројот  $N+1$  мора да има цифра 7, што не е можно бидејќи најголемата негова цифра може да е 6, и тоа е случајот кога цифрата на единиците на бројот  $N$  е 5.

25. Секој ѕид на коцката е поделен на четири квадрати и во секој квадрат е нацртан по еден од трите знаци: квадрат  $\blacksquare$ , круг  $\bullet$  или знакот  $\times$ . Два квадрати се соседни ако имаат заедничка страна. Во секои два соседни квадрати се нацртани различни знаци. Колку квадрати  $\blacksquare$ , кругови  $\bullet$  и знакот  $\times$  може да има на коцката?



- A) 8  $\blacksquare$ , 6  $\bullet$  и 10  $\times$ .            B) 8  $\blacksquare$ , 7  $\bullet$  и 9  $\times$ .  
C) 8  $\blacksquare$ , 5  $\bullet$  и 11  $\times$ .            D) 7  $\blacksquare$ , 7  $\bullet$  и  $\times$ .

Е) ништо од претходно наведеното

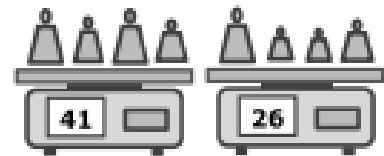
**Решение. Е).** Во секое теме на коцката имаме три квадрати, при што секои два квадрати се соседни. Тоа значи дека во секое теме на коцката мора да има квадрати во кои се запишани трите знаци. Бидејќи коцката има 8 темиња, заклучуваме дека секој знак мора да се појави 8 пати. Според тоа, ниту еден од одговорите А), В), С), D) не е точен.

26. Во еден град луѓето се поделени на позитивни и негативни. Позитивните луѓе поставуваат исклучиво прашања на кои одговорот е секогаш потврден (да), а негативните луѓе поставуваат исклучиво прашања на кои одговорот е секогаш одречен (не). Кога се сретнав со Антон и Бојан, Бојан ме праша: „Дали сме и Антон и јас негативни луѓе?“ Што може да се заклучи за Антон и Бојан?

- А) двајцата се позитивни  
 В) двајцата се негативни  
 С) Антон е позитивен, а Бојан негативен  
 D) Антон е негативен, а Бојан позитивен  
 Е) не е можно со сигурност да се определи

**Решение. С).** Ако одговорот на поставеното прашање е „да“, тоа значи дека Бојан е негативен, па затоа тој поставува прашања на кои одговорот е „не“, што е противречност. Значи, одговорот на поставеото прашање е „не“, па затоа Бојан е негативен. Но, како одговорот на прашањето е „не“, заклучуваме дека не е можно и Антон да е негативен, што значи дека тој е позитивен. Според тоа, точен одговор е С).

27. Во една продавница има вага и 12 различни тегови чии маси се целобројни вредности од 1 kg до 12 kg . Илија ги поделил теговите на три групи, при што во секоја група има по четири тегови.



Вкупната маса на првата група била 41 kg , додека масата на втората група била 26 kg . Кој од дадените тегови се наоѓа во групата во која е тегот од 9 kg ?

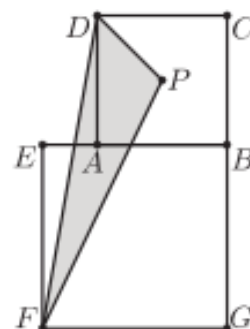
- А) 3 kg      В) 5 kg      С) 7 kg      D) 8 kg      Е) 10 kg

**Решение. С).** Вкупната маса на сите 12 тегови е  $\frac{12 \cdot 13}{2} = 78 \text{ kg}$  . Според тоа, вкупната маса на четирите тегови во третата група е  $78 - (41 + 26) = 11 \text{ kg}$  . Но тего-

вите се со различни целобројни маси од  $1\text{ kg}$  до  $12\text{ kg}$ , па затоа единствена можност во третата група е да се теговите со маси  $1\text{ kg}, 2\text{ kg}, 3\text{ kg}, 5\text{ kg}$ . Значи, остануваат теговите со маси  $4\text{ kg}, 6\text{ kg}, 7\text{ kg}, 8\text{ kg}, 9\text{ kg}, 10\text{ kg}, 11\text{ kg}, 12\text{ kg}$  и тие се распределени во првите две групи. Ако тегот од  $9\text{ kg}$  е во групата чија вкупна маса е еднаква на  $41\text{ kg}$ , тогаш збирот на масите на другите три тега треба да е  $32\text{ kg}$ , а таква комбинација со теговите со маси  $4\text{ kg}, 6\text{ kg}, 7\text{ kg}, 8\text{ kg}, 10\text{ kg}, 11\text{ kg}, 12\text{ kg}$  не е можна. Значи, тегот од  $9\text{ kg}$  е во групата тегови чија вкупна маса е  $26\text{ kg}$  и притоа единствена можност за преостанатите три тегови е тоа да се теговите со маси  $4\text{ kg}, 6\text{ kg}, 7\text{ kg}$ . Значи, тегот од  $9\text{ kg}$  е во иста група со тегот од  $7\text{ kg}$ .

28. Должините на дијагоналите на квадратите  $ABCD$  и  $EFGB$ , прикажани на цртежот десно се  $7\text{ cm}$  и  $10\text{ cm}$ , соодветно. Ако  $P$  е пресекот на дијагоналите на квадратот  $ABCD$ , колку е плоштината на триаголникот  $FPD$ ?

- A)  $14,5\text{ cm}^2$       B)  $15\text{ cm}^2$       C)  $15,75\text{ cm}^2$   
 D)  $16,5\text{ cm}^2$       E)  $17,5\text{ cm}^2$

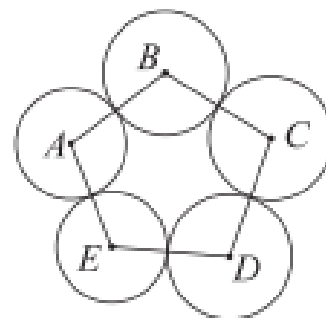


**Решение. Е).** Дијагоналата на квадратот зафаќа со неговата страна агол еднаков на  $45^\circ$ . Затоа триаголникот  $FBD$  е правоаголен со катети  $7\text{ cm}$  и  $10\text{ cm}$ . Понастаму, од  $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BD}$  следува дека основата на триаголникот  $FPD$  е половина од основата на триаголникот  $FBD$ , а двата триаголници имаат еднакви висини кон овие основи. Затоа  $P_{FPD} = \frac{1}{2}P_{FBD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{BD} \cdot \overline{BF}}{2} = \frac{7 \cdot 10}{4} = 17,5\text{ cm}^2$ .

29. Кружници со центри во точките  $A, B, C, D$  и  $E$  се дадени во рамнината (цртеж десно). Ако е  $\overline{AB} = 16\text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 14\text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 17\text{ cm}$ ,  $\overline{DE} = 13\text{ cm}$  и  $\overline{EA} = 14\text{ cm}$ , која точка е центар на кружницата со најдолг радиус?

- A)  $A$       B)  $B$       C)  $C$       D)  $D$       E)  $E$

**Решение. А).** Со  $r_a, r_b, r_c, r_d, r_e$  да ги означиме ради-



усите на кружниците со центри во точките  $A, B, C, D, E$ , соодветно. Тогаш

$$r_a + r_b = 16, r_b + r_c = 14, r_c + r_d = 17, r_d + r_e = 13, r_e + r_a = 14.$$

Ако ги собереме горните равенства, добиваме

$$2(r_a + r_b + r_c + r_d + r_e) = 74, \text{ т.е. } r_a + r_b + r_c + r_d + r_e = 37.$$

Според тоа,

$$r_a = 37 - (r_b + r_c + r_d + r_e) = 37 - (14 + 13) = 10 \text{ cm},$$

$$r_b = 16 - r_a = 16 - 10 = 6 \text{ cm},$$

$$r_c = 14 - r_b = 14 - 6 = 8 \text{ cm},$$

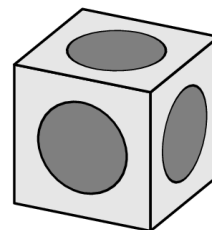
$$r_d = 17 - r_c = 17 - 8 = 9 \text{ cm},$$

$$r_e = 13 - r_d = 13 - 9 = 4 \text{ cm}.$$

Значи, точката  $A$  е центар на кружницата со најдолг радиус.

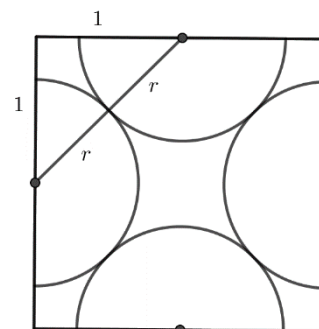
30. Од секој ѕид на дадена коцка е извадена по една полутопка.

Дупките во вид на полутопки кои останале на ѕидовите на коцките се меѓусебно еднакви. Дупките кои се наоѓаат на соседни ѕидови на коцката меѓусебно се допираат во една точка. Ако должината на работ на коцата е 2, колку е дијаметарот на секоја полутопка?



- A) 1      B) 2      C)  $\sqrt{2}$       D)  $\frac{3}{2}$       E)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$

**Решение. C).** Да ја пресечеме коцката со рамнина паралелна на два ѕида, која минува низ средините на рабовите на преостанатите ѕидови. Пресекот на коцката со оваа рамнина е квадрат, а извадените полутопки се четири складни полукружници, такви што соседните полукружници се допираат во една точка (цртеж десно). Сега, од Питагоровата теорема следува  $(2r)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ , т.е.  $2r = \sqrt{2}$ .



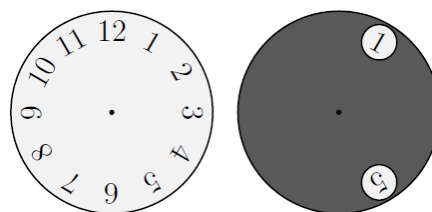
## Junior (прва и втора година) 2023

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

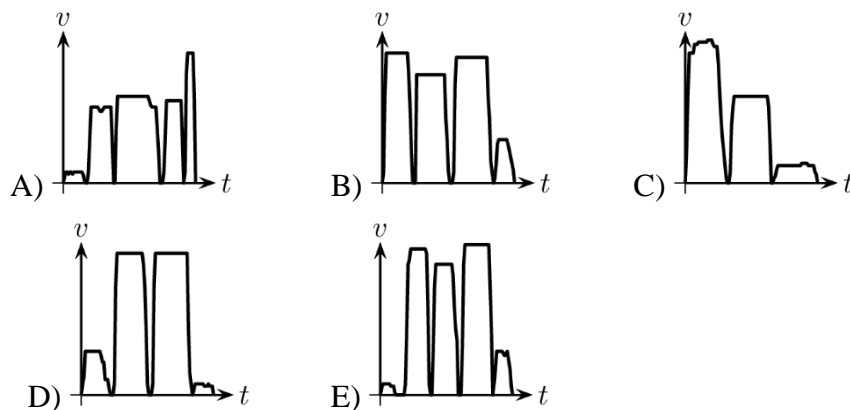
1. Преку часовникот е поставен сив круг, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа сивиот круг е заротиран околу неговиот центар така што по ротацијата во едниот отвор се појавил бројот 10. Кои два броја може да се појават во другиот отвор?



- A) 2 или 6    B) 3 или 7    C) 3 или 6    D) 1 или 9    E) 2 или 7

**Решение. А).** Разликата меѓу времињата кои се појавуваат на цртежот е  $5 - 1 = 4$ . При секоја ротација оваа разлика не се менува, па бидејќи  $10 + 4 = 14 = 12 + 2$  и  $10 - 4 = 6$ , заклучуваме дека во другиот отвор може да се појават броевите 2 или 6.

2. Марија трчала за да го стигне автобусот на градскиот сообраќај во кој се возела две станици, а потоа одела до училиштето. На кој од дадените графици, кои претставуваат зависност на брзината од времето, најдобро е прикажано нејзиното движење?



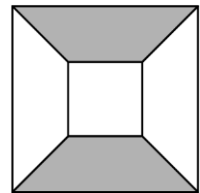
**Решение. D).** Движењето на Марија опфаќа четири периоди и тоа: првиот трчање, следните два две станици возење со автобус и четвртиот одење. Четири периоди имаме само на графици В) и D), па затоа другите три графици отпаѓаат. Понатаму, најголема брзина имаме при возењето со автобус, потоа при трчањето и на крајот при одењето, а тоа соодветствува на графикот D).

3. Природните броеви  $m$  и  $n$  се непарни. Кој од дадените броеви исто така е непарен?

A)  $m(n+1)$     B)  $(m+1)(n+1)$     C)  $m+n+2$     D)  $mn+2$     E)  $m+n$

**Решение. D).** Ако  $m$  и  $n$  се непарни, тогаш  $m+n$ ,  $m+1$ ,  $n+1$  се парни. Затоа, броевите  $m(n+1)$ ,  $(m+1)(n+1)$ ,  $m+n+2$  и  $m+n$  се парни. Понатаму,  $mn$  е непарен, па затоа  $mn+2$  е непарен.

4. Внатре во квадрат со страна со должина  $10\text{ cm}$  е сместен квадрат со страна со должина  $4\text{ cm}$ . Соодветните страни на двата квадрат се паралелни (цртеж десно). Колкав процент од големиот квадрат е обоен во сиво?



A) 25%    B) 30%    C) 40%    D) 42%    E) 45%

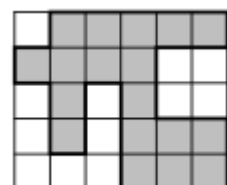
**Решение. D).** Секој од двата сиви трапези има основи  $10\text{ cm}$  и  $4\text{ cm}$ , а збирот на нивните висини е еднаков на  $10 - 4 = 6\text{ cm}$ . Според тоа, сивиот дел од големиот квадрат има плоштина  $\frac{10+4}{2} \cdot 6 = 42\text{ cm}^2$ . Плоштината на големиот квадрат е  $100\text{ cm}^2$ , што значи дека 42% од големиот квадрат е обоен сиво.

5. Денес е четврток. Кој ден во седмицата ќе биде по 2023 дена?

A) вторник    B) среда    C) четврток    D) петок    E) сабота

**Решение. C).** Бидејќи  $2023 = 7 \cdot 289$ , заклучуваме дека по 2023 дена ќе поминат 289 седмици, што значи дека повторно ќе биде четврток.

6. Големиот правоаголник на цртежот десно е поделен на 30 складни квадрати. Периметарот на обоената фигура е  $240\text{ cm}$ . Колку е плоштината на големиот правоаголник?



- A)
- $480 \text{ cm}^2$
- B)
- $750 \text{ cm}^2$
- C)
- $1080 \text{ cm}^2$
- D)
- $1920 \text{ cm}^2$
- E)
- $2430 \text{ cm}^2$

**Решение. D).** Ако со  $a$  ја означиме должината на страната на малите квадрати, тогаш периметарот на обоената фигура е еднаков на  $30a$ , па затоа  $30a = 240$ , од каде добиваме  $a = 8 \text{ cm}$ . Значи, должините на страните на правоаголникот се  $6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}$  и  $5 \cdot 8 = 40 \text{ cm}$ . Конечно, плоштината на правоаголникот е еднаква на  $48 \cdot 40 = 1920 \text{ cm}^2$ .

7. Збирот на годините на едно петчлено семејство е еднаков на 80. Двата најмалди члена на семејството имаат 6 и 8 години. Колку бил збирот на годините на ова семејство пред 7 години?

- A) 35      B) 36      C) 45      D) 46      E) 66

**Решение. D).** Пред 6 години збирот на годините на семејството бил еднаков на  $80 - 5 \cdot 6 = 50$  години. Бидејќи една година пред тоа најмладиот член на семејството не бил роден, збирот на годините на членовите на семејството пред седум години бил еднаков на  $50 - 4 \cdot 1 = 46$  години.

8. Дрвена ограда е направена од вертикално и хоризонтално поставени штици, така што две соседни вертикални штици се поврзани со четири хоризонтални штици. На двата краја на оградата се наоѓаат вертикални штици. Кој од дадените броеви може да биде еднаков на бројот на штиците од кои е направена ваква ограда?

- A) 95      B) 96      C) 97      D) 98      E) 99

**Решение. B).** Ако ја испуштиме првата вертикална штица, тогаш можеме да сметаме дека оградата е составена од делови кои се направени од 5 штици. Значи, вкупниот број штици од кои е направена оградата е број од видот  $5k + 1$ . Сега, од  $95 = 5 \cdot 19$ ,  $96 = 5 \cdot 19 + 1$ ,  $97 = 5 \cdot 19 + 2$ ,  $98 = 5 \cdot 19 + 3$ ,  $99 = 5 \cdot 19 + 4$  следува дека од дадените броеви оградата може да е направена само со 96 штици.

9. Во равенката  $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$  треба да ги замениме броевите  $a$  и  $b$  со природни броеви така што ќе се добие точно равенство. На колку начини тоа може да се направи?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**Решение. Е).** Дадената равенка е еквивалентна на равенката  $ab = 35$ . Во множеството природни броеви решенијата на последната равенка се подредените парови  $(1, 35)$ ,  $(5, 7)$ ,  $(7, 5)$  и  $(35, 1)$ . Значи, одговорот е Е).

10. Откако Горјан одиграл 200 партии шах, процентот на партиите во кои победил бил еднаков на 49%. Кој е најмалиот број партии кои Горјан треба да ги одигра за да процентот на партиите во кои победил е еднаков на 50%?

A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

**Решение. Е).** Горјан моментално има  $200 \cdot \frac{49}{100} = 98$  победи и  $200 - 98 = 102$  партии во кои не победил. За да има победи во 50% од партиите, тој треба да одигра најмалку уште  $102 - 98 = 4$  и во истите да победи.

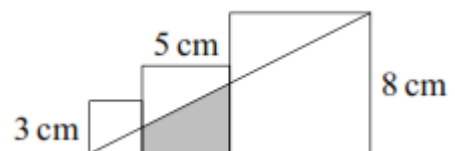
11. Андреј решил да ја намали потрошувачката на вода, па така за една четвртина го намалил времето кое го поминува под тушот. Исто така, го намалил притисокот на водата така што сега од слушалката на тушот водата излегува со една четвртина помала брзина. Колку Андреј ја намалил потрошувачката на вода при едно туширање?

A) за  $\frac{1}{4}$                       B) за  $\frac{3}{8}$                       C) за  $\frac{5}{8}$                       D) за  $\frac{5}{12}$                       E) за  $\frac{7}{16}$

**Решение. Е).** Кога Андреј за  $\frac{1}{4}$  го намалил времето кое го поминува под тушот тој троши  $\frac{3}{4}$  од водата која претходно ја трошел. Потоа, со намалување на притисокот на водата која излегува од слушалката за  $\frac{1}{4}$ , Андреј троши  $\frac{3}{4}$  од водата која ја трошел по намалување на времето за туширање. Значи, Андреј сега троши  $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$  од водата која ја трошел пред да одлучи да штеди. Конечно, Андреј при едно туширање ја намалил потрошувачката за  $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$ .

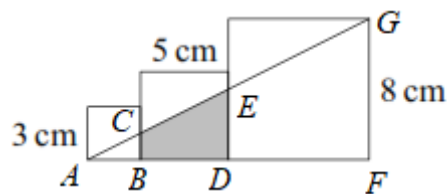
12. На цртежот десно се прикажани три квадрати чии страни се со должини  $3\text{ cm}$ ,  $5\text{ cm}$ ,  $8\text{ cm}$ . Колку е плоштината на сивиот трапез?

A)  $13\text{ cm}^2$                       B)  $\frac{55}{4}\text{ cm}^2$                       C)  $\frac{61}{4}\text{ cm}^2$



D)  $\frac{65}{4} \text{ cm}^2$       E)  $\frac{69}{4} \text{ cm}^2$

**Решение. В).** Со  $a$  и  $b$  да ги означиме соодветно помалата и поголемата основа на сивиот трапез. Имаме  $\triangle ABC \approx \triangle ADE \approx \triangle AFG$ , па затоа  $3 : a = (3+5) : b = (3+5+8) : 8$ , од каде



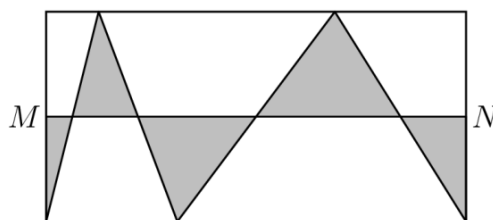
добиваме  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = 4$ . Конечно, плоштината на сивиот трапез е  $\frac{\frac{3}{2}+4}{2} \cdot 5 = \frac{55}{4}$ .

13. Жица со должина 95 метри е пресечена на три дела, така што должината на вториот дел е за 50% поголема од должината на првиот дел, додека должината на третиот дел е за 50% поголема од должината на вториот дел? Колкава е должината на најдолгиот добиен дел?

A) 36 m      B) 42 m      C) 45 m      D) 46 m      E) 48 m

**Решение. С).** Нека  $a$  е должината на првиот дел. Тогаш должината на третиот дел е  $1,5a$ , а должината на вториот дел е  $1,5^2a$ . Според тоа,  $a + 1,5a + 1,5^2a = 95$ , од каде добиваме  $\frac{19}{4}a = 95$ , т.е.  $a = 20 \text{ m}$ . Значи, должината на најдолгиот дел е  $1,5^2 \cdot 20 = 45 \text{ m}$ .

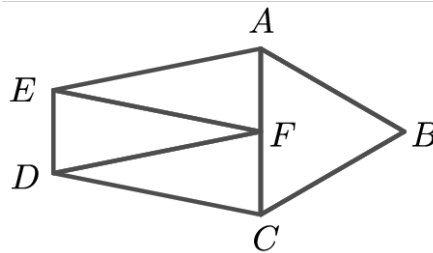
14. Точките  $M$  и  $N$  се средини на двете спротивни страни на правоаголникот прикажан на цртежот десно. Колкав дел од правоаголникот е обоен во сиво?



A)  $\frac{1}{6}$       B)  $\frac{1}{5}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{1}{2}$

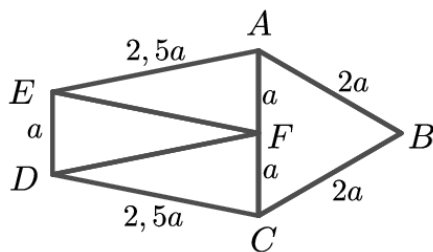
**Решение. С).** Со  $a$  и  $b$  да ги означиме подолгата и пократката страна на дадениот правоаголник. Ако за сивите триаголници земеме дека имаат основи кои лежат на отсечката  $MN$ , тогаш збирот на нивните должини е еднаков на  $\overline{MN} = a$  и секој од овие триаголници има висина  $\frac{b}{2}$ . Според тоа, плоштината на делот на правоаголникот обоен во сиво, која е еднаква на збирот на плоштините на сивите триаголници е  $\frac{a \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{ab}{4}$ . Значи, во сиво е обоена  $\frac{1}{4}$  од правоаголникот.

15. Петаголникот  $ABCDE$  е поделен на четири триаголници со еднакви периметри. Триаголникот  $ABC$  е рамностран, додека триаголниците  $AEF$ ,  $DFE$  и  $CDF$  се складни рамнокраки триаголници. Колку е односот на периметрите на петаголникот  $ABCDE$  и триаголникот  $ABC$ ?



- A) 2:1      B) 3:2      C) 4:3      D) 5:3      E) 5:2

**Решение. D).** Со  $2a$  да ја означиме должината на страната на триаголникот  $ABC$ . Тогаш  $\overline{AF} = \overline{DE} = \overline{CF} = a$ . Бидејќи периметрите на сите триаголници се еднакви, добиваме



$$\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{DF} = \overline{CD} = \frac{3 \cdot 2a - a}{2} = 2,5a.$$

Сега, за односот на периметрите на петаголникот  $ABCDE$  и триаголникот  $ABC$  добиваме  $(2 \cdot 2a + 2 \cdot 2,5a + a) : (3 \cdot 2a) = 10 : 6 = 5 : 3$ .

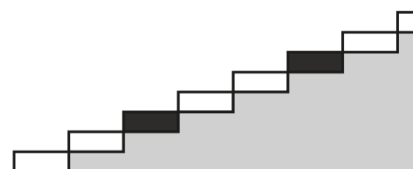
16. Пабло има коцки означени со броевите од 1 до 90 и ја направил левата кула прикажана на цртежот. Потоа истовремено од горе надолу земал по три коцки и во истиот редослед ги ствала на масата со што ја направил десната кула. Колку коцки ќе има меѓу коцките означени со броевите 39 и 40?

90	3
89	2
88	1
⋮	⋮
4	85
3	90
2	89
1	88

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**Решение. E).** Во новата кула под секоја коцка означена со содржател на бројот 3, т.е. под секоја коцка означена со број  $3n$  се наоѓаат редоследно коцките означени со броевите  $3n-1$  и  $3n-2$ . Пабло прво ќе ги премести коцките 42, 41, 40, а потоа ќе ги премести коцките 39, 38, 37. Затоа, гледајќи одгоре надолу, редоследот на коцките ќе биде 39, 38, 37, 42, 41, 40. Конечно меѓу коцките означени со броевите 39 и 40 ќе има 4 коцки.

17. Секое трето скалило, на скала која има 2023 скалила, е обоено со црна боја. Првите седум скалила се прикажани на цртежот десно. Матео



се качува по скалата без да прескокнува скалила. Кој е најмалиот број скалила, обоени со црна боја, на кои Матео ќе стапне со десната нога?

- A) 0      B) 333      C) 336      D) 337      E) 674

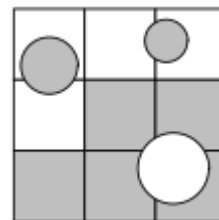
**Решение. D).** Без разлика на тоа дали качувањето ќе го почне со левата или со десната нога, Матео во секои 6 скалила два пати ќе згазне на скалило обоено со црна боја и тоа еднаш со левата и еднаш со десната нога. Од  $2023 = 6 \cdot 337 + 1$  следува дека последното скалило е бело, па затоа Матео со десната нога ќе згазне на 337 црни скалила.

18. За еден природен број ќе велиме дека е безстепен ако ниту една цифра не може да се претстави како степен на позитивен цел број со степен показател поголем од 1. На пример бројот 53 е безстепен, а бројот 54 не е безстепен бидејќи  $4 = 2^2$ . Кој од следниве броеви е заеднички делител на најмалиот и најголемиот безстепен двоцифрен број?

- A) 3      B) 5      C) 7      D) 11      E) 13

**Решение. D).** Од  $0 = 0^2, 1 = 1^2, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 9 = 3^2$  следува дека во декадниот запис на безстепен број не смее да се цифрите 0, 1, 4, 8 и 9. Според тоа, најмалиот двоцифрен безстепен број е 22, а најголемиот двоцифрен безстепен број е 77. Јасно, од дадените броеви единствен заеднички делител на броевите 22 и 77 е бројот 11.

19. Квадрат со страна  $30\text{ cm}$  е поделен на 9 складни квадрати. Во големиот квадрат се впишани три круга со радиуси  $3\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  и  $5\text{ cm}$  (цртеж десно). Колку е плоштината на сивите делови на цртежот?



- A)  $400\text{ cm}^2$       B)  $500\text{ cm}^2$       C)  $(400 + 50\pi)\text{ cm}^2$   
 D)  $(500 - 25\pi)\text{ cm}^2$       E)  $(500 + 25\pi)\text{ cm}^2$

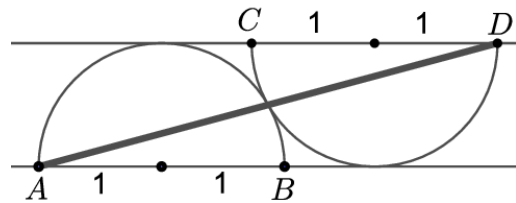
**Решение. B).** Плоштината на белиот круг е еднаква на  $5^2\pi = 25\pi\text{ cm}^2$ , а збирот на плоштините на сивите кругови е  $3^2\pi + 4^2\pi = 9\pi + 16\pi = 25\pi\text{ cm}^2$ . Според тоа, плоштината на сивите делови на цртежот е еднаква на плоштината на 5 квадрати со страна  $10\text{ cm}$ , т.е. на  $5 \cdot 10^2 = 500\text{ cm}^2$ .

20. Филип ја пресметува аритметичката средина на пет различни прости броеви и добил дека таа е природен број. Која е најмалата можна вредност која што можел Филип да ја добие?

A) 2      B) 5      C) 6      D) 12      E) 30

**Решение. C).** Збирот на најмалите пет прости броеви е  $2+3+5+7+11=28$ , што значи дека Филип не можел да ги добие броевите 2 и 5. Но,  $2+3+5+7+13=30$  и како  $30:5=6$  заклучуваме дека најмалиот број кој Филип можел да го добие е бројот 6.

21. На цртежот се прикажани два полукруга со радиус 1, кои се допираат и чии дијаметри  $AB$  и  $CD$  припаѓаат на паралелни прави. Колку е квадратот на должината на отсечката  $AD$ ?

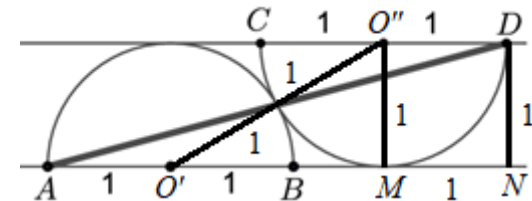


A) 16      B)  $8+4\sqrt{3}$       C) 12      D) 9      E)  $5+2\sqrt{3}$

**Решение. B).** При ознаки како на цртежот десно од Питагоровата теорема сле-  
дува

$$\overline{O'M} = \sqrt{\overline{O'O''}^2 - \overline{O''M}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{DN}^2 = (\overline{AO'} + \overline{O'M} + \overline{MN})^2 + \overline{DN}^2 = (2 + \sqrt{3})^2 + 1^2 = 8 + 4\sqrt{3}.$$



22. Горјан формира низа така што прво ги запишал броевите 2, 0, 2, 3, а потоа секој следен член на низата е еднаков на најмалиот ненегативен цел број, различен од претходните четири члена на низата. Кој број ќе го запише на 2023-тото место во оваа низа?

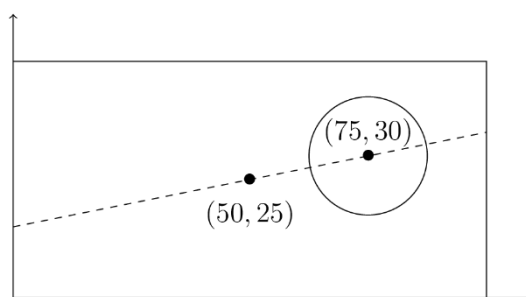
A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**Решение. C).** Горјан редоследно ги запишувал броевите 2, 0, 2, 3, 1, 4, 0, 2, 3, 1, 4, 0, 2, 3, 1, 4, ... Забележуваме дека по првиот број 2 периодично се појавува низата броевите 0, 2, 3, 1, 4. Сега, бидејќи  $2023-1=2022=5 \cdot 404+2$  заклучуваме дека на 2023-тото место во оваа низа е вториот член од периодата 0, 2, 3, 1, 4, т.е. бројот 2.

23. Од правоаголник со темиња во точките  $(0,0)$ ,  $(100,0)$ ,  $(100,50)$  и  $(0,50)$  отстранет е круг со центар во точката  $(75,30)$  и радиус со должина 10. Колку е коефициентот на правецот на правата која минува низ точката  $(75,30)$  и преостанатиот дел од правоаголникот го дели на два дела со еднакви плоштини?

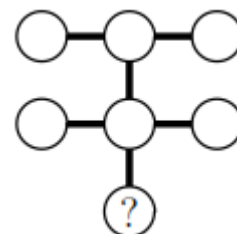
- A)  $\frac{1}{5}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{2}{5}$       E)  $\frac{2}{3}$

**Решение. А).** Секоја права која минува низ центарот на кругот го дели кругот на два дела со еднакви плоштини. Исто така секоја права која минува низ центарот на правоаголникот го дели правоаголникот на два дела со еднакви плош-



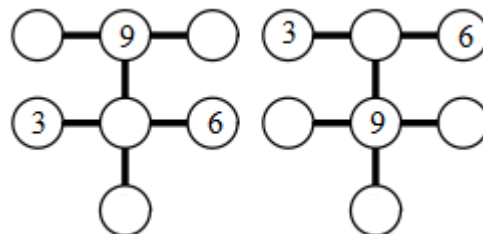
тини. Центарот на правоаголникот има координати  $(\frac{100+0}{2}, \frac{50+0}{2}) = (50, 25)$ . Коефициентот на правецот на правата која минува низ двата центри е  $\frac{30-25}{75-50} = \frac{1}{5}$ .

24. Седум различни едноцифрени броеви се запишани во кругчињата на цртежот десно, така што во секое кругче е запишан различен број. Сите три производи на по три броја кои се на иста права се еднакви. Кој број е запишан во кругчето во кое се наоѓа прашалниот знак?



- A) 2      B) 3      C) 4      D) 6      E) 8

**Решение. А).** Во ниту едно кругче не може да биде запишан ниту еден од броевите 0, 5 и 7 (Зошто?). Понатаму, бидејќи  $9 = 3^2$  во еден од производите ќе имаме најмалку квадрат на бројот 3, па за имаме квадрат на бројот 3 и во другите два производи броевите 3 и 6 мора да се на иста права, а бројот 9 мора да е во пресекот на другите две прави. Со точност до симетрија во однос на вертикалната права можни се само два такви распореди и истите се прикажани на цртежите десно.

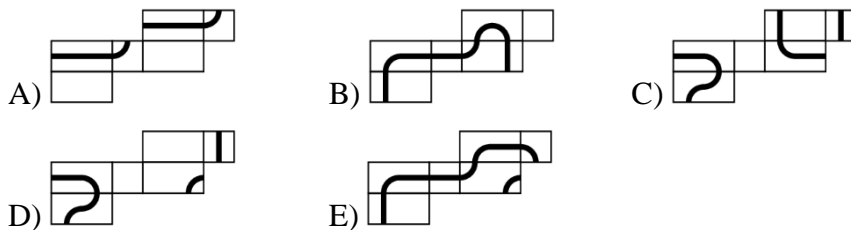


Понатаму, ако на местото на прашалникот е запишан бројот  $a$ , тогаш  $9a = 3 \cdot 6$ , од каде добиваме  $a = 2$ . Сега лесно се определуваат кругчињата во кои треба да се запишат броевите 1, 4 и 8. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

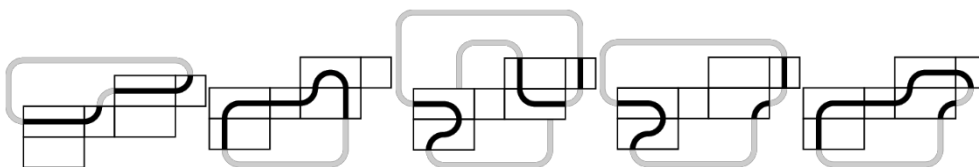
25. Кога батеријата на телефонот на Горјан е целосно полна, може да трае 32 часа доколку Горјан само има телефонски разговори, може да трае 20 часа ако само користи интернет на телефонот, односно 80 часа ако воопшто не го користи телефонот. Горјан влегол во возот во моментот кога батеријата на телефонот била полна 50%. Во текот на возењето времето кое го поминал во користење на интернет е еднакво на времето кое го поминал во телефонски разговори и е еднакво на времето во текот на кое Горјан воопшто не го користел телефонот. Батеријата на телефонот се испразнила во моментот кога Горјан излегол од возот. Колку часа Горјан патувал?
- A) 10      B) 12      C) 15      D) 16      E) 18

**Решение. D).** Кога Горјан телефонира за 1 час се троши  $\frac{1}{32}$  од батеријата, кога е на интернет се троши  $\frac{1}{20}$  од батеријата, а кога телефонот не го користи се троши  $\frac{1}{80}$  од батеријата. Според тоа, ако во текот на 1 час времето на телефонирање, користење на интернет и некористење на телефонот е еднакво, тогаш се троши  $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{20} + \frac{1}{32} + \frac{1}{80})$  од батеријата. Батеријата е полна 50%, па ако Горјан патува  $a$  часа, добиваме  $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{20} + \frac{1}{32} + \frac{1}{80})a = \frac{1}{2}$ . Решението на последната равенка е  $a = 16$ , што значи дека Горјан патувал 16 часа.

26. Андреј нацртал затворена крива на квадар, а потоа квадарот го расекол во мрежа. Која од дадените мрежи не може да е на квадратот на Андреј?



**Решение. C).** Од секоја од дадените мрежи на единствен начин може да се состави квадар. Сивите линии на цртежите покажуваат кои сидови треба да се залепат. Како што можеме да видиме само за квадратот C немаме затворена крива.



27. Определи го бројот на трицифрените природни броеви  $n$  такви што кога од бројот  $n$  се одземе збирот на неговите цифри се добива трицифрен број запишан со исти цифри.

A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 20                      E) 30

**Решение. D).** Нека  $\overline{abc}$  е трицифрен број. Разликата на овој број и збирот на неговите цифри е  $100a+10b+c-a-b-c=9(11a+b)$  и таа е делива со 9. Сите трицифрени броеви кои се запишани со исти цифри и се деливи со 9 се 333, 666 и 999.

Ако  $9(11a+b)=999$ , тогаш  $11a+b=111$ , што не е можно, бидејќи  $11a+b \leq 108$ .

Ако  $9(11a+b)=666$ , тогаш  $11a+b=74$  и како  $a$  и  $b$  се цифри, добиваме дека единствено решение е  $a=6, b=8$ . Оттука следува дека бројот е  $\overline{abc}$  е од видот  $\overline{68c}$ , каде  $c$  е било која цифра. Значи, имаме 10 броеви од овој вид.

Ако  $9(11a+b)=333$ , тогаш  $11a+b=37$  и како  $a$  и  $b$  се цифри, добиваме дека единствено решение е  $a=3, b=4$ . Оттука следува дека бројот е  $\overline{abc}$  е од видот  $\overline{34c}$ , каде  $c$  е било која цифра. Значи, имаме 10 броеви од овој вид.

Конечно, имаме  $10+10=20$  броеви со саканото својство.

28. На колку различни начини зборот BANANA може да се прочита поврзувајќи ги полињата од табелата десно, движејќи се од поле само во поле кое му е соседно? Соседни се полињата кои имаат заедничка страна, а при движењето смее да се стапне повеќе пати во исто поле?

B	A	N
A	N	A
N	A	N

A) 14                      B) 28                      C) 56                      D) 84                      E) друг одговор

**Решение. D).** Разликуваме три случаи во зависност од тоа каде се наоѓа првата буква N во зборот BANANA.

- 1) Првата буква N е во првиот ред и имаме само еден начин да стигнеме до неа.
  - Ако втората буква N е на истата позиција, имаме  $2 \cdot 2 = 4$  начини.
  - Ако втората буква N е во вториот ред, имаме  $2 \cdot 4 = 8$  начини.
  - Ако втората буква N е третиот ред, имаме  $1 \cdot 2 = 2$  начини.

Значи, во овој случај имаме  $4+8+2=14$ .

- 2) Првата буква N е во вториот ред и имаме два начина да стигнеме до неа.
  - Ако втората буква N е на истата позиција, имаме  $4 \cdot 4 = 16$  начини.

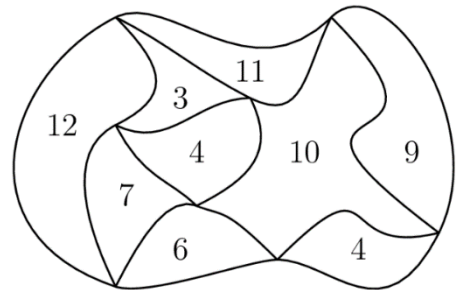
- Ако втората буква N е во вториот ред, имаме  $2 \cdot 4 = 8$  начини.
- Ако втората буква N е било која од трите преостанати букви, имаме  $2 \cdot 2 = 4$  начини.

Значи, во овој случај имаме  $2 \cdot (16 + 3 \cdot 4) = 56$ .

- 3) Првата буква N е во третиот ред и овој случај е симетричен на првиот случај, т.е. имаме вкупно 14 начина.

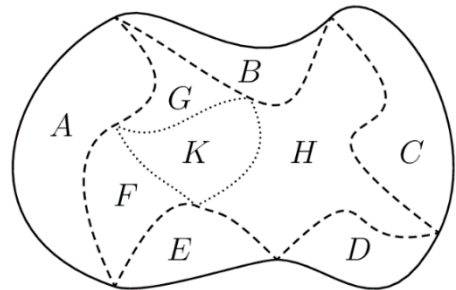
Конечно, зборот BANANA може да се прочита на  $14 + 56 + 14 = 84$  начина.

29. На цртежот е прикажана карта на парк кој е поделен на повеќе области. Во внатрешноста на секоја област е запишан нејзиниот периметар изразен во километри. Колку е долг надворешниот раб на паркот?



- A) 22 km      B) 26 km      C) 28 km  
D) 32 km      E) друг одговор

**Решение. B).** При ознаки како на цртежот десно збирот на периметрите на областите A, B, C, D, E го дава збирот на периметарот на паркот зголемен за должините кои се нацртени со цртички. Ако од овој збир го одземеме збирот на периметрите на областите F, G,



H и го додадеме периметарот на областа K, тогаш го добиваме периметарот на паркот. Значи периметарот на паркот е еднаков на

$$A + B + C + D + E - (F + G + H) + K = 12 + 11 + 9 + 4 + 6 - (3 + 10 + 7) + 4 = 26 \text{ km}.$$

30. Пабло сака да ги запише природните броеви од 1 до 9 во деветте полиња

--	--	--	--	--	--	--	--	--

на цртежот десно, така што збирот на броевите запишани во секои три последователни полиња ќе биде делив со 3. На колку различни начини тоа може да го направи?

- A)  $6^4$       B)  $6^3$       C)  $2^9$       D)  $6!$       E)  $9!$

**Решение. A).** За да збирот на броевите во било кои три соседни квадрати е делив со 3, потребно е остатоците при делење со 3 да се појавуваат циклично, т.е.

да имаме ABCABCABC, каде A, B, C се трите остатоци при делење со 3, т.е. броевите 0, 1, 2. Остатоците 0, 1, 2 на местата на броевите A, B, C можеме да ги распоредиме на  $3! = 6$  начини. Потоа броевите 3, 6, 9 кои при делење со бројот 3 даваат остаток 0, можеме на  $3! = 6$  начини да ги распоредиме на соодветните места, а истото важи и за броевите 1, 4, 7 кои при делење со 3 даваат остаток 1, како и за броевите 2, 5, 8, кои при делење со 3 даваат остаток 2. Според тоа, постојат  $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$  распоредувања на броевите од 1 до 9 така што се исполнети условите на задачата.

## Junior (прва и втора година) 2024

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

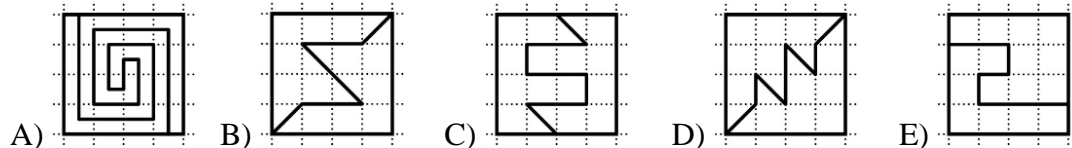
Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Колкава е вредноста на изразот  $\frac{2 \cdot 0,24}{20 \cdot 2,4}$ ?

A) 0,01      B) 0,1      C) 1      D) 10      E) 100

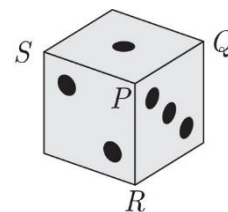
**Решение. А).** Имаме  $\frac{2 \cdot 0,24}{20 \cdot 2,4} = \frac{2 \cdot 0,24}{200 \cdot 0,24} = \frac{1}{100} = 0,01$ .

2. Кој квадрат е поделен на два дела кои немаат иста форма?



**Решение. Е).** Квадратот Е) е поделен на два дела кои имаат 7 и 9 квадратчиња. Според тоа, тој не е поделен на два дела со иста форма. Останатите фигури се симетрични во однос на центрите на квадратите (Провери!). Тоа значи дека другите четири квадрати се поделени на по два дела кои имаат иста форма.

3. Збирот на бројот на точките на спротивните сидови на стандардна коцка за играње е 7. Темето означено со  $P$  на коцката е формирано од сидовите кои на нив имаат 1, 2 и 3 точки (види цртеж). Секое теме има свој збир кој е еднаков на збирот од точките на сидовите кои се сечат во даденото теме. Збирот во темето  $P$  е  $1+2+3=6$ . Колку изнесува максималната вредност на збирите во темињата  $Q$ ,  $R$  и  $S$ ?



A) 7      B) 9      C) 10      D) 11      E) 15

**Решение. D).** Збирот соодветен на темето  $S$  е  $1+2+4=7$ , соодветен на темето  $R$  е  $2+3+6=11$  и соодветен на темето  $Q$  е  $1+3+5=9$ . Значи, бараниот збир е 11.

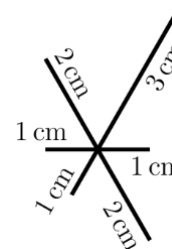
4. Игра „школица“ се игра на следниот начин: Секој играч скока од квадрат во соседен квадрат, во ист правец, и тоа прво на левата нога – па на двете нозе – па на десната нога – па на двете нозе – па на левата нога – на двете нозе итн., како на цртежот. Маја играше „школица“ и согласно со правилата на играта скокна внатре во точно 48 квадрати. Колку пати со левата нога Маја згазна на земјата?



- A) 12            B) 24            C) 36            D) 40            E) 48

**Решение. C).** Маја со левата нога згазнува во три од четири последователни скока. Бидејќи имаме  $48:4=12$  групи од по четири последователни скока, заклучуваме дека Маја со левата нога згазнала  $3 \cdot 12 = 36$  пати.

5. Горјан сака да ја нацрта фигурата прикажана на цртежот десно, без притоа да го крева моливот од листот. Може да избере да почне со цртање било каде. Кое е најкраткото растојание кое може да го помине со пенкалото за целосно да го нацрта цртежот.

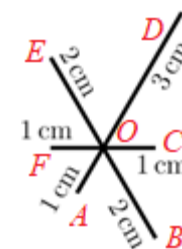


- A) 14 cm            B) 15 cm            C) 16 cm            D) 17 cm            E) 18 cm

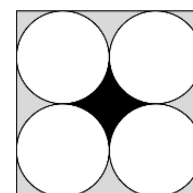
**Решение. B).** Најкраткото растојание се добива ако по еднаш поминеме по две најдолги растојанија, при што мораме по два пати да поминеме по другите четири растојанија. Тоа можеме да го направиме на следниов начин:

$$D \rightarrow O \rightarrow A \rightarrow O \rightarrow C \rightarrow O \rightarrow F \rightarrow O \rightarrow B \rightarrow O \rightarrow E,$$

при што ќе поминеме  $3+1+1+1+1+1+1+2+2+2 = 15$  cm.

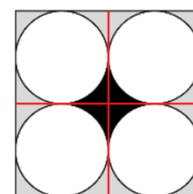


6. На цртежот е прикажан квадрат со четири кругови со иста плоштина, така што секој од нив допира две страни од квадратот и два други кругови. Кој е односот на плоштинаите на делот обоен црно и делот обоен сиво?



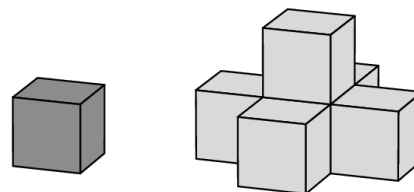
- A) 1:4            B) 1:3            C) 2:3            D) 3:4            E)  $\pi : 1$

**Решение. B).** Ги повлекуваме отсечките кои ги поврзуваат средините на спротивните страни на квадратот. Тогаш црната површина ја делиме на четири дела, секој од кои е складен со преостанатите три сиви делови во соодветниот мал квадрат на



кој е поделен големиот квадрат. Оттука следува дека односот на површините на делот обоен црно и делот обоен сиво е 1:3.

7. Андреј прави низа од фигури на масата, почнувајќи со фигура со една коцка. Следната фигура ја прави со додавање на пет коцки кои ги кријат видливите ѕидови на почетната коцка, како на



што е прикажано на цртежот десно. Кој е најмалиот број на коцки кои се потребни да ги додаде на втората фигура така што сите видливи ѕидови на втората фигура ќе се покријат?

- A) 8            B) 9            C) 10            D) 13            E) 19

**Решение. D).** Потребни се 5 коцки за да се покријат видливите ѕидови на горната коцка и уште 8 коцки за да се покријат видливите ѕидови на долниот кат на втората фигура. Значи, потребни се вкупно  $5+8=13$  коцки.

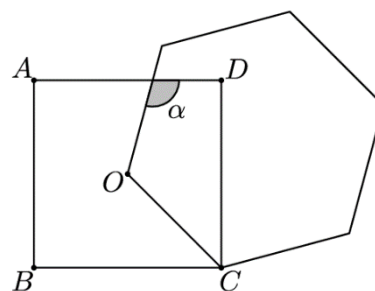
8. Трицифрен палиндром е број од облик  $\overline{aba}$ , каде што цифрите  $a$  и  $b$  може, но не мора да се различни. Колку изнесува збирот на цифрите на најголемиот трицифрен палиндром кој е делив со 6?

- A) 16            B) 18            C) 20            D) 21            E) 24

**Решение. E).** Бројот  $\overline{aba}$  е делив со 6 ако и само ако е делив со 2 и со 3. За да бројот е делив со 2 потребно и доволно е цифрата на единиците да е парна. Најголемата парна цифра е 8, па бараниот број има облик  $\overline{8b8}$ . За да овој број е делив со 3 потребно и доволно е збирот на цифрите  $8+b+8=16+b$  да е делив со 3. Најголем е бројот за кој цифрата  $b$  е најголема, а тоа е за  $b=8$ . Значи, бројот е 888 и збирот на неговите цифри е 24.

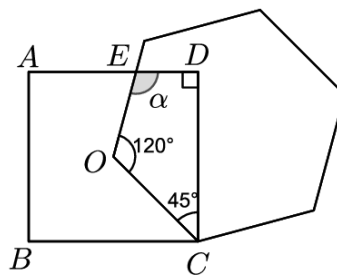
9. Пабло нацртал квадрат со темиња  $ABCD$  и правилен шестаголник со страна  $OC$ , каде  $O$  е центарот на квадратот (цртеж десно). Колку е мерката на аголот  $\alpha$ ?

- A)  $105^\circ$             B)  $110^\circ$             C)  $115^\circ$   
D)  $120^\circ$             E)  $125^\circ$



**Решение. А).** При ознаки како на цртежот десно аглиите на четириаголникот  $OCDE$  се еднакви на  $\alpha$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $120^\circ$ . Збирот на аглиите на четириаголникот е  $360^\circ$ , па затоа

$$\alpha = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 105^\circ.$$

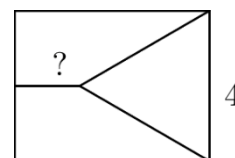


10. Матео заградува правоаголна нива со 40 m ограда. Страните на нивата се со должини прости броеви. Која е максималната можна плоштина на нивата?

- A)  $99 m^2$       B)  $96 m^2$       C)  $91 m^2$       D)  $84 m^2$       E)  $51 m^2$

**Решение. С).** Нека  $a$  и  $b$  се должините на страните на нивата. За периметарот на нивата имаме  $2(a+b) = 40$ , т.е.  $a+b = 20$ . Во множеството прости броеви решенија на последната равенка се  $a = 3, b = 17$  и  $a = 7, b = 13$ . Затоа најголемата можна плоштина е  $7 \cdot 13 = 91 m^2$ .

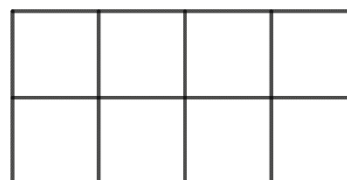
11. Правоаголник е поделен на три дела со еднаква плоштина. Еден од деловите е рамностран триаголник со должина на страната 4 cm, а другите два дела се трапези, како на цртежот десно. Колкава е должината на помалата од паралелните страни на трапезот?



- A)  $\sqrt{2} cm$       B)  $\sqrt{3} cm$       C)  $2\sqrt{2} cm$       D)  $3 cm$       E)  $2\sqrt{3} cm$

**Решение. В).** Висината на рамностраниот триаголник е  $h = 2\sqrt{3}$ , а неговата плоштина е еднаква на  $4\sqrt{3}$ . Плоштината на правоаголникот е трипати поголема, т.е. таа е еднаква на  $12\sqrt{3}$ . Според тоа, подолгата страна на правоаголникот има должина  $a = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ . Конечно, должината на пократката основа на трапезот е  $a - h = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ .

12. Ема ги става големите букви  $A, B, C$  и  $D$  во  $2 \times 4$  табела прикажана на цртежот десно. Точно една



буква е ставена во секоја клетка. Сака да биде сигурна дека во секој ред и секој  $2 \times 2$  квадрат, секоја од четирите букви се појавува точно еднаш. На колку начини таа може да го направи тоа?

- A) 12      B) 24      C) 48      D) 96      E) 198

**Решение. В).** Буквите  $A, B, C$  и  $D$  во првиот ред може да ги распореди како што сака и тоа може да го направи на  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  начини.

Сега да го разгледаме од лево второто поле во вториот ред. Во него мора да ја запише истата буква како и во четвртото поле од првиот ред (во спротивно ќе имаме повторување на букви во  $2 \times 2$  квадратите). Сега остатокот на буквите е еднаозначно определен со распоредот на буквите во првиот ред. Значи, Ема табелата може да ја пополни на 24 различни начини.

13. Филип отсекува три кругови од три хартии со различни бои. Прво ги мести еден над друг така што центрите им се совпаѓаат (цртеж 1)). Потоа ги поместува двата помали круга така што тие се во најголемиот круг и се допираат (цртеж 2)).



На цртеж 1), плоштината на видливиот дел кој е обоен црно е седум пати поголема од плоштината на белиот круг. Колку е односот на плоштините на видливите делови обоени црно на двата цртежи?

- A) 3:1      B) 4:3      C) 6:5      D) 7:6      E) 9:7

**Решение. Д).** Да ги означиме плоштините на црниот, сивиот и белиот круг соодветно  $c$ ,  $s$  и  $b$ . На цртежот 1) плоштината на видливиот црн дел е  $c - s = 7b$ . На цртежот 2) плоштината на видливиот црн дел е  $c - s - b = 7b - b = 6b$ . Бараниот однос е  $7b : 6b = 7 : 6$ .

14. Ќерката на Марија денес роди женско бебе. За две години од сега, производот на годините на Марија, нејзината ќерка и внука ќе биде 2024. Годините на Марија и нејзината ќерка се парни броеви. Колку години има Марија сега?

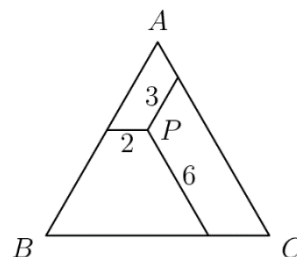
- A) 42      B) 44      C) 46      D) 48      E) 50

**Решение. В).** За две години внуката ќе има две години. Годините на Марија и нејзината ќерка се парни броеви и соодветно да ги означиме со  $2m$  и  $2k$ ,  $m > k$ .

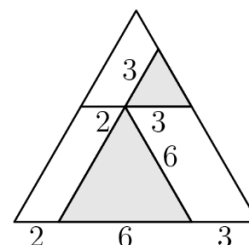
Тогаш важи  $2 \cdot 2m \cdot 2k = 2024$ , т.е.  $m \cdot k = 253 = 11 \cdot 23$ . Значи,  $m = 23, k = 11$ , т.е.  $2m = 46$ , од каде следува дека Марија има 44 години.

15. Точка  $P$  е во внатрешноста на рамностран триаголник. Од точката  $P$  повлекуваме отсечки паралелни на страните, како на цртежот. Должините на отсечките се  $2m$ ,  $3m$  и  $6m$ . Колку изнесува периметарот на триаголникот?

A)  $22m$     B)  $26m$     C)  $33m$     D)  $39m$     E)  $44m$

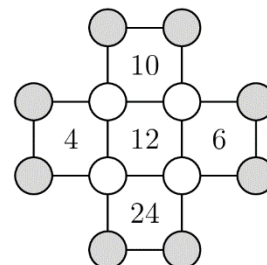


**Решение. C).** Да ги продолжиме двете отсечки преку точката  $P$  како на цртежот десно. Тогаш добиваме уште два рамностранни триаголници и три паралелограми (Докажи!). Според тоа, должината на страната на рамностранниот триаголник е еднаква на  $2 + 6 + 5 = 11m$ . Значи, неговиот периметар е еднаков на  $33m$ .



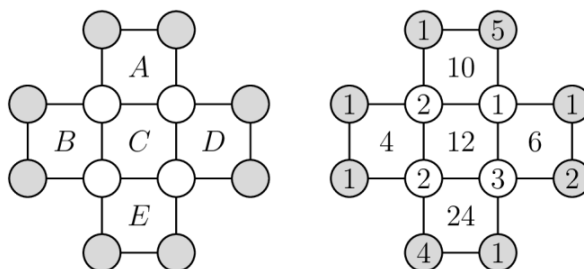
16. Во секој од дванаесетте кругови на цртежот десно е запишан по еден број. Бројот во секој од квадратите го означува производот на броевите во неговите четири темиња. Колку изнесува производот на броевите во осумте сиви кругови?

A) 20    B) 40    C) 80    D) 120    E) 480



**Решение. B).** Производите на броевите запишани во квадратите да ги означиме со  $A, B, C, D, E$  (како на цртежот долу лево). Во производот  $ABDE$  секој од броевите запишани во сивите кругчиња се јавува по еднаш, а секој од броевите запишани во белите кругчиња се јавува по два пати. Производот на броевите запишани во белите кругчиња е еднаков на  $C$ . Затоа производот на броевите запишани во сивите кругчиња е еднаков на  $\frac{ABDE}{C^2} = 40$ . На долниот десен цртеж

е прикажано едно од можните пополнување на дадената фигура.



17. На масата има четири чинии во кои се ставени колачиња. Бројот на колачиња во првата чинија е еднаков на бројот на чиниите кои имаат по едно колаче. Бројот на колачиња во втората чинија е еднаков на бројот на чиниите кои имаат по две колачиња. Бројот на колачиња во третата чинија е еднаков на бројот на чиниите кои имаат по три колачиња. Бројот на колачиња во четвртата чинија е еднаков на бројот на чиниите кои немаат колачиња. Колку вкупно колачиња има во сите четири чинии заедно?

A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**Решение. C).** Ако бројот на чинии со едно, две, три и без колачиња го означиме со  $a, b, c, d$ , соодветно, тогаш  $a + b + c + d = 4$ . Во множеството ненегативни цели броеви решенија на оваа равенка се сите пермутации на подредените четворки  $(4, 0, 0, 0)$ ,  $(3, 1, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 0, 0)$ . Да ги разгледаме петте случаи одделно.

- 1) За подредената четворка  $(4, 0, 0, 0)$ , ако  $a = 4, b = 0, c = 0, d = 0$ , тоа значи дека во четирите чинии има по 1 колаче, па затоа според условот во првата чинија треба да има 4 колачиња, што е противречност. На потполно ист начин до противречност доведуваат и преостанатите три случаи.
- 2) За подредената четворка  $(3, 1, 0, 0)$ , ако  $a = 3, b = 1, c = 0, d = 0$ , тоа значи дека има три чинии со по 1 колаче и една чинија со 2 колачиња, па затоа во првата чинија треба да има 3 колачиња, што противречи на  $c = 0$ . На потполно ист начин до противречност доведуваат и преостанатите единаесет случаи.
- 3) За подредената четворка  $(2, 1, 1, 0)$ , ако  $a = 2, b = 1, c = 0, d = 1$  тоа значи дека во првата чинија треба да имаме 2, во втората 1, во третата 0 и во четвртата 1 колаче, и притоа имаме точно две чинии со по 1 колаче и 1 чинија со 2 колачиња и 1 чинија без колачиња, т.е. имаме  $2 + 1 + 0 + 1 = 4$  колачиња. Понатаму, за подредената четворка  $(2, 1, 1, 0)$  ако  $a = 2, b = 1, c = 1, d = 0$ , тоа значи дека има две чинии со по 1 колаче, една чинија со 2 колачиња и една чинија со 3 колачиња. Тоа значи, дека во првата линија треба да имаме 2 колачиња, во втората чинија 1 колаче, во третата чинија 1 колаче и останува во четвртата чинија да имаме 3 колачиња, што значи дека треба да имаме три чинии во кои нема колачиња, а тоа противречи на  $d = 0$ . На потполно ист начин до противречност доведуваат и преостанатите десет случаи.

- 4) За подредената четворка  $(1,1,1,1)$  имаме  $a=1, b=1, c=1, d=1$ , тоа значи дека во втората и третата чинија треба да имаме по 1 колаче, што противречи на  $a=1$ , т.е. дека имаме само една чинија со 1 колаче.
- 5) За подредената четворка  $(2,2,0,0)$ , ако  $a=0, b=2, c=0, d=2$ , тоа значи дека во првата чинија треба да имаме 0, во втората 2, во третата 0 и во четвртата 2 колачиња, и притоа имаме точно две чинии со по 2 колачиња и 2 чинии без колачиња, т.е. имаме  $0+2+0+2=4$  колачиња. Понатаму, ако на пример важи  $a=2, b=2, c=0, d=0$ , тогаш имаме четири чинии во кои има колачиња, па затоа во третата чинија има колачиња, што значи дека имаме чинии со по 3 колачиња, а тоа противречи на  $c=0$ . На потполно ист начин до противречност доведуваат и преостанатите четири случаи.

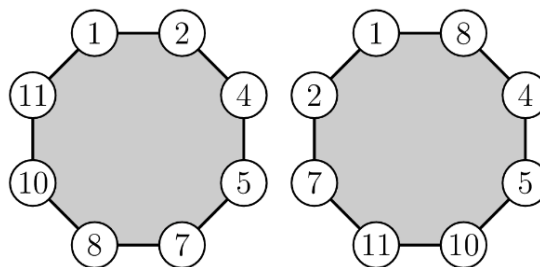
Конечно, од претходните разгедувања следува дека во чиниите има 4 колачиња.

18. Филип има  $n^3$ , ( $n > 2$ ) идентични мали коцки. Тој ги искористил нив за да направи голема коцка, а потоа ја обоил целата нејзина надворешна површина. Бројот на малите коцки кои имаат само еден обоен ѕид е еднаков на бројот на оние кои немаат обоени ѕидови. Колку е  $n$ ?
- A) 4      B) 6      C) 7      D) 8      E) 10

**Решение. D).** Ма секој ѕид на големата коцка има  $(n-2)^2$  коцки кои имаат само еден обоен ѕид. Според тоа, вкупно има  $6(n-2)^2$  мали коцки кои имаат по еден обоен ѕид. Внатре во големата коцка има  $(n-2)^3$  мали коцки кои немаат обоени ѕид. Значи,  $6(n-2)^2 = (n-2)^3$ , од каде добиваме  $6 = n-2$ , т.е.  $n = 8$ .

19. Горјан има 12 карти означени со броевите од 1 до 12. Осум од нив ги става во темињата на осумаголник така што збирот на секој пар броеви на краевите на една страна на осумаголникот е делив со 3. Кои броеви Горјан не ги искористил?

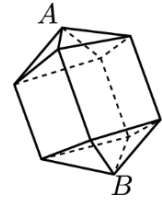
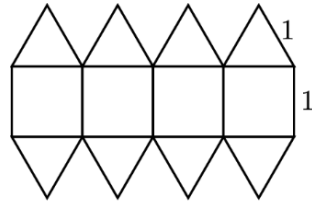
- A) 1, 5, 9, 12      B) 3, 5, 7, 9  
C) 1, 2, 11, 12      D) 5, 6, 7, 8  
E) 3, 6, 9, 12



**Решение. E).** Ако бројот запишан во

едно теме е делив со 3, тогаш мора сите запишани броеви да се деливи со 3. Но, Горјан има на располагање само четири броја деливи со 3, па затоа овие броеви не може да ги употреби. Значи, не ги употребил броевите 3, 6, 9 и 12. Две можни распоредувања на преостанатите осум броја се дадени на горните цртежи.

20. Оли прави полиедар од картон со помош на мрежа која се состои од четири квадрати и осум рамностранни триаголници (цртеж десно). Должината на страната на секој квадрат и секој триаголник е  $1\text{ cm}$ . Колкаво е растојанието меѓу темињата на полиедатор  $A$  и  $B$ ?



- A)  $\sqrt{5}\text{ cm}$     B)  $(1+\sqrt{2})\text{ cm}$     C)  $\frac{5}{2}\text{ cm}$     D)  $(1+\sqrt{3})\text{ cm}$     E)  $2\sqrt{2}\text{ cm}$

**Решение. B).** Добиеното тело е составено од коцка на чии два спротивни сида се залепени четири страни пирамиди чии должини на рабови се еднакви на 1 (Зошто?). Висината на секоја од овие пирамиди е  $h = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Според тоа,  $\overline{AB} = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}\text{ cm}$ .

21. Факторизацијата на прости броеви на бројот  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  е во облик даден како на цртежот.

$$2^{\cdot} \cdot 3^{\cdot} \cdot 5^{\cdot} \cdot 7^{\cdot} \cdot 11^{\cdot} \cdot 13^4 \cdot 17^{\cdot} \cdot \dots \cdot 43 \cdot 47$$

Простите броеви се напишани во растечки редослед. Мастило покрило некои од броевите и некои од експонентите (види цртеж). Кој е експонентот на бројот 17?

A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

**Решение. C).** Најголемиот множител кој се појавува во разложувањето на  $n!$  на прости множители е бројот 47, па оттука можеме да заклучиме дека  $47 \leq n < 53$  (во спротивно следниот прост множител ќе биде бројот 53). Бројот 13 како множител во разложувањето на  $n!$  се јавува точно четири пати, па затоа тој само на прв степен се јавува во броевите 13, 26, 39 и 52. Оттука следува  $n = 52$ .

Конечно, има три содржатели на бројот 17 кои се помали или еднакви на 52 и тоа се броевите 17, 34 и 51. Значи, експонентот на бројот 17 е еднаков на 3.

22. Еден ден Костадин ја кажува вистината, а следниот ден лаже, и така наизменично Еден ден, тој дал четири од петте изјави. Која од петте изјави не е дадена тој ден?

A) Вчера не ја кажував вистината и утре нема да ја кажувам вистината

B) Денес ја кажувам вистината и ќе ја кажувам вистината и утре

C) 2024 е делив со 11

D) Вчера беше среда

E) Утре ќе биде сабота

**Решение. C).** Изјавата B) Костадин може да ја каже само ако тој ден лаже. Изјавите D) и E) не може и двете да се вистинити. Значи, имаме најмалку две невистинити изјави. Значи, Костадин тој ден лажел и како  $2024 = 11 \cdot 184$  заклучуваме дека Костадин не можел да ја даде изјавата C).

23. Збирот на цифрите на бројот  $N$  е три пати поголем од збирот на цифрите на бројот  $N + 1$ . Колку е најмалиот можен збир на цифрите на бројот  $N$  ?

A) 9

B) 12

C) 15

D) 18

E) 27

**Решение. B).** Со додавање на 1 збирот на цифрите на бројот се намалува само ако цифрата на единиците на бројот  $N$  е 9. Во тој случај цифрата на единиците на бројот  $N + 1$  е 0, а на цифрата на десетките се додава бројот 1. Ќе разгледаме два случаја.

Ако цифрата на десетките на бројот  $N$  е помала од 9, тогаш збирот на цифрите на бројот  $N + 1$  во споредба со збирот на цифрите на бројот  $N$  се намалува за 8. Ако збирот на цифрите на бројот  $N$  е  $a$ , тогаш  $a = 3(a - 8)$ , од каде добиваме  $a = 12$ .

Ако цифрата на десетките на бројот  $N$  е 9, тогаш збирот на цифрите на бројот  $N$  ќе биде поголем од 18, што значи дека најмалиот можен збир е 12.

Број кој ги задоволува условите на задачата е бројот 39.

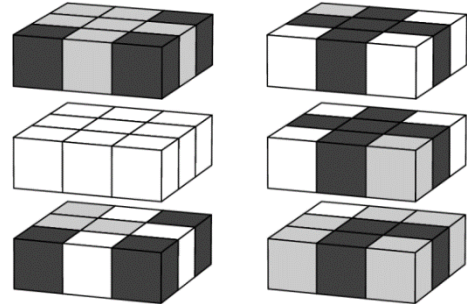
24. Андреј има неколку црни, сиви и бели единечни коцки. Тој искористил 27 од коцките за да направи  $3 \times 3 \times 3$  коцка. Тој сака третина од површината на голе-

мата коцка да биде црна, третина сива и третина бела. Со  $A$  да го означиме најмалиот број можен број црни коцки и со  $B$  најголемиот можен број црни коцки со кои тоа може да го постигне. Колку е  $B - A$ ?

- A) 1            B) 3            C) 6            D) 7            E) 9

**Решение. D).** Плоштината на големата коцка

е еднаква на  $6 \cdot 3^2 = 54$ . Значи, црниот, сивиот и белиот дел на коцката треба да имаат плоштина  $54 : 3 = 18$ . Секоја мала коцка може да учествува во поштината на големата коцка со 3, 2 и 1 сид, ако таа се наоѓа во те-



ме, во средината на раб и во средина на сид на големата коцка. Најмал број црни коцки ќе употребиме ако ставиме 6 црни коцки во шест темиња на големата коцка (едно решение е дадено на цртежите вертикално лево). Значи,  $A = 6$ . Ако ставиме 6 црни коцки во центрите на сидовите на големата коцка и 6 црни коцки во средините на рабовите на големата коцка, тогаш сме употребиле 12 црни коцки и црната плоштина е еднаква на  $6 + 6 \cdot 2 = 18$ . Сега може да ставиме уште една црна коцка во центарот на големата коцка, со што црната плоштина остаува истра. Значи,  $B = 13$  (едно решение е дадено на цртежите вертикално десно). Конечно,  $B - A = 13 - 6 = 7$ .

25. Андреј фрлил коцка за играње 24 пати. Секој од броевите точки од 1 до 6 се појавил барем еднаш. Бројот 1 се појавил повеќе пати од било кој друг број. Андреј ги собрал паднатите броеви точки и го добил најголемиот можен збир. Кој број го добил Андреј?

- A) 83            B) 84            C) 89            D) 90            E) 100

**Решение. D).** Бидејќи секој број се појавил барем еднаш, заклучуваме дека имаме 6 фрлања во кои збирот на паднатите броеви точки е  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ . Да ги разгледаме преостанатите  $24 - 6 = 18$  фрлања. Бројот 1 се појавува повеќе пати од било кој друг број, па затоа за да се добие најголем можен збир, треба бројот 6 да се појави точно еднаш помалку од бројот 1. Притоа за да се добие најголем можен збир во овие 18 фрлања можни се следниве случаи:

- Бројот 1 се појавува девет пати, бројот 6 се појавува осум пати и бројот 5 се појавува еднаш, при што збирот е  $9 \cdot 1 + 8 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 62$ .

- Бројот 1 се појавува осум пати, бројот 6 се појавува седум пати и бројот 5 се појавува три пати, при што збирот е  $8 \cdot 1 + 7 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 65$ .
  - Бројот 1 се појавува 7 пати, бројот 6 се појавува 6 пати и бројот 5 се појавува 5 пати, при што збирот е  $7 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 68$ .
  - Бројот 1 се појавува 6 пати, бројот 6 се појавува 5 пати, бројот 5 се појавува 5 пати и бројот 4 се појавува 2 пати, и збирот е  $6 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 69$ .
- Со натаможното намалување на бројот на единиците не се зголемува збирот. Според тоа, Андреј го добил збирот  $21 + 69 = 90$ .

26. Олгица шетала во паркот. Половина од времето одела со брзина  $2 \text{ km/h}$ , а половина од целото растојание го поминала со брзина  $3 \text{ km/h}$ . Остатокот од времето одела со брзина  $4 \text{ km/h}$ . Колкав дел од времето Олгица одела со брзина  $4 \text{ km/h}$ ?
- A)  $\frac{1}{14}$       B)  $\frac{1}{12}$       C)  $\frac{1}{7}$       D)  $\frac{1}{5}$       E)  $\frac{1}{4}$

**Решение. А).** Со  $t$  да го означиме вкупното време кое Олгица го поминала во прошетката во паркот, а  $x$  времето во кое одела со брзина од  $4 \text{ km/h}$ . Значи, времето во кое одела со брзина  $3 \text{ km/h}$  е еднакво на  $\frac{t}{2} - x$ . Растојанијата поминати со трите различни брзини се:  $s_1 = 2 \cdot \frac{t}{2} = t$ ,  $s_2 = 3(\frac{t}{2} - x)$ ,  $s_3 = 4x$ . Сега, од условот на задачата следува  $s_2 = s_1 + s_3$ , т.е.  $3(\frac{t}{2} - x) = 4x + t$ , од каде добиваме  $x = \frac{1}{14}t$ .

27. Пабло сака да отстрани некои од природните броеви од 1 до 25, а потоа да ги подели преостанатите броеви во две групи така што производите на броевите во групите ќе бидат еднакви. Кој е најмалиот број броеви кои Пабло може да ги отстрани?
- A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8

**Решение. В).** Производот на броевите во секоја група е еднаков, па затоа и разложувањето на броевите на прости множители мора да е еднакво, т.е. секој прост број во разложувањето мора да се појави на парен степен. Затоа простите броеви кои меѓу броевите од 1 до 25 имаат само еден содржател мора да се отстранат. Тоа се простите броеви 13, 17, 19 и 23. Понатаму, во производот на преостанатите броеви само простиот број 7 се јавува на непарен степен, при што неговите содржатели се броевите 7, 14 и 21. Најмалку броеви ќе отстраниме ако

го остраниме токму бројот 7 и притоа преостанатите дваесет броја можеме да ги поделиме во две групи, кои ќе имаат еднакви производи. На пример,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 25 = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11.$$

28. Дваесет точки се распоредени на кружница така што растојанието меѓу секои две соседни точки е еднакво. Матео ги црта сите тетиви чии крајни точки се две од дадените 20 точки. Колку тетиви се подолги од должината на радиусот, а пократки од должината на дијаметарот на кружницата?

A) 90            B) 100            C) 120            D) 140            E) 160

**Решение. C).** Секоја од 20-те точки со другите 19 точки на кружницата формира 19 тетиви. Една од овие 19 тетиви е дијаметарот, па останува да разгледаме 18 тетиви. За да тетивата биде поголема од радиусот мора нејзиниот централен агол да е

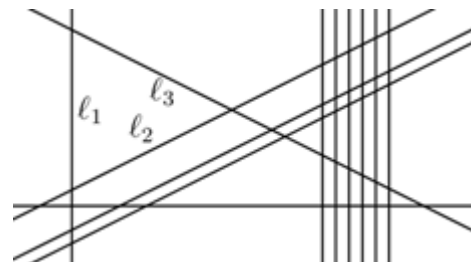


поголем од  $60^\circ$ . Бидејќи дадените точки се темиња на правилен 20-аголник, заклучуваме дека централниот агол над тетивата која поврзува две соседни точки е еднаков на  $360^\circ : 20 = 18^\circ$ . Сега, од  $3 \cdot 18^\circ = 54^\circ < 60^\circ < 72^\circ = 4 \cdot 18^\circ$  следува дека ни се потребни најмалку 4 централни агли. Тоа значи дека 3 пара тетиви од точката до трите до неа најбилски од дадените точки ќе бидат пократки од радиусот на кружницата. Значи, од радиусот подолги ќе бидат  $18 - 2 \cdot 3 = 12$  тетиви. Бидејќи секоја тетива ја броиме два пати (по еднаш за секоја крајна точка), вкупниот број тетиви кои го задоволуваат условот на задачата ќе биде  $(20 \cdot 12) : 2 = 120$ .

29. Во рамнината се дадени  $n$  прави, означени со  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Правата  $l_1$  сече точно 5 прави, правата  $l_2$  сече точно 9 прави, а правата  $l_3$  сече точно 11 прави. Која е најмалата можна вредност на  $n$ ?

A) 11            B) 12            C) 13            D) 14            E) 15

**Решение. B).** Бидејќи една од правите сече други 11 прави, мора да има најмалку 12 прави. Од друга страна, секое множество од 7 паралелни прави, друго множество од 3 паралелни прави кои не се паралелни на

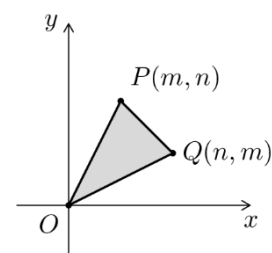


правите од првото множество, и две други прави кои се сечат и не припаѓаат на двете множества ги здоволува условите на задачата. Навистина, секоја права од првото множество сече точно по 5 прави, па правата  $l_1$  може да биде било која од овие прави. Секоја права од второто множество сече точно по 9 прави, па правата  $l_2$  може да биде било која од овие прави. Конечно, последните две прави сечат по 11 прави, па прават  $l_3$  може да биде било која од овие две прави (види цртеж).

30. Нека  $m$  и  $n$  се цели броеви такви што  $0 < m < n$ . Нека  $P(m, n)$ ,  $Q(n, m)$  и  $O(0, 0)$ . За колку парови  $m$  и  $n$  плоштината на триаголникот  $OPQ$  ќе биде еднаква на 2024?

A) 4      B) 6      C) 8      D) 10      E) 12

**Решение. B.** За плоштината на триаголникот  $OPQ$  имаме



$$S_{\triangle OPQ} = n^2 - mn - \frac{1}{2}(n-m)^2 = \frac{n^2 - m^2}{2} = \frac{(n-m)(n+m)}{2},$$

од каде добиваме  $(n+m)(n-m) = 4048$ . Бидејќи  $m$  и  $n$  се цели броеви, броевите  $m+n$  и  $n-m$  се со иста парност. Сега, од  $4048 = 2^4 \cdot 11 \cdot 23$  следува дека имаме шест можности бројот 4048 да се запише како производ на два парни броја:  $2 \cdot 2024$ ,  $2^2 \cdot 1012$ ,  $2^3 \cdot 506$ ,  $(2 \cdot 11) \cdot (2^3 \cdot 23)$ ,  $(2^2 \cdot 11) \cdot (2^2 \cdot 23)$  и  $(2 \cdot 23) \cdot (2^3 \cdot 11)$ . Така, добиваме шест можности за парот  $(n, m)$ :  $(1013, 1011)$ ;  $(508, 504)$ ;  $(257, 249)$ ;  $(103, 81)$ ;  $(68, 24)$  и  $(67, 21)$ .

## Junior (прва и втора година) 2025

Прашањата од 1 до 10 носат по 3 поени, од 11 до 20 носат по 4 поени и од 21 до 30 носат по 5 поени. За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поените со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, па максималниот број освоени поени е 150.

Не е дозволено користење на калкулатор.

Тестот се работи 1 час и 15 минути.

1. Листот прикажан на цртежот десно се состои од три дела. Кога левиот или десниот дел на листот ќе се преклопи преку средниот дел, определени броеви може и понатаму да се видат низ отворите. Колку е збирот на броевите кои се видливи кога и левиот и десниот дел на листот ќе се преклопат преку средниот дел?

			4	9	2			
			3	5	7			
			8	1	6			

Колку е збирот на броевите кои се видливи кога и левиот и десниот дел на листот ќе се преклопат преку средниот дел?

- A) 7                      B) 9                      C) 12                      D) 14                      E) 15

**Решение. D).** Ако ја преклопиме десната третина преку централниот дел, тогаш ќе се гледаат броевите 4, 9, 3 и 5. Потоа ако ја преклопиме левата третина преку централниот дел ќе се гледаат броевите 9 и 5. Нивниот збир е  $9 + 5 = 14$ .

2. Страната на триаголникот е зголемена за 50%, а висината над неа е намалена за една третина. Во каков однос се плоштината на новодобиениот триаголник и плоштината на почетниот триаголник?

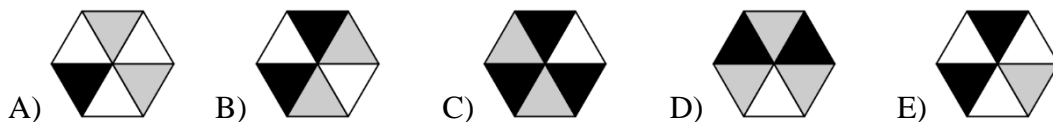
- A) 2:1                      B) 1:1                      C) 1:2                      D) 1:3                      E) 1:4

**Решение. B).** Нека  $a$  и  $h$  се должините на страната и соодветната висина на триаголникот. Тогаш, неговата плоштина е  $P = \frac{ah}{2}$ . Новиот триаголник има

должини на страна и висина  $\frac{3a}{2}$  и  $\frac{2h}{3}$ , соодветно. Неговата плоштина е еднаква

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{ah}{2}, \text{ па затоа односот на плоштините е } 1:1.$$

3. Кој шестаголник има точно една третина од својата површина обоена со црна боја и точно една половина обоена со бела боја?



**Решение. Е).** Правилниот шестаголник е поделен на шест рамнострани складни триаголници. Значи, бараниот шестаголник треба да има  $6:3=2$  црни и  $6:2=3$  бели триаголници и тоа е шестаголникот Е).

4. Натпреварот Кенгур без граници традиционално се одржува секој трет четврток во месец март. Кој е најраниот датум кога овој натпревар најрано може да се одржи?

A) 14.3      B) 15.3      C) 20.3      D) 21.3      E) 22.3

**Решение. В).** Најраниот можен четврток во март е на 1.3, што значи дека најраниот можен трет четврток во март е по 14 дена, односно на 15.3.

5. Во рецептот стои дека на 1 филџан ориз треба да се тури  $1\frac{1}{2}$  филџан вода. Колку вода треба да тури Даница на  $1\frac{1}{2}$  филџан ориз?

A) 1      B)  $1\frac{1}{4}$       C)  $1\frac{3}{4}$       D)  $2\frac{1}{4}$       E)  $2\frac{1}{2}$

**Решение. D).** Даница треба да тури  $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$  филџани вода.

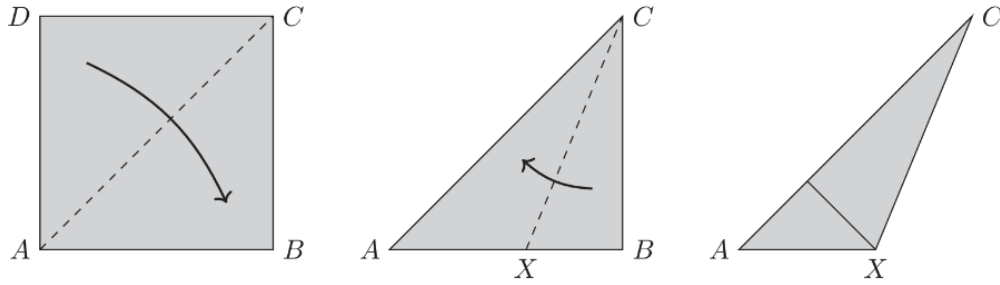
6. Горјан има четири дрвени цифри и со нивна помош може да го запише бројот 2025. Колку броеви поголеми од 2025 може да запише Горјан со помош на овие четири цифри?

2 0 2 5

A) 3      B) 6      C) 8      D) 9      E) 11

**Решение. C).** Горјан може да ги состави броевите: 2052, 2205, 2250, 2502, 2520, 5022, 5202, 5220, што значи 8 броеви.

7. Андреј превиткува квадратен лист хартија по неговата дијагонала така што добива триаголник. Потоа, повторно го превиткува листот така што работ кој ја определува катетата на триаголникот го поклопува со работ кој ја определува хипотенузата на триаголникот, со што го добива триаголникот  $AХС$  (види цртеж). Колку е мерката на  $\sphericalangle AХС$ ?



- A)  $108^\circ$       B)  $112^\circ 30'$       C)  $120^\circ$       D)  $145^\circ$       E)  $157^\circ 30'$

**Решение. В).** Бидејќи  $ABCD$  е квадрат, триаголникот  $ABC$  е рамнокрак правоаголен. Значи,  $\angle ACB = 45^\circ$ . Понатаму, од  $\angle ACX = \angle BCX$ , следува  $\angle ACX = \frac{1}{2} \angle BCA = 22,5^\circ$ . Конечно, од триаголникот  $AXC$  следува дека

$$\angle AXC = 180^\circ - \angle CAX - \angle ACX = 180^\circ - 45^\circ - 22,5^\circ = 112,5^\circ = 112^\circ 30'.$$

8. Во дворот на Пабло има кучиња, мачиња и зајчиња. Осум животни не се кучиња, пет не се зајчиња и седум не се мачки. Колку животни има во дворот на Пабло?

- A) 10      B) 11      C) 15      D) 16      E) 20

**Решение. А).** Нека  $K$  е бројот на кучињата,  $Z$  е бројот на зајците и  $M$  е бројот на мачките. Од условот на задачата следува

$$Z + M = 8, K + M = 5, L + Z = 7.$$

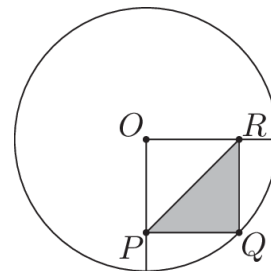
Ако ги собереме горните равенки, добиваме  $2K + 2Z + 2M = 20$ , па ако поделиме со 2 за вкупниот број животни наоѓаме  $K + M + Z = 10$ .

9. Четирицифрениот број  $\overline{80ab}$  е делив со 8 и со 9. Колку е производот  $ab$ ?

- A) 6      B) 16      C) 20      D) 24      E) 48

**Решение. Д).** Природен број е делив со 8 ако трицифрениот завршеток му е делив со 8. Според тоа, бројот  $\overline{ab}$  е содржател на бројот 8. Понатаму еден број е делив со 9 ако збирот на цифрите му е делив со 9. Значи,  $8 + a + b$  е делив со 9. Двоцифрени содржатели на бројот 8 се 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88 и 96, а соодветните вредности на збирот  $8 + a + b$  се: 15, 14, 13, 12, 20, 19, 18, 17, 16, 24 и 23. Од нив само бројот 18, кој соодветствува на бројот 64 е делив со 9. Значи,  $a = 6, b = 4$  и бараниот производ е  $ab = 24$ .

10. Дадена е кружница со центар  $O$  и радиус со должина  $10\text{ cm}$ . Во внатрешноста на кружницата е нацртан квадрат  $OPQR$ , при што темето  $Q$  припаѓа на кружницата (цртеж десно). Колку е плоштината на триаголникот  $PQR$ ?



- A)  $12,5\text{ cm}^2$     B)  $25\text{ cm}^2$     C)  $50\text{ cm}^2$     D)  $75\text{ cm}^2$     E)  $100\text{ cm}^2$

**Решение. В).** Отсечките  $OQ$  и  $PR$  се дијагонали на квадратот, па затоа  $d = \overline{OQ} = \overline{PR} = 10\text{ cm}$ . Плоштината на триаголникот  $PQR$  е половина од плоштината на  $OPQR$ , па затоа  $P_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{OQ} \cdot \overline{PR}}{2} = 25\text{ cm}^2$ .

11. Атлетичар во својата кариера освоил 2 златни и 5 сребрени медали. Тие произволно се означени со броевите од 1 до 7. На цртежот десно се прикажани шест фотографии на медалите, при што на секоја фото-



графија има по еден златен и два сребрени медала. Колку е збирот на броевите со кои се означени златните медали?

- A) 7    B) 8    C) 9    D) 10    E) 11

**Решение. С).** Нека златните медали ги боиме црвено, а сребрените зелено. Од горната фотографија во левата колона заклучуваме дека меѓу круговите 1, 2 и 3 точно еден мора да е црвен, а од средната фотографија во десната колона заклучуваме дека меѓу круговите 4, 5 и 6 мора точно еден да е црвен. Значи, меѓу круговите од 1 до 6 има точно 2 црвени, па како има вкупно два црвени круга, заклучуваме дека кругот 7 е зелен.

Аналогно, меѓу круговите 2, 3 и 4 точно еден мора да е црвен и меѓу круговите 5, 6 и 7 точно една мора да е црвен, па како погоре заклучуваме дека кругот 1 мора да е зелен.

Понатаму, од долната фотографија на десната колона заклучуваме дека кругот 6 мора да е црвен, па од средната фотографија во десната колона следува дека круговите 4 и 5 се зелени. Сега од средната фотографија во левата колона следува дека кругот 3 е црвен.



Комплетното боење во црвена и зелена боја на златните и сребрените медали е прикажано на горниот цртеж. Значи, златни медали се 3 и 6, па бараниот збир е 9.

12. Матео гледа фотографија на својот телефон. Форматот на фотографијата е 16:9 и таа е прикажана преку целиот екран на телефонот (сликата лево). Кога Матео ќе го заврти телефонот, фотографијата на телефонот се нама-



лува (сликата десно). Колку е односот на плоштината на фотографијата и плоштината на екранот, кога телефонот е завртен како на десната слика?

- A) 3:4      B) 9:16      C) 27:64      D) 32:81      E) 81:256

**Решение. E).** Нека должините на подолгата и пократката страна на фотографијата се  $a$  и  $c$ , соодветно. Од условот на задачата следува  $a:c=16:9$ , т.е.  $c = \frac{9}{16}a$ . По вртењето на екранот подолгата страна на фотографијата ќе биде  $c$ , а покра-ката страна ќе биде  $\frac{9}{16}c$ .

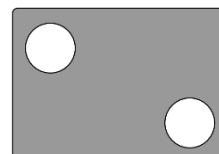
Значи, двете плоштини се  $ac$  и  $c \cdot \frac{9}{16}c = \frac{9}{16}a \cdot \frac{9}{16}c = \left(\frac{9}{16}\right)^2 ac$ , па бараниот однос е  $\left(\frac{9}{16}\right)^2 ac : ac = \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{256}$ .

13. Кате и Томе денес ги слават своите родендени. Една деветнаесеттина од бројот на годините на Кате е една седумнаесеттина од бројот на годините на Томе. Збирот на нивните години е поголем од 40, но е помал од 100. Колку години има Кате?

- A) 19      B) 24      C) 38      D) 57      E) 76

**Решение. C).** Нека Кате има  $x$  години, а Томе има  $y$  години. Од условот на задачата следува  $17x = 19y$ , па како броевите 17 и 19 се заемно прости, добиваме  $x = 19k$ ,  $y = 17k$   $k$ . Понатаму,  $x + y = 17k + 19k = 36k$  па затоа  $40 < 36k < 100$  од каде добиваме  $1\frac{4}{36} < k < 2\frac{28}{36}$ , т.е.  $k = 2$ . Конечно, Кате има  $x = 19 \cdot 2 = 38$ .

14. Филип стрелал 27 пати во две мети (цртеж десно). Кога стрелал во метата горе лево бил успешен во 50% од случаите, а



кога стрелал во долната десна мета бил успешен во 80% од случаите. Вкупно имал 9 промашувања. Колку пати ја погодил метата во горниот лев агол?

- A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8

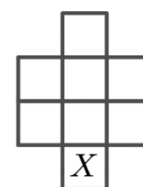
**Решение. C).** Нека во горната лева мета Филип стрелал  $x$  пати, а во долната десна мета стрелал  $y$  пати. Тогаш  $x + y = 27$  и  $\frac{50}{100}x + \frac{20}{100}y = 9$ . Решението на добиениот систем равенки е  $x = 12$ ,  $y = 15$ . Бидејќи успешноста во горниот лев агол е 50%, тој оваа мета ја погодил  $\frac{50}{100} \cdot 12 = 6$  пати.

15. Нена одлучила по натпреварот по математика да се почести со сладолед. Може-ла да купи една, две или три топки сладолед. Притоа можела да земе сладолед од ванила, чоколадо или јагода. Ако купи повеќе од една топка, таа нема ограничување во однос на вкусот на сладоледот. Колку различни избори имала Нена при купувањето на сладоледот?

- A) 9      B) 12      C) 15      D) 19      E) 27

**Решение. D).** Типот на сладолед да го означиме со почетните букви В, Ч и Ј. Ако купува по една топка сладолед, тогаш има 3 можности и тоа: В, Ј, Ч. Ако купува по две топки, тогаш доколку топките се од ист тип има 3 можности и тоа: ВВ, ЈЈ, ЧЧ, а доколку се од различен тип има уште 3 можности и тоа: ВЈ, ЈЧ, ЧВ. Ако купува по три топки, тогаш кога топките се од ист тип има три можности и тоа: ВВВ, ЈЈЈ, ЧЧЧ, кога топките се од два типа има 6 можности и тоа: ВВЈ, ЈВВ, ЈЈЧ, ЧЈЈ, ЧЧВ, ВВЧ, и кога топките се од три вида има 1 можност и тоа: ЈВЧ. Значи, Нена има  $3 + 6 + 3 + 6 + 1 = 19$  различни избори за купување на сладолед.

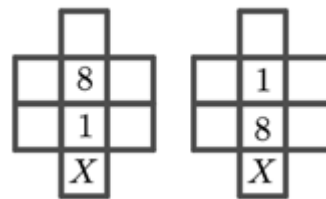
16. Во квадратчињата на фигурата прикажана на цртежот десно треба да се запишат броевите од 1 до 8, без повторување така што да квадратчињата во кои се запишани соседни броеви немаат заедничко теме. Кои броеви можеме да ги запишеме во полето во кое е буквата X?



- A) 1 или 8      B) 2 или 7      C) 3 или 6      D) 4 или 5      E) 7 или 8

**Решение. B).** Полето кое е во средината на вториот ред има заедничко теме со шест полиња, па затоа ако во ова поле е запишан бројот  $a$ ,  $1 < a < 8$ , тогаш

бидејќи во овие шест полиња не може да се запишани броевите  $a-1, a, a+1$ , во овие шест полиња може да запишеме најмногу 5 броја. Истото важи и за полето кое е во средината на третиот ред. Според тоа, во овие две полиња може да се запишани само броевите 1 и 8 (цртеж десно).



При левиот распоред на броевите 1 и 8 во полето означено со  $X$  може да се запише само бројот 7, а при десниот распоред може да се запише само бројот 2. Значи, во полето означено со  $X$  може да се запишат само броевите 2 и 7.

17. Нека  $N$  најголемиот шестцифрен број чиј производ на цифри е еднаков на 180. Колку е збирот на цифрите на бројот  $N$  ?  
 A) 21      B) 22      C) 23      D) 24      E) 25

**Решение. D).** Имаме  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ . Најголемата цифра која може да се добие од множителите 2, 2, 3, 3 и 5 е бројот 9. Од преостанатите множители 2, 2 и 5 најголема цифра која може да се добие е 5, а потоа е цифрата 4. Значи, најголемиот шестцифрен број е 954111, чиј збир на цифри е 21.

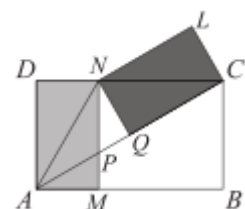
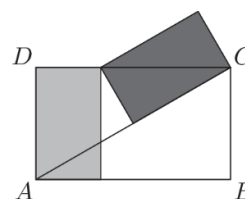
18. Двата обоени правоаголници на цртежот десно се складни имаат плоштини еднакви на 4. Колку е плоштината на правоаголникот  $ABCD$ ?

A) 10    B)  $8\sqrt{3}$     C) 8    D) 12    E)  $4\sqrt{3}$

**Решение. D).** Триголниците  $AMP$  и  $NPQ$  се правоаголници,  $\angle APM = \angle NPQ$  и  $\overline{AM} = \overline{NQ}$ , па од признакот АСА следува дека тие се складни. Оттука следува

$$P_{ADC} = P_{ADNM} + \frac{1}{2} P_{QNLC} = 4 + 2 = 6,$$

$$P_{ABCD} = 2P_{ADC} = 2 \cdot 6 = 12.$$

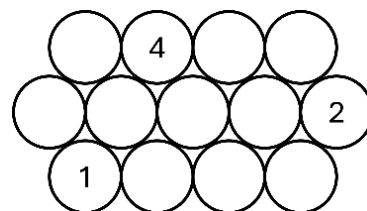


19. Производот на три прости броја е 11 пати поголем од нивниот збир. Колку е најголемата можна вредност на збирот на овие броеви?  
 A) 14      B) 17      C) 21      D) 25      E) 26

**Решение. E).** Нека  $p, q, r$  се бараните броеви. Според условот на задачата важи  $pqr = 11(p + q + r)$ . Оттука следува дека еден од трите броја е еднаков на 11.

Нека  $r = 11$ . Тогаш  $pq = 11 + p + q$ , од каде добиваме  $(p-1)(q-1) = 12$ . Во множеството прости броеви последната равенка, со точност до пермутација на решенијата, има две решенија и тоа  $p = 2, q = 13$  и  $p = 3, q = 7$ . Значи, имаме две подредени тројки  $(2, 11, 13)$  и  $(3, 7, 11)$  кои ги задоволуваат условите на задачата. Соодветните збирови се  $2+11+13=26$  и  $3+7+11=21$ . Јасно, 26 е најголемата

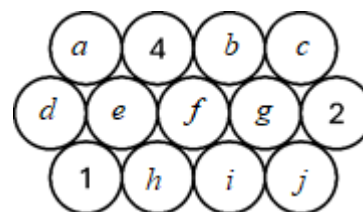
20. Два круга на цртежот десно се соседни ако се допираат. Филип треба да запише броеви така да за било кои три круга, меѓу кои секои два се соседни, важи дека збирот на броевите запишани во тие три круга е секогаш ист. Два броја се веќе запишани.



Колку е збирот на броевите кои се запишани во средниот ред?

- A) 3      B) 8      C) 13      D) 18      E) 23

**Решение. C).** Нека во круговите се запишани броеви како на цртежот десно. Тогаш од условот на задачата следува  $a + e + d = a + e + 4$ , па е  $d = 4$ . Понатаму,  $b + f + 4 = b + f + g$ , па е  $g = 4$ . Сега,



од  $e + h + 1 = e + h + f$ , следува  $f = 1$ , од  $b + c + g = c + g + 2$  следува  $b = 2$  и од  $b + f + 4 = e + f + 4$  следува  $b = e = 2$ . Конечно, бараниот збир е

$$d + e + f + g + 2 = 4 + 2 + 1 + 4 + 2 = 13.$$

21. Ако  $a^3 = 333^3 + 444^3 + 555^3$ , колку е  $a$ ?

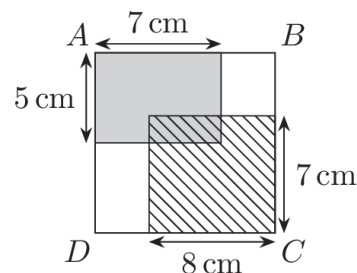
- A) 644      B) 666      C) 695      D) 720      E) 888

**Решение. B).** Имаме

$$\begin{aligned} a^3 &= 3^3 \cdot 111^3 + 4^3 \cdot 111^3 + 5^3 \cdot 111^3 = 111^3 \cdot (3^3 + 4^3 + 5^3) \\ &= 111^3 \cdot (27 + 64 + 125) = 111^3 \cdot 216 = 111^3 \cdot 6^3 = 666^3, \end{aligned}$$

т.е.  $a = 666$ .

22. Квадрат  $ABCD$  содржи два правоаголника, како на цртежот десно. Плоштината на делот во кој двата правоаголници се преклопуваат е еднаква на

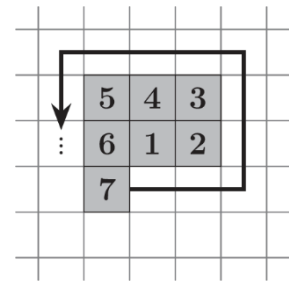


$18 \text{ cm}^2$ . Определи го периметарот на квадратот  $ABCD$ ?

- A)  $28 \text{ cm}$       B)  $34 \text{ cm}$       C)  $36 \text{ cm}$       D)  $38 \text{ cm}$       E)  $40 \text{ cm}$

**Решение. C).** Нека  $a$  е должината на страната на квадратот  $ABCD$ . Тогаш должините на страните на делот во кој правоаголниците се преклопуваат се  $5+8-a=13-a$  и  $7+8-a=15-a$ . Според тоа,  $(13-a)(15-a)=18$ , односно  $a^2-27a+162=0$ . Решенијата на последната равенка се  $a=18$  и  $a=9$ . Ако  $a=18$ , тогаш нема да има преклопување на правоаголниците, па затоа  $a=9$  и периметарот на квадратот е  $4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}$ .

23. Матео зел лист хартија со квадратчиња со должина на страна  $0,5 \text{ cm}$  и почнал да ги означува со броевите 1, 2, 3, 4, 5, ... во насока обратна од насоката на движење на стрелките на часовникот (цртеж десно). Запрел кога го нумерирал 2025 квадратче. Колку е периметарот на фигурата која ја формираат квадратчињата нумерирани со броевите од 1 до 2025?



- A)  $25 \text{ cm}$       B)  $45 \text{ cm}$       C)  $80 \text{ cm}$       D)  $90 \text{ cm}$       E)  $180 \text{ cm}$

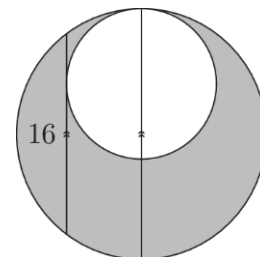
**Решение. D).** Во определени чекори фигурата која се добива е квадрат со  $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 5 \times 5$  квадратчиња итн. Имаме  $2025 = 45^2$ , што значи дека фигурата која Матео ја добил во 2025-тиот чекор е квадрат со  $45 \times 45$  квадратчиња. Бидејќи должината на страната на едно квадратче е  $0,5 \text{ cm}$ , должината на страната на квадратот е  $45 \cdot 0,5 \text{ cm}$ , па затоа неговиот периметар е еднаков на  $4 \cdot 45 \cdot 0,5 = 90 \text{ cm}$ .

24. Со цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 е запишан бројот  $\overline{ABCDEF}$  (сите цифри на бројот се различни). Бројот  $\overline{AB}$  е делив со 2, бројот  $\overline{ABC}$  е делив со 3, бројот  $\overline{ABCD}$  е делив со 4, бројот  $\overline{ABCDE}$  е делив со 5 и бројот  $\overline{ABCDEF}$  е делив со 6. Определи ја цифрата  $F$ !
- A) 2      B) 4      C) 6      D) 2 или 4      E) 4 или 6

**Решение. B).** Бидејќи бројот  $\overline{ABCDE}$  е делив со 5, заклучуваме дека  $E=5$ . Понатаму, цифрите  $B, D, F$  се парни, што значи дека цифрите  $A, C$  се 1, 3, во

некој редослед. За да  $\overline{ABC}$  е делив со 3, треба збирот  $A+B+C$  да е делив со 3, па затоа мора да е  $B=2$ . Понатаму, за да  $\overline{ABCD}$  е делив со 4, треба  $\overline{CD}$  да е делив со 4. Но  $C$  е 1 или 3, па како од броевите 14, 16, 34, 36 само 16 и 36 се деливи со 4, заклучуваме дека  $D=6$ . Конечно, останува само  $F=4$ .

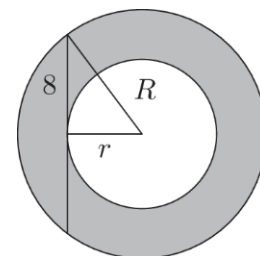
25. На цртежот десно се прикажани два круга кои внатрешно се допираат. Отсечка со должина 16 е тетива на големиот круг, паралелна на нацртаниот дијаметар на големиот круг и го допира малиот круг. Колку е плоштината на сивиот дел на цртежот десно?



- A)  $36\pi$       B)  $49\pi$       C)  $64\pi$       D)  $81\pi$

E) не е можно да се определи

**Решение. C).** Нека  $R$  е радиусот на големиот круг, а  $r$  е радиусот на малиот круг. Тогаш плоштината на сивит дел е еднаква на  $\pi(R^2 - r^2)$ . Ако го транслатираме малиот круг така што центрите на двата круга се совпаднаат, тогаш плоштината на сивиот дел е еднаква на плоштината на добиениот прстен. Сега, од Питагоровата теорема следува  $\pi(R^2 - r^2) = 8^2 \pi = 64\pi$ .



26. Дадена е низата броеви  $a_1, a_2, a_3, \dots$  таква да, почнувајќи од третиот член, секој следен член на низата е еднаков на аритметичката средина на претходните членови на низата. Така,  $a_3$  е аритметичка средина на  $a_2$  и  $a_1$ ,  $a_4$  е аритметичка средина на  $a_1, a_2$  и  $a_3$ . Ако е  $a_1 = 8$  и  $a_{10} = 26$ , колку е  $a_2$ ?

- A) 28      B) 32      C) 38      D) 44      E) 50

**Решение. D).** Имаме,

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2}}{3} = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Ќе докажеме дека за секој  $n \geq 3$  важи  $a_n = \frac{a_1 + a_2}{2}$ . Јасно, тврдењето важи за  $n=3$  и  $n=4$ . Нека претпоставиме дека тврдењето важи за  $n=3, 4, \dots, k$ . Тогаш

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_k}{k} = \frac{a_1+a_2+\overbrace{\frac{a_1+a_2}{2}+\dots+\frac{a_1+a_2}{2}}^{k-1 \text{ пати}}}{k} \\
 &= \frac{2(a_1+a_2)+(k-1)(a_1+a_2)}{2k} = \frac{k(a_1+a_2)}{2k} = \frac{a_1+a_2}{2}.
 \end{aligned}$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека  $a_n = \frac{a_1+a_2}{2}$ , за секој  $n \geq 3$ .

Од претходно докажаното следува дека  $a_{10} = \frac{a_1+a_2}{2}$ , па затоа  $26 = \frac{8+a_2}{2}$ , т.е.  $a_2 = 44$ .

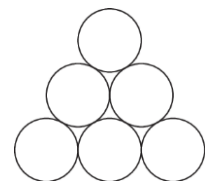
27. На еден роденден има дванаесет деца, од кои три пара се близнаци. Потребно е да се поделат шест еднакви сини и шест еднакви црвени капи така да секој пар близнаци има истобојни капи. На колку различни начини овие капи може да се поделат?
- A) 72                  B) 86                  C) 92                  D) 102                  E) 132

**Решение. C).** Можни се два случаја, и тоа:

- сите близнаци добиваат капи со иста боја, при што имаме две можности – близнаците добиваат црвени, а сите останати сини капи и обратно, близнаците добиваат сини, а сите останати црвени капи,
- точно два пара близнаци имаат капи со иста боја. Тоа можеме да го направиме на 6 начини (ССЦ, СЦС, ЦСС, ЦЦС, ЦСЦ, СЦЦ). Останатите 6 капи треба да ги распоредиме на 6 деца. Притоа 2 деца ќе добиат капи од една боја, а другите 4 од друга боја. Од 6 деца, изборот на 2 деца може да се направи на  $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  начини. Значи, во овој случај имаме  $6 \cdot 15 = 90$  начини на поделба на кашите.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека на саканиот начин капите може да се распоредат на  $2 + 90 = 92$  начина.

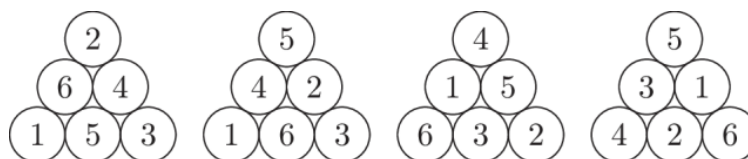
28. Шест кругови се распоредени во облик на триаголник, како на цртежот десно. Филип во круговите ги запишал природните броеви од 1 до 6 така што збирот на броевите на секоја страна на триаголникот е еднаков. Потоа го собрал броевите кои се



наоѓаат во темињата на триаголникот. Колку различни зборови може на овој начин да добие Филип?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Решение. D).** Збирот на шесте запишани роеви е  $1+2+3+4+5+6=21$ . Најмалиот можен збир на броевите запишани во темињата е  $1+2+3=6$ , а најголемиот можен збир на броевите запишани во темињата е  $4+5+6=15$ . Нека  $A$  е збирот на броевите запишани на секоја од страните на триаголникот. Тогаш во трите збира секој број запишан во темето учествува два пати, па затоа важи  $21+6 \leq 3A \leq 21+15$ , т.е.  $9 \leq A \leq 12$ . Според тоа, можни вредности на збирот на броевите запишани во темињата на триаголникот се 9, 10, 11 или 12. На долните цртежи се дадени примери за добивање на овие четири зборови.



29. Пабло сака да ја пополни табелата прикажана на цртежот десно со броевите од 1 до 8, без повторувања, така што секој број е поголем од бројот кој се наоѓа од неговата лева страна и поголем од бројот кој се наоѓа одма над него. На колку различни начини Пабло може да ја пополни табелата?


- A) 6      B) 8      C) 10      D) 12      E) 14

**Решение. E).** Броиме од лево кон десно. Ако во горниот ред редоследно од лево кон десно се запишани броевите  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , а во долниот ред редоследно од лево кон десно се запишани броевите  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , тогаш од условот на задачата следуваат неравенствата  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ,  $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ ,  $a_1 < b_1$  и  $a_4 < b_4$ . Полседното значи дека  $a_1 = 1$  и  $b_4 = 8$ .

Понатаму, повторно од условот на задачата следува дека бројот 2 може да е запишан само во второто поле во горниот ред и во првото поле во долниот ред, а бројот 7 може да е запишан само во четвртото поле на горниот ред и во третото поле на долниот ред.

Ако бројот 7 е запишан во четвртото поле во горниот ред, тогаш бројот 6 мора да е запишан во третото поле на долниот ред. Исто така, ако бројот 2 е запишан во првото поле на долниот ред, тогаш бројот 3 мора да е запишан во второто

поле на горниот ред. Од досега изнесеното ги добиваме следниве четори делумни распореди:

1	3		7
2		6	8

I

1	2		7
		6	8

II

1	3		
2		7	8

III

1	2		
		7	8

IV

Во распоредот I броевите 4 и 5 пет може да се распоредат на 2 начина.

Во распоредот II ако бројот 3 е во горниот ред, тогаш распоредот на броевите 4 и 5 е еднозначен, а ако бројот 3 е во долниот ред, тој мора да е во првото поле, па имаме уште два начина за распоредување на броевите 4 и 5. Значи, во овој случај имаме 3 распореди кои ги задоволуваат условите на задачата.

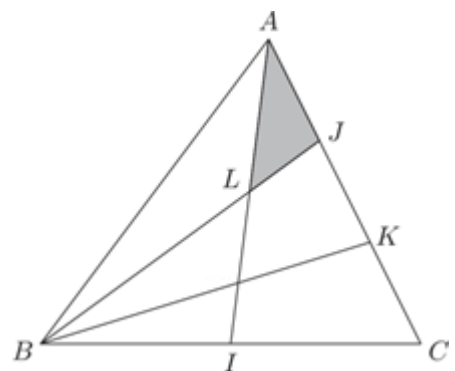
Во распоредот III ако бројот 6 е во долниот ред, тогаш распоредот на броевите 4 и 5 е еднозначен, а ако бројот 6 е во горниот ред, тој мора да е во четвртото поле, па имаме уште два начина за распоредување на броевите 4 и 5. Значи, во овој случај имаме 3 распореди кои ги задоволуваат условите на задачата.

Во распоредот IV бројот 3 мора да е или во првото поле на долниот ред или во третото поле на горниот ред. Лесно се гледа дека во двата случаја имаме по 3 начини на распоредување на броевите 4, 5 и 6, односно дека имаме вкупно 6 распореди кои го задоволуваат условот на задачата.

Конечно, од досега изнесеното следува дека Пабло табелата може да ја пополни на  $2+3+3+6=14$  начини.

30. Триаголникот  $ABC$  има плоштина 60. Точката  $I$  е средина на страната  $BC$ . Точките  $J$  и  $K$  ја делата страната  $AC$  на три еднакви дела (види цртеж). Точката  $L$  е пресек на отсечките  $AI$  и  $BK$ . Определи ја плоштината на триаголникот  $JAL$ .

A) 4    B) 5    C) 6    D) 7    E) 8



**Решение. B).** Триаголниците  $JAL, KJL, CKL$  имаат еднакви страни и еднакви соодветни висини, па затоа тие имаат еднакви плоштини (вид цртеж). Нивната плоштина да ја означиме со  $x$ .

На потполно ист начин заклучуваме дека триаголниците  $BIL, CIL$  имаат еднакви плоштини и нивната плоштина да ја означиме со  $y$ .

Понатаму, триаголниците  $BIA, CIA$  имаат еднакви плоштини, па како плоштината на целиот триаголник е еднаква на 60, добиваме дека  $P_{BIA} = P_{CIA} = 30$ , од каде следува равенката  $3x + y = 30$ .

Исто така, триаголниците  $AJB, JKB, KCB$  имаат еднакви плоштини, па како плоштината на целиот триаголник е 60 добиваме  $P_{AJB} = P_{JKB} = P_{KCB} = 20$ . Сега, од триаголникот  $BCJ$  добиваме  $2x + 2y = 40$ . Конечно, решение на добиениот систем е  $x = 5, y = 15$ , што значи дека плоштината на триаголникот  $JAL$  е еднаква на 5.

