Иван Трајков

ЕДНА КОРИСНА ГЕОМЕТРИСКА ФОРМУЛА

Често пати тешко се помнат многуте формули што ни се потребни за решавање на одредени задачи. Тоа посебно се е присутно во геометријата при пресметување на плоштина на рамнински фигуре или волумен на некои геометриски тела. Се наметнува прашањето: Дали постои некоја општа, универзална формула за пресметување на волумен на сите геометриски тела што се изучуваат во основното или средното образование?

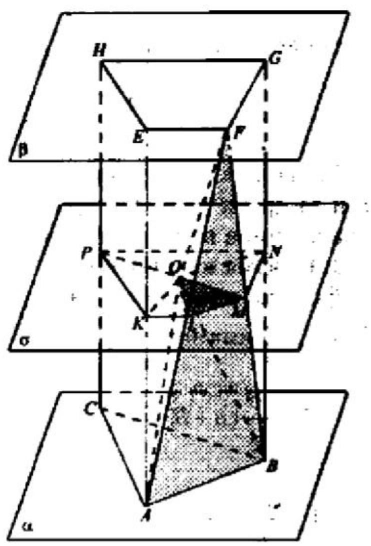
Таква формула, сепак, постои и во математиката е позната под името **Симпсонова формула**, според англискиот математичар-самоук Томас Симпсон (1710-1761). Таа, најчесто, се користи за пресметување волумен на некои тела. Поточно, ќе покажеме дека:

Волумен V на полиедар, чии две основи лежат во две паралелни рамнини се пресметува по формулата

$$V = \frac{H}{6}(B + B_1 + 4B_s),$$

каде што: H е висина на полиедарот, B и B_1 се плоштини на неговите основи, а B_s е плоштина на средниот пресек и лежи во рамнина паралелна со основите.

Доказ. Да разгледаме произволен полиедар $ABCDEFGH$, чии две основи ABC и $EFGH$, со плоштини B и B_1, лежат во две паралелни рамнини α и β. Нека рамнината σ, што е паралелна со рамнините α и β и е еднакво оддалечена од нив, го сече полиедарот по многуаголникот $KLMNP$ чија плоштина е B_s.

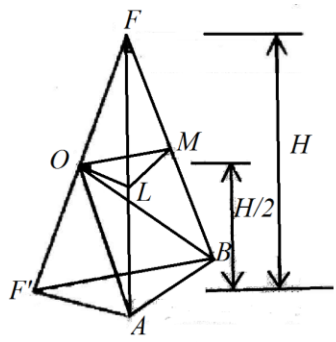


Црт. 1

Избираме произволна точка O на средниот пресек $KLMNP$ и ја поврзуваме со темињата на полиедарот. На тој начин полиедарот е разбиен на седум пирамиди, чии основи се страните на полиедарот и имаат заеднички врв во точката O.

Да го пресметаме волуменот на една од пирамидите, чија основа е еден бочен ѕид на полиедарот, на пример, на триаголна пирамида $OABF$ (бидејќи секоја четириаголна пирамида со еден нејзин дијагонален пресек се разбива на две триаголни пирамиди). За таа цел, ја продолжуваме отсечката FO за уште толку и ја добиваме точката F', т.е. $\overline{FO} = \overline{OF'}$. Притоа, точката F' ќе лежи во рамнината α. (Зошто?)

На тој начин добиваме пирамида со основа ABF' и врв F, т.е. висина H, чиј волумен е збир на волумените на разгледуваната пирамида $OABF$ и пирамидата $OABF''$. За да го најдеме волуменот на пирамидата $OABF$, треба претходно да ги одредиме волумените на пирамидите $FABF'$и $OABF'$.



Црт. 2

Ако со P_1 ја означиме плоштината на ΔOLM, тогаш плоштината на $\Delta ABF'$е $4P_1$, бидејќи точките O, L и M се средини на бочните рабови FF', FA и FB, па имаме:

$$V_{FABF'} = \tfrac{1}{3} 4P_1 H = \tfrac{4}{3} P_1 H \,, \;\; V_{OABF'} = \tfrac{1}{3} 4P_1 \tfrac{H}{2} = \tfrac{2}{3} P_1 H \,,$$

$$V_{OABF} = V_{FABF'} - V_{OABF'} = \tfrac{2}{3} P_1 H \,.$$

На сличен начин ги одредуваме волумените на пирамидите, чии основи се другите бочни сидови на полиедарот. За збирот на овие волумени добиваме:

$$V' = \tfrac{2}{3} P_1 H + \tfrac{2}{3} P_2 H + \tfrac{2}{3} P_3 H + \tfrac{2}{3} P_4 H + \tfrac{2}{3} P_5 H = \tfrac{2}{3}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) H = \tfrac{2}{3} B_s H \,.$$

Имајќи предвид дека: $V_{OABC} = \frac{1}{3} B \frac{H}{2}$ и $V_{OEFGH} = \frac{1}{3} B_1 \frac{H}{2}$, за волуменот V на полиедарот добиваме:

$$V = \tfrac{1}{6} BH + \tfrac{1}{6} B_1 H + \tfrac{2}{3} B_s H = \tfrac{H}{6} (B + B_1 + 4B_s) \,.$$

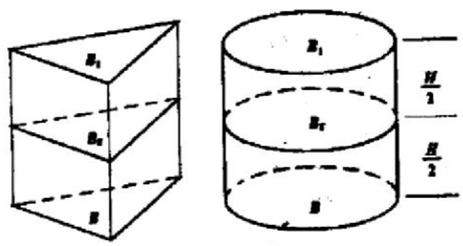
Да забележиме дека Симпсоновата формула за пресметување волумен, важи и за други тела. Со примената на оваа формула ќе ги изведеме формулите за волумен на некои геометриски тела.

1. **Призма и цилиндер**

   Во овој случај очигледно важи $B = B_1 = B_s$ па имаме

   $$V = \tfrac{H}{6} (B + B_1 + 4B_s) \,,$$

   $$V = \tfrac{H}{6} (B + B + 4B) = BH \,.$$


Црт. 3

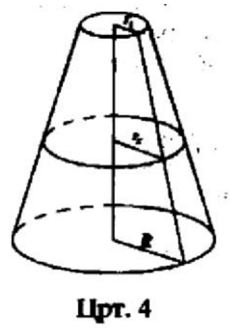
2. **Пирамида и конус**

   Овде $B_1 = 0$, $B_s = \dfrac{B}{4}$, па добиваме:

   $$V = \tfrac{H}{6} (B + 0 + 4 \cdot \tfrac{B}{4}) = \tfrac{H}{6} \cdot 2B = \tfrac{1}{3} BH \,.$$

3. **Потсечен конус**

   Очигледно $r_s = \dfrac{R + r}{2}$, па имаме:


Црт. 4

$$V=\frac{H}{6}(B+B_1+4B_s)=\frac{H}{6}(R^2\pi+r^2\pi+4(\tfrac{r+R}{2})^2\pi),$$

$$V=\frac{\pi H}{6}(R^2+r^2+R^2+r^2+2Rr)=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr).$$

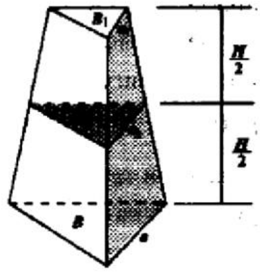
4. **Потсечена пирамида.**

Прво ќе ја изразиме плоштината B_s на средниот пресек преку плоштините B и B_1 на основите на потсечената пирамида. Од

$$\sqrt{\frac{B}{B_s}}=\frac{a}{a_s} \text{ и } \sqrt{\frac{B_1}{B_s}}=\frac{a_1}{a_s}.$$

добиваме:

$$\sqrt{\frac{B}{B_s}}+\sqrt{\frac{B_1}{B_s}}=\frac{a}{a_s}+\frac{a_1}{a_s}=\frac{a+a_1}{a_s}.$$



Црт. 5

Но, $a+a_1=2a_s$ (својство на средната линија на трапезот) па следува:

$$\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_s}}=2, \text{ т.е. } B_s=(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B_1}}{2})^2.$$

Заменувајќи во Симпсоновата формула, добиваме:

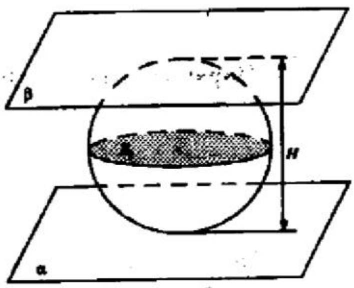
$$V=\frac{H}{6}(B+B_1+4(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B_1}}{2})^2)=\frac{H}{6}(B+B_1+B+B_1+2\sqrt{BB_1}),$$

$$V=\frac{H}{3}(B+B_1+\sqrt{BB_1}).$$

5. **Топка**

Во овој случај $h=2R$, $B=B_1=0$, $B_s=R^2\pi$, па имаме

$$V=\frac{2R}{6}(0+0+4R^2\pi)=\frac{4}{3}R^3\pi.$$



Црт. 6

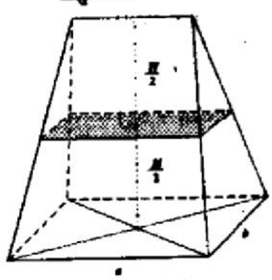
6. Да ја примениме сега Симпсоновата формула за пресметување на волумен на клин, чија основа е правоаголник со страни a и b, спротивен раб c-паралелен на основата и висина H. Очигледно

$$B=ab,\ B_1=0,\ B_s=\frac{a+c}{2}\frac{b+c}{2},$$

па имаме:

$$V=\frac{H}{6}(ab+0+4\frac{(a+c)(b+c)}{4})$$

$$=\frac{H}{6}(2ab+ac+bc+c^2).$$



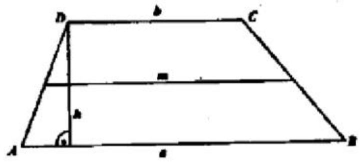
Црт. 7

7. Посебно е интересно што Симсоновата формула можеме да ја примениме и за пресметување нап лоштина P на рамнински фигуре, како на пример: параллелограм, трапез, триаголник. Притоа, со $h=H$ ја означуваме

висината на фигурате, за B и B_1 ги заменуваме должините на основите, а за B_s средната линија.

Така, на пример, за параллелограм со страни a и b и висина h имаме $B = B_1 = B_s = a$, па добиваме:

$$P = \frac{H}{6}(a + a + 4a) = ah.$$



Црт. 8

За трапез, со основи a и b и висина h имаме (црт. 8): $B = a, B_1 = b$, $B_s = m = \frac{a+b}{2}$, па добиваме:

$$P = \frac{h}{6}\left(a + b + 4\frac{a+b}{2}\right), \qquad P = \frac{a+b}{2}h.$$

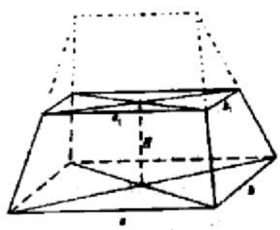
За триаголник со основа и соодветгна висина имаме: $B = a$, $B_1 = 0$, $B_s = \frac{a}{2}$, па добиваме:

$$P = \frac{h}{6}\left(a + 0 + 4\cdot\frac{a}{2}\right) = \frac{h}{6}\cdot 3a = \frac{ah}{2}.$$

Забелешка. Симпсоновата формула не можеме да ја примениме при пресметување плоштина на круг и делови на кругот. Исто така, со нејзина помош можеме, но само приближно, да го пресметаме волуменот на буре.

За вежба ви нудиме неколку задачи, кои се решаваат со примена на Симпсоновата формула.

1. Една брана има форма на призматоид. Пресметај колку кубни метри земја има вградено во браната, ако нејзината долна основа е правоаголник со должина 40 m и ширина 4 m, а горната основа е правоаголник со должина 36 m и ширина 2 m. Висината на браната е 3 m.

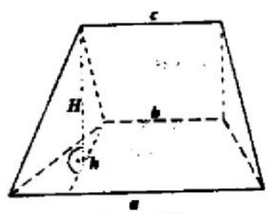


Црт. 9

Одг. 344 m^2.

2. Пресметај го волуменот на таванска просторија, чија основа е трапез со паралелни страни a и b и висина h, ако висината на покривот е H, а работ c.

Одг. $V = \frac{Hh}{6}(a + b + c)$. Средниот пресек B_s е трапез со основи $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{b+c}{2}$ и висина $\frac{h}{2}$.



Црт. 10

3. Со примена на Симпсонова формула, изведи ја формулата за волумен на топкин отсечок, зададен со висината h и:

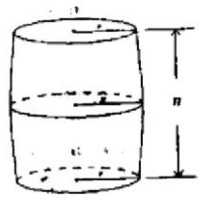
а) радиусот R на топката;

б) радиусот r на основата на отсечокот.

4. Пресметај, приближно, колку литри вода собира буре, чии димензии се :

$r = 28$ cm, $R = 35$ cm, $H = 120$ cm. (црт.11).

Одг. $= 406$ l.



Црт. 11

Статијата прв пат е објавена во списанието Сигма на СММ