СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЈЕДОНИЈА

Боро Пиперевски
Ристо Малчески
Алекса Малчески
Ирена Трајковска

ИЗБРАНИ СОДРЖИНИ ОД ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА II

(второ издание)

СКОПЈЕ, февруари 2014 година

Издравач: Сојуз на математичарите на Македонија
Ул. бул. Александар Македонски бб
Скопје, Република Македонија
Претседател на СММ: Алекса Малчески

Рецензенти
м-р Бојан Прангоски, Машински факултет-Скопје
м-р Павел Димовски, Технолошко-металуршки факултет-Скопје

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Алекса
Меѓународен натпревар Кенгур : I-II година средно образование / Алекса Малчески, Весна Манова-Ераковиќ. - Скопје : Сојуз на математичари на Македонија, 2014. - 80 стр. : илустр. ; 24 см. – (Библиотека Сигма. Сигмина ризница)

ISBN 978-9989-646-54-6 (кн.)
ISBN 978-9989-646-36-2 (ед.)

1. Манова-Ераковиќ, Весна [автор]
а) Математика - Задачи од натпревари

COBISS.MK-ID 95356426

ПРЕДГОВОР

Во нашата држава скоро педесет години, низ најразлични форми на работа, Сојузот на математичарите ја организираат работата на надарените ученици за математика. Овие актривности се пропратени со соодветна литературе како што е математичкото списание СИГМА и неговата библиотека и библиотеката МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА.

Оваа книга е наменета токму за надарените ученици и истата содржи три теми од елементарната математика, и тоа

-Диференцн равенки
-Теорема за мнимакс
-Една класа проблем на боење од Ремзиев тип.

Начинот на презентирање на темите овозможува учениците самостојно да навлезат во споменатите математички области, кои во изминатиот период биле предмет на разработка на специјализирани семинари за надарени ученици. Имено, темата Диференцни равенки е разработувана во рамките на мате математичката школа 1994, а останатите две теми се презентирани на летната школа на Турнирот наградовите во Нови-Сад, 1995 година

Се надеваме дека оваа мала книга ќе овозможи нашите надарени ученици да ги прошират своите математички знаења, а со самото тоа и да ја изберат математиката како своја животна определба.

Скопје, јануари 2001 година Авторите

ПРЕДГОВОР КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Работата со надарените и ученици и оние кои покажуваат афинитет за математика е е еден од основните делови од мисијата на Сојузот на математичари на Македонија. Во своето 64 годишно постоење, бројните генрации на математичари секој во својот период на работење оставиле длабока и неизбришлива трага во остварувањето на ова мисија. Како резулат на тоа настанати се бројни книги во кои се содржат теми кои третираат содржини од “елементарната математика”. Се разбира голем дел од нив се безвременски како што е безвременска и математиката. Затоа е добро, како што тоа е и оваа книга, повремено да се претставуваат на младите генерации на математичари, оние кои ги прават своите први чекори кон посериозни теми за нивна квалитетна математичка надградба. Секако дека основна образовна подлога на бројните квалитетни информатичари е Сојузот на математичари на Македонија чии натпреварувачи беа тие, нажалост расеани насекаде во светот како и математичарите, по сите паралели и мередијани на планетата земја.

Преиздавањето на оваа книга е само една алка од синџирот на литература издадена во рамките на СММ. Ваквата добра практика секако дека не може да се исполнува во целост, се разбира заради добро познатите традиционални причини-хроничен недостаток на финансиски и материјални средства. Многу квалитетни наслови не сме во можност да ги преиздадеме и покрај вонредните напори на членовите-волонтери на Сојузот на математичари на Македонија.

Се надеваме дека преиздавањето на оваа книга ќе помогне во постигнување на подобри резултати на наредните генерации на млади математичари.

Скопје, 08.02.2014 Авторите

ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

Во книгата **Либер абаци (Книга за абакот),** која ја напишал познатиот италијански математичар **Леонардо од Пиза** попознат како **Фибоначи** се среќава и следната задача.

Пар зајаци, почнувајќи од вториот месец на животот, еднаш месечно окотува по пар зајаци. Ако на почетокот на годината бил еден пар зајаци, колку парови зајаци биле на крајот од годината.

Со $f(n)$ да го означиме бројот на паровите после $n-$ от месец. Јасно, $f(0)=1$ и $f(1)=2$. По истекот на $(n+2)-$ от месец имаме $f(n+1)$ стари парови и онолкуновороденi парови, колку што биле парови на крајот од $n-$ от месец, т.е. $f(n)$. Според тоа, членовите на низата $\{f(n)\}$ ја задоволуваат релацијата $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$. Од досега изнесеното следува дека

$$\begin{aligned} &f(2)=f(1)+f(0)=3\\ &f(3)=f(2)+f(1)=5\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f(12)=f(11)+f(10)=377, \end{aligned}$$

што значи дека бараниот број на парови зајаци на крајот на годината ќе биде 377. ♦

При решавањето на задачата на Фибоначи добивме низа за која првите два члена се дадени, а секој следен член е функција од претходните два. Видовме дека со последователни пресметувања може да се најде секој член на вака зададената низа. Меѓутоа, логично е да се запрашаме дали општиот член на низата може експлицитно да се изрази. Проблемите од ваков вид се тема на проучување на ***теоријата на диференцните (рекурентните) равенки***, на која ќе се осврнеме во нашите натамошни разгледувања.

Дефиниција. Нека се дадени првите k членови $x_0,...,x_{k-1}$ на низата $\{x_n\}$. Функционалната врска

$$x_{n+k}=f(x_{n+k-1},x_{n+k-2},...,x_n)\,, \tag{1}$$

со која секој член на низата $\{x_n\}$ се изразува со помош на k претходни, се нарекува **диференцна (рекурзивна) равенка од $k-$ ти ред**.

За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е **решение на диференцната равенка** (1) ако нејзините членови ја задоволуваат функционалната врска (1). Релацијата со која се добиваат сите низи кои се решенија на диференцната равенка (1) ја нарекуваме **општо решение на диференцната равенка** (1).

Како што видовме во задачата на Фибоначи однапред се зададени првите два члена на бараната низа, со чија помош ги наоѓаме останатите членови на низата. Во врска со ова го имаме следниот поим.

Првите k членови $x_0,...,x_{k-1}$ на низата $\{x_n\}$ ги нарекуваме **почетни услови на диференцната равенка** (1).

Забелешка. Пред да преминеме на рашавање на некои класи диференцни равенки, да забележиме дека не постои општ метод со кој може да се решат сите диференцни равенки.

Во натамошните разгледувања, со $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ ќе ги означуваме множествата природни, цели, рационални, реални и комплексни броеви, соодветно.

1. Линеарна диференцна равенка од прв ред

1.1. Дефиниција. Нека $P,Q:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Диференцната равенка од облик

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=Q(n), \tag{2}$$

со почетен услов x_0, ја нарекуваме **линеарна диференцна равенка од прв ред**. Ако, $Q(n)=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш диференцната равенка ја нарекуваме **хомогена**, а во спротивно ја нарекуваме **нехомогена**.

1.2. Теорема. Ако $P(n)\neq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш општото решение на хомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=0, \tag{3}$$

е дадено со

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)], \tag{4}$$

каде C е произволна константа.

Доказ. Ако $x_0=0$, тогаш од (3) следува дека $x_n=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, па затоа општото решение на (3) може да се запише во обликот (4), при $C=0$.

Нека претпоставиме дека $x_0\neq 0$. Тогаш, од условот на теоремата и од (3) следува дека $x_n\neq 0$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Ако во (3) последователно за n земеме вредности $0,1,...,k-1$ ги добиваме равенствата

$$\begin{aligned} x_1&=[1-P(0)]x_0\\ x_2&=[1-P(1)]x_1\\ &\dots\dots\dots\dots\\ x_k&=[1-P(k-1)]x_{k-1} \end{aligned} \tag{5}$$

Ако од првото равенство во замениме за x_1 во второто, а потоа за x_2 во третото итн. го добиваме равенството $x_k=x_0\prod_{i=0}^{k-1}[1-P(i)]$, кое е од облик (4), за $C=x_0$. ♦

1.3. Пример. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+1}-(n+1)x_n=0$, и

б) $x_{n+1}-qx_n=0$.

Решение. а) Имаме, $1-P(i)=1+i, i=0,1,...,n-1$, што според теорема 1.2 значи дека општото решение на разгледуваната равенка е

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}(1+i)=C\cdot n!.$$

б) Имаме, $1-P(i)=q, i=0,1,...,n-1$, што според теорема 1.2 значи дека општото решение на разгледуваната равенка е

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}q=Cq^n\ . \ ♦$$

1.4. Пред да преминема на решавање на општата линеарна нехомогена диференцна равенка од прв ред ќе разгледаме уште еден пример.

Пример. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1}-x_n=R(n)\,. \tag{6}$$

Решение. Ако во (6) последователно ставиме $n=0,1,2,...,k-1$ добиваме

$$\begin{aligned}&x_1-x_0=R(0),\\&x_2-x_1=R(1),\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&x_k-x_{k-1}=R(k-1)\end{aligned} \tag{7}$$

Со собирање на левите и десните страни на равенствата (7) добиваме $x_k=x_0+\sum\limits_{i=0}^{k-1}R(i)$, што значи дека општото решение на равенката (6) е дадено со $x_n=C+\sum\limits_{i=0}^{n-1}R(i)$. ♦

1.5. Теорема. Ако $P(n)\neq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш општото решение на нехомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=Q(n)\,, \tag{8}$$

е дадено со

$$x_n=(C+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Q(j)}{\prod\limits_{i=0}^{j}[1-P(i)]})\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]\,, \tag{9}$$

каде C е произволна константа.

Доказ. Нека ставиме $x_n=y_n\prod\limits_{i=0}^{n-1}[1-P(i)], n=0,1,...$. Со замена во (8) ја добиваме диференцната равенка

$$y_{n+1}\prod_{i=0}^{n}[1-P(i)]+y_n[P(n)-1]\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]=Q(n)\ ,$$

која е еквивалентна на равенката

$$y_{n+1}-y_n=\frac{Q(n)}{\prod\limits_{i=0}^{n}[1-P(i)]}\ .$$

Од пример 1.4 следува дека општото решение на последната равенка е дадено со

$$y_n=C+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Q(j)}{\prod\limits_{i=0}^{j}[1-P(i)]}\ .$$

Конечно, ако замениме во $x_n=y_n\prod\limits_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]$ добиваме дека што значи дека општото решение на равенката (8) е дадено со (9). ♦

1.6. Пример. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1}-ax_n=Q(n)\ ,$$

$a\in\mathbb{R}$ и $Q:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

Решение. Од теорема 1.5 следува дека општото решение на дадената диференцна равенка е

$$x_n=(C+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Q(j)}{x^{j+1}})x^n=Cx^n+\sum_{j=0}^{n-1}Q(j)x^{n-j+1}\ ,\ C\in\mathbb{R}\ .\ ♦$$

1.7. Задачи за самостојна работа. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+1}-2x_n=7$, **б)** $x_{n+1}-ax_n=n^2+1, a\in\mathbb{R}$

в) $x_{n+1}-(n+1)x_n=0$, $x_0=3$, и **д)** $x_{n+1}-(n+1)x_n=n^2+1, x_0=1$.

Одговори. а) $x_n=C\cdot 2^n+7\sum\limits_{i=0}^{n-1}2^{n-i-1}, C\in\mathbb{R}$,

б) $x_n=C\cdot a^n+7\sum\limits_{i=0}^{n-1}(i^2+1)a^{n-i-1}, C\in\mathbb{R}$,

в) $x_n=3n!$, и **г)** $x_n=n![1+\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{i^2+1}{i!}]$. ♦

2. Линеарна диференцна равенка од втор ред

2.1. Дефиниција. Нека $P,Q,R:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Диференцната равенка од облик

$$x_{n+2}+P(n)x_{n+1}+Q(n)x_n=R(n)\ , \tag{10}$$

со почетен услов x_0, ја нарекуваме **линеарна диференцна равенка од втор ред**. Ако, $R(n)=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш диференцната равенка ја нарекуваме **хомогена**, а во спротивно ја нарекуваме **нехомогена**.

2.2. Лема. Нека е дадена линеарната хомогена диференцна равенка од втор ред

$$x_{n+2}+P(n)x_{n+1}+Q(n)x_n=0, \tag{11}$$

и нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две нејзини решенија. Тогаш, за секои $A,B\in\mathbb{C}$ низата $\{A\cdot a_n+B\cdot b_n\}$ е решение (11).

Доказ. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две решенија на равенката (11) и $A,B\in\mathbb{C}$. Имаме,

$$\begin{aligned}(Aa_{n+2}+Bb_{n+2})+P(n)(Aa_{n+1}+Bb_{n+1})+Q(n)(Aa_n+Bb_n)=\\ =A[a_{n+2}+P(n)a_{n+1}+Q(n)a_n]+B[b_{n+2}+P(n)b_{n+1}+Q(n)b_n]\\ =A\cdot 0+B\cdot 0=0\end{aligned}$$

што значи дека $\{A\cdot a_n+B\cdot b_n\}$ е решение (11). ♦

2.3. Дефиниција. За решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на линеарната хомогена диференцна равенка (11) ќе велиме дека се **пропорционални** ако постои $A\in\mathbb{C}$ таков што $a_n=Ab_n$, за секој $n\geq 0$. Во спротивен случај ќе велиме дека решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се **непропорционални**.

2.4. Лема. а) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (11) се пропорционални ако и само ако $a_0:b_0=a_1:b_1$.

б) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (11) се непропорционални ако и само ако $a_0:b_0\neq a_1:b_1$.

Доказ. а) Ако решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се пропорционални, тогаш $a_0=Ab_0$ и $a_1=Ab_1$, па затоа $a_0:b_0=A=a_1:b_1$.

Обратно, нека $a_0:b_0=a_1:b_1=A$. Тогаш, $a_0=Ab_0$ и $a_1=Ab_1$. Нека претпоставиме дека за $a_n=Ab_n$ и $a_{n+1}=Ab_{n+1}$. Тогаш, од (11) следува

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=-P(n)a_{n+1}-Q(n)a_n=-P(n)Ab_{n+1}-Q(n)Ab_n\\ &=A[-P(n)b_{n+1}-Q(n)b_n]=Ab_{n+2}\end{aligned}$$

Сега, од принципот на математичка индукција следува дека $a_k=Ab_k$, за секој $k\geq 0$, т.е. решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се пропорционални.

б) Непосредно следува од а). ♦

2.5. Теорема. Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на хомогената равенка (11), тогаш за секое решение $\{x_n\}$ на (11) постојат единствени $A,B\in\mathbf{C}$ такви што $x_k=Aa_k+Bb_k$, за секој $k\geq 0$.

Доказ. Секое решение $\{x_n\}$ на (11) еднозначно е определено со своите први два члена x_0 и x_1. Нека, $x_0=a$ и $x_1=b$. Јасно, ако константите A и B ги определиме така што

$$\begin{cases} Aa_0+Bb_0=a \\ Aa_1+Bb_1=b \end{cases}, \tag{12}$$

тогаш за секој $k\geq 0$ ќе важи $x_k=Aa_k+Bb_k$. Бидејќи решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални, од лема 2.4. б) следува дека $a_0:b_0\neq a_1:b_1$, што значи дека системот (12) има единствено решение, т.е. постојат единствени $A,B\in\mathbf{C}$ такви што $x_k=Aa_k+Bb_k$, за секој $k\geq 0$. ♦

2.6. Пред да преминеме на разгледување на постапката за решавање на линеарна хомогена диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти, без да ја докажуваме, ќе ја формулираме теоремата за решенијата на нехомогената линеарна диференцна равенка од втор ред.

Теорема. Нека е дадена нехомогената диференцна равенка од втор ред (10). Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на соодветната хомогена равенка (11), а $\{x_n\}$ е решение на нехомогената равенка (10), тогаш секое решение $\{y_n\}$ на (10) постојат $A,B\in\mathbf{C}$ такви што

$$y_k=Aa_k+Bb_k+x_k,$$

за секој $k\geq 0$. ♦

3. Хомогена линеарна диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред

3.1. Дефиниција. Диференцната равенка

$$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0, \quad b,c\in\mathbb{R}, \tag{13}$$

ја нарекуваме **хомогена диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред**.

На равенката (13) и ја придружуваме квадратната равенка

$$r^2+br+c=0 \tag{14}$$

која ја нарекуваме **карактеристична равенка** за равенката (13).

3.2. Лема. Нека α и β се различни решенија на карактеристичната равенка (14) за равенката (13). Тогаш, низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n=\alpha^n$ и $b_n=\beta^n$, $n=0,1,2,...$ се непропорционални решенија на равенката (13).

Доказ. Бидејќи α е решение на карактеристичната равенка (14) за равенката (13), имаме $\alpha^2+b\alpha+c=0$, па затоа

$$a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=\alpha^{n+2}+b\alpha^{n+1}+c\alpha^n=\alpha^n(\alpha^2+b\alpha+c)=\alpha^n\cdot 0=0,$$

што значи дека низата $\{a_n\}$ определена со $a_n=\alpha^n$, $n=0,1,2,...$ е решение на равенката (13).

Аналогно се докажува дека и низата $\{b_n\}$ е решение на (13).

Бидејќи $a_0 : b_0 = 1:1 \neq \alpha : \beta = a_1 : b_1$, од лема 2.4 б) следува дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на равенката (13). ♦

3.3. Лема. Нека α е двоен корен на карактеристичната равенка (14) за равенката (13). Тогаш, низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n = \alpha^n$ и $b_n = n\alpha^n$, $n = 0,1,2,...$ се непропорционални решенија на равенката (13).

Доказ. Доказот за низата $\{a_n\}$ е аналоген на доказот од лема 3.2. Бидејќи α е двоен корен, од Виетовите правила следува дека $2\alpha = -b$. Според тоа,

$$\begin{aligned} b_{n+2} + bb_{n+1} + cb_n &= (n+2)\alpha^{n+2} + b(n+1)\alpha^{n+1} + cn\alpha^n \\ &= n\alpha^n(\alpha^2 + b\alpha + c) + \alpha^{n+1}(2\alpha + b) = n\alpha^n \cdot 0 + \alpha^{n+1} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

што значи дека низата определена со $b_n = n\alpha^n$, $n = 0,1,2,...$ е решение на равенката (13).

Аналогно се докажува дека и низата $\{b_n\}$ е решение на (13).

Бидејќи $b_0 : a_0 = 0:1 \neq \alpha : \alpha = b_1 : a_1$, од лема 2.4 б) следува дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на равенката (13). ♦

3.4. Забелешка. За равенката (13) на единствен начин ја формираме нејзината карактеристична равенка (14), со чија помош наоѓаме две непропорционални решенија на (13). Сега од теорема 2.5 следува дека, ако $\{x_n\}$ е решение на (13), тогаш постојат единствени $A, B \in \mathbf{C}$ такви што

$$x_k = Aa_k + Bb_k \text{, за секој } k \geq 0,$$

каде низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се дадени со лемите 3.2 и 3.3.

3.5. Пример. Решете ги диференцните равенки

а) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

б) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

в) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

Решение. а) Корените на карактеристичната равенка $r^2 - 3r + 2 = 0$ се 2 и 1 и тие се различни. Низите $\{2^n\}$ и $\{1\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n = A \cdot 2^n + B$, $n = 0,1,2,...$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A \cdot 2^0 + B = 0 \\ A \cdot 2^1 + B = 1 \end{cases}$$

чие решение е $A = 1$ и $B = -1$. Според тоа, решението на дадената равенка е $x_n = 2^n - 1$, $n = 0,1,2,...$.

б) Карактеристичната равенка е $r^2-4r+4=0$ и таа има двоен корен 2. Низите $\{2^n\}$ и $\{n2^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n=A\cdot 2^n+B\cdot n2^n$, $n=0,1,2,...$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A\cdot 2^0+B\cdot 0\cdot 2^0=1 \\ A\cdot 2^1+B\cdot 1\cdot 2^1=4 \end{cases}$$

чие решение е $A=1$ и $B=1$. Според тоа, решението на дадената равенка е $x_n=2^n+n2^n=2^n(n+1)$, $n=0,1,2,...$.

в) Карактеристичната равенка е $r^2-2r+2=0$ и таа има коњугирано комплексни корени $1-i$ и $1+i$. Низите $\{(1-i)^n\}$ и $\{(1+i)^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n=A(1-i)^n+B(1+i)^n$, $n=0,1,2,...$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A(1-i)^0+B(1+i)^0=1 \\ A(1-i)^1+B(1+i)^1=4 \end{cases}$$

чие решение е $A=\frac{1+3i}{2}$ и $B=\frac{1-3i}{2}$. Според тоа, решението на дадената равенка е $x_n=\frac{1+3i}{2}(1-i)^n+\frac{1-3i}{2}(1+i)^n$, $n=0,1,2,...$. ♦

3.6. Задачи за самостојна работа. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+2}-2x_{n+1}-3x_n=0$, при почетни услови $x_0=3$ и $x_1=1$,

б) $x_{n+2}-10x_{n+1}+25x_n=0$, при почетни услови $x_0=2$ и $x_1=-5$,

в) $x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0$, при почетни услови $x_0=2$ и $x_1=1$,

г) $x_{n+2}-2x_{n+1}+4x_n=0$, при почетни услови $x_0=1$ и $x_1=1$,

д) $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=0$, при почетни услови $x_0=10$ и $x_1=16$, и

ѓ) $x_{n+2}=x_{n+1}^3x_n^{-2}$, при почетни услови $x_0=1$ и $x_1=2$.

Одговори. а) $x_n=3^n+2(-1)^n$,

б) $x_n=5^n(2-3n)$

в) Прво се наоѓа дека $x_n=(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^n+(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^n$, а потоа со помош на Моавровата формула се докажува дека $x_n=2\cos\frac{\pi n}{3}$.

г) Прво се наоѓа дека $x_n=\frac{(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n}{2}$, а потоа со помош на Моавровата формула се докажува дека $x_n=2^n\cos\frac{\pi n}{3}$.

д) $x_n=7+3^{n+1}$.

ѓ) $x_n=2^{2^n-1}$. Со математичка индукција докажи дека $x_n>0$, за секој $n=0,1,2,...$ и потоа воведи ја смената $y_n=\log x_n$. ♦

4. Систем диференцни равенки од обликот $\begin{cases} x_{n+1}=px_n+qy_n \\ y_{n+1}=rx_n+sy_n \end{cases}$

4.1. Во општ случај решавањето на системот диференцни равенки

$$\begin{cases} x_{n+1}=px_n+qy_n \\ y_{n+1}=rx_n+sy_n \end{cases} \tag{15}$$

се сведува на решавање на линеарна хомогена диференцна равенка од втор ред. Можни се два случаи:

а) Ако $q=r=0$, тогаш системот (15) го добива обликот $\begin{cases} x_{n+1}=px_n \\ y_{n+1}=sy_n \end{cases}$ и во овој случај решенијата ги наоѓаме како во пример 1.3 б).

б) Нека претпоставиме дека $q\neq 0$ или $r\neq 0$, на пример $q\neq 0$. Од првата равенка на системот (15) наоѓаме

$$qy_n=x_{n+1}-px_n \text{ и } qy_{n+1}=x_{n+2}-px_{n+1}. \tag{16}$$

Втората равенка ја множиме со q и добиваме $qy_{n+1}=qrx_n+qsy_n$. Ако во последната равенка од (16) замениме за qy_{n+1} и qy_n ја добиваме равенката

$$x_{n+2}-px_{n+1}=qrx_n+s(x_{n+1}-px_n),$$

која е еквивалентна на хомогената линеарна диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред:

$$x_{n+2}-(p+s)x_{n+1}+(ps-qr)x_{n+1}=0. \tag{17}$$

Со тоа, проблемот на наоѓање на низата $\{x_n\}$ го сведовме на решавање на хомогена линеарна диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред, за што говоревме во претходната точка. Низата $\{y_n\}$ може да се определи од релацијата $y_n=\frac{x_{n+1}-px_n}{q}$.

4.2. Пример. Реши ги системите диференцни равенки:

а) $\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+y_n \\ y_{n+1}=5x_n-y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0=0, y_0=6$.

б) $\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-y_n \\ y_{n+1}=x_n+4y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0=2, y_0=1$.

Решение. а) Применувајќи ја постапката од 4.1 б) последователно наоѓаме $y_n=x_{n+1}-3x_n, y_{n+1}=x_{n+2}-3x_{n+1}$. Со замена во $y_{n+1}=5x_n-y_n$ ја добиваме равенката $x_{n+2}-3x_{n+1}=5x_n-x_{n+1}+3x_n$ која е еквивалентна на равенката

$x_{n+2}-2x_{n+1}-8x_n=0$. Карактеристичната равенка на последната диференцна равенка е $t^2-2t-8=0$ и нејзини решенија се 4 и -2. Според тоа, $x_n=A\cdot 4^n+B\cdot(-2)^n$. Од $x_0=0, y_0=6$ и $x_1=3x_0+y_0$ наоѓаме $x_1=6$. Значи коефициентите A и B го задоволуваат системот равенки

$$\begin{cases} A\cdot 4^0+B\cdot(-2)^0=0 \\ A\cdot 4^1+B\cdot(-2)^1=6 \end{cases}$$

чии решенија се $A=1, B=-1$, па затоа $x_n=4^n-(-2)^n$. За низата $\{y_n\}$ имаме

$$y_n=x_{n+1}-3x_n=4^{n+1}-(-2)^{n+1}-3[4^n-(-2)^n]=4^n+5(-2)^n.$$

б) Применувајќи ја постапката од 4.1 б) последователно наоѓаме $y_n=2x_n-x_{n+1}, y_{n+1}=2x_{n+1}-x_{n+2}$. Со замена во $y_{n+1}=x_n+4y_n$ ја добиваме равенката $2x_{n+1}-x_{n+2}=x_n+4(2x_n-x_{n+1})$ која е еквивалентна на равенката $x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=0$. Карактеристичната равенка на последната диференцна равенка е $t^2-6t+9=0$ и таа има двоен корен 3. Според тоа, $x_n=A\cdot 3^n+Bn\cdot 3^n$. Од $x_0=2, y_0=1$ и $x_1=2x_0-y_0$ наоѓаме $x_1=3$. Значи коефициентите A и B го задоволуваат системот равенки

$$\begin{cases} A\cdot 3^0+B\cdot 0\cdot 3^0=2 \\ A\cdot 3^1+B\cdot 1\cdot 3^1=3 \end{cases}$$

чии решенија се $A=2, B=-1$, па затоа $x_n=3^n(2-n)$. За низата $\{y_n\}$ имаме

$$y_n=2x_n-x_{n+1}=2\cdot 3^n(2-n)-3^{n+1}[2-(n+1)]=3^n(1+n). \ ♦$$

4.3. Нека е дадена диференцната равенка

$$x_{n+1}=\tfrac{px_n+q}{rx_n+s}. \tag{18}$$

Секое решение на равенката (18) е определено со првиот член. Нека $x_0=a$. Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} y_{n+1}=py_n+qz_n \\ z_{n+1}=ry_n+sz_n \end{cases}$$

кој ги задоволува условите $y_0=a$ и $z_0=1$. Нека, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ се решенија на овој систем. Ставаме, $x_n=\frac{y_n}{z_n}$ и добиваме $x_0=\frac{y_0}{z_0}=a$ и

$$x_{n+1}=\frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}=\frac{py_n+qz_n}{ry_n+sz_n}=\frac{p\frac{y_n}{z_n}+q}{r\frac{y_n}{z_n}+s}=\frac{px_n+q}{rx_n+s},$$

т.е. вака најдената низа е решение на диференцната равенка (18).

4.4. Пример. Реши ја диференцната равенка:

а) $x_{n+1}=\frac{x_n-2}{x_n+4}$, при почетен услов $x_0=0$, и

б) $x_{n+1}=\frac{x_n-1}{x_n+3}$, при почетен услов $x_0=1$.

Решение. а) Прво го решаваме системот $\begin{cases} y_{n+1}=y_n-2z_n \\ z_{n+1}=y_n+4z_n \end{cases}$, кој ги задоволува почетните услови $y_0=0, z_0=1$. Со елиминација на z_n и z_{n+1} ја добиваме равенката $y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n=0$. Нејзината карактеристична равенка е $t^2-5t+6=0$ и истата има решенија 2 и 3. Затоа, $y_n=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n$. Ако се искористат почетните услови наоѓаме $A=2$ и $B=-2$, што значи $y_n=2\cdot 2^n-2\cdot 3^n$. За низата $\{z_n\}$ наоѓаме $z_n=\frac{y_n-y_{n+1}}{2}=-2^n+2\cdot 3^n$.

Конечно, $x_n=\frac{2\cdot 2^n-2\cdot 3^n}{-2^n+2\cdot 3^n}$.

б) Прво го решаваме системот $\begin{cases} y_{n+1}=y_n-z_n \\ z_{n+1}=y_n+3z_n \end{cases}$, кој ги задоволува почетните услови $y_0=1, z_0=1$. Со елиминација на z_n и z_{n+1} ја добиваме равенката $y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n=0$. Нејзината карактеристична равенка е $t^2-4t+4=0$ и истата има двоен корен 2. Затоа, $y_n=A\cdot 2^n+Bn\cdot 2^n$. Ако се искористат почетните услови наоѓаме $A=1$ и $B=-1$, што значи $y_n=2^n-n2^n$. За низата $\{z_n\}$ наоѓаме $z_n=y_n-y_{n+1}=2^n+n2^n$.

Конечно, $x_n=\frac{2^n-n2^n}{2^n+n2^n}=\frac{1-n}{1+n}$. ♦

4.5. Задачи за самостојна работа. а) Реши ги системите диференцни равенки

1) $\begin{cases} x_{n+1}=4x_n-2y_n \\ y_{n+1}=x_n+y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0=1, y_0=1$.

2) $\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-8y_n \\ y_{n+1}=2x_n-6y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0=-1, y_0=2$.

б) Реши ја диференцната равенка

1) $x_{n+1}=\frac{1-4x_n}{1-6x_n}$, при почетен услов $x_0=1$,

2) $x_{n+1}=\frac{2x_n-3}{3x_n-4}$, при почетен услов $x_0=-1$, и

3) $x_{n+1}=\frac{x_n+1}{-x_n+1}$, при почетен услов $x_0=0$.

Одговори.

а) 1) $x_n=y_n=2^n$, **2)** $x_n=(10n-1)(-2)^n, y_n=(5n+2)(-2)^n$

б) 1) $x_n=\frac{2(-2)^n-(-1)^n}{4(-2)^n-3(-1)^n}$, **2)** $x_n=\frac{6n-1}{6n+1}$, **3)** $x_n=tg\,\frac{n\pi}{4}$. ♦

5. Решавање на некои нехомогени линеарни диференцни равенки со константни коефициенти од втор ред

5.1. Согласно, со теорема 2.6 за да ја решиме нехомогената диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред

$$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=f(n) \tag{19}$$

каде $b,c\in \mathbf{R}$ и $f(n)\not\equiv 0$ доволно е да ја решиме соодветната хомогена равенка

$$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0 \tag{20}$$

и да најдеме барем едно решение $\{x_n\}$ на равенката (19). Тогаш, општото решение на (19) е збир на решението на равенката (20) и $\{x_n\}$.

Може да се докаже дека, ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на хомогената равенка (20), тогаш едно решение на нехомогената равенка (19) е дадено со

$$x_n=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{a_{t+1}b_n-b_{t+1}a_n}{a_{t+1}b_{t+2}-b_{t+1}a_{t+2}}f(t),$$

што значи дека општото решение на равенката (19) е дадено со

$$y_n=Aa_n+Bb_n+\sum_{t=0}^{n-1}\frac{a_{t+1}b_n-b_{t+1}a_n}{a_{t+1}b_{t+2}-b_{t+1}a_{t+2}}f(t).$$

5.2. Што се однесува до решението $\{x_n\}$ на равенката (19), без доказ ќе наведеме неколку облици на решението на истата кои зависат од видот на функцијата $f(n)$.

а) Ако $f(n)$ е полином од $k-$ти степен, тогаш

- $x_n=\sum_{i=0}^{k}A_in^i$, ако 1 не е корен на карактеристичната равенка $r^2+br+c=0$,
- $x_n=\sum_{i=0}^{k}A_in^{i+1}$, ако 1 е еден од различните корени на карактеристичната равенка $r^2+br+c=0$,
- $x_n=\sum_{i=0}^{k}A_in^{i+2}$, ако 1 е двоен корен на карактеристичната равенка $r^2+br+c=0$,

б) Ако $f(n)=P_k(n)e^{\alpha n}$, каде P_k е полином од $k-$ти степен, тогаш

- $x_n=e^{\alpha n}\sum_{i=0}^{k}A_in^i$, ако α не е корен на карактеристичната равенка $r^2+br+c=0$,

- $x_n = e^{\alpha n} \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+1}$, ако α е еден од различните корени на карактеристичната равенка $r^2 + br + c = 0$,
- $x_n = e^{\alpha n} \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+2}$, ако α е двоен корен на карактеристичната равенка $r^2 + br + c = 0$,

в) Ако $f(n) = P_k(n)a^n$, каде P_k е полином од $k-$ти степен, тогаш

- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^i$, ако a не е корен на карактеристичната равенка $r^2 + br + c = 0$,
- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+1}$, ако a е еден од различните корени на карактеристичната равенка $r^2 + br + c = 0$,
- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+2}$, ако a е двоен корен на карактеристичната равенка $r^2 + br + c = 0$,

Во сите претходни случаи коефициентите $A_i, i = 0,1,2,...,k$ кои се јавуваат во решенијата се неопределени и истите ги определуваме со замена на решението во равенката (19). Овој метод е познат како метод на неопределени коефициенти и се заснива на фактот дека два полиноми се еднакви ако и само ако им се еднакви коефициентите пред соодветните степени. Ќе разгледаме еден пример.

5.3. Пример. Реши ја нехомогената диференцна равенка:

а) $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = n - 1$, и

б) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n^2$.

Решение. а) Општото решение на соодветната хомогена диференцна равенка е дадено со: $A(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n + B(-1)^n(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n$. Бидејќи десната страна на равенката е полином од прва степен и 1 не е корен на карактеристичната равенка $r^2 + r - 1 = 0$ добиваме дека $x_n = A_0 + A_1 n$. Со замена во равенката добиваме $A_1(n+2) + A_0 + A_1(n+1) + A_0 - A_1 n - A_0 = n + 1$ од каде после средувањето наоѓаме $(A_1 - 1)n + (3A_1 + A_0 + 1) = 0$, т.е.

$$A_1 - 1 = 0 \text{ и } 3A_1 + A_0 + 1 = 0 .$$

Според тоа, $A_1 = 1, A_0 = -4$, па затоа општото решение на равенката е

$$y_n = A(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^n + B(-1)^n(\tfrac{\sqrt{5}+1}{2})^n + n - 4 .$$

б) Општото решение на соодветната хомогена диференцна равенка е дадено со: $A+Bn$. Бидејќи десната страна на равенката е полином од втора степен и 1 е двоен корен на карактеристичната равенка $r^2-2r+1=0$ добиваме дека $x_n=A_0n^2+A_1n^3+A_2n^4$. Аналогно како во задачата под а) наоѓаме $A_2=\frac{1}{12}, A_1=-\frac{1}{3}, A_0=\frac{5}{12}$, па затоа општото решение на равенката е

$$y_n=A+Bn+\tfrac{5}{12}n^2-\tfrac{1}{3}n+\tfrac{1}{12}\text{ . ♦}$$

5.4. Задачи за самостојна работа. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=n+1$, **б)** $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=n^3+4n+2$

в) $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=2^n$, **г)** $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=(n^2-1)e^{2n}$,

д) $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=2^n(n+1)$ **ѓ)** $x_{n+2}-7x_{n+1}+12x_n=(n+1)e^n$.

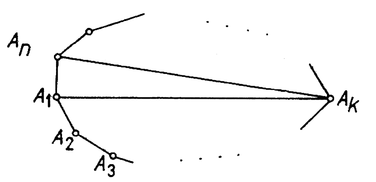
6. Триангулација на *н*-аголник и рпоблем на загради

6.1. Набљудуваме конвексен $n-$ аголник $A_1A_2...A_n$, (црт. 1). Под триангулација на $n-$ аголникот ќе подразбираме негова поделба на триаголници при што се исполнети условите

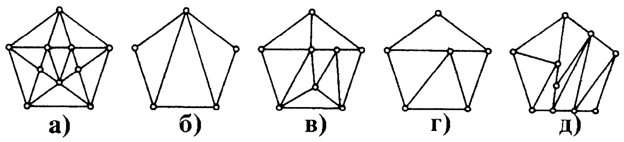
а) или триаголниците немаат заеднички точки,

б) или имаат само заедничко теме,

в) или имаат заедничка страна.



Црт. 1



Црт. 2

На црт. 2 а), б) и в) имаме триангулација на петаголникот, а додека на црт. 2 г) и д) немаме триангулација на петаголникот.

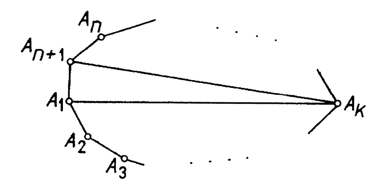
Проблемот на триангулација се состои во наоѓање на бројот T_n , $n\geq 3$ на триангулациите кои се состојат само од дијагонали на $n-$ аголникот. Овие триангулации ги нарекуваме **дијагонални**. За две дијагонални триангулации ќе велиме дека се еквивалентни ако во нив “учествуваат” исти дијагонали. По дефиниција ставаме $T_1=0, T_2=1$. Очигледно $T_3=1$, бидејќи триаголникот е веќе триангулиран на единствен начин.

Да забележиме дека од едно теме на $n-$ аголникот поаѓаат $n-3$ дијагонали и тие формираат $n-2$ триаголници. Ќе го определиме бројот x на дијагоналите кои се користат во дијагонална триангулација. Збирот на внатрешните агли на секоја дијагонална триангулација мора да биде еднаков на збирот на внатрешните агли на $n-$аголникот, кој е еднаков на $(n-2)\pi$. Бидејќи збирот на внатрешните агли на триаголникот е еднаков на π добиваме дека секоја дијагонална триангулација мора да има $n-2$ триаголници, па вкупниот број на рабови е еднаков на $3(n-2)=3n-6$, при што дијагоналите се броени двапати, а страните на $n-$аголникот се броени еднаш. Значи, $2x+n=3n-6$, т.е. $x=n-3$, што значи дека во секоја триангулација учествуваат точно $n-3$.

6.2. Теорема. Броевите $T_n, n\geq 2$ ја задоволуваат диференцната равенка

$$T_{n+1}=T_2T_n+T_3T_{n-1}+...+T_{n-1}T_3+T_nT_2\,. \tag{21}$$

Доказ. Да го разгледаме многуаголникот $P=A_1...A_{n+1}$, (црт. 3). Страната A_1A_{n+1} припаѓа на некој триаголник на секоја дијагонална триангулација на P. Третото теме на тој триаголник може да биде некое од темињата $A_k, k=2,...,n$. Да го пресметаме бројот на начините на кои третото теме може да биде некое од темињата $A_k, k=2,...,n$. Триаголникот $A_1A_{n+1}A_k$ го дели многуаголникот P на два помали конвексни многуаголници и тоа "долен" конвексен $k-$аголник $A_1...A_k$ и "горен" конвексен $(n-k+2)-$ аголник $A_kA_{k+1}...A_{n+1}$. Долниот $k-$аголник може да се триангулира на T_k начини, а горниот $(n-k+2)-$ аголник на T_{n-k+2}, па затоа вкупниот број на триангулации во овој случај е T_kT_{n-k+2}. Но, за секој $k=2,...,n$ на претходно опишаниот начин добиваме различни триангулации, па затоа $T_{n+1}=T_2T_n+T_3T_{n-1}+...+T_{n-1}T_3+T_nT_2$, т.е. важи (21). ♦

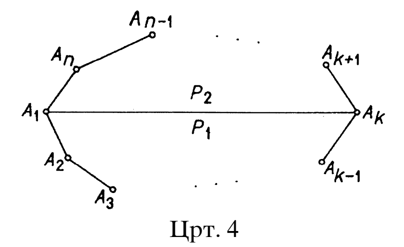


Црт. 3

6.3. Од досега изнесеното следува дека за да го определиме бројот на триагулациите, треба да ја решиме нелинеарната диференцна равенка (21). За таа цел ќе докажеме дека броевите $T_n, n\geq 4$ задоволуваат поедноставна диференцна равенка.

Лема. Броевите $T_n, n\geq 4$ ја задоволуваат диференцната равенка

$$T_n=\frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)\,. \tag{22}$$



Црт. 4

Доказ. Да го разгледаме многуаголникот $A_1...A_n$, (црт. 4). Дијагоналата A_1A_k, $k=3,...,n-1$ го дели P на два многуаголника P_1 и P_2, т.е. на долен конвексен $k-$аголник $P_1=A_1...A_k$ и на горен конвексен $(n-k+2)-$ аголник $P_2=A_1A_kA_{k+1}...A_n$, (црт. 4). Бројот на триангулациите на P во кои учествува дијагоналата A_1A_k е еднаков на T_kT_{n-k+2}. Од темето A_1 излегуваат $n-3$ дијагонали $A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1}$, па затоа бројот на триангулациите за сите дијагонали од темето A_1 е еднаков на $T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3$ и ова важи за сите темиња. Значи бројот $n(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)$ ги опфаќа сите можни триангулации за секоја дијагонала, и притоа броиме двапати, за секое теме на дијагоналата. Според тоа, бројот $\frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)$ е број за секоја можна дијагонала што учествува во триангулација на P. Но, бидејќи секоја триангулација ја броиме за секоја дијагонала поодделно, а имаме $n-3$ дијагонали добиваме дека бројот на триангулациите е

$$\frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3),$$

т.е. важи формулата (22). ♦

6.4. Теорема. За секој $n\geq 2$ важи

$$T_n=\frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}. \qquad (23)$$

Доказ. Бидејќи $T_2=1$, од (21) добиваме

$$T_{n+1}-2T_n=T_3T_{n-1}+...+T_{n-1}T_3.$$

Сега од (22) следува $T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3=T_n\frac{2(n-3)}{n}$, па затоа $T_{n+1}-2T_n=T_n\frac{2(n-3)}{n}$, т.е. $T_{n+1}=T_n\frac{2(2n-3)}{n}$. Од последната формула последователно добиваме

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=\frac{2(2n-3)}{n}T_n=\frac{2^2(2n-3)(2n-5)}{n(n-1)}T_{n-1}=\frac{2^3(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{n(n-1)(n-2)}T_{n-2}=...\\&=\frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)(2n-7)...(2\cdot3-3)(2\cdot2-3)}{n(n-1)(n-2)...3\cdot2}=\frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)(2n-7)...(2\cdot3-3)(2\cdot2-3)}{n(n-1)(n-2)...3\cdot2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)...3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)...3\cdot2\cdot1}\\&=\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdot...\cdot3\cdot1}{n(n-1)(n-2)...3\cdot2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-4)\cdot...\cdot6\cdot4\cdot2}{(n-1)(n-2)...3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}=\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}\end{aligned}$$

Конечно, ако во последната формула наместо $n+1$ ставиме n ја добиваме формулата (23). ♦

6.5. Проблемот на триангулација прв го решил Ојлер, но подоцна Каталан решавајќи го проблемот на загради кој покасно ќе го формулираме ги открил броевите од облик $C_n=\frac{1}{n}\binom{2n}{n}$, кои во негова чест се наречени каталанови броеви.

Проблем на загради. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се еден до друг запишани броеви во произволен редослед. Од асоцијативниот закон следува дека при произволно множење на овие броеви секогаш добиваме ист резултат. На пример, три броја можеме да ги помножиме на два начини $x_1(x_2x_3)$ и $(x_1x_2)x_3$ и уште по бројот на пермутациите на тие броеви, па затоа вкупниот број на различни множења е $2\cdot3!=12$. Слично, четири броеви можеме да ги помножиме на пет начини

$$(x_1x_2)x_3x_4)=((x_1x_2)x_3)x_4=(x_1(x_2x_3))x_4=x_1((x_2x_3)x_4)=x_1(x_2(x_3x_4))$$

и уште по бројот на пермутациите се добива $5\cdot 4!=120$. Во врска со претходните примери ќе разгледаме две задачи:

а) На колку различни начини може да се помножат n броеви?
б) На колку различни начини може да се помножат n броеви, кои се фиксирани? На пример $x_1,x_2,...,x_n$.

Прво ќе ја решиме задачата под а). Нека со Z_n го означиме бараниот број. Да го разгледаме било кој од Z_{n-1} производите на броевите $x_1,x_2,...,x_{n-1}$. На секој од овие производи го додаваме бројот x_n и тоа може да се направи на два начини:

- како надворешен множител $x_n(...)$ или $(...)x_n$,
- како внатрешен множител, при што на секое од $(n-2)-$ те множења за пресметување на еден од производите на броевите $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ додавањето може да се направи на 4 начини. Имено, ако имаме множење на два соседни броја a и b, тогаш внатрешното вметнување на бројот x_n може да се направи на еден од следните четири начини: $(x_na)b,(ax_n)b,a(x_nb),a(bx_n)$.

Од претходно изнесеното следува дека бројот x_n може да се вметне или да се додаде на секој од Z_{n-1} производите на броевите $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ на $4(n-2)+2=4n-6$ начини. Значи, броевите Z_n, $n=2,3,...$ ја задоволуваат диференцната равенка

$$Z_n=(4n-6)Z_{n-1}, \tag{24}$$

со почетен услов $Z_1=1$. Решението на равенката (24) е дадено со

$$\begin{aligned}Z_n&=(4n-6)Z_{n-1}=(4n-6)(4n-10)Z_{n-2}=(4n-6)(4n-10)...(4\cdot 3-6)(4\cdot 2-6)Z_1\\&=2(2n-3)2(2n-5)...2(2\cdot 3-3)2(2\cdot 2-3)=2^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdot...\cdot 3\cdot 1\\&=\tfrac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdot...\cdot 3\cdot 1}{(n-1)!}(n-1)!=\tfrac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdot...\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)!}=\tfrac{(2n-2)!}{(n-1)!}\\&=(n-1)!\tbinom{2n-2}{n-1}.\end{aligned}$$

За да ја решиме задачата под б) доволно е бројот Z_n да го поделиме со бројот на пермутациите на броевите $x_1,x_2,...,x_n$, т.е. со $n!$. Значи решение на задачата под б) е $\frac{Z_n}{n!}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ и тоа е $(n-1)-$ от каталанов број.

6.6. Забелешка. Бидејќи множењето на броевите $x_1,x_2,...,x_n$ запишани во овој редослед, за секој фиксиран $r\in\{1,2,...,n\}$ може да се направи ако прво се помножат броевите $x_1,x_2,...,x_r$, потоа се помножат броевите $x_{r+1},x_{r+2},...,x_n$ и се најде нивниот производ или пак ако прво се помножат броевите $x_1,x_2,...,x_{n-r}$, потоа се помножат броевите $x_{n-r+1},x_{n-r+2},...,x_n$ и се најде нивниот производ заклучуваме дека броевите Z_n ја задоволуваат диференцната равенка

$$Z_n = Z_1 Z_{n-1} + Z_2 Z_{n-2} + ... + Z_{n-2} Z_2 + Z_{n-1} Z_1 .$$

7. Фибоначиеви броеви

7.1. На почетокот од нашите разгледувања ја споменавме задачата на Леонардо Фибоначи, но не ја решивме соодветната диференцна равенка. Во овој дел ќе се навратиме на истата и ќе разгледаме неколку својства на низата на Фибоначи.

7.2. Задача. Реши ја диференцната равенка

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n , \tag{25}$$

со почетни услови $f_0 = 0, f_1 = 1$.

Решение. Равенката (25) е линеарна диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти. Нејзината карактеристична тавенка е $r^2 - r - 1 = 0$, со решенија $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, општото решение на равенката (25) е дадено со $f_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Од почетните услови $f_0 = 0, f_1 = 1$ го добиваме системот равенки

$$A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \text{ и } A + B = 0$$

чие решение е $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Според тоа, решението на (25) е дадено со

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] . \ \blacklozenge$$

7.3. Задача. Докажи дека за фибоначиевите броеви важи:

а) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$, $n \ge 2$ **б)** $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$,

в) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$, $n \ge 2$ **г)** $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$, $n \ge 2$

д) $f_{n-m} f_{n+m} - f_n^2 = (-1)^{n+m-1} f_m^2$, $n > m$ **ѓ)** $f_n^4 - f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = 1$.

Решение. а) За $n = 2$ и $n = 3$ формулата е точна бидејќи

$$f_{m+2} = f_{m+1} + f_m = f_{m+1} f_1 + f_m f_2 \text{ и}$$
$$f_{m+3} = f_{m+2} + f_{m+1} = (f_{m+1} + f_m) + f_{m+1} = f_2 f_m + 2 f_{m+1} = f_2 f_m + f_3 f_{m+1}$$

Нека претпоставиме дека формулата е точна за $n = k$ и $n = k+1$, т.е.

$$f_{k+m} = f_{k-1} f_m + f_k f_{m+1} \text{ и } f_{k+1+m} = f_k f_m + f_{k+1} f_{m+1} .$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$f_{k+m} + f_{k+1+m} = (f_k + f_{k-1}) f_m + (f_k + f_{k+1}) f_{m+1} ,$$

т.е.

$$f_{k+2+m} = f_{k+1} f_m + f_{k+2} f_{m+1} .$$

Според тоа, формулата е точна за $n=k+2$, па затоа тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

б) Во задачата под а) наместо n ставете $n+1$, а наместо m ставете n.

в) Ако во формулата од задачата под а) наместо m ставиме n добиваме $f_{2n}=f_{n-1}f_n+f_nf_{n+1}=f_n(f_{n-1}+f_{n+1})$ и како $f_n=f_{n+1}-f_{n-1}$ со замена во последното равенство го добиваме бараното равенство.

г) Ако во формулата од задачата под а) наместо n ставиме $2n$, а наместо m ставиме n добиваме $f_{3n}=f_{2n-1}f_n+f_{2n}f_{n+1}$. Со помош на формулите од задачите под б) и в) последното равенство може да се трансформира на следниот начин:

$$\begin{aligned}f_{3n}&=f_{2n-1}f_n+f_{2n}f_{n+1}=(f_n^2+f_{n-1}^2)f_n+(f_{n+1}^2-f_{n-1}^2)f_{n-1}\\&=f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^2(f_{n+1}-f_n)=f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^3.\end{aligned}$$

д) Точноста на формулата за $n=m+1$ следува од формулата под б). Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $f_{k-m}f_{k+m}-f_k^2=(-1)^{k+m-1}f_m^2$. Од б) следува $f_{2k+1}=f_k^2+f_{k+1}^2$, а од а) следува $f_{2k+1}=f_{k-m}f_{k+m}+f_{k+1-m}f_{k+1+m}$. Од последните две равенства и од индуктивната претпоставка добиваме

$$f_{k+1-m}f_{k+1+m}-f_{k+1}^2=-(f_{k-m}f_{k+m}-f_k^2)=-(-1)^{k+m-1}f_m^2=(-1)^{k+m}f_m^2,$$

т.е. равенството важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n\geq m+1$.

ѓ) Ако во формулата од задачата под д) ставиме $m=1$ и $m=2$ добиваме $f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n f_1^2$ и $f_{n-2}f_{n+2}-f_n^2=(-1)^{n+1}f_2^2$, што значи дека $f_{n-1}f_{n+1}=f_n^2+(-1)^n$ и $f_{n-2}f_{n+2}=f_n^2-(-1)^n$. Ако ги помножиме последните две равенства го добиваме равенството $f_{n-2}f_{n-1}f_{n+1}f_{n+2}=f_n^4-1$, кое е еквивалентно на бараното равенство. ♦

7.4. Задача. Докажи дека за фибоначиевите броеви важи:

а) $\sum_{i=1}^{n} f_i=f_{n+2}-1$, **б)** $\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)f_i=f_{n+4}-(n+3)$

в) $\sum_{i=1}^{n} if_i=nf_{n+2}-f_{n+3}+2$, **г)** $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1}=f_{2n}$

д) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i}=f_{2n+1}-1$, ѓ) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i=(-1)^n f_{n-1}-1$.

Решение. а) Од $f_k=f_{k+2}-f_{k+1}$ следува

$$\sum_{i=1}^{n} f_i=\sum_{i=1}^{n}(f_{i+2}-f_{i+1})=f_{n+2}-f_2=f_{n+2}-1.$$

б) Од задачата под а) имаме

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)f_i = f_1+(f_1+f_2)+(f_1+f_2+f_3)+...+(f_1+f_2+...+f_n)$$
$$=(f_3-1)+(f_4-1)+(f_5-1)+...+(f_{n+2}-1)=\sum_{i=1}^{n+2} f_i - n - f_1 - f_2$$
$$= f_{n+4}-(n+3)$$

в) Од задачите под а) и б) следува

$$\sum_{i=1}^{n} if_i = (n+1)\sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)f_i = (n+1)(f_{n+2}-1)-(f_{n+4}-(n+3))$$
$$= nf_{n+2}-(f_{n+4}-f_{n+2})+2 = nf_{n+2}-f_{n+3}+2$$

г) Имаме $f_{2k-1}=f_{2k}-f_{2k-2}$ па затоа:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n}(f_{2i}-f_{2i-2}) = f_{2n}-f_0 = f_{2n}\,.$$

д) Имајќи ги предвид равенствата под а) и г) добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} f_i - \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n+2}-1-f_{2n} = f_{2n+1}-1\,.$$

ѓ) Од $(-1)^k f_k = (-1)^k f_{k-1} + (-1)^k f_{k-2} = (-1)^k f_{k-1} - (-1)^{k-1} f_{k-2}$ следува

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i = (-1)^1 f_1 + \sum_{i=2}^{n}[(-1)^i f_{i-1} - (-1)^{i-1} f_{i-2}] = -f_1 + (-1)^n f_{n-1} - (-1)^1 f_0$$
$$= (-1)^n f_{n-1} - 1$$

што и требаше да се докаже. ♦

7.5. Задача. Докажи дека бројот f_n е најблизок природен број на бројот $\frac{a^n}{\sqrt{5}}$, каде $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Според задача 7.2 имаме $f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, каде $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Сега тврдењето на задачата следува од неравенството

$$| f_n - \tfrac{a^n}{\sqrt{5}} | = | \tfrac{a^n-b^n}{\sqrt{5}} - \tfrac{a^n}{\sqrt{5}} | = \tfrac{|b|^n}{\sqrt{5}} < \tfrac{1}{\sqrt{5}} < \tfrac{1}{2}\,.\ ♦$$

7.6. Задачи за самостојна работа. а) Докажи дека за фибоначиевите броеви се исполнети равенствата:

1) $\sum_{i=1}^{n} f_{3i} = \frac{f_{3n+2}-1}{2}$, **2)** $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$ **3)** $\sum_{i=1}^{2n-1} f_i f_{i+1} = f_{2n}^2$,

4) $\sum_{i=1}^{2n} f_i f_{i+1} = f_{2n+1}^2 - 1$ **5)** $\sum_{i=1}^{n} f_i^3 = \frac{f_{3n+2}-(-1)^n 6 f_{n-1}+5}{10}$, **6)** $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{f_i}{f_{i-1}f_{i+1}} = 2 - \frac{f_{n+3}}{f_{n+1}f_{n+2}}$

б) Докажи дека за секои $k,n\in\mathbb{N}$ дропката $\frac{kf_{n+2}+f_n}{kf_{n+3}+f_{n+1}}$ е нескратлива.

в) Природните броеви x_1,x_2 се помали од 10000. Поаѓајќи од нив е конструирана низа $x_1,x_2,...,x_n$, така што бројот x_3 е еднаков на $|x_1-x_2|$, бројот x_4 е еднаков на најмалиот меѓу броевите $|x_1-x_2|$, $|x_1-x_3|$ и $|x_3-x_2|$, бројот x_5 е еднаков на најмалиот меѓу броевите $|x_1-x_2|$, $|x_1-x_3|$, $|x_1-x_4|$, $|x_2-x_3|$, $|x_2-x_4|$ и $|x_3-x_4|$ итн. Докажи дека $x_{21}=0$.

8. Решавање на некои нелинеарни диференцни равенки

8.1. На крајот од нашите разгледувања ќе се осврнеме на неколку задачи од нелинеарни диференцни равенки, при што ќе презентираме неколку различни постапки кои можат да се искористат при решавање и на други нелинеарни диференцни равенки.

8.2. Задача. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1}=x_n(2-cx_n)$, со почетен услов $x_0=a$

Решение. Ако $c=0$, тогаш дадената равенка има облик $x_{n+1}=2x_n$, т.е. таа е линеарна и нејзиното решение е $x_n=2^n a$.

Нека $c\neq 0$. Равенка последователно ја трансформираме:

$$cx_{n+1}=cx_n(2-cx_n) \Leftrightarrow cx_{n+1}=(1-(1-cx_n))(1+(1-cx_n)) \Leftrightarrow$$
$$cx_{n+1}=1-(1-cx_n)^2 \Leftrightarrow 1-cx_{n+1}=(1-cx_n)^2 .$$

Од последната равенка, со помош на математичка индукција наоѓаме $1-cx_n=(1-ca)^{2^n}$, од каде следува $x_n=\frac{1-(1-ca)^{2^n}}{c}$. ■

8.3. Задача. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{c}{x_n})$, со почетен услов $x_0=a$

Решение. Забележуваме дека дека

$$x_{n+1}-\sqrt{c}=\frac{1}{2}\frac{(x_n-\sqrt{c})^2}{x_n} \text{ и } x_{n+1}+\sqrt{c}=\frac{1}{2}\frac{(x_n+\sqrt{c})^2}{x_n} .$$

Според тоа, $\frac{x_{n+1}-\sqrt{c}}{x_{n+1}+\sqrt{c}}=\frac{(x_n-\sqrt{c})^2}{(x_n+\sqrt{c})^2}=(\frac{x_n-\sqrt{c}}{x_n+\sqrt{c}})^2$, од што согласно принципот на математичка индукција следува $\frac{x_n-\sqrt{c}}{x_n+\sqrt{c}}=(\frac{a-\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}})^{2^n}$, од каде го наоѓаме x_n. ■

8.4. Задача. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1}=2x_n^2-1$, со почетен услов $x_0=a$

Решение. Нека c е број кој ја задоволува релацијата $\frac{c+c^{-1}}{2}=a$. Лесно се проверува дека низата $\{x_n\}$ зададена со

$$x_n = \frac{c^{2^n} + c^{-2^n}}{2}$$

е бараното решение. Навистина,

$$x_{n+1} = \frac{c^{2^{n+1}} + c^{-2^{n+1}}}{2} = \frac{(c^{2^n} + c^{-2^n})^2 - 2}{2} = 2\frac{(c^{2^n} + c^{-2^n})^2}{4} - 1 = 2(\frac{c^{2^n} + c^{-2^n}}{2})^2 - 1 = 2x_n^2 - 1$$

и

$$x_0 = \frac{c^{2^0} + c^{-2^0}}{2} = \frac{c + c^{-1}}{2} = a \text{ . } \blacksquare$$

8.5. Задача. Низата $\{x_n\}$ е решение на диференцната равенка $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$, кое го задоволува условот $x_{1998} = 3$. Колку е x_1?

Решение. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x_1 = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1}$, $x_2 = -\frac{1}{x_0}$, $x_3 = -\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$ и $x_4 = x_0$, што значи дека разгледуваната низа е периодична со период 4. Од $1998 = 4 \cdot 499 + 2$ наоѓаме дека $x_2 = 3$, па како $x_2 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}$ добиваме $3 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}$, од каде наоѓаме $x_1 = -2$. ■

8.6. Задача. Реши го системот диференцни равенки $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ со почетни услови $x_0 = a$ и $y_0 = b$.

Решение. Со множење на дадените равенки добиваме

$$x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n \text{ .}$$

Од последната релација и од принципот на математичка индукција следува дека $x_n y_n = ab$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Го елиминираме y_n од еквивалентниот систем равенки $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $x_n y_n = ab$ и го добиваме системот:

$$x_n y_n = ab \text{ , } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{ab}{x_n}) \text{ .}$$

Сега, втората равенка ја решаваме како во задача 8.3 и наоѓаме $\frac{x_n - \sqrt{ab}}{x_n + \sqrt{ab}} = (\frac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}})^{2^n}$, а од реалацијата $x_n y_n = ab$ го наоѓаме y_n. ■

ТЕОРЕМА ЗА МИНИМАКС

Во овој дел е разработена теоремата на минимакс, која е откриена во средината на деведесеттите години. Теоремата всушност се однесува на проблемот на постоење на максимална вредност на минимумот и наоѓање потребниот и доволни услови за егзистенција на максималната вредност на минимумот.

Самата тема содржи и дел во кој оваа теорема се применува, како и нејзината врска со полиномите на Чебишев и комплексните функции. Сакам да напоменам дека во врска со оваа проблематика постојат низа отворени прашања, како што е следниот **отворен проблем.**

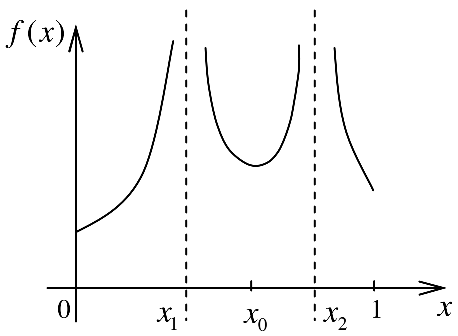
Да се реши задачата на МАЦИМУМ МИНИМОРУМ ако наместо функцијата (11)*, ја разгледуваме функцијата* $E_k(P)=\frac{1}{|PP_1|^k}+...+\frac{1}{|PP_n|^k}$, $k\geq 1$.

Пред да преминеме на разгледување на теоремата на минимакс ќе разгледаме еден пример.

Нека $x_1,x_2\in(0,1)$ се такви што $0<x_1<x_2<1$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\frac{1}{|x-x_1|}+\frac{1}{|x-x_2|},\quad x\in[0,1]\setminus\{x_1,x_2\}.$$

Од $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)=\lim\limits_{x\to x_2} f(x)=+\infty$ следува дека правите $x=x_1$ и $x=x_2$ се вертикални асимптоти за функцијата $f(x)$. Јасно, функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалите $[0,x_1);(x_1,x_2)$ и $(x_2,1]$, што заедно со претходно изнесеното значи дека таа има три локални минимуми и тоа во точките 0,1 и во $x_0\in(x_1,x_2)$, каде $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$. Притоа $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$.



Цртеж 1

Нека m е минимумот на функцијата $f(x)$, т.е.

$$m=\min\{f(0),f(1),f(x_0)\}.$$

Јасно, m ќе зависи од изборот на точките x_1 и x_2, $0<x_1<x_2<1$, т.е. $m=m(x_1,x_2)$.

Се поставува праша-њето за кои вредности на x_1 и x_2, $0<x_1<x_2<1$ минимумот m е максимален и колкава е таа максимална вредност на минимумот $m=m(x_1,x_2)$?

Максималната вредност на минимумот $m=m(x_1,x_2)$ ќе ја наречеме МАЏИМУМ МИНИМОРУМ за функцијата $f(x)$. Одговорот на претходното прашање ќе го најдеме со помош на таканаречениот асимтотски метод.

Нека $f(0)\neq f(1)$. Да ги придвижиме асимптотите $x=x_1$ и $x=x_2$ доволно малку кон помалата од вредностите $f(0)$ и $f(1)$, без да го менуваме растојанието x_2-x_1 меѓу асимптотите. При ова поместување ние всушност го транслатираме делот од графикот на $f(x)$ кој се наоѓа меѓу асимптотите, па затоа $\min f(x)$ меѓу асимптотите не се менува. Меѓутоа $\min\{f(0),f(1)\}$ се зголемува, па затоа $m=m(x_1,x_2)$ не се намалува. Според тоа, ако $f(0)\neq f(1)$, тогаш $m=m(x_1,x_2)$ не ја достигнува својата максимална вредност. Значи мора да е $f(0)=f(1)$, од што следува

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$[1-(x_1+x_2)][2x_1x_2-(x_1+x_2)]=0,$$

од што следува $x_1+x_2=1$. Според тоа асимптотите на функцијата $f(x)$ се симетрични во однос на средината на интервалот $[0,1]$, од што следува дека $x_0=\frac{1}{2}$.

Понатаму, ако $f(\frac{1}{2})<f(0)=f(1)$ и ако ги придвижиме асимптотите кон средината на интервалот, при што ја запазуваме симетричноста за да $f(0)=f(1)$, добиваме дека $m(x_1,x_2)=f(\frac{1}{2})$ се зголемува.

Ако пак $f(0)=f(1)<f(\frac{1}{2})$ и ако ги придвижиме асимптотите кон краевите на интервалот, при што ја запазуваме симетричноста за да $f(0)=f(1)$, добиваме дека $m(x_1,x_2)=f(0)=f(1)$ се зголемува.

Од досега изнесеното следува дека максималната вредност на минимумот $m(x_1,x_2)$ се достигнува кога $f(0)=f(1)=f(\frac{1}{2})$. Од $f(0)=f(1)$ следува $x_1+x_2=1$ т.е. $\frac{1}{2}-x_1=x_2-\frac{1}{2}$. Ако ставиме $x=\frac{1}{2}-x_1$, тогаш $x_1=\frac{1}{2}-x$ и $x_2=\frac{1}{2}+x$, па со смена во $f(0)=f(\frac{1}{2})$ ја добиваме равенката $\frac{1}{\frac{1}{2}-x}+\frac{1}{\frac{1}{2}+x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$, од каде ја добиваме квадратната равенка $4x^2+2x-1=0$ чии решенија се $x'=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ и $x''=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Но, $x_1<\frac{1}{2}$, што значи $x=\frac{1}{2}-x_1>0$, па затоа $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Според тоа за,

$$x_1=\frac{1}{2}-x=\frac{3-\sqrt{5}}{4} \text{ и } x_2=\frac{1}{2}+x=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

минимумот $m=m(x_1,x_2)$ ја достигнува својата максимална вредност која е

$$m=f(\tfrac{1}{2})=\frac{2}{x}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}=2(1+\sqrt{5}).$$

1. MAXIMUM MINIMORUM на функцијата $f(x)=\frac{1}{|x-x_1|}+...+\frac{1}{|x-x_n|}$

Нека $x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$ и

$$0<x_1<x_2<...<x_n<1. \qquad (1)$$

Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\frac{1}{|x-x_1|}+\frac{1}{|x-x_2|}+...+\frac{1}{|x-x_n|},\quad x\in[0,1]\setminus\{x_1,...,x_n\} \qquad (2)$$

и нека m е апсолутниот минимум на функцијата (2), т.е. $m=m(x_1,...,x_n)$, а m_n е максимумот на функцијата $m=m(x_1,...,x_n)$, т.е. m_n е MAXIMUM MINIMORUM за функцијата $f(x)$.

Лема 1. Потребен услов за максималност на апсолутниот минимум на функцијата $f(x)$ е да сите локални минимуми на $f(x)$ се еднакви меѓу себе.

Доказ. Нека сите локални минимуми на $f(x)$ не се еднакви меѓу себе. Да го разгледаме најголемиот локален минимум на $f(x)$, или еден од најголемите локални минимуми ако ги има повеќе.

Ако најголемиот локален минимум се достигнува во една од точките 0 или 1, тогаш ја поместуваме асимптотата $x=x_1$ или $x=x_n$ во спротивен правец од 0 или 1 и притоа апсолутниот минимум на функцијата (2) се зголемува, што значи дека тој не бил максимален.

Ако најголемиот локален минимум не се достигнува на краевите на интервалот $[0,1]$, тогаш тој се наоѓа меѓу асимптотите $x=x_k$ и $x=x_{k+1}$, за некое $k=1,2,...,n-1$. Ги оддалечуваме асимптотите $x=x_k$ и $x=x_{k+1}$ за некој доволно мал број $\varepsilon>0$ така што најголемиот локален минимум останува поголем од апсолутниот минимум на $f(x)$. При ова придвижување најголемиот локален минимум се намалува, а сите останати локални минимуми се зголемуваат. Според тоа, апсолутниот минимум на функцијата (2) не бил максимален. ♦

Забелешка 1. Може да се докаже дека условот од лема 1 е и доволен за да апсолутниот минимум на $f(x)$ биде максимален. При доказот на ова тврдење повторно се користи методот за придвижување на асимптотите.

Со $m^*=m^*(x_1,...,x_n)$ да го означиме најголемиот од сите локални минимуми на функцијата $f(x)$, а со m_n^* минимумот на функцијата $m^*=m^*(x_1,...,x_n)$, т.е. m_n^* е MINIMUM MAXIMORUM на $f(x)$. Ќе докажеме дека постои точка $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ во областа (1) во која најголемиот локален минимум на $f(x)$ достигнува минимум.

Навистина, најголемиот локален минимум на $f(x)$ зависи од изборот на асимптотите $x=x_1,...,x=x_n$, $0<x_1<x_2<...<x_n<1$ и е непрекината функција $m^*(x)$ од точките $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ во областа (1). Со придвижување на x кон границата на областа (1), $m^*(x)$ тежи кон бесконечност, па затоа најголемиот локален минимум на $f(x)$ достигнува минимум m_n^* во некоја внатрешна точка $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$.

Лема 2. Потребен услов за минималност на најголемиот локален минимум на функцијата $f(x)$ е да сите локални минимуми на $f(x)$ се еднакви меѓу себе.

Доказ. Да претпоставиме дека сите локални минимуми на $f(x)$ не се еднакви меѓу себе. Да го разгледаме најмалиот (или еден од најмалите) локален минимум на $f(x)$.

Ако најмалиот локален минимум на $f(x)$ се достигнува на краевите од интервалот $[0,1]$, тогаш кон него ја доближуваме најблиската асимптота $x=x_1$ или $x=x_n$ и притоа најголемиот локален минимум на $f(x)$ се намалува, што значи дека тој не бил минимален.

Ако најмалиот локален минимум не се достигнува на краевите на интервалот $[0,1]$, тогаш тој се наоѓа меѓу асимптотите $x=x_k$ и $x=x_{k+1}$, за некое $k=1,2,...,n-1$. Ги приближуваме асимптотите $x=x_k$ и $x=x_{k+1}$ за некој доволно мал број $\varepsilon>0$, но така што најмалиот локален минимум останува помал од најголемиот локален минимум на $f(x)$. При ова приближување најмалиот локален минимум се зголемува, а сите останати локални минимуми се намалуваат. Според тоа, најголемиот локален минимум на функцијата $f(x)$ не бил минимален. ♦

Забелешка 2. Може да се докаже дека условот од лема 2 е и доволен за да најголемиот локален минимум на $f(x)$ биде минимален. При доказот на ова тврдење повторно се користи методот на придвижување на асимптотите.

Лема 3. При претходно воведените ознаки важи $m_n^*\le m_n$.

Доказ. Нека $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$ е точка од областа (1) во која најголемиот локален минимум достигнува минимум. Според лема 2 сите локални минимуми на $f(x)$ се еднакви, па затоа $m(x_1^*,...,x_n^*)=m_n$. Од друга страна, за секој $x=(x_1,...,x_n)$ од областа (1) важи $m(x_1,...,x_n)\le m_n$, па затоа последното неравенство важи и за $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$, односно $m(x_1^*,...,x_n^*)\le m_n^*$, т.е. $m_n^*\le m_n$. ♦

Лема 4. При претходно воведените ознаки важи $m_n^*=m_n$.

Доказ. Нека $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ е точка од областа (1) во која најголемиот локален минимум достигнува минимум. Според лема 2 имаме $m(x_1^*,...,x_n^*)=m_n^*$. Од друга страна според забелешка 1 еднаквоста на локалните минимуми е доволен услов за да апсолутниот минимум на $f(x)$ биде максимален и како во точката $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ сите локални минимуми се еднакви, добиваме дека во оваа точка најмалиот локален минимум на $f(x)$ е максимален, т.е. $m(x_1^*,...,x_n^*)=m_n$. Значи, $m_n^*=m_n$. ♦

На крајот од овој дел ќе ја докажеме следната теорема која ни овозможува ефективно да го оцениме m_n.

Теорема 1. При произволен распоред на асимптотите

$$x=x_1,...,x=x_n,\ \ 0<x_1<x_2<...<x_n<1,$$

најголемиот локален минимум на $f(x)$ е поголем или еднаков на m_n, MAXIMUM MINIMORUM на $f(x)$.

Доказ. Нека $x=(x_1,...,x_n)$ е произволна точка од областа (1) и нека m^* е најголемиот локален минимум на $f(x)$. Бидејќи за секој $x=(x_1,...,x_n)$ од областа (1) важи $m^*(x_1,...,x_n)\geq m_n^*$, а од лема 4 имаме $m_n^*=m_n$, добиваме $m^*\geq m_n$. ♦

2. Теорема за минимакс

Во овој дел ќе ја изложиме теоремата со која се дава оценка за MAXIMUM MINIMORUM - от на функцијата

$$E_k(x)=\frac{1}{|x-x_1|^k}+...+\frac{1}{|x-x_n|^k},\ \ x\in[-1,1]\backslash\{x_1,...,x_n\},\ \ k\geq 1 \tag{3}$$

со вертикални асимптоти $x=x_1,...,x=x_n,\ -1<x_1<...<x_n<1$.

Теорема за минимакс. Ги фиксираме k и n и означуваме со $m_{k,n}$ MAXIMUM MINIMORUM - максимален од минимумите на функцијата $E_k(x)$ на $[-1,1]\backslash\{x_1,...,x_n\}$ по било која положба на асимптотите

$$x=x_1,...,x=x_n,\ \ -1<x_1<...<x_n<1.$$

Тогаш,

1) постои идеална положба на асимптотите при која минимумот на $E_k(x)$ на $[-1,1]\backslash\{x_1,...,x_n\}$ е еднаков на $m_{k,n}$;

2) таквата идеална положба на асимптотите е единствена;

3) положбата на асимптотите е идеална ако и само ако сите локални минимуми на $E_k(x)$ на $[-1,1]\backslash\{x_1,...,x_n\}$ се еднакви меѓу себе;

4) при произволна положба на асимптотите најголемиот локален минимум на $E_k(x)$ на $[-1,1]\backslash\{x_1,...,x_n\}$ е поголем или еднаков на $m_{k,n}$.

За да ја докажеме теоремата за минимакс може да се искористи начинот на размислување како во параграф 1 за функцијата $f(x)$ (формула (2)), која е добиена од $E_k(x)$ за $k=1$ и е дефинирана на $[0,1]\backslash\{x_1,...,x_n\}$. Единствен проблем може да претставува тврдењето 2) односно единственоста на идеалната положба. Ќе ја докажеме неговата точност, но повторно за функцијата $f(x)$ (формула (2)).

Нека $x=(x_1,...,x_n)$ и $\overline{x}=(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ се две различни точки од областа $0<x_1<...<x_n<1$, и нека

$$m=(m_0,m_1,...,m_n) \text{ и } \overline{m}=(\overline{m}_0,\overline{m}_1,...,\overline{m}_n)$$

се соодветно по координати од лево на десно локалните минимуми на $f(x)$.

Лема 1. Ако x и $\overline{x}$ се различни точки, тогаш $\overline{m}\neq m$ за

а) за $n=1$; б) за $n=2$.

Доказ. а) Од $x\neq\overline{x}$ имаме дека $x_1\neq\overline{x}_1$, па може да земеме дека $x_1<\overline{x}_1$. Точно е и тоа дека со растење на x_1, m_0 опаѓа, а m_1 расте. Значи од $x_1<\overline{x}_1$ имаме дека $m_0>\overline{m}_0$, а $m_1<\overline{m}_1$, па затоа $(m_0,m_1)\neq(\overline{m}_0,\overline{m}_1)$, т.е. $\overline{m}\neq m$.

б) Ако $m_1=\overline{m}_1$, тогаш $x_2-x_1=\overline{x}_2-\overline{x}_1$ (т.е. растојанието меѓу асимптотите при двете положби x и $\overline{x}$ е еднакво), па со растење на x_1, m_0 опаѓа, а m_2 расте. Значи повторно $\overline{m}\neq m$. ♦

Задача 1. Да ги фиксираме сите $x_1,...,x_n$ освен еден, на пример x_k. Како се менуваат координатите m_j на точката m при зголемување на x_k ?

Решение. Сите $m_j, j<k$ се намалуваат, а сите $m_j, j\geq k$ се зголемуваат. ♦

Задача 2. Да ги фиксираме сите $x_1,...,x_n$ освен две соседни, на пример x_k и x_{k+1}, $1\leq k\leq n-1$. Што се случува со координатите m_j на m, ако x_k и x_{k+1} се придвижуваат за исто растојание $r\neq 0$ во спротивни насоки т.е. x_k преминува во x_k+r, а x_{k+1} преминува во $x_{k+1}-r$?

Решение. За $r>0$, x_k и x_{k+1} се доближуваат, па сите $m_j, j\neq k$ се намалуваат, а m_k се зголемува. За $r<0$, се случува обратното, т.е. x_k и x_{k+1} се оддалечуваат, па сите $m_j, j\neq k$ се зголемуваат, а m_k се намалува. ♦

Забелешка. Како во претходните, така и во натамошните разгледувања при придвижувањето на x_k и x_{k+1} редоследот на асимптотите не смее да се менува, па затоа треба r да го избереме така што $|r|$ е доволно мала величина.

Нека $x=(x_1,...,x_n)$ е точка од областа $0<x_1<...<x_n<1$. Дефинираме

$$r(x)=\min\{x_1,x_2-x_1,x_3-x_2,...,x_n-x_{n-1},1-x_n\}. \tag{4}$$

Избираме броеви $r_1,r_2,...,r_n$, не сите еднакви на нула и такви што

$$|r_k|<\tfrac{r(x)}{4}, \text{ за сите } k, 1\leq k\leq n. \tag{5}$$

Од точката x со следните n операции ја наоѓаме точка $\overline{x}$:

1) x_1 преминува во $\overline{x}_1=x_1+r_1$, а x_2 во $x_2^*=x_2-r_1$,

2) x_2^* преминува во $\overline{x}_2=x_2^*+r_2$, а x_3 во $x_3^*=x_3-r_2$,

3) x_3^* преминува во $\overline{x}_3=x_3^*+r_3$, а x_4 во $x_4^*=x_4-r_3$,

$$\text{...} \tag{6}$$

n -1) x_{n-1}^* преминува во $\overline{x}_{n-1}=x_{n-1}^*+r_{n-1}$, а x_n во $x_n^*=x_n-r_{n-1}$,

n) x_n^* преминува во $\overline{x}_n=x_n^*+r_n$.

Лема 2. Ако за броевите $r_1,r_2,...,r_n$ важи неравенството (5), тогаш после секоја од n -те операции од (6), новодобиените асимптоти не излегуваат од областа $0<x_1<...<x_n<1$.

Доказ. Секоја асимптота се менува не повеќе од два пати (на пример $x_k, 2\le k\le n-1$ прво преминала во x_k^*, а потоа во $\overline{x}_k$), при што во секој чекор истата се поместува за помалку од $\frac{r}{4}$ каде што r е минималното растојание $|x_{j-1}-x_j|$, $0=x_0<x_1<...<x_n<x_{n+1}=1$, $1\le j\le n+1$. Затоа, после секоја операција асимптотите не излегуваат од областа $0<x_1<...<x_n<1$. ♦

Во следните три леми и задача 3 ќе претпоставиме дека броевите $r_1,r_2,...,r_n$ го задоволуваат неравенството (5).

Лема 3. Ако броевите $r_1,r_2,...,r_n$ се ненегативни при што не сите се еднакви на нула, тогаш за точките m и $\overline{m}$ соодветни на x и $\overline{x}$ важи неравенство $m_0>\overline{m}_0$.

Доказ. Во секој од првите $n-1$ чекори од (6) се повторува постапката од задача 2 при што од $r_k\ge 0, 1\le k\le n-1$ следува дека m_0 постојано се намалува или останува непроменет (ако $r_k=0$). Сега од задача 1 следува дека во n -от чекор m_0 повторно се намалува или останува непроменет (ако $r_n=0$). Меѓутоа, бидејќи барем еден од броевите $r_1,r_2,...,r_n$ не е еднаков на нула добиваме дека важи строго неравенство т.е. $m_0>\overline{m}_0$. ♦

Лема 4. Ако броевите $r_1,r_2,...,r_n$ се негативни и еднакви меѓу себе, тогаш за соодветните локални минимуми при распоредите x и $\overline{x}$ важат строгите неравенства $m_0<\overline{m}_0$ и $m_j>\overline{m}_j$ за секој $j, 1\le j\le n$.

Доказ. Бидејќи $r_1,r_2,...,r_n$ се еднакви меѓу себе, при премин на x во $\overline{x}$ се менува само првата координата што значи дека важи $\overline{x}_1=x_1+r_1$, и $\overline{x}_k=x_k, 2\le k\le n$. Од $r_1<0$ следува $\overline{x}_1<x_1$, па според задача 1 добиваме дека $\overline{m}_0>m_0$, а $\overline{m}_j<m_j$ за секој $j, 1\le j\le n$. ♦

Лема 5. Нека бројот r_0 го додадеме кон броевите $r_1,r_2,...,r_n$. Ако меѓу броевите $r_0=0,r_1,r_2,...,r_n$ бројот r_j е најмал, тогаш $m_j>\overline{m}_j$.

Доказ. Ако $j=0$, тогаш броевите $r_1,r_2,...,r_n$ се ненегативни, па тврдењето следува од лема 3.

Нека $j>0$. Според тоа $r_j<0$. Со помош на n - те операции од (6), ја доведуваме точката x во меѓуточка $\overline{x}^*$ при што $r_1,r_2,...,r_n$ ги земаме да се сите негативни и еднакви на r_j. Според лема 4 имаме дека $m_j > \overline{m}_j^*$. Сега со n-те операции од (6) $\overline{x}^*$ ја трансформираме во $\overline{x}$, при што оперираме со ненегативни броеви $r_k - r_j, 1 \le k \le n$. Според задача 2 во секој k - ти чекор $k \ne j$, $\overline{m}_j^*$ се намалува додека пак во j-тиот чекор немаме поместување на асимптотите, па $\overline{m}_j^*$ не се менува. Значи, $\overline{m}_j^* \ge \overline{m}_j$, од што следува дека $m_j > \overline{m}_j$. ♦

Задача 3. Да се изразат броевите $r_1, r_2, ..., r_n$, со помош на координатите x_j и $\overline{x}_j$ на точките x и $\overline{x}$?

Решение. Под претпоставка да броевите $r_1, r_2, ..., r_n$ го задоволуваат неравенството (5), доволно е да гиземеме

$$r_k = (\overline{x}_1 - x_1) + (\overline{x}_2 - x_2) + ... + (\overline{x}_k - x_k), 1 \le k \le n$$

Последното равенство непосредно следува од равенството (6). ♦

Лема 6. За произволни точки x и $\overline{x}$ од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$, $\overline{x} \ne x$, може да се најде таков N и точки

$$x_0 = x, x_1, x_2, ..., x_N = \overline{x}$$

од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$ такви што за секој $k, 1 \le k \le N$, точката x_k, со помош на n-те операции од (6), е добиена од точката x_{k-1}, при што се користат едни и исти броеви $r_1, r_2, ..., r_n$ и без да се излегува надвор од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$.

Доказ. Нека $\rho = \frac{1}{4} \min\{r(x), r(\overline{x})\}$ каде $r(x)$ и $r(\overline{x})$ се дефинирани со (4). Нека $r_1, r_2, ..., r_n$ се броевите од решението на задача 3 и нека природниот број N е таков што $r_j^0 = \frac{r_j}{N}, 1 \le j \le n$ се по апсолутна вреднсот помали од ρ. Ги поврзуваме x и $\overline{x}$ со точките

$$x(t) = (x_1 + t(\overline{x}_1 - x_1), x_2 + t(\overline{x}_2 - x_2), ..., x_n + t(\overline{x}_n - x_n)),\ 0 \le t \le 1,$$

и означуваме со $x_k = x(\frac{k}{N}), k = 0, 1, ..., N$ (каде $x_0 = x$ и $x_N = \overline{x}$).

За приозволна точка $x(t), 0 \le t \le 1$ важи $r(x(t)) \ge \min\{r(x), r(\overline{x})\}$.

Значи $|r_j^0| < \rho < \frac{1}{4} r(x_k)$ за секои j и k ($1 \le j \le n, 1 \le k \le N$).

Сега, од задача 3 следува дека со n- те операции од (6) и броевите $r_1^0, r_2^0, ..., r_n^0$, точката x_{k-1} преминува во точката x_k ($1 \le k \le N$). Притоа, од лема 2 следува дека овие точки не се надвор од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$. ♦

Лема 7. Ако x и $\overline{x}$ се точки од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$, $\overline{x} \ne x$, тогаш $m_j > \overline{m}_j$ за некое $j, 0 \le j \le n$.

Доказ. Според лема 6 ги наоѓаме броевите $r_1^0, r_2^0, ..., r_n^0$ со кои и со операциите дадени во (6) x преминува во $\bar{x}$ преку $N-1$ меѓуточка. Ако го на броевите $r_1^0, r_2^0, ..., r_n^0$ го додадеме бројот $r_0^0 = 0$ и со r_j^0 го означиме најмалиот меѓу броевите $r_0^0, r_1^0, r_2^0, ..., r_n^0$, тогаш при секој премин на x_k во x_{k+1}, $0 \le k \le N-1$, m_j се намалува т.е. $m_j^k > m_j^{k+1}, 0 \le k \le N-1$ (лема 5). Значи, за почетното m_j и крајното $\bar{m}_j$ имаме дека $m_j > \bar{m}_j$. ♦

Лема 8. Ако x и $\bar{x}$ се точки од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$, $\bar{x} \ne x$, тогаш $m_j - m_{j-1} > \bar{m}_j - \bar{m}_{j-1}$ за некој $j, 0 \le j \le n$.

Доказ. Од тоа што $x \ne \bar{x}$, следува дека постои $k, 1 \le k \le n$ таков што $x_k \ne \bar{x}_k$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_k > \bar{x}_k$. Нека j е индексот за кој разликата $x_j - \bar{x}_j = \Delta_j$ е максимална (или j е најмалиот од таквите индекси, ако Δ_j прима максимална вредност при неколку индекси j), и да докажеме дека $m_j - m_{j-1} > \bar{m}_j - \bar{m}_{j-1}$.

Да ги поместиме сите асимптоти $x = x_k$ за Δ_j во лево, со што x_k преминува во $\tilde{x}_k = x_k - \Delta_j$. При тоа локалните минимуми m_k не се менуваат; j-та асимптота се поклопува со $x = \bar{x}_j$, а за краевите од интервалот $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = 1$ и за сите асимптоти исполнети се неравенствата $\tilde{x}_k \le \bar{x}_k, 0 \le k \le n+1$.

Сега да ги поместиме сите $\tilde{x}_k$ во $\bar{x}_k$. Тогаш се менува и разликата $m_j - m_{j-1}$. Да докажеме дека за секој k за кој $\tilde{x}_k < \bar{x}_k$, со придвижување на $\tilde{x}_k$ во $\bar{x}_k$ се намалува разликата $m_j - m_{j-1}$.

За $1 \le k < j$, според задача 1 и двата броја (m_j и m_{j-1}) се зголемуваат, но m_{j-1} бидејќи е поблиску до асимптотата што се придвижува, се зголемува повеќе од m_j, па разликата $m_j - m_{j-1}$ се намалува.

За $j < k \le n$, според задача 1 и двата броја (m_j и m_{j-1}) се намалуваат, но m_j бидејќи е поблиско до асимптотата што се придвижува, се намалува повеќе од m_{j-1}, па разликата $m_j - m_{j-1}$ се намалува.

Останува да се разгледа случајот кога сите $\tilde{x}_k \equiv \bar{x}_k$ $(1 \le k \le n)$. Во тој случај од дефиницијата на j следува дека $j = 1$, па при придвижување на $\tilde{x}_0 = -\Delta_1$ во $\bar{x}_0 = 0$, вредноста на m_1 не се менува, а m_0 се зголемува што значи дека разликата $m_1 - m_0$ се намалува.

Значи, $m_j - m_{j-1} > \bar{m}_j - \bar{m}_{j-1}$, што требаше и да се докаже. ♦

Конечно, може да преминеме на потврдување на точноста на тврдењето 2) во теоремата за минимакс.

Да претпоставиме дека постојат две различни идеални положби на асимптотите, т.е. постојат две различни точки x и $\overline{x}$ во кои според тврдењето 3) сите локални минимуми на $f(x)$ се еднакви меѓу себе, т.е. $m_0 = ... = m_n$ и $\overline{m}_0 = ... = \overline{m}_n$. Ако $m_j = \overline{m}_j, 0 \le j \le n$, тогаш тоа противречи на лема 7. Ако пак $m_j \ne \overline{m}_j, 0 \le j \le n$, тогаш бидејќи

$$m_j - m_{j-1} = 0, \overline{m}_j - \overline{m}_{j-1} = 0, 1 \le j \le n$$

(од еднаквост на координатите на m и $\overline{m}$ соодветно), добиваме противречност на лема 8.

Од добиените противречности следува дека идеалната положба на асимптотите мора да е единствена. ♦

На крајот на овој дел ќе презентираме една непосредна последица на претходните разгледувања.

Лема 9. Ако $n = (m_1, ..., m_m)$ и $\overline{n} = (\overline{m}_1, ..., \overline{m}_m)$ се добиени од m и $\overline{m}$ со отстранување на нултата координата, тогаш n и $\overline{n}$ не може да се еднакви, ако x и $\overline{x}$ се различни.

Доказ. Нека $x \ne \overline{x}$. Според лема 7 имаме дека постои $j, 0 \le j \le n$ таков што е исполнето неравенството $m_j > \overline{m}_j$. Ако сега ги смениме местата на x и $\overline{x}$, тогаш повторно од лема 7 следува дека за некој $k, 0 \le k \le n$ исполнето е неравенството $m_k < \overline{m}_k$. Да забележиме дека $k \ne j$. Според принципот на Дирихле, барем еден од j и k се наоѓа меѓу 1 и n. Значи за некое $i, 1 \le i \le n$, броевите m_i и $\overline{m}_i$ не се еднакви т.е. $n \ne \overline{n}$. ♦

3. Последици од теоремата за минимакс

Теоремата за минимакс со себе влече многу убави последици. Да разгледаме некои од нив решавајќи ги следниве задачи.

Задача 1. Докажете дека $m_{k,n}$ - MAXIMUM MINIMORUM на функцијата $E_k(x)$ расте (формула (3)), кога n расте.

Решение. При некоја положба на $n+1$-та асимптота, минимумот на $E_k(x)$ на $[-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ е еднаков на $m_{k,n+1}$ и според лема 1 од параграф 1, сите локални минимуми се еднакви меѓу себе. Да отстраниме една асимптота. Тогаш сите локални минимуми ќе се намалат. Значи и m^* - најголемиот од новодобиените локални минимуми ќе биде помал од $m_{k,n+1}$. Но, од теоремата за минимакс (тврдење 4)), имаме дека $m^* \ge m_{k,n}$. Па така $m_{k,n+1} > m_{k,n}$, т.е. $m_{k,n}$ расте кога расте n. ♦

Задача 2. а) Докажете дека за $k>1$ постојат некои броеви $0<c<C$ т.ш важи $cn^k \le m_{k,n} \le Cn^k$.

б) Докажете дека за некои позитивни броеви c и C важи

$$cn\ln n \le m_{1,n} \le Cn\ln n .$$

Решение. Нека $k\ge 1$, за $n=2p$ да ги поместиме асимптотите во точките $\pm(2j-1), 1\le j\le p$ и да ја разгледаме функцијата $E_k(x)$ на $[-n,n]\setminus\{\pm(2j-1)|1\le j\le p\}$. Да означиме со

$$S^1_{k,p} = 1+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+...+\frac{1}{(2p-1)^k} ,$$
$$S^1_{k,n} = 1+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+...+\frac{1}{(2n-1)^k} .$$

При таа положба на асимптотите имаме дека $E_k(0)=2S^1_{k,p}$ е најголемиот локален минимум на $E_k(x)$ на $[-n,n]\setminus\{\pm(2j-1)|1\le j\le p\}$ и $E_k(n)=S^1_{k,n}=S^1_{k,2p}$ - минимумот на $E_k(x)$ на $[-n,n]\setminus\{\pm(2j-1)|1\le j\le p\}$.

Со пресликувањето $t:[-n,n]\to[-1,1]$, $t(\alpha)=\frac{\alpha}{n}$, сите растојанија се делат со n, од што следува дека вредноста на $E_k(x)$ се множи со n^k т.е. добиваме дека $E_k(0)=2S^1_{k,p}n^k$ е најголемиот локален минимум на $E_k(x)$ на $[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$ и $E_k(1)=S^1_{k,n}n^k=S^1_{k,2p}n^k$ - минимумот на $E_k(x)$ на множеството $[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$.

Од теоремата за минимакс (тврдење 4)) и дефиниција на $m_{k,n}$ е MAXIMUM MINIMORUM на $E_k(x)$ на $[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$ имаме дека

$$S^1_{k,n}n^k \le m_{k,n} \le 2S^1_{k,p}n^k ,$$

и

$$S^1_{k,n} \le \frac{m_{k,n}}{n^k} \le 2S^1_{k,p} .$$

а) За $k>1$, ако земеме $c=1$ и $C=2S^1_k$ каде S^1_k е збирот на редот

$$1+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+...+\frac{1}{(2N-1)^k}+...$$

и ако се искористи дека $1\le S^1_{k,n}$ и $S^1_{k,p}\le S^1_k$ добиваме дека

$$1\le S^1_{k,n} \le \frac{m_{k,n}}{n^k} \le 2S^1_{k,p} \le 2S^1_k , \quad cn^k \le m_{k,n} \le Cn^k .$$

б) Нека сега $k=1$. Редот $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{(2N-1)}+...$ дивергира, но притоа за n - тата парцијална сума важи неравенството

$$\ln n < S_n < 1+\ln n \qquad (7)$$

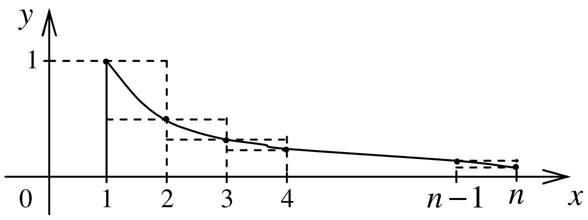
каде

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} .$$

За да го докажеме неравенството (7) ќе ја разгледаме плоштината на под графикот на функцијата $\frac{1}{x}, 1\le x\le n$. Имено, оваа плоштина изнесува

$$P=\int_1^n \frac{1}{x}dx=\ln x|_1^n=\ln n-\ln 1=\ln n$$

Од друга страна, за плоштината P имаме



Цртеж 2

$$P<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1} \text{ и } P>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n},$$

т.е. $P<S_{n-1}<S_n$ и $1+P>S_n$, т.е. $\ln n<S_n$ и $1+\ln n>S_n$, со што го докажавме неравенството (7).

За $k=1$ имаме дека $S_{1,n}^1\le\frac{m_{1,n}}{n}\le 2S_{1,p}^1$.

Од $S_n=S_{1,p}^1+S_{1,p}^0$ каде $S_{1,p}^0=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2p}$ и од $S_{1,n}^1>S_{1,n}^0$ следува

$$\frac{m_{1,n}}{n}\ge S_{1,n}^1>S_{1,n}^0=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}S_n>\frac{1}{2}\ln n,$$

т.е.

$$m_{1,n}\ge\frac{1}{2}n\ln n,$$

па може да се земе $c=\frac{1}{2}$.

Потоа од

$$S_{1,p}^1=1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2p-1}\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p}=1+S_{1,p}^0,$$

добиваме

$$\frac{m_{1,n}}{n}\le 2S_{1,p}^1=S_{1,p}^1+S_{1,p}^1\le 1+S_{1,p}^0+S_{1,p}^1=1+S_n<1+1+\ln n=2+\ln n,$$

т.е. $\frac{m_{1,n}}{n\ln n}<1+\frac{2}{\ln n}$.

Ако земеме $n\to\infty$, тогаш низата $\{\frac{m_{1,n}}{n\ln n}\}$ е ограничена т.е. постои $C>0$ таков што $\frac{m_{1,n}}{n\ln n}<C$, односно $m_{1,n}<Cn\ln n$. ♦

Задача 3. а) За $k>1$ докажете дека кога n тежи кон бесконечност, количникот $\frac{m_{k,n}}{n^k}$ тежи кон $(2-\frac{1}{2^{k-1}})S_k$ каде S_k е збирот на редот

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{N^k}+\ldots,$$

или кон $2S_k^1$ каде S_k^1 е збирот на редот

$$1+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+\ldots+\frac{1}{(2N-1)^k}+\ldots.$$

б) Докажете дека кога n тежи кон бесконечност, тогаш количникот $\frac{m_{1,n}}{n\ln n}$ тежи кон 1.

Решение. Односите $\frac{m_{k,n}}{n^k}$ и $\frac{m_{1,n}}{n\ln n}$ во задача 2 беа оценети од горе со броевите $2S_k^1$ и $1+\frac{2}{\ln n}$ соодветно, од кои последниот тежи кон 1, кога n тежи кон бесконечност. Останува уште да се покаже дека за овие количници важи истата оцена и од долу.

Нека q е произволен природен број и да го претставиме n во обликот

$$n=(q+2)p+r,\ \ 0\le r<q+2.$$

Го делиме интервалот $[-1,1]$ на q еднакви делови. Во $q-2$ дела кои лежат во внатрешноста на интервалот $[-1,1]$ сместуваме по p на еднакво растојание точки, а во два дела кои се по краевите на $[-1,1]$, по $2p$ еднакво оддалечени точки (значи вкупно $(q+2)p$ точки).

Да ги оцениме од долу локалните минимуми на $E_k(x)$ со асимптоти во избраните точки. Локалните минимуми во двата крајни дела се поголеми од $(2qp)^k S_{k,2p}^1$, а внатрешните локални минимуми поголеми од $2(qp)^k S_{k,p}^1$. Затоа,

$$m_{k,n}>2(qp)^k S_{k,p}^1$$

и

$$\frac{m_{k,n}}{n^k}>\frac{2(qp)^k S_{k,p}^1}{((q+2)(p+1))^k}=2\Lambda S_{k,p}^1.$$

Бидејќи множителот $\Lambda=\frac{(qp)^k}{((q+2)(p+1))^k}$ тежи кон $\frac{q^k}{(q+2)^k}$, кога $n\to\infty$, а q е произволен број, значи за $k>1$ е докажано.

За $k=1$ ќе го искористиме тоа дека $2S_{1,p}^1>S_{2p}>\ln 2p$, па

$$\frac{m_{1,n}}{n\ln n}>\frac{2\Lambda S_{1,p}^1}{\ln n}>\frac{\Lambda(\ln 2p)}{\ln n}.$$

Од $n=(q+2)p+r<(q+2)(p+1)$ имаме дека

$$\ln n<\ln(q+2)+\ln(p+1).$$

Па, при $n\to\infty$, односот $\frac{\Lambda(\ln 2p)}{\ln n}\to\frac{q}{q+2}$, а бидејќи q е произволен број се добива $\frac{m_{1,n}}{n\ln n}\to 1$. ♦

Понатаму во текстот ќе биде изложен алгоритамот за доаѓање до идеалната положба на асимптотите.

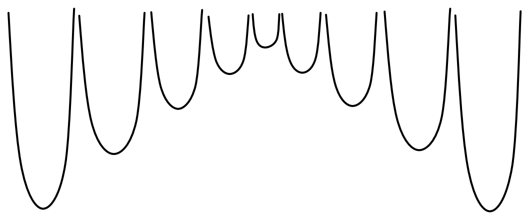
Забелешка. Алгоритамот ќе важи за произволни функции од видот

$$f(|x-x_1|)+...+f(|x-x_n|), x\in[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$$

каде функцијата $f(x)$ опаѓа на полуправата $x>0$, $f(x)$ и $-f'(x)$ се конвексни и $f'(x)\to-\infty$, кога $x\to0$.

Пред да го презентираме алгоритамот ќе го разгледаме случајот на симетрично поставени асимптоти во однос на нулата. Нумерирањето ќе биде изведено така што паровите симетрични асимптоти и паровите симетрични локални минимуми ќе бидат нумерирани од средината кон краевите на интервалот со индекси $j\geq1$, а централната асимптота или централниот локален минимум (во зависност од парноста на n) со индексот 0.

Дефиниција. Велиме дека локалните минимуми m_j образуваат "рид" ако последователно m_j не растат (цртеж 3).



Цртеж 3

Лема 1. Ако асимптотите на интервалот $[-1,1]$ се рамномерно распоредени, тогаш локалните минимуми образуваат "рид".

Доказ. Нека $f(x)$ опаѓа на полуправата $x>0$ и $f'(x)\to-\infty$, кога $x\to0$. Ја разгледуваме функцијата $F(x), x\in[-1,1]\setminus\{\pm x_1,...,\pm x_n\}$ еднаква на

$$f(|x+x_1|)+f(|x-x_1|)+...+f(|x+x_n|)+f(|x-x_n|),$$

ако бројот на асимптоти е парен, и еднаква на

$$f(|x|)+f(|x+x_1|)+f(|x-x_1|)+...+f(|x+x_n|)+f(|x-x_n|),$$

за $x\in[-1,1]\setminus\{0,\pm x_1,...,\pm x_n\}$ ако бројот на асимптоти е непарен.

Нека асимптотите се распоредени рамномерно на $[-1,1]$. Да докажеме дека тогаш локалните минимуми образуваат "рид".

Нека $y_k\geq0$ е точка на локален минимум на $F(x)$ во интервалот $[0,1]$ т.е. $F(y_k)=m_k, k\geq0$. Да ги споредиме вредностите на функцијата F во точките y_k и $y_k+\Delta, 0\leq k<n$ каде Δ е растојанието меѓу две соседни асимптоти ($\Delta=\frac{2}{2n+1}$ ако бројот на асимптоти е парен и $\Delta=\frac{1}{n+1}$ ако бројот на асимптоти е непарен). Користејќи дека $x_0=0, x_k=x_{k-1}+\Delta, 1\leq k\leq n$ ако бројот на

асимптоти е непарен, $x_1=\frac{\Delta}{2}, x_k=x_{k-1}+\Delta, 1<k\le n$ ако бројот на асимптоти е парен и $f(x)$ е опаѓачка функција, добиваме

$$F(y_k)-F(y_k+\Delta)=f(x_n-y_k)-f(y_k+x_n+\Delta)>0 .$$

Вредноста $F(y_{k+1})$ во соседната со y_k точка на минимум, не е поголема од вредноста $F(y_k+\Delta)$ бидејќи $y_k+\Delta$ и y_{k+1} не се разделени со асимптота. Значи,

$$0<F(y_k)-F(y_k+\Delta)<F(y_k)-F(y_{k+1})=m_k-m_{k+1}, 0\le k<n .$$

Од монотоност на $f(x)$ следи и тоа дека секоја точка $y_k, 1\le k<n$ се наоѓа точно на средината на интервалот меѓу најблиските асимптоти. Затоа точката y_n^* симетрична на y_{n-1} во однос на асимптотата $x=x_n$ се наоѓа лево од точката $y_n=1$. Како $y_n^*=y_{n-1}+\Delta$ имаме дека $f'(x)$, па

$$m_{n-1}=F(y_{n-1})>F(y_n^*)>F(1)=m_n .$$

Значи локалните минимуми $m_j, 0\le j\le n$ не растат со растење на j, т.е. формираат "рид". ♦

Задача 4. Нека локалните минимуми формираат "рид". Да оддалечиме било кој пар на симетрично поставени асимптоти така што соодветните на нив локални минимуми да останат еднакви. Докажете дека новите локални минимуми повторно образуваат "рид".

Решение. Ја определуваме функцијата $F(x)$ исто како во лема 1, но така што додаваме дополнителни услови: $f(x)$ да е конвексна, а $f'(x)$ конкавна на полуправата $x>0$.

Нека локалните минимуми на $F(x)$ образуваат "рид". Раздалечуваме еден пар на симетрични асимптоти со произволен индекс j така што соодветните локални минимуми m_j остануваат непроменети. При тоа поместување локалните минимуми со индекси $i<j$ се намалуваат, а сите локални минимуми со индекси $k>j$ се зголемуваат, при што измената е поголема доколку i или k се поблиску до j. Значи, новите локални минимуми повторно образуваат "рид". ♦

Алгоритам за добивање на идеалната положба на асимптотите. Да ги распоредиме асимптотите рамномерно на $[-1,1]$. Го раздалечуваме секој пар на симетрични асимптоти како во задача 4 (секој пар не помалку од N пати). Докажете дека при доволно големо N, добиениот распоред на асимптотите $x=x_j$ се стреми кон идеалниот.

Доказ. За секој пар на симетрични асимптоти со индекс j, при нивно поместување од средината кон крајот на интервалот $[-1,1]$ се добива низа од нивни положби

$$x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_N}, \dots$$

која е монотона (растечка) и ограничена, па затоа истата конвергира кон некоја вредност x_{j_0}.

Значи, точката $x_N = (x_{1_N}, x_{2_N}, \dots, x_{n_N})$ ако бројот на асимптоти е парен или $x_N = (0, x_{1_N}, x_{2_N}, \dots, x_{n_N})$ ако бројот на асимптоти е непарен, при $N \to \infty$ конвергира кон точката x_0 со координати x_{j_0}.

Имено точката x_0 го претставува идеалниот распоред на асимптотите, затоа што тогаш сите локални минимуми се еднакви меѓу себе. ♦

4. Проблемот на MAXIMUM MINIMORUM и полиномите на Чебишев

Во овој дел ќе го разгледаме проблемот на MAXIMUM MINIMORUM за функцијата

$$L(x) = \ln\frac{1}{|x - x_1|} + \dots + \ln\frac{1}{|x - x_n|} \tag{8}$$

каде $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ и $x \in [-1,1] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. При тоа, за решавање на овој проблем ќе ги користиме полиномите на Чебишев, за кои ќе докажеме неколку својства.

Лема 1. За секој $n = 0, 1, 2, \dots$ функцијата

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{9}$$

е полином со целобројни коефициенти.

Доказ. За $n = 0$ имаме $T_0(x) = \cos 0 = 1$, а за $n = 1$ важи

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x .$$

Од тригонометрискиот идентитет

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

следува

$$\cos(n-1)\alpha + \cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha \cos\alpha ,$$

па затоа

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) &= \cos[(n-1)\arccos x] + \cos[(n+1)\arccos x] = \\ &= 2\cos(n \arccos x)\cos(\arccos x) = 2x T_n(x) \end{aligned}$$

што значи

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) . \tag{10}$$

Сега тврдењето следува од $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, релацијата (10) и принципот на математичка индукција. ♦

Забелешка. Од релацијата (10) добиваме

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 ,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x ,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \text{ итн.}$$

Да забележиме дека од релацијата (10), принципот на математичка индукција и од $T_0(x)=1, T_1(x)=x$ следува дека $T_n(x)$ е полином од n - ти степен. Да ги определиме нулите и екстремите на полиномот $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$.

Од $T_n(x)=0$ следува $\cos(n\arccos x)=0$, па затоа

$$n\arccos x=\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,1,2,...,n-1$$

односно

$$x=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n},\quad k=0,1,2,...,n-1$$

се n - те нули на $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$.

Бидејќи $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ добиваме дека екстремите на $T_n(x)$ на $[-1,1]$ ги добиваме во точки за кои $T_n(x)=\pm 1$. Според тоа

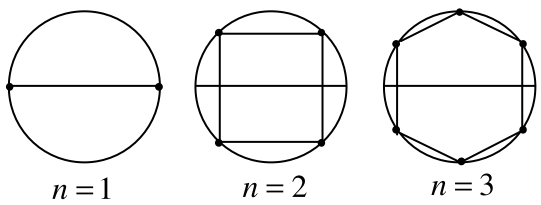
$$n\arccos x=k\pi,\quad k=0,1,2,...,n$$

односно

$$x=\cos\tfrac{k\pi}{n},\quad k=0,1,2,...,n$$

се точките во кои $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$ прима екстремни вредности.

Задача 1. Впишете во кружница со дијаметар $-1\le x\le 1$ правилен $2n$ - аголник поставен како на цртеж 4. Докажете дека нулите на полиномот $T_n(x)$ се совпаѓаат со проекциите на темињата на $2n$ - аголникот врз дијаметарот, $n\ge 1$.



Цртеж 4

Решение. Темињата на правилниот $2n$ - аголник впишан во кружница со радиус 1 во комплексна рамнина се дадени со формулата

$$z_k=\cos\tfrac{2k\pi}{2n}+i\sin\tfrac{2k\pi}{2n},\quad k=0,1,2,...,2n-1,$$

при што едно теме на $2n$ - аголникот се наоѓа во точката $z_0=1$. Секој од правилните $2n$ - аголници прикажан на цртеж 4 се добива од веќе разгледаниот $2n$ - аголник со ротација за згол $\frac{\pi}{2n}$, па затоа на неговите темиња соодветствуваат комплексните броеви

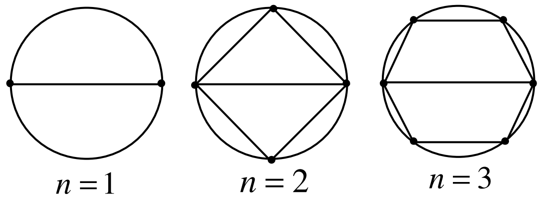
$$u_k=z_k\,e^{i\frac{\pi}{2n}}=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}+i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{2n},\quad k=0,1,...,2n-1.$$

Нивните проекции врз дијаметарот (x - оската) се точките

$$\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n},\quad k=0,1,\dots,2n-1,$$

а тоа се нулите на полиномот $T_n(x)$, при што секоја нула е броена двапати. ♦

Задача 2. Впишете во кружница со дијаметар $-1\le x\le 1$ правилен $2n$ - аголник поставен како на цртеж 5. Докажете дека точките во кои полиномот $T_n(x)$ има екстреми се совпаѓаат со проекциите на темињата на $2n$ - аголникот врз дијаметарот, $n\ge 1$.



Цртеж 5

Решение. Темињата на секој од правилните $2n$ - аголници ($n\ge 1$) прикажани на цртеж 5 се дадени со формулата

$$z_k=\cos\tfrac{2k\pi}{2n}+i\sin\tfrac{2k\pi}{2n},\quad k=0,1,2,\dots,2n-1$$

т.е. со формулата

$$z_k=\cos\tfrac{k\pi}{n}+i\sin\tfrac{k\pi}{n},\quad k=0,1,2,\dots,2n-1.$$

Нивните проекции врз дијаметарот (x - оската) се точките

$$\cos\tfrac{k\pi}{n},\quad k=0,1,2,\dots,2n-1,$$

а тоа се точките во кои полиномот $T_n(x)$ има екстреми, при што $n-1$ - те точки се броени двапати. ♦

Лема 2. Нека $T_n(x)$ е n - тиот полином на Чебишев. Ако

$$t_n(x)=\tfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x),$$

тогаш водечкиот коефициент на $t_n(x)$ е 1 и $\max\limits_{x\in[-1,1]}|t_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$, $n\ge 1$.

Доказ. За $T_1(x)=x$ и $T_2(x)=2x^2-1$ водечките коефициенти се 2^0 и $2^1=2^{2-1}$, соодветно. Нека претпоставиме дека за $T_{n-2}(x)$ и $T_{n-1}(x)$ водечките коефициенти се 2^{n-3} и 2^{n-2}. Тогаш од (10) добиваме

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$$

и како $T_n(x)$ е полином од n - ти степен, од претходната релација и од претпоставката следува дека коефициентот пред x^n во $T_n(x)$ е $2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$.

Сега од принципот на математичка индукција следува дека водечкиот коефициент во $T_n(x)$ е 2^{n-1}. Од дефиницијата на $t_n(x)$ следува дека водечкиот коефициент за овој полином е $\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}=1$, што требаше да се докаже.

Понатаму,

$$\max_{x\in[-1,1]}|t_n(x)|=\max_{x\in[-1,1]}|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}\max_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}\,. \ ♦$$

Лема 3. За секој полином $P(x)$ од n - ти степен и главен коефициент 1 важи

а) $\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|\geq\frac{1}{2^{n-1}}$, и

б) ако $\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$, тогаш $P(x)\equiv t_n(x)$.

Доказ. а) Нека претпоставиме дека постои полином $P(x)$ од n - ти степен и водечки коефициент 1 таков што

$$\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|<\frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Да ја разгледаме разликата $R(x)=t_n(x)-P(x)$. Полиномот $R(x)$ е со степен помал или еднаков на $n-1$. Ќе докажеме дека $R(x)$ има најмалку n нули, од каде ќе следува дека $R(x)\equiv 0$ т.е. $P(x)\equiv t_n(x)$.

Графикот на функцијата $y=t_n(x), x\in[-1,1]$ се наоѓа меѓу правите $y=\pm\frac{1}{2^{n-1}}$ и наизменично ги допира овие прави во точките на максимум и минимум кои се во интервалот $(-1,1)$, при што се формирани n лаци $d_1,d_2,...,d_n$. Понатаму, графикот на функцијата $y=P(x), x\in[-1,1]$ се наоѓа меѓу истите прави, но не ги допира, па затоа истиот ги сече лаците $d_1,d_2,...,d_n$. Според тоа графиците на функциите $y=t_n(x)$ и $y=P(x)$ имаат најмалку n заеднички точки, од што следува дека функцијата $y=R(x)$ има најмалку n нули од што следува дека $P(x)\equiv t_n(x)$, што е противречност со

$$\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|<\frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Од добиената противречност следува

$$\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|\leq\frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

б) Се постапува аналогно како под а), само што сега не треба да се разгледува бројот на корените, туку збирот на нивните кратности. ♦

Лема 4. Минимумот на функцијата (8) на множеството

$$x\in[-1,1]\backslash\{x_1,...,x_n\}$$

достигнува максимална вредност кога $x_1,...,x_n$ се совпаѓаат со нулите на полиномот $T_n(x)$ и таа вредност е $(n-1)\ln 2$.

Доказ. Нека $x_1,...,x_n$ се нулите на $T_n(x)$. Според тоа, $x_1,...,x_n$ се нули и на $t_n(x)$ и како водечкиот коефициент на $t_n(x)$ е еднаков на 1 добиваме $t_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

Од последното равенство добиваме

$$L(x)=\ln\frac{1}{|x-x_1|}+...+\ln\frac{1}{|x-x_n|}=\ln\frac{1}{|x-x_1|...|x-x_n|}=\ln\frac{1}{|t_n(x)|}.$$

Од лема 3 следува дека минимумот на $L(x)$ има максимална вредност кога $x_1,...,x_n$ се совпаѓаат со нулите на $t_n(x)$ и само во тој случај.

Понатаму, бидејќи $\ln x$ е монотоно растечка и непрекината функција од $\max\limits_{x\in[-1,1]}|t_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$ следува $\min\limits_{x\in[-1,1]}\frac{1}{|t_n(x)|}=2^{n-1}$ односно

$$\min_{x\in[-1,1]}\ln\frac{1}{|t_n(x)|}=\ln 2^{n-1}=(n-1)\ln 2.$$

Значи, MAXIMUM MINIMORUM на $L(x)$ е $(n-1)\ln 2$. ♦

5. Задачи на MAXIMUM MINIMORUM за точки во рамнина

Да фиксираме n точки $P_1,...,P_n$ во рамнината (или во просторот) и да земеме произволна точка P. Со $|PP_1|,|PP_2|,...,|PP_n|$ да го означиме растојанието од точката P до $P_1,P_2,...,P_n$, соодветно и да ја разгледаме функцијата $L(P)$ дефинирана со:

$$L(P)=\ln\frac{1}{|PP_1|}+\ln\frac{1}{|PP_2|}+...+\ln\frac{1}{|PP_n|}. \tag{11}$$

И овде се поставува прашањето, како треба да бидат избрани точките $P_1,...,P_n$ во круг K (или во топка T) за да минимумот на функцијата $L(P)$ во кругот K (во топката T) биде максимален? За да одговориме на поставеното прашање ќе докажеме неколку помошни тврдења.

Лема 1. Нека $z_j,\, j=1,2,...,n$ се n - те корени на единицата, т.е.

$$z_j=\cos\frac{2\pi j}{n}+i\sin\frac{2\pi j}{n},\quad j=1,2,...,n.$$

Тогаш збирот

$$S_k=z_1^k+z_2^k+...+z_n^k$$

е еднаков на нула за секој $k=1,2,...,n-1$.

Доказ. Збирот S_k го множиме со z_1^k. Од $z_j\, z_1=z_{j+1}$ за $j=1,...,n-1$ и $z_n\, z_1=z_1$ следува

$$\begin{aligned}S_k\, z_1^k&=(z_1\, z_1)^k+(z_2\, z_1)^k+...+(z_{n-1}\, z_1)^k+(z_n\, z_1)^k=\\&=z_2^k+z_3^k+...+z_n^k+z_1^k=S_k\end{aligned}$$

односно

$$S_k(z_1^k - 1) = 0 .$$

Но, за секој $k = 1, 2, ..., n-1$ важи $z_1^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \neq 1$, па од последното равенство следува $S_k = 0$. ♦

Последица 1. За секој полином

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z , \; c_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, ..., n-1$$

точно е равенството

$$Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n) = n , \tag{12}$$

каде $z_1, z_2, ..., z_n$ се n - те корени на единицата.

Доказ. За секој $j = 1, 2, ..., n$ важи $z_j^n = 1$. Според тоа

$$Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n) = n + c_1 S_{n-1} + c_2 S_{n-2} + ... + c_{n-1} S_1 = 0 . ♦$$

Лема 2. За секој полином

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z , \; c_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, ..., n-1$$

важи:

а) $\max\limits_{|z| \leq 1} |Q(z)| \geq 1$;

б) Ако $|Q(z)| \leq 1$ за $|z| = 1$, тогаш $Q(z) \equiv z^n$.

Доказ. а) Нека претпоставиме дека $\max\limits_{|z| \leq 1} |Q(z)| < 1$. Тогаш $|Q(z_j)| < 1$, каде $z_j, j = 1, 2, ..., n$ се n - те корени на единицата, па од последица 1 следува

$$n = Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n) = |Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n)|$$
$$\leq |Q(z_1)| + |Q(z_2)| + ... + |Q(z_n)| < n ,$$

што е противречност. Според тоа, $\max\limits_{|z| \leq 1} |Q(z)| \geq 1$.

б) Нека $|Q(z)| \leq 1$ за $|z| = 1$. Тогаш, од (12) следува

$$Q(z_1) = Q(z_2) = ... = Q(z_n) = 1$$

(ако збирот на n комплексни броеви по модул помали или еднакви на 1 е еднаков на n, тогаш секој собирок е еднаков на 1, неравенство на триаголник). Значи полиномот $Q(z) - 1$ има n различни нули $z_j, j = 1, 2, ..., n$ и како $Q(z)$ е полином од n - ти степен добиваме дека

$$Q(z) - 1 = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) = z^n - 1$$

т.е. $Q(z) \equiv z^n$. ♦

Последица 2. Ако

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z + c_n , \; c_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, ..., n$$

и $Q(z) \leq 1$, кога $|z| = 1$, тогаш $Q(z) \equiv z^n$.

Доказ. Да го помножиме $Q(z)$ со z. Бидејќи $|zQ(z)| \leq 1$, кога $|z| = 1$, од лема 2 следува $zQ(z) \equiv z^{n+1}$, па затоа $Q(z) \equiv z^n$. ♦

Теорема 1. Нека $P_1,...,P_n$ се n точки во рамнината. Тогаш минимумот на функцијата (11) кога P припаѓа на произволна кружница прима најголема вредност ако и само ако точките $P_1,...,P_n$ се совпаѓаат со нејзиниот центар.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека кружницата е единечна, па затоа на секоја нејзина точка P соодветствува комплексен број $z=\cos\phi+i\sin\phi, \phi\in[0,2\pi]$. Растојанијата $|PP_j|$ за $j=1,2,...,n$ се еднакви на $|z-z_j|$, $j=1,2,...,n$, соодветно, каде $z_j, j=1,2,...,n$ се комплексните броеви кои соодветствуваат на точките $P_j, j=1,2,...,n$.

Ако $z_j, j=1,2,...,n$ се нулите на полиномот

$$Q(z)=z^n+c_1z^{n-1}+...+c_{n-1}z\ ,\ c_i\in\mathbf{C}, i=1,2,...,n-1,$$

тогаш $Q(z)=(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$, па затоа

$$|Q(z)|=|z-z_1|\cdot|z-z_2|\cdot...\cdot|z-z_n|=|PP_1|\cdot|PP_2|\cdot...\cdot|PP_n|.$$

Според лема 2 имаме $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|\geq 1$, од каде $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|=1$ ако $Q(z)=z^n$ т.е. $z_1=z_2=...=z_n=0$.

Од $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|\geq 1$ следува

$$\min_{|z|=1}\frac{1}{|Q(z)|}=\frac{1}{\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|}\leq\frac{1}{1}=1,$$

што значи дека $\min\limits_{|z|=1}\frac{1}{|Q(z)|}$ достигнува најголема вредност 1 кога $Q(z)=z^n$ т.е. $z_1=z_2=...=z_n=0$, односно кога точките $P_1,...,P_n$ се совпаѓаат со центарот на кружницата. Понатаму,

$$\min L(P)=\min[\ln\frac{1}{|PP_1|}+\ln\frac{1}{|PP_2|}+...+\ln\frac{1}{|PP_n|}]=\min\ln\frac{1}{|PP_1||PP_2|\cdot...\cdot|PP_n|}$$
$$=\min_{|z|=1}\ln\frac{1}{|Q(z)|}=\ln\min_{|z|=1}\frac{1}{|Q(z)|},$$

па добиваме дека минимумот на функцијата $L(P)$ прима најголема вредност кога точките $P_1,...,P_n$ се совпаѓаат со центарот на кружницата.

6. Дополнителни забелешки

Претходните разгледувања ќе ги комплетираме како со забелешки за разработуваната тема, така и со тврдења во врска со полиномите на Чебишев.

Теорема 1. За секој полином

$$Q(z)=z^n+d_1z^{n-1}+...+d_{n-1}z+d_n,\ \ d_i\in\mathbf{R}$$

важи

а) $\max\limits_{|z|\leq 1}|\mathrm{Re}Q(z)|\geq 1$, и

б) ако $|\mathrm{Re}Q(z)|\leq 1$, кога $|z|=1$, тогаш $Q(z)=z^n$.

Доказ. Имаме $\mathrm{Re}Q(z)=\frac{1}{2}[Q(z)+\overline{Q(z)}]$. За $|z|=1$ важи $\overline{z}=\frac{1}{z}$ па затоа $\mathrm{Re}Q(z)=\frac{1}{2}[Q(z)+Q(\frac{1}{z})]$, односно

$$z^n\cdot\mathrm{Re}Q(z)=M(z)=\frac{1}{2}z^{2n}+P(z)+\frac{1}{2}$$

каде $P(z)$ е полином со степен помал или еднаков на $2n-1$ и нулти слободен член.

Според лема 1 од параграф 5 за $2n$ - те корени на единицата: $\theta_1,\theta_2,...,\theta_{2n}$ важи

$$P(\theta_1)+P(\theta_2)+...+P(\theta_{2n})=0,$$

а од последица 1 од истиот параграф имаме

$$M(\theta_1)+M(\theta_2)+...+M(\theta_{2n})=2n.$$

Конечно,

а) $\max\limits_{|z|\le 1}|M(z)|\ge 1 \Leftrightarrow \max\limits_{|z|\le 1}|\mathrm{Re}Q(z)|\ge 1$

б) ако $|M(z)|\le 1$, кога $|z|=1$, тогаш $M(\theta_j)=1$ за секој $j=1,2,...,2n$, што значи $M(z)=\frac{1}{2}z^{2n}+\frac{1}{2}$ од што следува $Q(z)=z^n$. ♦

Забелешка. Бидејќи при $|z|=1$, т.е. $z=\cos\phi+i\sin\phi,\phi\in[0,2\pi]$ важи $z^k=\cos k\phi+i\sin k\phi$, односно

$$\mathrm{Re}Q(z)=\cos n\phi+d_1\cos(n-1)\phi+...+d_k\cos(n-k)\phi+...+d_{n-1}\cos\phi+d_n$$

теорема 1 може да се преформулира на следниот начин:

Теорема 1*. За секој тригонометриски полином

$$f(\phi)=\cos n\phi+d_1\cos(n-1)\phi+...+d_n$$

каде $d_i\in\mathbf{R},i=1,2,...,n$ важи

а) $\max\limits_{\phi\in[0,2\pi)}|f(\phi)|\ge 1$

б) ако $|f(\phi)|\le 1$, кога $\phi\in(0,2\pi)$, тогаш $f(\phi)=\cos n\phi$.

Забелешка. Во последниот облик теоремата е еквивалентна на лема 3 од параграф 4, бидејќи секој полином од x со степен n со реални коефициенти и коефициент 2^{n-1} пред x^n со смената $x=\cos\phi$ се сведува на тригонометрискиот полином $f(\phi)$.

Бидејќи со смената $x=\cos\phi$ полиномот на Чебишев $T_n(x)$ по дефиниција се сведува на $\cos n\phi$, претходната теорема го добива обликот:

Секој полином $P(x)$ од n - ти степен со реални коефициенти и коефициент 2^{n-1} пред x^n може еднозначно да се запише во обликот

$$T_n(x)+d_1T_{n-1}(x)+...+d_kT_{n-k}(x)+...+d_{n-1}T_1(x)+d_n.$$

Притоа, ако $|x|\le 1$, тогаш $|P(x)|\ge 1$, а ако пак $\max\limits_{|x|\le 1}|P(x)|=1$, тогаш $d_j=0$, $j=1,2,...,n$ т.е. $P(x)=T_n(x)$.

На крајот од нашите разгледувања ќе презентираме уште еден доказ на лема 2 и последица 2 од параграф 5. Претходно ќе ја докажеме следната лема.

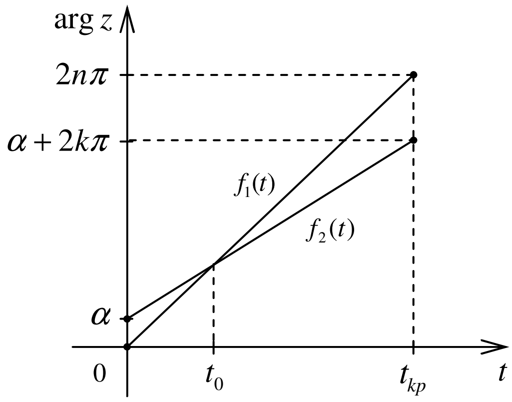
Лема 1. Нека две материјални точки со константни брзини се движат по кружница во ист правец, така што првата тргнува и завршува во точката A, при што n пати го обиколува кругот, а втората истовремено тргнува и завршува во точката B, при што k пати го обиколува кругот, $k<n$. Тогаш,

а) во некој момент точките ќе се совпаднат,

б) точките ќе се совпаднат најмалку $n-k$ пати, и

в) тврдењата под а) и б) важат и кога втората точка не се движи постојано во ист правец.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точките се движат по единечната кружница $|z|=1$ и дека нивните координати се $z_i=\cos\phi_i+i\sin\phi_i, i=1,2$. Притоа во моментот $t=0$ за првата точка нека важи $\arg z_1=0$, а за втората $\arg z_2=\alpha, \alpha\in[0,2\pi)$. Во крајниот момент $t=t_{kp}$, по поминувањето на n, односно k круга, $k<n$ имаме $\arg z_1=2n\pi$, а $\arg z_2=\alpha+2k\pi$ и важи $\alpha+2k\pi<2n\pi$. Графиците на функциите $f_1(t)$ и $f_2(t)$ со кои се дадени промените на аргументите на првата, односно втората точка, во зависност од времето $t\in[0,t_{kp}]$, се прави (цртеж 6).



Цртеж 6

а) Од $\alpha\geq 0$ следува $f_1(0)\leq f_2(0)$, а од $k<n$ и $\alpha\in[0,2\pi)$ следува $f_2(t_{kp})=\alpha+2k\pi<2n\pi=f_1(t_{kp})$. Според тоа графиците на $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се сечат во точка со апциса $t=t_0$, што значи дека во тој момент $\arg z_1=\arg z_2$ т.е. точките се совпаѓаат.

б) Во моментот $t=t_{kp}$, разликата на ординатите на точките $f_1(t)$ и $f_2(t)$ со апциси $t=t_{kp}$ е $2n\pi-(\alpha+2k\pi)=2(n-k)\pi-\alpha$.

Ако $\alpha > 0$, тогаш $2j\pi < 2(n-k)\pi - \alpha$, за $j = 0,1,...,n-k-1$, што значи дека во точно $n-k$ моменти графиците на $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се на растојание $2j\pi$, т.е. точките ќе се совпаѓаат.

Ако $\alpha = 0$, тогаш точките ќе се совпаднат $n-k+1$ пати.

в) Нека втората точка не се движи постојано во ист правец. Според тоа графикот на функцијата $f_2(t)$ ќе биде искршена линија за која повторно ќе важи $f_1(0) \le f_2(0)$ и $f_2(t_{kp}) < f_1(t_{kp})$, што значи дека важи тврдењето под а). Точноста на тврдењето под б) следува од фактот што максималната вредност која $f_2(t)$ може да ја достигне е $\alpha + 2k\pi$, па затоа најмалата разлика на ординатите во $t = t_{kp}$ е $2(n-k)\pi - \alpha$. Во секој друг случај оваа разлика е поголема, па затоа двете точки ќе се совпаднат најмалку $n-k$ пати. ♦

Лема 2. Ако

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z + c_n, \; c_i \in \mathbf{C}, i = 1,2,...,n \tag{13}$$

тогаш $\max\limits_{|z|=1} |Q(z)| \ge 1$ и $\max\limits_{|z|=1} |Q(z)| = 1$ ако и само ако $Q(z) = z^n$.

Доказ. Нека $z = \cos\phi + i\sin\phi, \phi \in [0,2\pi]$ се движи по кружницата $|z| = 1$. Тогаш $z^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$ ја обиколува единечната кружница n пати, што значи функцијата $L_1(\phi)$, со која е дадена промената на $\arg z^n$ е линеарна функција за која важи $L_1(0) = 0$ и $L_1(2\pi) = 2n\pi$. Полиномот (13) го запишуваме во облик

$$Q(z) = z^n + D(z),$$

каде

$$D(z) = c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z + c_n, \; c_i \in \mathbf{C}.$$

i) Нека $D(z)$ нема нули на кружницата $|z| = 1$. Да означиме $\arg D(1) = \alpha \in [0,2\pi)$ и да ја разгледаме непрекинатата функција $L_2(\phi)$ со која е дадена промената $\arg D(z)$, кога $z = \cos\phi + i\sin\phi, \phi \in [0,2\pi]$. Ако збирот на кратностите на корените на $D(z)$ во кругот $|z| < 1$ е еднаков на k, тогаш $L_2(2\pi) = \alpha + 2k\pi$. Бидејќи $k \le n-1$, збирот на кратностите на корените на корените на $D(z)$ е помал или еднаков на степенот $n-1$ на $D(z)$, имаме $\alpha + 2k\pi < 2n\pi$, т.е. $L_2(2\pi) < L_1(2\pi)$.

Од друга страна од $\arg D(1) = \alpha$ имаме $L_2(0) = \alpha$, па како $\alpha \ge 0$ добиваме $L_2(0) \ge L_1(0)$.

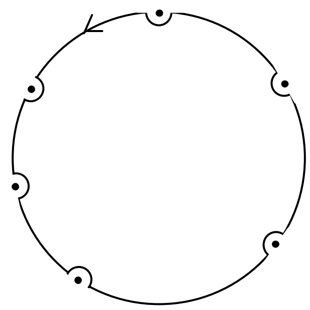
Значи, графиците $L_1(\phi)$ и $L_2(\phi)$ се сечат во $\phi = \phi_0 \in [0,2\pi)$, т.е. во $z_0 = \cos\phi_0 + i\sin\phi_0$, комплексните броеви z^n и $D(z)$ имаат еднакви аргументи: $\arg D(z_0) = \arg z_0^n$. Но $D(z)$ нема корени на кружницата $|z| = 1$, а z_0 е точка од таа кружница, па затоа $|D(z_0)| = \rho > 0$. Конечно,

$|Q(z_0)|=|z_0^n|+|D(z_0)|$

$=|\cos(\arg z_0^n)+i\sin(\arg z_0^n)+\rho\cos(\arg D(z_0))+i\rho\sin(\arg D(z_0))|$

$=|(1+\rho)\cos(\arg z_0^n)+i(1+\rho)\sin(\arg z_0^n)|=1+\rho>1$.

ii) Нека сега $D(z)$ има r корени $z_1,z_2,...,z_r$ на кружницата, $z_j=\cos\phi_j+i\sin\phi_j, 1\le j\le r$ и нека збирот на кратностите на тие корени е еднаков на s , а збирот на кратностите на корените на $D(z)$ во кругот $|z|<1$ е еднаков на k . Тогаш, $s+k\le n-1$, па затоа $r\le s<n-k$.



Цртеж 7

Да ја разгледаме контурата K_ε која се совпаѓа со кружницата $|z|=1$ освен во точките $z_j, j=1,2,...,r$ кои ги заобиколуваме со полукружници со радиуси ε кои лежат внатре во кругот $|z|\le 1$ (цртеж 7). Но, и тука прирастот на $\arg D(z)$ при движењето на точката z по контурата K_ε е еднаков на $2k\pi$. Кога $\varepsilon\to 0$ ја определуваме функцијата $L_2(\phi)$ со која е дадена промената на $\arg D(z)$, на

$$z=\cos\phi+i\sin\phi, \phi\in[0,2\pi] .$$

Оваа функција е прекината во точките $\phi_1,\phi_2,...,\phi_r$ кои соодветствуваат на ко-рените $z_1,z_2,...,z_r$, при што скокот на $L_2(\phi)$ во ϕ_j е еднаков на $-\pi k_j$, каде што k_j е кратноста на коренот z_j .

Функциите $L_2^0(\phi),L_2^1(\phi),...,L_2^{n-k-1}(\phi)$ ги добиваме од $L_2(\phi)$ со поместување на нејзиниот график нагоре за $2j\pi, 0\le j\le n-k-1$. Овие $n-k$ функции се сечат со графикот на линеарната функција $L_1(\phi)$. Бидејќи $n-k>r$, постои точка со апциса ϕ_0 таква што $\phi_0\ne\phi_i, i=1,2,...,r$. Точката $z_0=\cos\phi_0+i\sin\phi_0$ припаѓа на кружницата $|z|=1$ и таа не е корен на $D(z)$, т.е. $D(z_0)\ne 0$. Сега аналогно на доказот од i) имаме

$$|Q(z_0)|=1+|D(z_0)|>1 .$$

Конечно,

- ако $D(z)\ne 0$, тогаш $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|>1$

- ако $|Q(z)|\le 1$, за $|z|=1$, тогаш $D(z)\equiv 0$ т.е. $Q(z)=z^n$. ♦

ЕДНА КЛАСА ПРОБЛЕМИ НА БОЕЊЕ ОД РЕМЗИЕВ ТИП

Како што е кажано и во насловот, предмет на нашите разгледувања во овој дел ќе биде една класа на боења од Ремзиев тип. Пред да преминеме на разгледување на поодделни проблеми ќе дефинираме боење на множество и ќе воведеме уште неколку поими кои ќе ги користиме.

Нека е дадено множеството X. Секое пресликување $f: X \to \{1,...,k\}$ го нарекуваме **боење** на множеството X во k бои, а пресликувањето f го нарекуваме **функција на боењето**.

За дадена функција на боење f дефинираме релација α со $i\alpha j$ ако и само ако $f(i)=f(j)$. Јасно, α е релација за еквиваленција, па затоа множеството X е поделено на дисјунктни класи на еквиваленција. За множеството Y, $Y \subseteq X$ ќе велиме дека е **монохроматско**, ако Y е подмножество на една од класите на еквиваленција, т.е. ако $f|_Y$ е константна функција.

Оваа строго формална дефиниција за боење на множество се совпаѓа со нашата интуитивна претстава за поимот боење, па затоа во натамошните разгледувања ќе се користиме токму со интуитивната претстава за боење на множество.

Ремзиевата теорија е важна гранка на комбинаториката, која започнала да се развива во 1930 година со работите на англискиот математичар Френк П. Ремзи. Едноставно кажано нејзината цел и основна замисла е од секое "неправилно" боење на некоја структура (точки на правата, рамнината, на произволно множество и слично) може да се оддели некоја "правилна"-монохроматска структура, доколку почетната структура е доволно голема. Класичен пример на проблем од Ремзиев тип е: "*Да се докаже дека во секое боење на страните и дијагоналите на правилен шестаголник со две бои може да се најде монохроматски триаголник*", чие решение се наоѓа со елементарна примена на принципот на Дирихле. Меѓутоа, малку посложениот проблем од истиот тип: "*Да се најде правилен $n-$аголник со најмал број на страни така што при секое боење на неговите страни и дијагонали во k бои постои монохроматски триаголник*", е нерешен проблем. Имено, за $k=2$ се знае дека $n=6$, за $k=3$ се знае дека $n=17$, но веќе за $k=4$ се знае само дека $47 \le n \le 53$, а за поголеми вредности на k не постојат дури ни вакви оценки. Да споменеме само дека ова е прилично едноставен проблем во теоријата на Ремзи, која е доста сложена и нуди бројни нерешени комбинаторни проблеми.

1. Основни комбинаторни принципи и принцип на Дирихле

Пред да преминеме на разгледување на проблемите на боење од Ремзиев тип ќе се осврнеме на принципот на Дирихле и на основните комбинаторни принципи кои ќе ги користиме во нашите разгледувања. Притоа ќе ги користиме следните поими и ознаки.

Нека n е природен број и $\mathbf{N}_n=\{1,2,...,n\}$. За множеството A ќе велиме дека е ***конечно,*** ако постои биекција $f:A\to\mathbf{N}_n$ за некој природен број n. Притоа ќе велиме дека A има n елементи и ќе означуваме $|A|=n$. Во нашите натамошни разгледувања множествата ќе бидат конечни, ако тоа не е поинаку кажано.

Принцип на еднаквост. Ако постои биекција меѓу множествата A и B, тогаш $|A|=|B|$.

Доказ. Нека $f:B\to A$ и $g:A\to\mathbf{N}_n$ се биекции. Тогаш, пресликувањето $g\circ f:B\to\mathbf{N}_n$ дефинирано со $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ е биекција. Според тоа, $|A|=n=|B|$. ♦

Принцип на збир. **а)** Ако $A\cap B=\varnothing$, тогаш $|A\cup B|=|A|+|B|$.

б) Ако $A_1,A_2,...,A_k$ е фамилија од k, $k\geq 2$ по парови дисјунктни множества, т.е. множества за кои важи $A_i\cap A_j=\varnothing$, за $i\neq j$, тогаш

$$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_k|=|A_1|+|A_2|+...+|A_k|.$$

Доказ. **а)** Нека $f:A\to\mathbf{N}_n$ и $g:B\to\mathbf{N}_m$ се биекции. Тогаш пресликувањето $h:A\cup B\to\mathbf{N}_{n+m}$ дефинирано со

$$h(a)=f(a),\ a\in A \text{ и } h(b)=g(b)+n,\ b\in B$$

е добро дефинирано пресликување. Лесно се проверува дека ова пресликување е биекција. Значи, $|A\cup B|=n+m=|A|+|B|$.

б) Според а) добиваме дека тврдењето важи за $k=2$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k=p$. Бидејќи

$$(A_1\cup A_2\cup...\cup A_p)\cap A_{p+1}=\varnothing,$$

од а) и од индуктивната претпоставка за $k=p+1$ следува

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup...\cup A_p\cup A_{p+1}|&=|(A_1\cup A_2\cup...\cup A_p)\cup A_{p+1}|\\&=|A_1\cup A_2\cup...\cup A_p|+|A_{p+1}|\\&=(|A_1|+...+|A_p|)+|A_{p+1}|=|A_1|+...+|A_p|+|A_{p+1}|\end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи за $k=p+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $k\geq 2$. ♦

Принцип на производ. Декартовиот производ на конечно многу конечни множества е конечно множество и неговиот број на елементи е еднаков на производот на бројот на елементите на соодветните множества, т.е.

$$|A_1\times A_2\times...\times A_k|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot...\cdot|A_k|, \text{ за } k\geq 2.$$

Доказ. Нека A_1 и A_2 се конечни множества такви што $|A_1|=m$ и $|A_2|=n$. Тогаш, $A_1=\{a_1,...,a_m\}$ и $A_2=\{b_1,...,b_n\}$. За множеството $A_1\times A_2$ имаме $A_1\times A_2=\bigcup_{i=1}^{n}A_1\times\{b_i\}$ и $A_1\times\{b_i\}\cap A_2\times\{b_j\}=\varnothing$, за $i\neq j$ од што според принципот на збир следува

$$\begin{aligned}|A_1\times A_2|&=|A_1\times\{b_1\}|+|A_1\times\{b_2\}|+...+|A_1\times\{b_n\}|\\&=\underbrace{m+m+...+m}_{n\text{ pati}}=mn=|A_1|\cdot|A_2|\end{aligned}.$$

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k=p$. Од доказот за $k=2$ и од индуктивната претпоставка за $k=p+1$ следува

$$\begin{aligned}|A_1\times A_2\times...\times A_p\times A_{p+1}|&=|(A_1\times A_2\times...\times A_p)\times A_{p+1}|=|A_1\times A_2\times...\times A_p|\cdot|A_{p+1}|\\&=(|A_1|\cdot...\cdot|A_p|)\cdot|A_{p+1}|=|A_1|\cdot...\cdot|A_p|\cdot|A_{p+1}|\end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи за $k=p+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $k\geq 2$. ♦

Пример 1. Нека $|A|=n$ и $|B|=m,\ m,n>0$. Докажи дека множеството од сите пресликувања од A во B: $B^A=\{f|\ f:A\to B\}$ има m^n елементи, т.е. $|B^A|=|B|^{|A|}=m^n$.

Решение. Нека $A=\{a_1,...,a_n\}$ и $B=\{b_1,...,b_m\}$. Ако $f:A\to B$ е произволно пресликување, тогаш $(f(a_1),f(a_2),...,f(a_n))\in B^n=\underbrace{B\times B\times...\times B}_{n\text{ pati}}$. Јасно, за секој $(c_1,c_2,...,c_n)\in B^n$ со $f(a_i)=c_i, i=1,2,...,n$ е дефинирано пресликување $f:A\to B$. Според тоа, пресликувањето $\phi:B^A\to B^n$ дефинирано со

$$\phi(f)=(f(a_1),f(a_2),...,f(a_n))$$

е сурјекција. Понатаму, ако $\phi(f)=\phi(g)$ следува дека

$$(f(a_1),f(a_2),...,f(a_n))=(g(a_1),g(a_2),...,g(a_n))$$

па затоа $f(a_i)=g(a_i), i=1,2,...,n$ што значи дека $f=g$, т.е. $\phi:B^A\to B^n$ е инјекција. Докажавме дека $\phi:B^A\to B^n$ е биекција. Сега, ако ги примениме принципите на еднаквост и производ добиваме

$$|B^A|=|B^n|=|B|^n=m^n=|B|^{|A|}.\ ♦$$

Принцип на Дирихле (елементарен случај). Нека n е природен број. Ако $n+1$ предмети се распоредени на произволен начин во n кутии, тогаш барем во една кутија има два предмети.

Доказ. Нека претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет. Бидејќи има само n кутии добиваме дека во нив се распоредени најмногу $n\cdot 1=n$ предмети, што противречи на претпоставката дека се распоредени $n+1$ предмети. ♦

Забелешка **1.** Принципот на Дирихле кажува дека постои кутија во која има барем два предмети, но не дава начин, т.е. алгоритам како таа кутија да се најде.

Пример 2. На еден шаховски турнир учествувале n шахисти, При што секој шахист играл со секој шахист по една партија. Докажете дека во секој момент на турнирот постојат барем двајца шахисти со еднаков број до тогаш одиграни партии.

Решение. Можни се два случаи:

а) постои барем еден шахист кој играл со сите други шахисти, и

б) не постои шахист кои играл со сите други шахисти.

Во првиот случај бројот на партиите кои секој шахист ги одиграл во произволен момент припаѓа на множеството $\{1,2,...,n-1\}$, а во вториот случај на множеството $\{0,1,2,...,n-2\}$.

Бидејќи и двете множества имаат по $n-1$ елемент во секој момент постојат барем двајца учесници на турнирот со еднаков број одиграни партии во тој момент. ♦

Принцип на Дирихле (општ случај). Нека $kn+r$ предмети $r\geq 1$ се сместени во n кутии. Тогаш, барем во една кутија се сместени најмалку $k+1$ предмет.

Доказ. Нека претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по k предмет. Бидејќи има само n кутии добиваме дека во нив се распоредени најмногу nk предмети, што противречи на претпоставката дека се распоредени $kn+r>nk$ предмети. ♦

Пример 3. Во Република Македонија има повеше од 2150000 жители и на главата на секој од нив иа најмногу по 300000 влакна. Докажи дека во Македонија има барем 8 луѓе со ист број валкна на главата.

Решение. Сите жители ќе ги поделиме во групи според бројот на влакната на главата. Вакви групи има 300001, т.е. група со 0 влакна, група со 1 влакно, ..., група со 300000 влакна, а луѓе има најмалку 2150000. Бидејќи

$$2150000=7\cdot 300001+49993$$

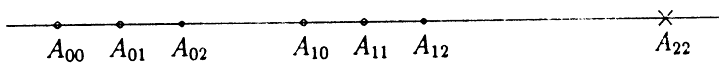
од обопштениот принцип на Дирихле следува дека мора да постои група во која има најмалку 8 луѓе со ист број влакна на главата. Доколку тоа не е случја во секоја група ќе има најмногу по 7луѓе, па нивниот број ќе биде 2100007, а тоа противречи на бројот на жителите во Републиката. ♦

2. Една класа на боење од Ремзиев тип

Во последниот дел од нашите разгледувања ќе се задржиме на нашата тема, а тоа се некои проблемо на боења од Ремзиев тип. Притоа, ќе разгледаме боења само на права и во рамнина, со тоа што некои од проблемите ќе ги решаваме користејќи боење во простор.

1. *Права е обоена во две бои. Докажи, дека постои отсечка чии крајни точки и средина се монохроматски.*

Решение. На правата земаме девет тројки на точки чии координати имаа облик $(x, x+1, x+2)$, (за девет различни вредности на x). Секоја тројка на точки може да се обои во две бои на $2^3=8$ различни начини и како имаме 9 тројки на точки, од принципот на Дирихле следува дека постојат две тројки кои се обоени на ист начин. Од друга страна во секоја тројка постојат две монохроматски точки. На таков начин добивме четири точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11} кои се монохроматски, да кажеме во бела боја, при што $\overrightarrow{A_{00}A_{01}}=\overrightarrow{A_{10}A_{11}}$ (црт. 1).



Црт. 1

Нека точките A_{02} и A_{12} ги избереме така што точките A_{01} и A_{11} се средини на отсечките $A_{00}A_{02}$ и $A_{10}A_{12}$, соодветно. Ако било која од овие точки е бела, тогаш бараната тројка точки е најдена. Ако и двете точки A_{02} и A_{12} се црни, тогаш избираме точка A_{22} така што точката A_{12} е средина на отсечката $A_{02}A_{22}$. Ако точката A_{22} е црна, тогаш бараната тројка е (A_{02}, A_{12}, A_{22}), а ако е бела, тогаш бараната тројка е (A_{00}, A_{11}, A_{22}). ♦

2. *Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.*

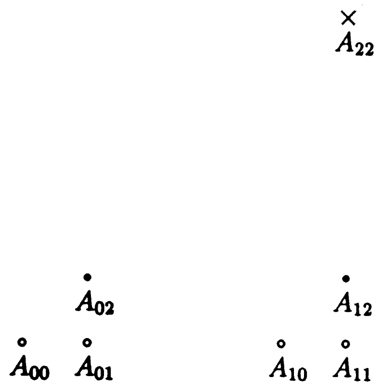
Решение. Во рамнината да разгледаме произволна права и на неа да најдеме четири монохроматски точки

$$A_{00}, A_{01}, A_{10} \text{ и } A_{11},$$

распоредени како во решението на задача 1, да кажеме сите се обоени во бела боја. Точките A_{02}, A_{12} и A_{22} ги избираме така што триаголниците

$$A_{00}A_{01}A_{02}, A_{10}A_{11}A_{12} \text{ и }$$
$$A_{02}A_{12}A_{22}$$

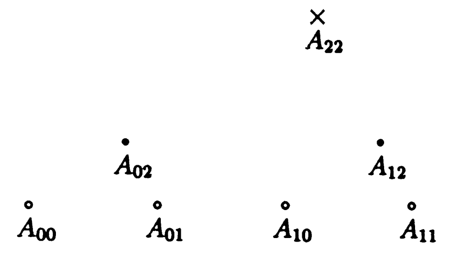
се рамнокраки правоаголни со прави агли во темињата A_{01}, A_{11} и A_{12}, соодветно (црт. 2). Јасно, ако една од точките A_{02}, A_{12} и A_{22} е бела, тогаш еден од



Црт. 2

триаголниците $A_{00}A_{01}A_{02}, A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{00}A_{11}A_{22}$ го задоволува условот на задачата, а во спротивно тоа е триаголникот $A_{02}A_{12}A_{22}$. ♦

3. *Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои триаголник кој е сличен на даден триаголник и чии темиња се монохроматски.*



Црт. 3

Решение. Во рамнината да разгледаме произволна права и на неа да најдеме четири монохроматски точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11}, распоредени како во решението на задача 1, да кажеме сите се обоени во бела боја. Точките A_{02}, A_{12} и A_{22} ги избираме така што триаголниците $A_{00}A_{01}A_{02}, A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{02}A_{12}A_{22}$ се слични на дадениот триаголник, при што распоредот на темињата е суштествен (црт. 3). Јасно, ако една од точките A_{02}, A_{12} и A_{22} е бела, тогаш еден од триаголниците $A_{00}A_{01}A_{02}, A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{00}A_{11}A_{22}$ го задоволува условот на задачата, а во спротивно тоа е триаголникот $A_{02}A_{12}A_{22}$. ♦

4. *Докажи дека во секоја од задачите од 1 до 3 наместо целата рамнина може да се разгледува конечно множество точки (за секоја задача множеството е различно).*

Решение. Во задачата 1 четирите монохроматски точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11}, кои го задоволуваат условот $\overrightarrow{A_{00}A_{01}} = \overrightarrow{A_{10}A_{11}}$ се наоѓаат меѓу единаесет последователни точки со целобројни координати. Навистина, доволно е за x последователно да ги земеме вредностите од 1 до 9. Тогаш, точката A_{22} од решението на задача 1 има координата помала или еднаква на 21. Затоа, условот на задачата останува на сила ако наместо целата права ги разгледуваме само точките со координати од 1 до 21.

Аналогно во задача 2 доволно е да се разгледа само целобројна решетка со димензија 11×11, на пример множеството точки од рамнината (x,y) со целобројни кординати и такви што $1\le x\le 11$ и $1\le y\le 11$.

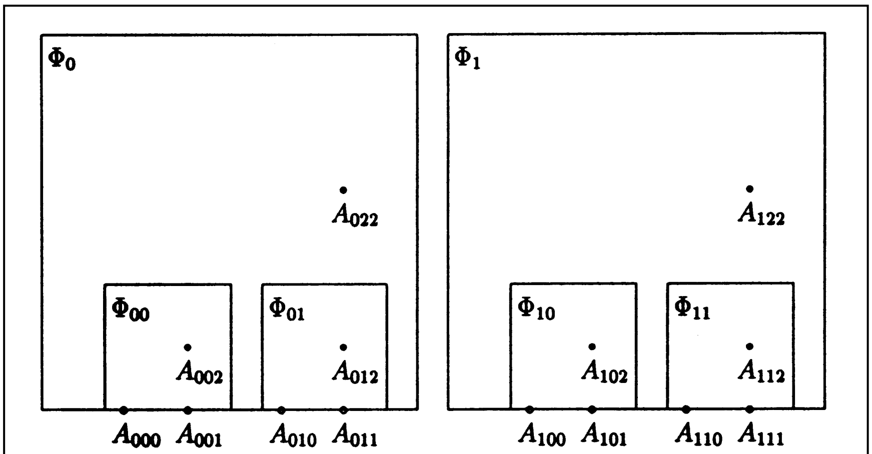
Во задача 3 треба да се разгледа само целобројна решетка со димензија 11×11, на пример множеството точки од рамнината (x,y) со целобројни кординати и такви што $1\le x\le 11$ и $1\le y\le 11$, во косоаголен координатен систем чии оски се паралелни со две страни на дадениот триаголник. ♦

Забелешка 2. Во натамошните разгледувања ќе претпоставуваме дека е обоена само целобројната решетка во рамнината, а не целата рамнина. Под ***ограничена фигура*** (или ***област***) ќе подразбираме конечно множество точки од целобројната решетка. На пример, под квадрат ќе го подразбираме множеството точки од решетката кои лежат во внатрешноста на некој квадрат со страни паралелни на линиите на решетката. Ако поинаку не е кажано, за множествата ќе претпоставуваме дека се конечни, а фигурите (областите) дека се ограничени. За две фигури A и B ќе сметаме дека се еднакво обоени ако постои биекција $f: A \to B$ која го запазува боењето, т.е. за секој $x \in A$ точките x и $f(x)$ се монохроматски.

Јасно, бидејќи секоја ограничена фигура се состои од конечно многу точки добиваме дека бројот на сите можни нејзини боења во k бои е конечен.

5. *Рамнина е обоена во три бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.*

Решение. Во рамнината да разгледаме доволно голем квадрат (смислата на изразот “доволно голем” ќе ја објасниме покасно), чија страна лежи на апцисната оска и сите негови транслации долж апцисната оска за целоброен вектор. Бидејќи бројот на сите боења на квадратите е конечен, а имаме бесконечно многу квадрати добиваме дека меѓу добиените квадрати има два еднакво обоени. Овие квадрати да ги означиме со Φ_0 и Φ_1 (црт. 4).



Црт. 4

Аналогно, внатре во квадратот Φ_0 наоѓаме два еднакво обоени квадрати Φ_{00} и Φ_{01} кои се со помала димензија и чии страни лежат на апцисната оска. Соодветните квадрати во квадратот Φ_1 да ги означиме со Φ_{10} и Φ_{11}. Внатре во квадратот Φ_{00} наоѓаме две монохроматски точки A_{000} и A_{001} кои лежат на апцисната оска, да кажеме бели. Од условот за егзистенција на овие точки ги наоѓаме димензиите на претходно споменатите квадрати. Така квадратот Φ_{00} мора да има димензија 4×4, а квадрот Φ_0 мора да има димензија $(3^{16}+1)\times(3^{16}+1)$. Соодветните парови $(A_{010},A_{011}),(A_{100},A_{101})$ и (A_{110},A_{111}) бели точки ќе бидат внатре во квадратите Φ_{01}, Φ_{10} и Φ_{11}. Да ги конструираме точките A_{ij2}, $0\le i,j\le 1$ така што триаголниците $A_{ij0}A_{ij1}A_{ij2}$ се рамнокраки и правоаголни. На крајот да конструираме точка A_{222}, така што триаголникот $A_{022}A_{122}A_{222}$ е рамнокрак правоаголен. Ако една од новоконструираните точки е бела, тогаш имаме монохроматски триаголник. Во спротивно, овие точки се обоени во другите две бои и на констркцијата од овие точки може да се применат размислувањата од решението на задача 2. Навистина, бидејќи квадратите Φ_{00} и Φ_{01} се еднакво обоени добиваме дека точките A_{002} и A_{012} се монохроматски, па како квадратите Φ_0 и Φ_1 се еднакво обоени добиваме дека сите точки A_{ij2}, $0\le i,j\le 1$ се монохроматски. ♦

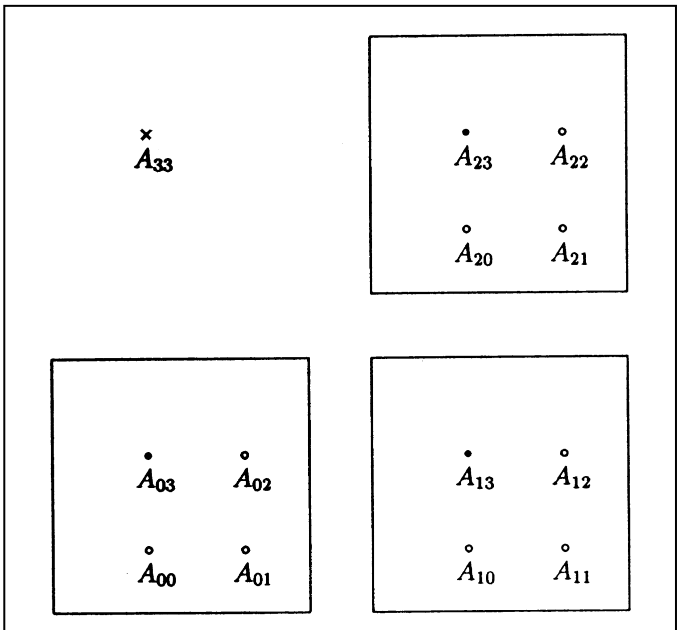
***Забелешка* 3.** Аналогно како во задача 5 може да се докаже следното тврдење, кое ќе го прифатиме без доказ иако ќе го користиме во натамошните разгледувања: *Ако рамнината е обоена во N бои, тогаш постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.*

6. *Рамнина е обоена во N бои. Докажи, дека постои правоаголник чии темиња се монохроматски.*

Решение. Доволно е да разгледаме боење на правоаголен дел од целобројната решетка со димензии $(N+1)\times(N^{N+1}+1)$. Имено, при боење во N бои меѓу $N+1$ точка на апцисната оска имаме две монохроматски точки. Понатаму, множеството од сите пресликувања $f:A\to B$, каде $|A|=N+1,|B|=N$ има N^{N+1} елемент, па затоа меѓу првите $N^{N+1}+1$ редови мора да има два еднакво обоени. Во едниот од нив се наоѓаат две монохрометски точки, па затоа и точките кои се наоѓаат во другиот еднакво обоен ред се монохроматски и тие заедно со првите две точки формираат правоаголник чии темиња се монохроматски. ♦

7. *Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои квадрат чии темиња се монохроматски.*

Решение. Според задача 2 во секој 11×11 квадрат обоен во две бои содржи рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски. Секој 11×11 квадрат во две бои може да се обои на 2^{121} начини. Сега целобројната решетка да ја замислиме како решетка во која точките се 11×11 квадрати и секое од 2^{121} -те различни боења да го земеме како една боја со која се бои вака замислената решетка. Според забелешка 3, при ваквото боење постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски. Тоа значи дека постојат три еднакво обоени 11×11 квадрати кои се еднакво обоени и кои се распоредени како да се темиња на рамнокрак правоаголен триаголник (црт. 5). Како што рековме, во секој од овие три квадрати се наоѓа по еден рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски. Да земеме во првиот квадрат еден таков триаголник и во останатите два квадрати да ги разгледаме соодветните триаголници. Според тоа, добивме три монохроматски рамнокраки правоаголни триаголници, да кажеме бели: $A_{00}A_{01}A_{02}, A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{20}A_{21}A_{22}$, (црт. 5). Секој од нив да го дополниме до квадрат со точките A_{03}, A_{13} и A_{23}. Ако една од овие точки е бела, тогаш е добиен бараниот квадрат чии темиња се монохромат-ски. Ако точките A_{03}, A_{13} и A_{23} се црни, тогаш да разгледаме точка A_{33} која триаголникот $A_{03}A_{13}A_{23}$ го дополнува до квадрат. Ако оваа точка е црна, тогаш бараниот монохроматски квадрат е $A_{03}A_{13}A_{23}A_{33}$, а ако е бела тогаш тоа е квадратот $A_{00}A_{11}A_{22}A_{33}$. ♦



Црт. 5

***Забелешка* 4.** Аналогно како во задача 7 може да се докаже следното тврдење, кое ќе го прифатиме без доказ иако ќе го користиме во натамошните разгледувања: *Ако рамнината е обоена во N бои, тогаш постои квадрат чии темиња се монохроматски.*

8. *Целобројната решетка во рамнината е обоена во k бои и M е произволно конечно множество точки од решетката. Докажи, дека постои монохроматско множество, слично на множеството M.*

Решение. Нека е дадено конечно множество $M=\{M_0,M_1,...,M_n\}$ и природен број k. Воведуваме ознаки $\vec{v}_i=\overrightarrow{M_0M_i}, i=1,2,...,n$. Ќе докажеме дека постои ограничено множество Φ такво, што за секое негово боење во k бои, постои монохроматско подмножество $A=\{A_0,A_1,...,A_n\}\subset\Phi$, слично на M, т.е. постои $\lambda>0$ таков што $\overrightarrow{A_0A_i}=\lambda\vec{v}_i, i=1,2,...,n$. Според тоа, наместо сличност докажуваме хомотетичност со позитивен коефициент.

Доказот ќе го спроведеме со индукција по бројот на точките на множеството M , кој при нашите ознаки е еднаков на $n+1$.

База на индукцијата. Нека $n=1$, т.е. множеството M се состои од две точки. Правата која минува низ овие две точки содржи бесконечно многу точки од решетката. Да рагледаме област која содржи $k+1$ точка од овие точки на правата. Согласно принципот на Дирихле, меѓу овие две точки постојат две монохроматски и тие го формираат множеството A.

Индуктивен чекор. Нека $M=\{M_0,M_1,...,M_n\}$ е множество со $n+1$ точка и е дадено боење на рамнината во k бои. По претпоставка за множеството $M'=\{M_0,M_1,...,M_{n-1}\}$ кое содржи n точки е исполнето тврдењето на задачата, кое важи не само за даденото боење, туку и за секое боење во произволен број бои.

Во рамнината последователно избираме области $\Phi^{(i)}, i=0,1,...,k$ на следниот начин. $\Phi^{(0)}$ се состои од една точка. За $i\geq1$, користејќи ја областа $\Phi^{(i-1)}$ областа $\Phi^{(i)}$ ја конструираме на следниот начин. Прво ја определуваме областа $\Phi'^{(i)}$ така што при секое нејзино боење во $k^{N_{i-1}}$ бои (N_{i-1} е бројот на точките кои се содржат во областа $\Phi^{(i-1)}$) постои монохроматско множество слично на M'. Потоа ја прошируваме $\Phi'^{(i)}$ до $\Phi^{(i)}$ така што при секое вложување на множество $A=\{A_0,A_1,...,A_n\}$, слично на множеството M , во решетка која го содржи множеството $\Phi'^{(i)}$, при кое $\{A_0,A_1,...,A_{n-1}\}\subset\Phi'^{(i)}$, е исполнет условот $A_n\in\Phi^{(i)}$.

Ќе докажеме дека $\Phi=\Phi^{(k)}$ е бараното множество. Од секоја фигура $\Phi^{(i)}$ ќе избереме точка $F_{\Phi^{(i)}}$. Да го разгледаме следното боење на множеството $\Phi^{(i)}$ во $k^{N_{i-1}}$ бои. Две точки F_1 и F_2 ги боиме во една боја ако почетните боења на фигурата $\Phi'^{(i-1)}$ при транслациите за векторите $\overrightarrow{F_{\Phi^{(i-1)}}F_1}$ и $\overrightarrow{F_{\Phi^{(i-1)}}F_2}$ се совпаѓаат. При таквото боење постои монохроматско множество слично на M'. Тоа значи, дека постои еднакво почетно боење на множествата $\Phi_j^{(i-1)}$, $j=0,1,...,n-1$

кои се добиваат од $\Phi_0^{(i-1)}=\Phi^{(i-1)}$ со транслација за вектор $\lambda_i\overrightarrow{M_0M_j}$ за некој позитивен број λ_i. Ќе го разгледаме множеството $\Phi_n^{(i-1)}$ кое се добива од $\Phi_0^{(i-1)}$ со транслација за вектор $\lambda_i\overrightarrow{M_0M_n}$, за чие боење не можеме ништо да кажеме. Соодветно определените точки $F_{\Phi_j^{(i-1)}}\in\Phi_j^{(i-1)}$, $j=0,1,2,...,n$ се добиваат од $F_{\Phi^{(i-1)}}$ со транслации за вектори $\lambda_i\overrightarrow{M_0M_j}$ и формираат монохроматско множество во разгледуваното боење на множеството $\Phi'^{(i)}$. Бидејќи $F_{\Phi_j^{(i-1)}}\in\Phi'^{(i)}$, за $j=0,1,2,...,n-1$, добиваме $F_{\Phi_n^{(i-1)}}\in\Phi^{(i)}$.

Ја применуваме опишаната конструкција на множеството $\Phi=\Phi^{(k)}$ и добиваме множества $\Phi_i, i=0,1,...,n$. Потоа на истиот начин од нив добиваме множества $\Phi_{i_1i_2}, i_1,i_2=0,1,...,n$. Продолжувајќи ја постапката конструираме $(n+1)^k$ точки $A_{i_1i_2...i_k}$, $i_1,i_2,...,i_k=0,1,...,n$. Притоа

$$\overrightarrow{A_{00...0}A_{i_1i_2...i_k}}=\lambda_{i_1}\vec{v}_{i_1}+\lambda_{i_2}\vec{v}_{i_2}+...+\lambda_{i_k}\vec{v}_{i_k}\,.$$

Точките $A_{i_1i_2...i_k}$, во која сите индекси се помали од n ќе ги наречеме ***основни***, а оние во кои постои индекс еднаков на n ќе ги наречеме ***додадени***. По конструкција сите основни точки се обоени во една боја. Ова боја да ја наречеме прва. Да разгледаме некоја додена точка $A_{i_1i_2...i_k}$, при што нејзините индекси кои се еднакви на n се $j_1,j_2,...,j_s$. Оваа точка да ја означиме A_n и да ги разгледаме точките A_i, $i=0,1,...,n-1$ кои се добиваат од точката $A_{i_1i_2...i_k}$ кога во индексите сите броеви n се заменат со i. Добиеното множество е слично со множеството M, бидејќи

$$\overrightarrow{A_0A_i}=(\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+...+\lambda_{j_s})\overrightarrow{M_0M_i}\,.$$

Бидејќи сите точки A_i, $i=0,1,...,n-1$ се монохроматски, ако една од додадените точки е обоена во првата боја тогаш монохроматското множество слично на M е најдено. Ако меѓу додадените точки не постои точка обоена во правата боја, тогаш го разгледуваме множеството точки $A_{ni_2...i_k}$ во кој првиот индекс е еднаков на n. Тие сите се обоени во една боја, која ја нарекуваме втора. Со аналогни расудувања докажуваме дека во случај кога една точка во која еден од индексите, освен првиот, е еднаков на n е обоена во втората боја, тогаш тврдењето е докажано. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека тврдењето е докажано ако барем една точка за која првите индекси p индекси се еднакви на n е обоена во една од првите p бои. Последното сигурно е точно бидејќи при $p=k$ точката $A_{nn...n}$ е обоена во една од дадените k бои. ♦

9. *Во темињата на целобројната решетка во рамнината распоредени се природни броеви. Докажи дека за секој* n *постои квадрат со страни паралелни на линиите на решетката, таков што збирот на броевите внатре во квадратот се дели со* n .

Решение. Бројот кој се наоѓа во точката со координати (i,j) да го означиме со a_{ij}. Точките од решетката со целобројни координати да ги обоиме во n на следниот начин. Боја на точката (k,m) го нарекуваме остатокот од делењето на бројот $N(k,m)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}$ со n. Од забелешка 7 следува дека постои квадрат чии темиња се монохроматски. Нека темињата на тој квадрат имаа координати $(k,m),(k+l,m),(k,m+l)$ и $(k+l,m+l)$. Тогаш, збирот на броевите во квадратот чии темиња се $(k+1,m+1),(k+l,m+1),(k+1,m+l)$ и $(k+l,m+l)$ е еднаков на

$$N(k+l,m+l)-N(k+l,m)-N(k,m+l)+N(k,m)$$

и тој се дели со n. ♦

Забелешка 5. Претходната задача е дводимензионална аналогија на добро познатата задача: *"За множество составено од* n *природни броеви постои подмножество чиј збир на елементи се дели со* n *."* чие решавање се сведува на користење на принципот на Дирихле.

На крајот од нашите разгледувања, користејќи ја задача 8 ќе решиме поопшта задача, која се однесува на боење на целата рамнина.

10. *Рамнината е обоена во* k *бои и* M *е произволно конечно множество точки од рамнината. Докажи, дека постои монохроматско множество, слично на множеството* M .

Решение. Нека е дадено конечно множество $M=\{M_0,M_1,...,M_n\}$. Точката M_0 ја нарекуваме координатен почеток и ги разгледуваме векторите $\vec{v}_i=\overrightarrow{M_0M_i}$, $i=1,2,...,n$. Множеството точки од облик $\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{v}_i$, x_i се цели броеви, го нарекуваме $n-$ димензионална целобројна решетка. Според тоа, при ознаките од задача 8, во својство на координатниот почеток ја имаме точката M_0, а бараната решетка е распната на векторите $\vec{v}_i=\overrightarrow{M_0M_i}$, $i=1,2,...,n$. Понатаму, решението на задачата е потполно аналогно како и решението на задача 8, ако под решетка се подразбира $n-$ димензионалната целобројна решетка во рамнината. ♦

Литература

1. **Димовски, Д.; Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Јосифоски, Б.:** *Практикум по елементарна математика*, "Просветно дело", Скопје, 1993
2. **Kadelburg, Z.; Mićić, V.; Janković, V.:** *Елементарна теорија бројева, дирихлеов принцип, диференцне једначине*, ДМФА Србије, Београд, 1976
3. **Малчески, А.:** Фибоначиеви броеви, Сигма 30, Скопје, 1995
4. **Mladenović, P.:** *Комбинаторика*, ДМ Србије, Београд, 1992
5. *Седма® летна®® конференци® турнира городов*, ИнформационнѝŸ центр турнира городов, Нови Сад, 1995
6. **Пиперевски, Б.; Трајковски, Г.; Ајановски, В.:** *Диференцни равенки,* СМИМ, Скопје, 1994
7. **Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.:** *Занимлива математика*, ММM, Скопје, 1994
8. **Ušćumlić, M.P.; Miličić, P.M.:** *Збирка задатака из више математике И,* "Наука", Београд, 1994
9. **Велјан, Д.:** *Комбинаторика са теоријом графова,* Školska књига, Загреб, 1989
10. **Vuleti˚, M.; Dolinka, I.:** *Једна класа проблема бојења Ремзијевог типа*, "Тангента" 2; Нови Сад, 1997

Содржина