Самоил Малчески, Скопје

ЕЛЕМЕНТАРНО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА

Неравенствата се неодминлива содржина на математичките натпревари и истите се среќаваат почнувајќи од општинските натпревари, па се до престижните меѓународни натпревари. Докажувањето на едно неравенство може да биде елементарно, со користење на својствата на елементарните функции, со помош на апаратот на диференцијалното сметање, или пак со користење на Кошиевите неравенства, неравенството на Бернули, неравенството на Јенсен, неравенството на Шур, неравенството на Чебишев итн.

Во оваа статија ќе разгледаме неравенства за чие докажување ќе ги користиме основните својства на неравенствата и својствата на квадратната функција.

Задача 1. Нека a,b,c,d се реални броеви такви што

$$a^2+b^2=c^2+d^2,\quad ab+cd>0,\quad ac+bd>0.$$

Докажи дека $ad+bc>0$.

Решение. Тврдењето следува од равенството

$$(ad+bc)(ac+bd)=(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab=(a^2+b^2)(ab+cd)$$

и фактот дека од условот на задачата следува неравенството $a^2+b^2>0$. ■

Задача 2. За кој x изразот $x(x+2)(x+4)(x+6)$ има најмала можна вредност?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}x(x+2)(x+4)(x+6)&=(x+6x)(x^2+6x+8)\\&=(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)+16-16\\&=(x^2+6x+4)^2-16,\end{aligned}$$

од каде што следува дека најмалата можна вредност на дадениот израз е -16 и истата се достигнува кога $x^2+6x+4=0$, односно кога $(x+3)^2=5$. Конечно најмалата можна вредност за дадениот израз е -16 и истата се достигнува кога $x+3=\pm\sqrt{5}$, односно за $x=-3-\sqrt{5}$ или $x=-3+\sqrt{5}$. ■

Задача 3. Збирот на три раба на правилна $n-$страна призма кои излегуваат од едно теме е 100. Колкава е најголемата можна плоштина на омотачот на оваа призма?

Решение. Нека должината на основниот раб е a и должината на висината на призмата е h. Тогаш $2a+h=100$. Плоштината на омотачот ќе биде најголема кога изразот nah, односно изразот ah има најголема можна вредност. Имаме

$$\begin{aligned}ah &= a(100-2a)=-2a^2+100a=-2(a^2-50a)\\ &=-2(a^2-50a+625-625)\\ &=-2(a^2-50+625)+1250\\ &=-2(a-25)^2+1250\le 1250,\end{aligned}$$

што значи дека ah има најголема можна вредност 1250 кога $a-25=0$, т.е. кога $a=25$. Значи, најголемата можна плоштина на омотачот на призмата е $1250n$. ■

Задача 4. Докажи дека за секои реални броеви a и b важи неравенството

$$4(a-b)^2-6(a-b)+4ab+3\ge 0\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}4(a-b)^2-6(a-b)+4ab+3 &= (a-b)^2+4ab+3(a-b)^2-6(a-b)+3\\ &=a^2-2ab+b^2+4ab+3((a-b)^2-2(a-b)+1)\\ &=(a+b)^2+3(a-b-1)^2\ge 0.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a+b=0$ и $a-b-1=0$, т.е. ако и само ако $a=\frac{1}{2}$ и $b=-\frac{1}{2}$. ■

Задача 5. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=2$. Докажи дека важи неравенството

$$x^2y^2(x^2+y^2)\le 2\,.$$

Решение. Нека $x=1+t$, $0\le t\le 1$. Тогаш $y=1-t$, па затоа

$$\begin{aligned}x^2y^2(x^2+y^2) &= (1+t)^2(1-t)^2((1+t)^2+(1-t)^2)\\ &=(1-t^2)^2(2+2t^2)=2(1-t^4)(1-t^2)\le 2,\end{aligned}$$

бидејќи $0 \le 1-t^2 \le 1$ и $0 \le 1-t^4 \le 1$.

Знак за равенство важи ако и само ако $1-t^2 = 1-t^4 = 1$, т.е. ако и само ако $t=0$, што значи ако и само ако $x=y=1$. ■

Задача 6. Докажи дека $a^2+b^2 > \frac{1}{2}c^2$, каде a,b,c се должини на страни на произволен триаголник.

Решение. Од неравенството за должините на страните a,b,c на произволен триаголник $a+b>c$ следува

$$a^2+b^2+2ab > c^2. \tag{1}$$

Од друга страна, од неравенството $(a-b)^2 \ge 0$ следува неравенството

$$a^2+b^2-2ab \ge 0. \tag{2}$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1) и (2) го добиваме неравенството $2a^2+2b^2 > c^2$, кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Задача 7. Нека x и y се броеви од интервалот $[1,2]$. Докажи дека

$$(x+y)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}) \le \tfrac{9}{2}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{x} \le \tfrac{5}{2}.$$

Нека $\frac{x}{y}=k$. Од условот на задачата $x,y \in [1,2]$ следува $k \in [\frac{1}{2},2]$. Според тоа, треба да се докаже неравенството $k+\frac{1}{k} \le \frac{5}{2}$, кога $k \in [\frac{1}{2},2]$. Понатаму, бидејќи $k>0$ последното неравенство е еквивалентно со неравенството $2k^2-5k+2 \le 0$, т.е. со неравенството $(2k-1)(k-2) \le 0$, кое е исполнето, бидејќи од $k \in [\frac{1}{2},2]$ следува $2k-1 \ge 0$ и $k-2 \le 0$. ■

Задача 8. За позитивните реални броеви x,y,z важи

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2} < \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Решение. Од равенството (1) следува дека броевите x, y, z се поголеми од 1. Ќе го докажеме неравенството

$$\frac{1}{x^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1}, \tag{3}$$

кое последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2(x^3+2) - 3(x^2+1) > 0,$$

$$2(x^3-1) - 3(x^2-1) > 0,$$

$$2(x-1)(x^2+x+1) - 3(x-1)(x+1) > 0,$$

$$(x-1)(2x^2-x-1) > 0.$$

Последното неравенство непосредно следува од неравенствата

$$x-1>0 \text{ и } 2x^2 = x^2+x^2 > x+1,$$

што значи дека е точно неравенството (3). Јасно, точни се и неравенствата

$$\frac{1}{y^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2+1}, \ \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z^2+1}. \tag{4}$$

Ако ги собереме неравенствата (3) и (4) и го искористиме равенството (1), добиваме

$$\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+2} + \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}. \ ■$$

Задача 9. Нека a, b, c се реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека најмногу два од броевите $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

Решение. Нека претпоставиме дека сите три броја $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ се поголеми од 1. Од $abc = 1$ следува дека барем еден од броевите a, b, c мора да е позитивен. Ако $a > 0$, тогаш $2c > 2c - \frac{1}{a} > 1$, па затоа $c > 0$, што значи дека и $b > 0$. Значи, сите три броја се позитивни. Од $2b - \frac{1}{c} > 1$ следува

$$b > \frac{1+\frac{1}{c}}{2}. \tag{1}$$

Од $2a - \frac{1}{b} > 1$ и $abc = 1$ следува $\frac{2}{bc} - \frac{1}{b} > 1$, т.е.

$$b < \frac{2}{c} - 1. \tag{2}$$

Сега, од (1) и (2) добиваме $\frac{2}{c} - 1 > \frac{1+\frac{1}{c}}{2}$, од каде по средувањето наоѓаме $c < 1$. Аналогно се добива дека $a < 1$ и $b < 1$, па како $a, b, c > 0$ добиваме $abc < 1$, што противречи на $abc = 1$. Конечно, од добиената противречност следува дека најмногу два од броевите $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

Задача 10. Даден е природен број n. Нека

$$A = \{x_1 + x_2 + ... + x_s \mid x_1 x_2 ... x_s = n,\ x_i > 1,\ x_i \in \mathbb{N}\}$$

Определи ја најголемата можна вредност за A.

Решение. Нека $x_1 x_2 ... x_s = n$ и $x_i > 1, 1 \le i \le s$. За секои природни броеви $m, n > 1$ важи $nm \ge n + m$. Навистина

$$\begin{aligned} &nm \ge n + m &&\Leftrightarrow \\ &nm - n - m \ge 0 &&\Leftrightarrow \\ &nm - n - m + 1 \ge 1 &&\Leftrightarrow \\ &(n-1)(m-1) \ge 1, \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $n = m = 2$. Тогаш,

$$x_1 + x_2 + ... + x_s \le x_1 x_2 + x_3 + ... + x_s \le x_1 x_2 x_3 + x_4 + ... + x_s \le ... \le x_1 x_2 ... x_s = n .$$

Според тоа, секој елемент на A е помал или еднаков на n. Јасно, најголемата можна вредност е n, на пример кога производот се состои од еден природен број еднаков на n. ■

Задача 11. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a, b, c \ge -3$ и $a + b + c = 0$. Докажи дека

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge -\frac{3^4}{4} .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Јасно, за $x \ge -3$ важи $(x+3)(x - \frac{3}{2})^2 \ge 0$, од каде следува

$$x^3 - \frac{27}{4} x + \frac{27}{4} \ge 0 .$$

Од последното неравенство, применето за броевите a, b, c и условот на задачата следува

$$a^3 + b^3 + c^3 - \frac{27}{4}(a + b + c) + 3 \cdot \frac{27}{4} \ge 0$$

од каде го добиваме бараното неравенство. Во претходните три неравенства знак за равенство важи ако и само ако $a, b, c \in \{-3, \frac{3}{2}\}$. За да биде исполнет условот $a + b + c = 0$, јасно е дека два од броевите треба да бидат еднакви на $\frac{3}{2}$, а еден -3 и тогаш важи

$$a^3+b^3+c^3=-3^3+2(\tfrac{3}{2})^3=\tfrac{-4\cdot 3^3+3^3}{4}=-\tfrac{3^4}{4}\ .\ \blacksquare$$

Задача 12. Нека реалните броеви a,b и c ги задоволуваат равенствата

$$(a+b)(b+c)(c+a)=abc \text{ и } (a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9)=(abc)^9\ .$$

Докажи дека $a=b=c=0$.

Решение. За произволни реални броеви x и y важи

$$x^2-xy+y^2\ge xy \text{ и } x^6-x^3y^3+y^6\ge x^3y^3,$$

па затоа

$$x^9+y^9=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)\ge(x+y)xyx^3y^3=(x+y)x^4y^4,$$

каде што равенство важи ако и само ако $x=y$. Тогаш, од горното неравенство и од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}(abc)^9&=(a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9)\\&\ge(a+b)(b+c)(c+a)a^4b^4b^4c^4c^4a^4=a^9b^9c^9\end{aligned}$$

па во горното неравенство важи знак равенство, што според претходно изнесеното значи дека $a=b=c$. Со замена во равенството

$$(a+b)(b+c)(c+a)=abc$$

добиваме дека $8a^3=a^3$, односно $a=0$. Конечно, $a=b=c=0$. ■

Задача 13. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека важи

$$\tfrac{3}{2}<\tfrac{4a+b}{a+4b}+\tfrac{4b+c}{b+4c}+\tfrac{4c+a}{c+4a}<9\ .$$

Решение. Имаме

$$\tfrac{1}{4}=\tfrac{4a+b}{4(4a+b)}<\tfrac{4a+b}{a+4b}<\tfrac{4(a+4b)}{a+4b}=4\ .$$

Аналогно добиваме

$$\tfrac{1}{4}<\tfrac{4b+c}{b+4c}<4 \text{ и } \tfrac{1}{4}<\tfrac{4c+a}{c+4a}<4\ .$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\le b\le c$. Сега имаме

$$\tfrac{4c+a}{c+4a}=\tfrac{c+3c+a}{c+4a}\ge\tfrac{c+4a}{c+4a}=1,$$
$$\tfrac{4a+b}{a+4b}=\tfrac{a+3a+b}{a+4b}\le\tfrac{a+4b}{a+4b}=1.$$

Конечно,

$$\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+1<\tfrac{4a+b}{a+4b}+\tfrac{4b+c}{b+4c}+\tfrac{4c+a}{c+4a}<1+4+4=9\ .\ \blacksquare$$

Задача 14. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+b}{a+2b} + \frac{b+c}{b+2c} + \frac{c+a}{c+2a} < \frac{5}{2}.$$

Решение. Ставаме $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. Тогаш $xyz = 1$ и

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a+2b} + \frac{b+c}{b+2c} + \frac{c+a}{c+2a} &= \frac{x+1}{x+2} + \frac{y+1}{y+2} + \frac{z+1}{z+2} \\ &= 1 - \frac{1}{x+2} + 1 - \frac{1}{y+2} + 1 - \frac{1}{z+2} \\ &= 3 - (\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2}).\end{aligned}$$

Значи, даденото неравенството е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} > \frac{1}{2}, \tag{1}$$

при услов $xyz = 1$, $x, y, z > 0$. Неравенството (1) е еквивалентно со неравенствата

$$2(x+2)(y+2) + 2(y+2)(z+2) + 2(z+2)(x+2) \geq (x+2\_(y2)(z+2),$$

$$2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) + 24 > xyz + 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) + 8,$$

$$16 > xyz.$$

Конечно, од $xyz = 1$ следува точноста на последното неравенство, што значи дека е точно и даденото неравенство. ■

Задача 15. Нека a, b, c, d се реални броеви такви што

$$a+b+c+d = 19 \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2 = 91.$$

Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Решение. Од неравенството $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ следува неравенството $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$. Сега, од условот на задачата следува неравенството $(19-d)^2 \leq 3(91-d^2)$, т.е. неравенството $2d^2 - 19d + 44 \leq 0$, од каде добиваме дека $4 \leq d \leq \frac{11}{2}$. Истото важи и за другите три броја. Понатаму, од $(a-4)(a-5)^2 \geq 0$ следува $\frac{100}{a} \leq a^2 - 14a + 65$. Ако ги собереме соодветните неравенства, добиваме

$$100(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) \leq 91 - 14 \cdot 19 + 4 \cdot 65 = 85,$$

односно

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{17}{20}.$$

Знак за равенство се достигнува, на пример, за $a=4, b=c=d=5$. ■

Задача 16. Дадени се реалните броеви $0<a<b\le c<d$. Докажи дека

$$(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d})(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}})\le 1. \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Да ја разгледаме функцијата

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x-a)(x-c)+q(x-b)(x-d) \\ &= (p+q)x^2-(p(a+c)+q(b+d))x+pac+qbd, \end{aligned}$$

каде p и q се позитивни реални броеви. Бидејќи $0<a<b\le c<d$, непосредно се проверува дека $f(a)>0, f(b)\le 0, f(c)\le 0, f(d)>0$, при што равенства се можни само за $b=c$. Според тоа, квадратната функција $f(x)$ има корен, што значи дека $D\ge 0$. За $p=\frac{1}{a+c}$ и $q=\frac{1}{b+d}$ условот $D\ge 0$ е еквивалентен на неравенството (1). За да важи знак за равенство потребно е $f(x)$ да има единствен корен, што е можно само за $b=c$. Притоа коренот ќе биде $x=b=c$ и функцијата е

$$f(x)=(p+q)(x-c)^2.$$

Значи,

$$f(x)=p(x-a)(x-c)+q(x-b)(x-d)=(p+q)(x-c)^2,$$

од каде со изедначување на коефициентите наоѓаме $c^2=ad$. ■

Задача 17. Во правоаголен триаголник ABC со плоштина S е впишан круг со плоштина S_1, а околу него е опишан круг со плоштина S_2. Докажи го неравенството

$$\pi\frac{S-S_1}{S_2}<\frac{1}{\pi-1}.$$

Решение. Имаме

$$\pi\frac{S-S_1}{S_2}=\pi\frac{2ab-4\pi r^2}{\pi c^2}=-(\pi-1)(\frac{a+b}{c})^2+2\pi\frac{a+b}{c}-1-\pi.$$

Изразот на десната страна на низата равенства е квадратна функција во однос на $\frac{a+b}{c}$ и истата има максимум за $-\frac{2\pi}{-2(\pi-1)}=\frac{\pi}{\pi-1}$, и тој максимум е еднаков на $\frac{1}{\pi-1}$. Според тоа, $\pi\frac{S-S_1}{S_2}<\frac{1}{\pi-1}$. ■

Задача 18. Докажи го неравенството

$$2013 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{2013^2+1}{2013^2-1} < 2013 + \frac{1}{2}.$$

Решение. Ако искористиме дека за секој природен број $n > 1$ важи

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{n+1-(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

добиваме

$$\begin{aligned}
\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{2013^2+1}{2013^2-1} &= \frac{2^2-1+2}{2^2-1} + \frac{3^2-1+2}{3^2-1} + \ldots + \frac{2013^2-1+2}{2013^2-1} \\
&= 1 + \frac{2}{2^2-1} + 1 + \frac{2}{3^2-1} + \ldots + 1 + \frac{2}{2013^2-1} \\
&= 2012 + \frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \ldots + \frac{2}{2013^2-1} \\
&= 2012 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2014}\right) \\
&= 2012 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \\
&< 2013 + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 19. Докажи дека

$$\frac{1}{2009} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2007}{2008} < \sqrt{\frac{1}{2009}}.$$

Решение. Нека

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2007}{2008}.$$

Бидејќи за секој природен број n важи $\frac{n}{n+1} > \frac{n}{n+2}$, добиваме

$$A > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2007}{2009} = \frac{1}{2009}, \text{ т.е. } \frac{1}{2009} < A.$$

Бидејќи за секој природен број n важи $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$, добиваме

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2009}{2009} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2008}{2007} \cdot \frac{1}{2009} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2009}.$$

Според тоа, $A^2 < \frac{1}{2009}$, од каде следува $A < \sqrt{\frac{1}{2009}}$. ■

Задача 20. Нека $n \geq 3$ и $p_i, i = 1,2,\ldots,n$ се првите n прости броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_n} < \frac{1}{2}.$$

Решение. Бидејќи $p_1 = 2$ и $p_k \geq 2k-1$, важи

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_1p_2\cdots p_n} &\leq \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\\
&< \frac{1}{4}+\frac{1}{3^2-1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2-1}+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)\cdot2n}+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\\
&= \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4n}-\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right).
\end{aligned}$$

Изразот во последната заграда е позитивен бидејќи

$$2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1) \geq 2\cdot3\cdot(2n-1) = 12n-6 > 4n,$$

па затоа важи

$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_1p_2\cdots p_n} < \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Задача 21. Броевите 1, 2, ..., 2022 се распоредени на 1011 домина, така што на секое домино се наоѓаат два броја. Ако производите на броевите на домината ги означиме со $p_1, p_2, ..., p_{1011}$ докажи дека

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1011}} \leq \frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+\ldots+\frac{1}{2022}.$$

Решение. Ќе докажеме дека збирот $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1011}}$ е најголем ако имаме домина со парови (1,2), (3,4), ..., (2021,2022). Нека претпоставиме дека на две домина имаме парови (a,b) и (c,d) и дека важи $a>b$ и $c>d$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека a е најголем меѓу броевите a,b,c,d. Ако направиме замена на броеви, тогаш може да имаме домина со парови (a,c) и (b,d). Ако збирот на реципрочните вредности се зголемува, тогаш важи неравенството

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd} < \frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}.$$

Последното неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$ab+cd-ac-bd<0,$$
$$(a-d)(b-c)<0.$$

Но, $a > d$, па затоа мора да важи $b < c$. Повторувајќи ја оваа постапка, добиваме дека збирот $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_{1011}}$ е најголем кога броевите распоредени на домината се последователни и еднакви на (1,2), (3,4), ..., (2021,2022). Според тоа,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_{1011}} &\le \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2021\cdot 2022}\\ &=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+...+\frac{2022-2021}{2021\cdot 2022}\\ &=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022})\\ &=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2022})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2022})\\ &=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2022})-(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1011})\\ &=\frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+...+\frac{1}{2022},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 22. Нека n е природен број и нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што

$$x_1+x_2+...+x_n=0 \text{ и } x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1.$$

Ако a е најмалиот, а b е најголемиот меѓу броевите $x_1, x_2, ..., x_n$, докажи дека

$$ab \le -\frac{1}{n}.$$

Решение. За секој $i \in \{1,2,...,n\}$ важи $(x_i-a)(b-x_i) \ge 0$, па затоа

$$0 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)(b-x_i) = (a+b)\sum_{i=1}^{n} x_i - nab - \sum_{n}^{n} x_i^2 = -nab-1,$$

од што следува $ab \le -\frac{1}{n}$. ■

Задача 23. Нека $n \ge 4$ е природен број и нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што

$$x_1+x_2+...+x_n \ge n \text{ и } x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \ge n^2.$$

Докажи дека постои $i \in \{1,2,...,n\}$ таков што $x_i \ge 2$.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат броеви

$$x_1 < 2,\ x_2 < 2, ...,\ x_n < 2 \qquad (1)$$

кои го задоволуваат условот на задачата. Ако важи $|x_i| < 2$ за секој

$i \in \{1, 2, ..., n\}$, тогаш ќе важи

$$4n > x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq n^2 ,$$

односно $n < 4$, што е противречност. Според тоа, мора барем еден од броевите за кои важи (1) да е помал од -2. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека броевите $x_1, x_2, ..., x_k$ се ненегативни, а броевите $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ се негативни. Притоа $k \leq n-1$. Тогаш важи

$$0 < -(x_{k+1} + x_{k+2} + ... + x_n) \leq x_1 + x_2 + ... + x_k - n < 2k - n .$$

Оттука следува

$$\begin{aligned} n^2 &\leq x_1^2 + ... + x_k^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_n^2 \\ &< 4k + (|x_{k+1}| + |x_{k+2}| + ... + |x_n|)^2 , \\ &< 4k + (2k-n)^2 = 4k(k+1-n) \end{aligned}$$

од што следува дека $k > n-1$, што противречи на $k \leq n-1$. Конечно, од добиената противречност следува дека постои $i \in \{1, 2, ..., n\}$ таков што $x_i \geq 2$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Cîrtoaje, V., *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing house, Zalau, 2006
2. Mitrinović, D. S., Pečarić , J. E., Fink , A. M, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
3. Малчески, Р., *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019

Статијата прв пат е издадена на српски јазик во математичкото списание ДИОФАНТ во април 2026 година