Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2006/07 година

Како и зашто је „пропао" предикатски рачун другог реда

***gp Миодраг Рашковић*, Крагујевац**

Већ је више пута у Тангенти разматран (наравно колико је то било могуће у оквиру чланака намењених првенствено талентованим и заинтересованим средњошколцима) предикатски рачун првог реда. Тај рачун од тридесетих година XX века заузима централно место у оквиру математичке логике. Многи „не логичари", а који знају понешто о математичкој логици сматрају га за једини (логички систем). Чак се и наставак „првог реда" због тога често избацује.

Али није увек било тако! До почетка XX века предикатски рачун првог реда водио је оштру борбу за изражајнијим тзв. **предикатским рачуном другог реда**. Међутим, убрзо се увидело да тај рачун *нема* а предикатски рачун првог реда *има* неке добре особине, веома важне за примену логике.

Па какав је тај предикатски рачун другог реда? За разлику од предикатског рачуна првог реда (краће ПРПР) предикатски рачун другог реда (краће ПРДР) дозвољава квантификовање по релацијским и функцијским симболима што га већ на први поглед чини надмоћним.

Тако, на пример, ако би се $X(x)$ „интерпретирало" као „*елеменӣ x је у релацији X*" односно „*елеменӣ x има својсӣво X*" и слободније записивало са $x \in X$, онда би формула $(\exists X)(\exists x)\, x \in X$ била тачна у свакој структури чији је универзум непразан. Док би формула $(\exists X)(x \in X \wedge x \notin X)$ увек била нетачна.

Надаље, формула $(\exists \prec)(11 \prec 2)$ је тачна у природним бројевима (довољно је узети обрнути поредак: $a \prec b$ акко $b < a$, где је $<$ „природни" поредак природних бројева), док је $(\forall \prec)(1 \prec 2)$ нетачна (узети исти поредак из претходног примера који „фалсификује" важење дате формуле).

Појављивање како ПРПР тако и ПРДР се историјски гледано везује за проблем заснивања математике који се тако снажно појавио у другој половини XIX века. Посебно се то односи и на проблем аксиоматизације структуре природних бројева, као основе за даља заснивања.

Познати италијански математичар Ђузепе Пеано (1858 – 1932) је крајем XIX века дао следећу аксиоматизацију природних бројева (коју и данас већина сматра као савршену и завршену).

Аксиома 1. Ниједан број нема нулу као наследника (наследник броја n је $n+1$).

Аксиома 2. Два различита броја имају два различита наследника.

Аксиома 3. Ако неко својство T важи за нулу и ако кад год важи за n важи и за $n+1$, тада T важи за сваки природан број.

Све ове три аксиоме чине тзв. Пеанову аритметику другог реда.

Прихватању и популаризацији Пеанове аксиоматизације веома је допринео Ричард Дедекинд.

Прве две Пеанове аксиоме прилично су једноставне и никада нису довођене у питање. Са трећом ствари стоје ипак другачије. Да бисмо њу до краја сагледали уведимо појам индуктивног скупа. Кажемо да је скуп бројева I индуктиван ако

1. $0 \in I$,
2. $n \in I$ повлачи $n+1 \in I$.

Тако су и скупови $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ индуктивни (као и многи други).

Аксиома 3 управо тврди да је $\mathbb{N}$ најмањи индуктиван скуп, тј. садржан у сваком другом индуктивном скупу. Као „прву апроксимацију" аксиому 3 можемо записати са

$$\mathbb{N} = \bigcap \{X \mid \text{„}X\text{ је индуктиван"}\}$$

или као

$$(\forall X)\,(\,\text{„}X\text{ је индуктиван"} \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X\,)\,.$$

Коначно у ПРДР аксиома 3, која сада „буквално" тврди да нема мањег индуктивног скупа од $\mathbb{N}$, гласи

$$(\Delta) \qquad (\forall X)\,((0 \in X \wedge (\forall x)\,(x \in X \Rightarrow x+1 \in X)) \Rightarrow (\forall x)(x \in X))\,.$$

Аксиома 3 се иначе назива *аксиома индукције* и представља основу за сваки доказ тзв. математичком индукцијом.

Данас је језик за Пеанову аритметику нешто шири. Додаје се константа за нулу 0 (и нула се сматра за природан број), ознаке за две нове операције $+$ и $\cdot$, као и релацијски симбол $\leqslant$.

Поред аксиоме индукције (Δ) Пеанова аритметика другог реда садржи данас и следећих шест аксиома првог реда.

(1) $(\forall x)(s(x) \neq 0)$ (нула није следбеник)

(2) $(\forall x)(\forall y)(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$ (следбеник је јединствен)

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ (\forall x)\, x + 0 = x \\ (4)\ (\forall x)(\forall y)\, x + s(y) = s(x+y)\end{array}\right\} \text{(аксиоме сабирања)}$$

$$\left.\begin{array}{l}(5)\ (\forall x)\, x \cdot 0 = 0 \\ (6)\ (\forall x)(\forall y)\, x \cdot s(y) = x \cdot y + x\end{array}\right\} \text{(аксиоме множења)}$$

Прве две аксиоме су директно прве две Пеанове аксиоме. Помоћу њих Пеано је „индуктивно" (често кажемо и рекурзивно) дефинисао сабирање и множење. Данас се то ради експлицитно (директно) преко парова аксиома $(3)-(4)$ и $(5)-(6)$. Све „добре" особине за $+$ и $\cdot$, као што су на пример закони комутативности и асоцијативности, доказују се коришћењем аксиоме (Δ). Поредак (тзв. природни) природних бројева је изразив (кажемо *дефинабилан*) са

$$x \leqslant y \Leftrightarrow (\exists z)(y = x + z).$$

Поред константе 0, важни су и изрази (терми) $s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$ које редом означавамо са $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \ldots$ и називамо их нумералима. То показује да је већ у нашем језику садржан скуп природних бројева.

Тако се лако могу доказати теореме типа: $\underline{2}+\underline{2} = \underline{4}$, $\underline{3} < \underline{5}$, $\neg\underline{3} < \underline{2}$ и слично. Такозвани „комплетни дијаграм" за скуп природних бројева (кад скинемо цртицу испод).

Овде се крије једна велика опасност. Неко би могао рећи: „Па узмимо баш тај скуп $\underline{N} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots\}$ за стандардни скуп природних бројева". Међутим, ту се крије типичан пример логичке грешке под називом „врћење у круг" (или латински circulus vitiosus). Ми не можемо природне бројеве дефинисати користећи природне бројеве, тако да неко посебно сазнање „о три тачке" (тј. ...) на тај начин не добијамо. У сваком случају не можемо знати да ли је $\underline{N}$ (или њему изоморфни N; изоморфизам $n \mapsto \underline{n}$) најмањи индуктиван скуп!

Претпоставља се да аксиома математичке индукције уз помоћ осталих двеју аксиома не само важи већ и до краја (рекло би се категорички, до на изоморфизам и сл.) описује структуру природних бројева N, али и свих његових подскупова $\mathcal{P}(N)$.

Та чињеница се записује

$$(N, \mathcal{P}(N), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant) \models \text{ „аксиома индукције"}$$

где је $s(\,)$ операција додавања јединице. Очекивало се да ниједна друга структура не задовољава аксиоме природних бројева, али и да се из тих аксиома (у оквиру ПРДР) може извести свако тврђење о природним бројевима.

Да би се то показало нужно је било прво доказати тзв. **став потпуности** за ПРДР који гласи (примењен на Пеанову аритметику):

(∗) Све што важи за $(N, \mathcal{P}(N), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant)$ и изразиво је у ПРДР, може се доказати из Пеанових аксиома другог реда.

или симболички

$$(*) \qquad (N, \mathcal{P}(N), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant) \models \varphi \text{ акко } \mathrm{PA}^{\mathrm{II}} \vdash \varphi$$

где је $\mathrm{PA}^{\mathrm{II}}$ скуп од оне три Пеанове аксиоме и φ произвољна затворена формула (реченица) у ПРДР.

Међутим, као што ћемо ми ускоро показати нити је могуће категорички, тј. јединствено описати природне бројеве, нити је могуће доказати релацију $(*)$. И то обе ствари следе једна из друге.

Доказ да не постоји став потпуности за Пеанову аритметику (па тиме и у општем случају) еквивалентан је са пропашћу покушаја да се до краја опишу природни бројеви.

Па да видимо сада мало поближе како се то може показати. Означимо са T скуп (затворених) формула у ПРПР или ПРДР који може бити и бесконачан. Кажемо да је T непротивречан ако се из њега не може (у коначно много корака) извести из аксиома помоћу правила извођења контрадикција $\varphi \wedge \neg\varphi$ (где је φ произвољна формула). То записујемо

$T \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$. А ако, насупрот, из T доказујемо $\varphi \wedge \neg\varphi$, онда је T противречна. Пример противречне теорије је $T = \{\varphi, \neg\varphi\}$.

Даље, кажемо да T има модел ако постоји структура (модел) $\mathfrak{A}$ у коме ће бити испуњена свака формула из T. Тако, на пример, $(N, \mathcal{P}(N), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant)$ чини модел за све Пеанове аксиоме.

Основни став који се очекује у једној логици је **став потпуности**, који повезује непротивречност и постојање модела.

Став потпуности. Скуп формула T је непротивречан акко има модел.

Последица (Слаб став потпуности): Затворена формула φ је доказива акко је ваљана, односно тачна у сваком моделу. Симболички то пишемо: $\vdash \varphi$ акко $\models \varphi$. Значи истинитост (ваљаност) треба да се поклопи са доказивошћу!

Даље, ако логика задовољава став потпуности и сви могући докази су коначни тада важи, за примену логике веома значајан, следећи став.

Став компактности. Скуп формула T има модел акко сваки коначан подскуп од T има модел.

Доказ. Очигледно ако T има модел, тада ће и сваки коначан подскуп имати модел.

Са друге стране, ако је T противречан скуп, онда $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ (тј. из T се доказује контрадикција). Због коначности доказа та се контрадикција доказује из коначног скупа $T_0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset T$ (пишемо $T_0 \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$). Али то значи да T_0 нема модел, јер би у супротном и све последице од T_0 биле тачне у том моделу, па и $\varphi \wedge \neg\varphi$. Међутим то, наравно, није могуће.

Пример једне „добре" логике, како је то показао 1930. године Курт Гедел, је ПРПР. Та чињеница, да за ПРПР важи став потпуности, као и немогућност тако нечега (што ћемо ускоро показати) за ПРДР, означио је победу ПРПР над ПРДР.

Па да видимо, коначно, како је показано да се став потпуности не може доказати. У том циљу формулишимо прво како би **проширени став потпуности** за Пеанову аритметику (али слично и шире) у оквиру ПРДР гласио.

($\star$) **Проширени став потпуности (примењен на Пеанову аритметику) за ПРДР.** Нека је дат скуп формула T у оквиру ПРДР. Скуп T је непротивречан акко T има модел $(N, \mathcal{P}(N), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant, \ldots)$, где је N скуп „стандардних природних бројева", $\mathcal{P}(N)$ (пун) партитивни скуп од N (тј. садржи *све* подскупове од N), а три тачке су резервисане за додатне константе које се као што ћемо видети могу појавити.

Моделе типа које смо управо навели у ($\star$) назваћемо „стандардан модел за $\mathrm{PA}^{\mathrm{II}}$".

Сада ћемо доказати, што је мало необично, да ($\star$) не важи, а не да важи. То ћемо урадити тако што ћемо из претпоставке да ($\star$) важи доћи до контрадикције (позната математичка метода свођења на противречност – reductio ad absurdum).

Нека је сада $T = \mathrm{PA}^{\mathrm{II}} \cup C$, где је $\mathrm{PA}^{\mathrm{II}}$ скуп свих шест аксиома за Пеанову аритметику другог реда и $C = \{\underline{0} < c, \underline{1} < c, \underline{2} < c, \ldots\}$. Уочимо $T_0 \subseteq T$, тако да је T_0 коначан. Онда он очигледно садржи као подскуп $\{\underline{n_1} < c, \ldots, \underline{n_k} < c\}$, где је $\{n_1, \ldots, n_k\}$ коначан подскуп од N. Нека је $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\} + 1$. Тада ће очигледно T_0 бити задовољен у стандардном моделу за $\mathrm{PA}^{\mathrm{II}}$ ако се c интерпретира као m. На основу става компактности (који је последица од претпостављеног ($\star$)) и читав T има стандардни модел.

Међутим, са друге стране, у том добијеном моделу (интерпретација за) c се понаша као „бесконачан" елемент већи од свих коначних (стандардних) природних бројева. Значи, универзум модела (означимо га са $^*N$) садржи N као *прави* подскуп. Што је још горе, аксиома (Δ) не важи, зато што сам универзум $^*N$ није најмањи индуктиван скуп (мањи од њега је N). *Контрадикција. Значи не важи теорема* $(\star)$.

Одатле се може закључити да не постоји жељени, потпун и једнозначни опис природних бројева у ПРДР.

Да ли су математички логичари дигли руке од природних бројева? Ни најмање. Истраживања су текла у два правца. Прво, појам модела је ослабљен (релаксиран). Не захтева се да универзум $^*N$ буде баш N, нити да се унарни предикати интерпретирају преко свих подскупова од $^*N$ већ само њиховог дела. На тај начин настављена су истраживања у оквиру ПРДР.

Други правац је још значајнији. Уместо ПРДР прешло се на ПРПР. Аксиома (Δ) је замењена са

$$(\varphi(0) \wedge (\forall x)\,(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(s(x))) \Rightarrow (\forall x)\,\varphi(x),$$

где је $\varphi(x)$ формула у језику $\mathcal{L} = \{s(\,), +, \cdot, \underline{0}, \leqslant\}$. На тај начин добијен је бесконачан скуп аксиома. Очигледно да се овде уместо „свих индуктивних скупова" разматрају само тзв. *дефинабилни*, тј. типа $X = \{x \mid \varphi(x)\}$. То је доста ужа класа (чак „само" пребројива).

Нова аритметика означена је са PA и постала је предмет интензивних истраживања све до данас. Ипак, до најважнијих (негативних) резултата дошао је Гедел (30−тих година XX века), а што је била тема једном од чланака из прошлог броја Тангенте.

Он је показао да не само што немамо јединственост природних бројева (тј. што год рекли о њима, то важи и за неке друге бројеве (па ма шта били они и ти други)), већ ни потпуност. [Могуће је наћи φ тако да PA $\not\vdash \varphi$ и PA $\not\vdash \neg\varphi$.] Парис и Харингтон су пре тридесетак година пронашли „чисто математичко" тврђење (из комбинаторике) ψ које је у PA неодлучиво (тј. PA $\not\vdash \psi$ и PA $\not\vdash \neg\psi$). Тако да се непотпуност не односи само на „исчашена" Геделова тврђења типа: „Ја сам недоказиво тврђење", већ и на важне математичке ставове. Што је још горе та се ситуација не може поправити додавањем нових аксиома на задовољавајући начин (што је такође показао Гедел).

Иако Геделови (а и други) резултати изгледају, на први поглед, као пораз математике (па тиме и људских могућности уопште), математичари су убрзо претворили штету у корист. Разним питањима из основа* аритметике баве се данас многи истакнути математичари. Једне занима коју сазнајну вредност можемо дати теоремама (не обавезно аритметичким) зависно од средстава којима је доказана. Други се баве питањима везаним за постојање (или непостојање) поступака израчунавања, а што је у директној вези са рачунарством (computer science). Треће занима нешто треће.

Ни ПРПР није више јединствен! Појављују се поново (или су после 50−тих година XX века тек створене) многе логике које по (изражајним) могућностима леже између ПРПР или ПРДР, али су „добре" (имају **став потпуности, став компактности** (не баш увек и не баш у оној форми коју смо дали) и слично). Једну од таквих логика, тзв. $\Omega-$логику, за коју се још увек не зна да ли је „добра", увео је недавно и један од највећих математичара у области Теорије скупова (поред наших Стеве Тодорчевића и Бобана Величковића) Вудин. Она се показује као кључна у решавању једног од најважнијих проблема математике: *Проблем континуума* (тј. да ли је $|\mathcal{P}(N)|$ прва непребројива кардиналност?).

* * *

* овде *основе* не значе најлакши већ најтежи део математике