

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на
ДМ на Србија во 2016/17 година**

ПРОБЛЕМ КЕНИГСБЕРШКИХ МОСТОВА

ПОЧЕТАК ТЕОРИЈЕ ГРАФОВА

Војислав Пејровић, Нови Сад

О кенигсбершким мостовима

Некадашњи пруски град Кенигсберг (Königsberg), данас Калињинград, налази се обалама реке Прегел недалеко од места где се она улива у Балтичко море. Основан је давне 1225. године од стране теутонских витезова. Захваљујући повољном географском положају, Кенигсберг се брзо развио у важан трговачки центар да би касније прерастао у не мање значајан центар науке и културе. Универзитетски град је постао још 1544. године кад је основан познати Универзитет Албертина. Од великих имена науке и културе, а везаних за Кенигсберг, треба поменути филозофа Имануела Канта, математичаре Давида Хилберта и Кристијана Голдбаха, писца и композитора Амадеуса Хофмана и друге. На сл. 1 је гравура из прве половине 18. века која приказује тадашњи Кенигсберг.



Сл. 1.

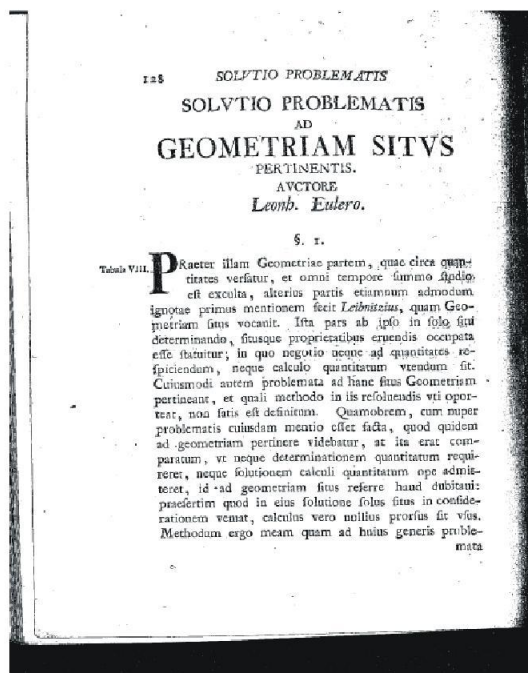
После 2. светског рата град је припао тадашњем Совјетском Савезу, а име му је промењено у Калињинград у част Михаила Калињина једног од вођа Октобарске револуције. После распада Совјетског Савеза Калињинград је остао у саставу Русије као изолован део руске територије окружен Литванијом са севера и Пољском с југа.

За Кенигсберг је везана следећа анегдота. На реци Прегел су два острва, означена са A и D на сл.1, која су повезана међусобно, а такође и са обалама B и C са укупно 7 мостова. Наводно је неком од грађана пало на памет да направи шетњу преко тих 7 мостова, тако да сваки мост пређе тачно једанпут и да се врати на полазиште. Упркос бројним покушајима, тражена шетња није нађена. И тако је искрсло питање: "Да ли таква шетња уопште постоји? А ако постоји, како изгледа?"

Одговор је дао Леонарда Ојлер, велико име математике тога времена, а вероватно један од највећих математичара уопште. До Ојлера, који је тада живео у тадашњој руској престоници Петрограду и радио у чувеној Петроградској академији наука, некако је стигао проблем кенигсбершких мостова. Он је, на елегантан и ефектан начин, показао да таква шетња не постоји. Резултат је објавио у аналима Петроградске академије под насловом

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,
Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 8, 1736, 128-140.

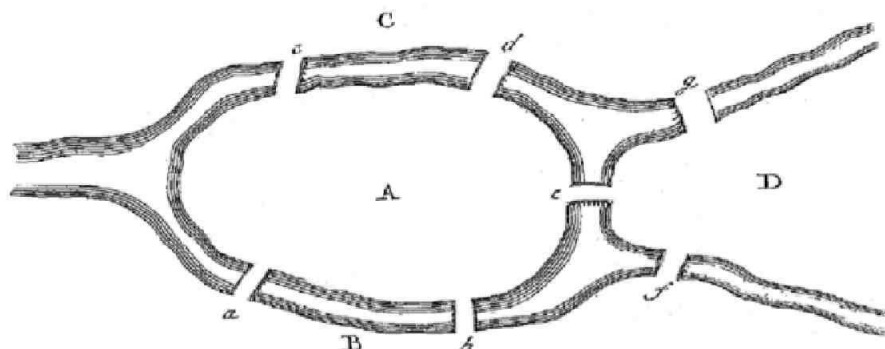
У преводу с латинског: *Решење проблема везаног за геомеџрију положаја.* На сл. 2 је прва страна тог рада.



Сл. 2.

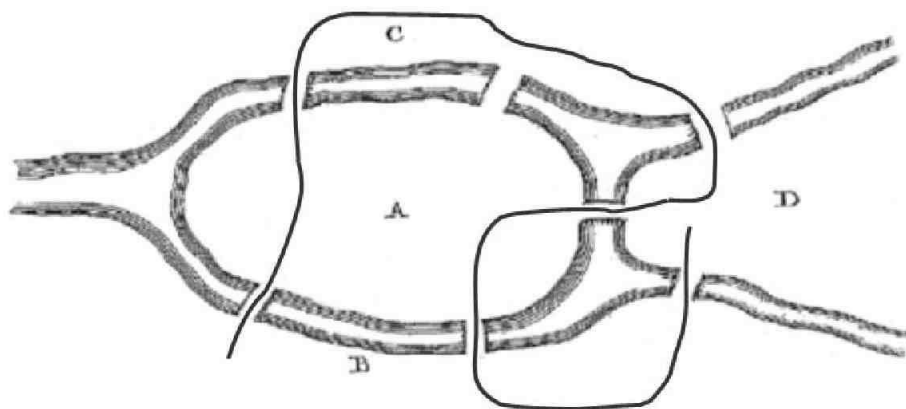
У свом доказу Ојлер је користио тзв. свођење на противречност или контрадикцију (на латинском *reductio ad absurdum*), једну стандардну методу извођења доказа. Ево како је то урадио.

Ако се план Кенигсберга у великој мери поједностави, добија се геометријски цртеж на сл. 3, иначе, преузет из Ојлеровог рада.



Сл. 3.

Са a, b, c, d, e, f, g означени су мостови. Свака шетња мостовима може се записати низом симбола A, B, C, D . На пример, шетњи на сл. 4 одговара низ $B A C D A B D$. Суседни симболи представљају мостове између појединих делова копна, те су због тога су свака два различита.



С. 4.

Очигледно, шетња је неуспешна, јер други мост између A и C није пређен. Као што ћемо видети, то није случајност, јер успешна шетња не постоји. Дајемо реч Ојлеру.

Претпоставимо да постоји тражена шетња W преко 7 мостова. Записујући је преко низа симбола, она је облика

$$W = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8, \quad (1)$$

где $x_i \in \{A, B, C, D\}$, $x_i \neq x_{i+1}$, $x_i x_{i+1}$ – мост, $i = 1, 2, \dots, 7$. Острво A је повезано са 5 мостова који се сви појављују у W . Како једно појављивање симбола A покрива највише 2 моста (тачно 2 ако је A негде у средини и тачно 1 ако је на неком од крајева W), A се мора појавити 3 пута у W . Слично, B , C и D , који имају по 3 моста, морају се појавити по 2 пута у W . Ако све то саберемо, испада да W има $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ симбола. Контрадикција с (1), јер је тамо 8 симбола.

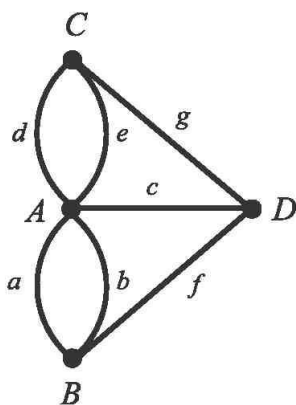
Тако је Ојлер показао да не постоји никаква шетња која сваким од 7 мостова прође тачно једанпут. Тим пре, не постоји шетња у којој се полазиште и завршетак поклапају.

Осим тога, Ојлер је у наведеном раду утврдио и више. Доказао је да при било ком броју острва и при било ком броју и распореду мостова, не постоји шетња која сваким мостом пролази тачно једанпут ако има више од два дела копна (мисли се на острва и обале) из којих полази непаран број мостова. У случају Кенигсберга са острва A полази 5 мостова, а са обала B и C и острва D по 3. Укупно 4 дела копна с непарним бројевима мостова и зато нема тражене шетње.

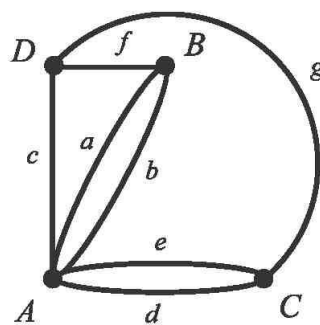
Појам графа

Сам Ојлер је приметио да у наведеном испитивању уопште нису битне геометријске особине, као што облици и дужине линија, углови између њих и сл. Ако нас интересује само шетња преко свих 7 мостова, потпуно су неважне величине и облици острва A и D и обала B и C , дужине мостова и њихова међусобна растојања итд. Једино је битно шта који мост повезује. Због тога је тако и насловио рад.

Сходно томе, Ојлеров цртеж (сл. 3) се може даље поједноставити као на сл. 5.



Сл. 5.



Сл. 6.

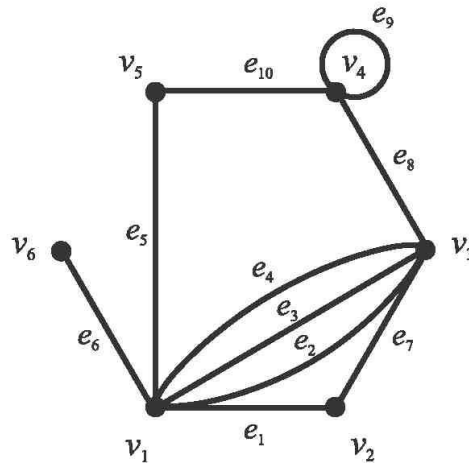
Острвима A и D , односно обалама B и C , одговарају тачке са истим ознакама. Мостовима a и b одговарају лукови који спајају тачке A и B . Притом, уопште није битан распоред тачака A , B , C , D у равни нити форме кривих

које спајају поједине парове тачака. С тог становишта, структура на сл. 6 је еквивалентна оној на сл. 5, иако су геометријске слике потпуно различите.

Таквим уопштавањима и апстракцијама долазимо до појма графа.

Дефиниција. Граф G је уређен пар (V, E) . V се зове *скуп чворова*, а E *скуп ирана*.

Гране су неуређени парови чворова; није битно који чвор је први, а који други. Притом, чворови у оквиру једне гране не морају бити различити. Такве гране се зову *петље* или *луке*. С друге стране, један те исти пар различитих чворова може се појављивати више пута, тј. представљати различите гране. Две или више грана су *паралелне* ако су представљене истим паром различитих чворова. На сл. 7. приказан је граф G у којем је $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ и $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.



Сл. 7.

Гране e_2, e_3, e_4 су паралелне, одговарају пару $\{v_1, v_3\}$. Грана e_9 је петља (лука) и одговара пару $\{v_4, v_4\}$.

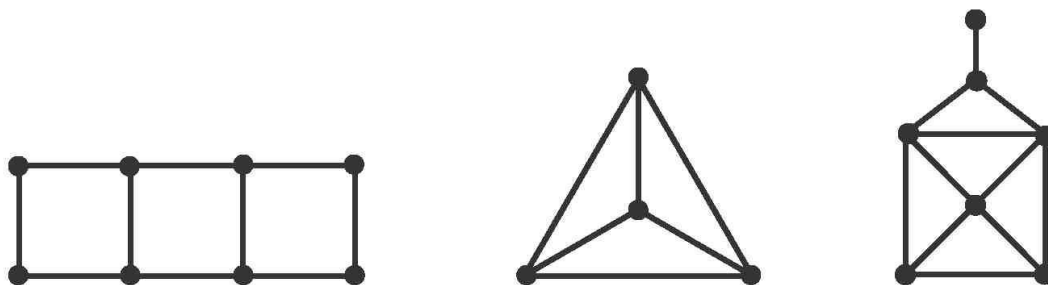
Нека је $e = \{u, v\}$ грана графа G , где су u и v чворови. За u и v кажемо да су *крајеви* гране e и да e излази из u , односно из v и сл. Уместо $e = \{u, v\}$ користимо скраћену ознаку $e = uv$ или $e = vu$. Број грана које излазе из чвора v зове се *степен* чвора v и обележава са $d(v)$. Тако је у графу на сл. 7 $d(v_1) = 6$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 5$, $d(v_4) = 4$ (петља се броји дупло) итд. У кенигсбергшком графу (сл. 5) је $d(A) = 5$ и $d(B) = d(C) = d(D) = 3$.

Стаза у графу G је низ $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k$, где су $v_1 v_2 \dots v_k$ чворови, $e_1 e_2 \dots e_{k-1}$ гране, при чему је $e_i = v_i v_{i+1}$ и $e_i \neq e_j$ за $i \neq j$. Дакле, у стази се чворови могу понављати, али гране не – оне су све различите.

У овој терминологији Ојлеров закључак о шетњама би гласио:

Теорема 1. (Ојлер 1736) *Ако граф G садржи више од два чвора непарног степена, тада не постоји стаза која садржи све иране из G .*

Сходно овом тврђењу кенигсбершки граф (сл. 5) не садржи такву стазу, односно не постоји шетња која сваким кенигсбершким мостом прође тачно једанпут. Исто важи за графове на сл. 8.



Сл. 8.

Што се тиче броја чворова непарног степена, тзв. непарних чворова, важи следеће тврђење.

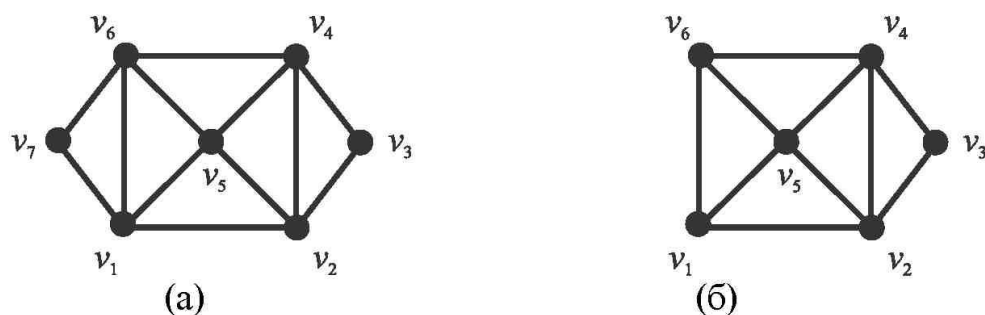
Теорема 2. *У сваком графу је број чворова непарног степена паран.*

То значи да у сваком графу или нема непарних чворова или их има тачно 2 или тачно 4 или тачно 6 итд. Тако граф на сл. 7 има тачно два непарна чвора, v_3 и v_6 , док сваки од графова на сл. 8 има по четири непарна чвора.

Ојлерови и полу-Ојлерови графови

Иако Ојлер није користио појам графа, увео га је мађарски математичар Кениг 20-тих година прошлог века, он га је на неки начин наговестио у свом раду о кенигсбершким мостовима. Због тога се тај рад сматра првим из теорије графова, а година 1736. њеним рођенданом.

У част Ојлера у теорију графова су уведена следећа два појма. Граф G је *Ојлеров* уколико има затворену стазу која садржи све гране из G . Ако граф G има стазу (не мора бити затворена) која садржи све гране из G , тада је он *полу-Ојлеров*. Очигледно, сваки Ојлеров граф је полу-Ојлеров, док обротно не мора да важи. Затворену стазу која садржи све гране графа зваћемо *Ојлеровом контуром*, а отворену *Ојлеровим путем*. На пример, граф на сл. 9(а) је Ојлеров; затворена стаза $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1 v_7 v_6 v_4 v_2 v_5 v_1$ је једна Ојлерова контура.



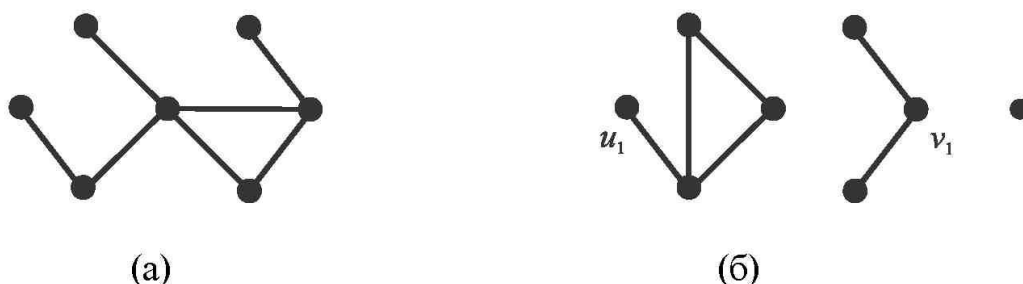
Сл. 9.

С друге стране, граф на сл. 9(б) је полу-Ојлеров. Може се показати да садржи само отворену стазу која пролази сваком граном тачно једанпут. тј. Ојлеров пут. Штавише, сваки Ојлеров пут у том графу обавезно почиње у једном од чворова v_1 и v_6 , а завршава се у другом. На пример, један Ојлеров пут је $v_1v_2v_3v_4v_2v_5v_4v_6v_5v_1v_6$.

Према Ојлеровом резултату, тј. према теореме 1, граф са 4 или више непарних чворова није полу-Ојлеров. А шта ако је тај број 0 или 2? Пре него што се упустимо у ту дискусију, неопходни су нам још неки појмови.

Пути у графу G је низ $v_1e_1v_2e_2v_3 \dots v_{k-1}e_{k-1}v_k$, где су $v_1v_2 \dots v_k$ чворови, $e_1e_2 \dots e_{k-1}$ гране, при чему је $e_i = v_iv_{i+1}$ и $v_i \neq v_j$ за $i \neq j$. За разлику од стазе, код пута су сви чворови различити, а самим тим су различите и све гране. Кажемо да наведени пут спаја чворове v_1 и v_k и да је то један (v_1-v_k) -пут. Чворови v_1 и v_k су његови крајеви. На пример, на сл. 7 $v_1e_2v_3e_8v_4e_{10}v_5$ је један (v_1-v_5) -пут.

Граф G је повезан ако за свака два чвора $u, v \in V(G)$ постоји $(u-v)$ -пут у G . У противном, граф је неповезан. На пример, граф на сл. 10(а) је повезан, док је граф на сл. 10(б) неповезан. У њему, на пример, не постоји (u_1-v_1) -пут.



Сл. 10.

По дефиницији, граф који се састоји од једног чвора без грана је повезан.

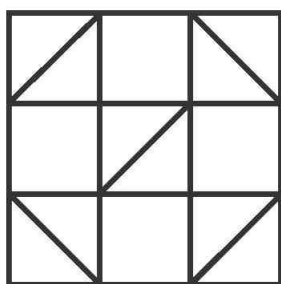
У свом раду о кенигсбершким мостовима Ојлер је, без доказа, навео да повезан граф чији су сви чворови парног степена садржи затворену стазу која пролази свим гранама. Такав граф је касније назван Ојлеров. Комплетан доказ тог тврђења, као и одговор за случај тачно два непарна

чвора, дошао пуно касније. Дао га је немачки математичар Карл Хирхолцер 1873.

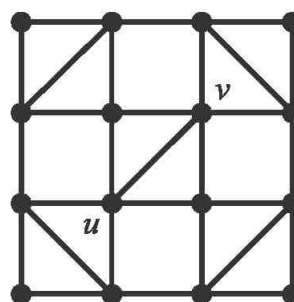
Теорема 3. (Хирхолцер 1873) *Повезан граф је полу-Ејлеров ако и само ако има највише два нејарна чвора.*

Цртање слике "у једном потезу"

Горњи наслов значи следеће. На листу папира је дат геометријски цртеж који се састоји од одређеног броја тачака и линија (не морају бити дужи) које спајају поједине парове тих тачака. Задатак је да се писаљка постави у једну од тачака или на једну од линија и да се након тога прође сваком линијом тачно једанпут, а да се писаљка ниједном не подигне с папира. Кроз дате тачке може (и мора) да се пролази више пута. На пример, нека је задати цртеж као на сл. 11(а).



(а)

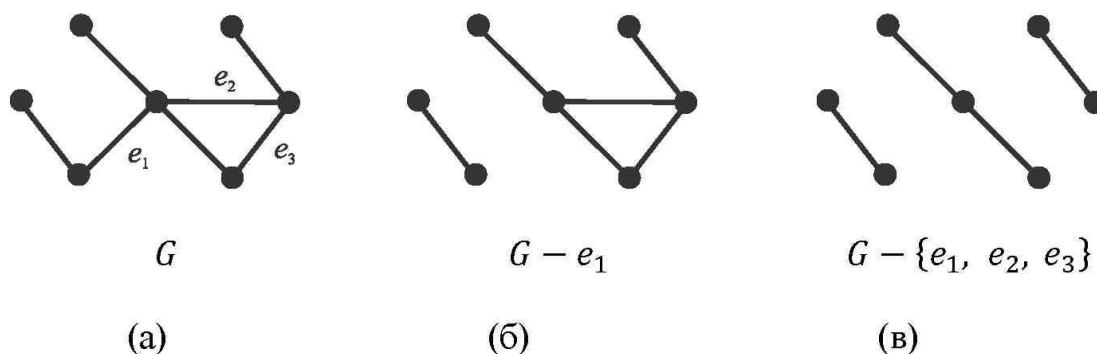


(б)

Сл. 11.

Ако пресечне тачке узмемо за чворове, а дужи које их спајају за гране, добијамо граф на сл. 11(б). Цртању слике 11(а) у једном потезу одговара стаза у графу 11(б) која сваком граном пролази тачно једанпут. Како су сви чворови, изузев u и v , парног степена, таква стаза постоји на основу теореме 3. Међутим, како изгледа једна таква стаза? Како доћи до ње?

Одговор на то дају Хирхолцеров и Флеријев алгоритам. Представимо Флеријев алгоритам који је погоднији за "ручну употребу", тј. цртање слике у једном потезу. За то су нам потребни додатни појмови из теорије графова. Уклањање *гране* (*грана*) је операција којом се скуп грана графа смањује за једну или више грана. Притом, чворови остају недирнути. На пример, уклањање гране e_1 из графа на сл. 12(а) даје граф на сл. 12(б), док уклањање грана e_1, e_2, e_3 води графу на сл. 12(в). Граф G' добијен уклањањем грана $e_1, e_2, \dots, e_k$ из графа G означава се са $G' = G - \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$.



Сл. 12.

Грана e је *мост* у графу G ако граф $G - e$ има више повезаних делова него G . Другим речима, граф $G - e$ је, у одређеном смислу, слабије повезан, неповезанији, од G . На пример грана e_1 је мост у графу G на сл. 12(а), јер је граф G повезан, а граф $G - e_1$ није. Међутим грана e_2 није мост, јер граф $G - e_2$ остаје повезан. Сходно томе, у графу на сл. 11(б) ниједна грана није мост. Може се показати да, ако је грана e је *мост* у графу G , тада је број повезаних делова графа $G - e$ за тачно 1 већи од броја повезаних делова графа G .

Као што ће се видети, Флеријев алгоритам, у случају Ојлеровог графа, стартује у произвољном чвору v_0 . Почетна стаза је тривијална и чини је само чвор v_0 . У сваком даљем кораку, стаза "расте" за по једну нову грану и тај процес траје све до команде STOP. У том тренутку "покупљена" је последња грана у графу, а један њен крај је почетни чвор v_0 .

ФЛЕРИЈЕВ АЛГОРИТАМ

улаз: Ојлеров граф G

излаз: једна Ојлерова контура у G

1. Уочи се произвољан чвор $v_0 \in V(G)$ и стави $W_0 = v_0$.
2. Међу гранама које излазе из v_0 бира се грана $e_1 = v_0 v_1$ сходно следећим захтевима:
 - (а) постоји грана која излази из v_0 и која није мост у G ;
тада је e_1 било која од њих;
 - (б) све гране које излазе из v_0 су мостови у G ,
тада је e_1 било која од њих.
 У оба случаја стави се $W_1 = v_0 e_1 v_1$ и прелази на следећу команду.
3. Ако је стаза $W_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$, $i \geq 1$, већ формирана, бира се грана $e_{i+1} = v_i v_{i+1}$ у графу $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ сходно следећим захтевима:
 - (а) у графу G_i постоји грана која излази из v_i и која није мост у G_i ;
тада је e_{i+1} било која таква грана;

(б) све гране у графу G_i која излазе из v_i су мостови у G_i ;

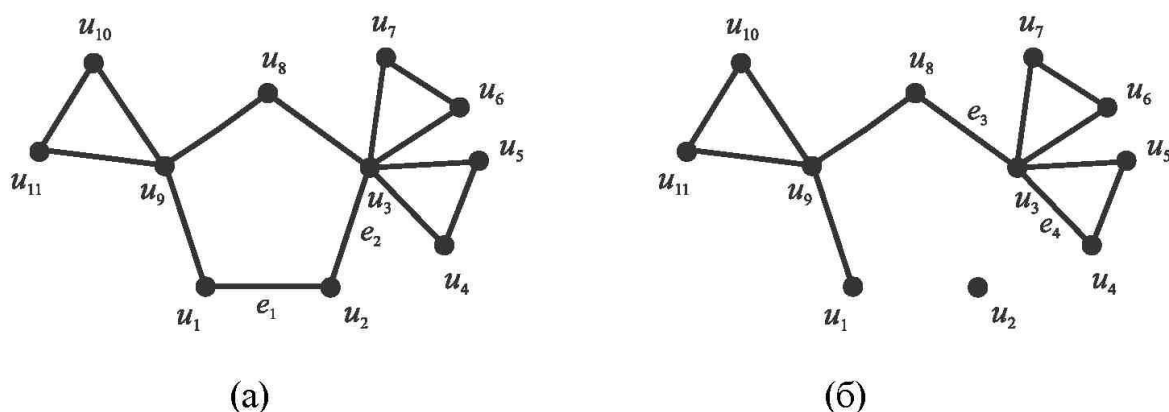
тада је e_{i+1} било која од њих.

У оба случаја стави се $W_{i+1} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i e_{i+1} v_{i+1}$ и прелази на следећу команду.

4. Стави се $i \leftarrow i + 1$ и понови команда 3. Уколико је неизводљива – STOP.

У случају полу-Ојлеровог графа који има тачно два непарна чвора, Флеријев алгоритам функционише на исти начин осим команде 1. Наиме, уместо да је произвољан, чвор v_0 мора бити један од два непарна чвора. На крају, алгоритам се зауставља у другом непарном чвору.

Ево два примера Флеријевог алгоритма "у акцији". Граф G на сл. 13(a) је Ојлеров и почетни чвор v_0 може бити било који. Рецимо да је $v_0 = u_1$. Сходно команди 1. је $W_0 = u_1$.

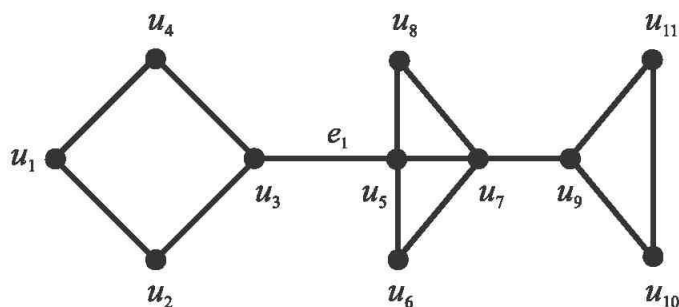


Сл.13.

Следећи команду 2. добијамо $W_1 = u_1 e_1 u_2$ (може и $W_1 = u_1 u_9$), а потом, по команди 3, $W_2 = u_1 e_1 u_2 e_2 u_3$. Тако стижемо до графа $G_3 = G - \{e_1, e_2\}$ (сл. 13(б)). У њему је грана $e_3 = u_3 u_8$ једини мост међу гранама које излазе из чвора u_3 . Сходно команди 3(a), у следећем кораку "заобилазимо" грану e_3 и бирамо било коју од преосталих. Рецимо, грану $e_4 = u_3 u_4$. Тако добијамо $W_3 = u_1 e_1 u_2 e_2 u_3 e_4 u_4$ итд. Једна Ојлерова контура би била

$$W_{14} = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_3 u_6 u_7 u_3 u_8 u_9 u_{10} u_{11} u_9 u_1.$$

На сл. 14 је пример полу-Ојлеровог графа са тачно два непарна чвора. То су u_3 и u_9 , оба степена 3, док су сви остали степена 2 или 4.



Сл. 14.

Као што је напред речено, примењује се исти алгоритам, с тим што је почетни чвор v_0 један од два непарна. Узмимо да је $v_0 = u_3$. У почетном графу грана $e_1 = u_3u_5$ је мост, док преостале две које излазе из u_3 нису. Због тога бирамо једну од њих. Даље, поступајући по командама 1 - 4, добијамо један Ојлеров пут

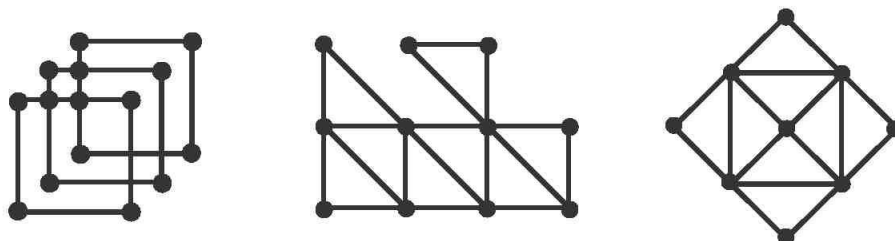
$$W'_{14} = u_3u_4u_1u_3u_5u_6u_7u_8u_5u_7u_9u_{10}u_{11}u_9$$

који се завршава у другом непарном чвору u_9 .

На крају, остављамо читаоцима неколико задатака за самосталну вежбу.

1. Нацртати у једном потезу цртеж са слике 11(а).

2. За графове на слици доле утврдити који су Ојлерови, а који полу-Ојлерови. За Ојлерове и полу-Ојлерове нацртати одговарајуће слике у једном потезу.



Литература

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer 2008
- [2] J. Clark, D. A. Holton, *A First Look at Graph Theory*, Word Scientific 1991
- [3] V. Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu 1998