ШТА ЈЕ МАТЕМАТИКА?

"Штета је што нисам боље знао математику."

Albert Einstein

Уређује: ***Небојша Икодиновић***
nebojsa_ikodinovic@yahoo.com

Није лако, а ни корисно, рећи шта је то **математика**. Као и већина наука, она обухвата многе различите врсте проблема и нема тачно утврђене границе. Најбољи начин да се открије шта је математика јесте да се њоме бавимо.

У сваком делу овог чланка бавићемо се разним сегментима математике.

I

Преуређивање низова и неједнакости

Размотримо најпре један пример. У једном новчанику налазе се новчанице од по 50 динара, у другом од по 100 а у трећем од по 1000. Из једног новчаника можемо узети само 3, 4 или 5 новчаница. Ако вам је познат садржај сваког новчаника, дозвољено је да изаберете новчаник из којег ћете узети 3, из којег 4 а из којег 5 новчаница и желите да зарадите што више новца, како ћете поступити? Наравно, узећете највише новчаница од по 1000 динара, тј. 5, затим 4 новчанице од по 100 динара и 3 новчанице од по 50. При сваком другачијем избору добићете мању суму новца!

Заправо, ако је

$$a_1 = 50\,(\text{дин}) \leqslant a_2 = 100\,(\text{дин}) \leqslant a_3 = 1000\,(\text{дин})$$

и

$$b_1 = 3,\ b_2 = 4,\ b_3 = 5,$$

међу сумама

$$\begin{array}{ll} S_1 = 50 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 1000 \cdot 5 & S_2 = 50 \cdot 3 + 100 \cdot 5 + 1000 \cdot 4 \\ S_3 = 50 \cdot 4 + 100 \cdot 3 + 1000 \cdot 5 & S_4 = 50 \cdot 4 + 100 \cdot 5 + 1000 \cdot 3 \\ S_5 = 50 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 1000 \cdot 4 & S_6 = 50 \cdot 5 + 100 \cdot 4 + 1000 \cdot 3 \end{array}$$

највећа је S_1, а најмања S_6.

Проблем. Дати су низови $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ позитивних реалних бројева. Претпоставимо да је $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. За сваку пермутацију $p_1, p_2, \ldots, p_n$ чланова низа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ посматрајмо суму:

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n.$$

Која је, од ових $n!$ сума, највећа, а која најмања?

Решење. Највећа сума је $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n$, за пермутацију $c_1, c_2, \ldots, c_n$ која низ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ "уређује" у неопадајући, тј. за коју је

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n \,,$$

док је најмања сума $a_1d_1 + a_2d_2 + \cdots + a_nd_n$ за пермутацију $d_1, d_2, \ldots, d_n$ која представља "уређење" низа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ у нерастући низ:

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n \,,$$

тј. за сваку премутацију $p_1, p_2, \ldots, p_n$ елемената $b_1, b_2, \ldots, b_n$, важи:

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n \leqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n$$

и

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n \geqslant a_1d_1 + a_2d_2 + \cdots + a_nd_n \,.$$

Другим речима, одговарајућа сума је највећа када је низ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ "уређен исто" као што је уређен низ $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, односно сума је најмања ако су низови "супротно уређени".

Оставља се читаоцу да докаже претходно наведено тврђење. Напоменимо да се тврђење може уопштити и на више од два низа.

Ако уведемо нову ознаку

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \,, \tag{1}$$

за низове $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, биће

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} ,$$

за сваку премутацију $c_1, c_2, \ldots, c_n$ низа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Уведена ознака (1) може се проширити и на више низова, што ће бити показано кроз примере.

Пример 1. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви доказати да важи неједнакост

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Решење. Без губљења општости можемо претпоставити да је $a \leqslant b \leqslant c$. Тада је и $a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2$, па је

$$a^3 + b^3 + c^3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix} = ac^2 + ba^2 + cb^2 .$$

Пример 2. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви доказати да важи неједнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решење. Ако претпоставимо да је $a \leqslant b \leqslant c$, биће $\frac{1}{b+c} \leqslant \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{a+b}$, па је

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix} ,$$

тј.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

и

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} .$$

Сабирањем последње две неједнакости добијамо

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geqslant 3 .$$

Пример 3. Одредити минималну вредност израза $\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$ за $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Решење. За свако x из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи:

$$\sin^3 x \leqslant \cos^3 x \quad \Rightarrow \frac{1}{\sin x} \geqslant \frac{1}{\cos x}$$

и

$$\sin^3 x \geqslant \cos^3 x \quad \Rightarrow \frac{1}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x},$$

тј. низ $\sin^3 x, \cos^3 x$ је супротно уређен од низа $\frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}$, па је

$$\begin{bmatrix} \sin^3 x & \cos^3 x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \dfrac{1}{\sin x} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} \sin^3 x & \cos^3 x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \dfrac{1}{\cos x} \end{bmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 = 1\,.$$

Пример 4. Ако су a, b, c мерни бројеви дужина страница неког троугла, доказати да важи неједнакост:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Решење. При доказивању неједнакости у вези троугла, често је веома корисно извршити трансформацију $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, где су x, y и z позитивни реални бројеви. Тада је $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, где је $s = (a + b + c)/2$, па је дата неједнакост еквивалентна са

$$x^3z + y^3x + z^3y \geqslant x^2yz + xy^2z + xyz^2\,.$$

Ако последњу неједнакост поделимо са xyz добијамо

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z\,.$$

Ако је, на пример, $x \leqslant y \leqslant z$, тада је $x^2 \leqslant y^2 \leqslant z^2$ и $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$, па је

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z} & \dfrac{1}{x} \end{bmatrix}.$$

Пример 5. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab\,.$$

Решење. Низови a, b, c и a^2, b^2, c^2 су уређени на исти начин. Уведену ознаку (1) овде ћемо проширити на три низа: a^2, b^2, c^2, a, b, c и a, b, c. Тада тражена неједнакост следи из

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}.$$

Пример 6. Нека су $x_2, x_2, \ldots, x_n$ позитивни бројеви. Показати да важи неједнакост

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_n^{n+1} \geqslant x_1 x_2 \cdots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) .$$

Решење. Доказ је једноставан. Дата неједнакост следи из

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} .$$

Задаци за самостални рад

1. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви, доказати да важи неједнакост

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} .$$

2. Ако су a, b, c, d позитивни реални бројеви, доказати да важи неједнакост

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3} .$$

3. Нека су бројеви $a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ и $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Доказати неједнакост

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1} .$$

4. Доказати да за $a, b, c > 0$ важи неједнакост $\dfrac{a+b+c}{abc} \leqslant \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

5. Нека је $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$. Доказати да важе следеће неједнакости (неједнакости Чебишева):

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} &\leqslant \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{n} \\ \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} &\geqslant \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} . \end{aligned}$$

* * *

II

"Табличне формуле"

Списак важних идентитета

Спискови (таблице) важних, тј. често коришћених, формула типична су појава у математици: важне таутологије, важни алгебарски идентитети, формуле за израчунавање површина равних фигура, важни тригонометријски идентитети, граничне вредности неких низова, граничне вредности неких функција, таблица извода, таблица интеграла. Те таблице треба научити и знати. Наравно, треба знати и доказ сваке формуле за коју се "зна" да важи.

Међутим, формуле се не деле на "табличне" и "нетабличне" (у различитим књигама можете наћи различите спискове важних формула), већ на оне за које знате доказе и препознајете ситуације у којима их треба применити и оне које вам нису познате.

Пример 1. Задатак: *Доказати једнакост*

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b),$$

свакако ће брже решити неко чија таблица садржи идентитет

$$(*)\qquad x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy),$$

(који, често, средњошколска математика не сматра табличним идентитетом, док се, на пример, на пријемним испитима и такмичењима сматра познатим).

Тако, ако искористимо поменути идентитет, имамо:

$$\begin{aligned} &(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)\\ \overset{(*)}{=}\ &((b-c)+(c-a)+(a-b))(\cdots)\\ =\ &0\,. \end{aligned}$$

Пример 2. Ако је

$$\begin{aligned} u &= a+b+c+\lambda(b+c-2a)\\ v &= a+b+c+\lambda(c+a-2b)\\ w &= a+b+c+\lambda(a+b-2c)\,, \end{aligned}$$

доказати да је

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=27\lambda^2\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)\,.$$

Решење. Ако искристимо идентитет $(*)$ и

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=\frac{1}{2}\left((y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right)\,,$$

добијамо да је

$$\begin{aligned}u^3+v^3+w^3-3uvw &= \frac{1}{2}(u+v+w)\left((v-w)^2+(w-u)^2+(u-v)^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(3a+3b+3c)\left((3\lambda c-3\lambda b)^2\right.\\ &\qquad \left.+(3\lambda a-3\lambda c)^2+(3\lambda b-3\lambda a)^2\right)\\ &= \frac{27}{2}\lambda^2(a+b+c)\left((c-b)^2+(a-c)^2+(b-a)^2\right)\\ &= 27\lambda^2(a^3+b^3+c^3-3abc)\,.\end{aligned}$$

Пример 3. Доказати идентитет:

$$\begin{aligned}&25\left((b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7\right)\left((b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\right)\\ =\ &21\left((b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5\right)^2\,.\end{aligned}$$

Решење. Ако знамо идентитете:

$$\begin{aligned}(x+y)^3-x^3-y^3 &= 3xy(x+y)\,,\\ (x+y)^5-x^5-y^5 &= 5xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)\\ (x+y)^7-x^7-y^7 &= 7xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^2\,,\end{aligned}$$

које није тешко показати, и ставимо да је $x=a-c$, $y=b-a$, имаћемо да је $b-c=x+y$, па је

$$\begin{aligned}&25\left((b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7\right)\left((b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\right)\\ =\ &25\left((x+y)^7-x^7-y^7\right)\left((x+y)^3-x^3-y^3\right)\\ =\ &25\cdot 7xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^2\cdot 3xy(x+y)\\ =\ &21\left(5xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)\right)^2\\ =\ &21\left((x+y)^5-x^5-y^5\right)^2\\ =\ &21\left((b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5\right)^2\,.\end{aligned}$$

Пример 4. Ако је $a+b+c=0$ доказати да је

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\,.$$

Решење. Из

$$\begin{aligned}
& (a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2) \\
= \;& a^5+a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^5+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2+c^5 \\
= \;& a^5+b^5+c^5+a^2b^2(a+b)+a^2c^2(a+c)+b^2c^2(b+c) \\
= \;& a^5+b^5+c^5-a^2b^2c-a^2bc^2-ab^2c^2 \\
= \;& a^5+b^5+c^5-abc(ab+bc+ca) \\
= \;& a^5+b^5+c^5-\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2} \\
= \;& a^5+b^5+c^5+\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}
\end{aligned}$$

једноставно се добија да је

$$\frac{5}{6}(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=a^5+b^5+c^5\,,$$

тј. тражена једнакост.

Дакле, "није лоше" знати што више чињеница, тј. настојте да ваше "математичке таблице" буду што веће. Трудите се да чврсто запамтите што више формула и "досетки" са којима се посредно или непосредно сусрећете при решавању задатака.

У овом броју помажемо вам да проширите своју таблицу идентитета:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2\,;$$

$$(x+y+z)^3=(-x+y+z)^3+(x-y+z)^3+(x+y-z)^3+24xyz\,;$$

$$(x+y+z)^4-(x+y)^4-(y+z)^4-(z+x)^4+x^4+y^4+z^4=12xyz(x+y+z)\,;$$

$$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5=80xyz(x^2+y^2+z^2)\,;$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2=(x^2+y^2-z^2)^2+(2yz)^2+(2zx)^2\,;$$

$$(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2\,;$$

$$x^4+4y^4=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy) \qquad \text{(идентитет Софи Жермен);}$$

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)= \\
&\quad=(ax-by-cz-dw)^2+(bx+ay-dz+cw)^2 \\
&\quad+(cx+dy+az-bw)^2+(dx-cy+bz+aw)^2 \qquad \text{(Ојлеров идентитет);}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3+\cdots+(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n-1})a_n= \\
&\quad=1-(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)\,;
\end{aligned}$$

Задаци за самостални рад

1. Ако је $\sigma = x + y + z$, $\rho = xy + yz + zx$, $\pi = xyz$, доказати да је:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma^2 - 2\rho$;
2) $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma^3 - 3\sigma\rho + 3\pi$;
3) $x^4 + y^4 + z^4 = \sigma^4 - 4\sigma^2\rho + 2\rho^2 + 4\sigma\pi$;
4) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = \sigma\rho - 3\pi$;
5) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \rho^2 - 2\sigma\pi$.

2. Наћи сва реална решења система:

$$x + y + z = 1, \quad x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1.$$

3. Ако је $u = ax + by + cz$, $v = ay + bz + cx$ и $w = az + bx + cy$, доказати да је

1) $u^2 + v^2 + w^2 - vw - wu - uv =$
$= (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$;
2) $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

4. Ако је $a + b + c + d = 0$ доказати да је:

1) $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 = 9(bcd + cda + dab + abc)^2 =$
$= 9(bc - ad)(ca - bd)(ab - cd)$;
2) $(a + b)(a + c)(a + d) = (b + c)(b + d)(b + a) =$
$= (c + d)(c + a)(c + b) = (d + a)(d + b)(d + c)$;
3) $ad(a + d)^2 + bc(a - d)^2 + ab(a + b)^2 + cd(a - b)^2 +$
$+ac(a + c)^2 + bd(a - c)^2 + 4abcd = 0$;
4) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 2(ab - cd)^2 + 2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2 + 4abcd$.

5. Ако је

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0,$$

доказати да је

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

* * *

III

Задатак из геометрије!?

Нека је

$$T = \{1,2,3,4\},$$
$$P = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\},$$
$$R = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

Елементе скупа P назовимо *тачкама*, елементе скупа P *правама*, а елементе скупа R *равнима*. Ако три или више тачака припада једној правој кажемо да су колинеарне; у супротном називамо их неколинеарним. Ако четири или више тачака припада једној равни кажемо да су компланарне; у супротном називамо их некомпланарним. Доказати да важе следећа тврђења:

(I1) Свака *права* садржи најмање две различите *тачке*.

(I2) Постоји најмање једна *права* која садржи две *тачке*.

(I3) Постоји највише једна *права* која садржи две различите *тачке*.

(I4) Свака *раван* садржи најмање три неколинеарне *тачке*.

(I5) Постоји најмање једна *раван* која садржи три *тачке*.

(I6) Постоји највише једна *раван* која садржи три неколинеарне *тачке*.

(I7) Ако две разне *тачке* неке *праве* припадају једној *равни*, онда свака *тачка* те *праве* припада истој *равни*.

(I8) Ако две различите *равни* имају једну заједничку *тачку*, онда оне имају најмање још једну заједничку *тачку*.

(I9) Постоје четири некомпланарне *тачке*.

Задатак из рачунарства!?

Дати су низови (x_n) и (y_n), такви да је $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ и важи:

$$x_{n+1} = \frac{5x_n - 12y_n}{13} \quad \text{и} \quad y_{n+1} = \frac{12x_n + 5y_n}{13} \quad (n \geqslant 1).$$

Написати програм који израчунава, за задату вредност n, колико је $x_n^2 + y_n^2$.
Тестирајте програм за $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$.

* * *

Литература: Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1997.
П. С. Моденов, *Сборник задач*, Москва, 1957.

ШТА ЈЕ МАТЕМАТИКА?

„Штета је што нисам боље знао математику."

Albert Einstein

Уређује: ***мр Небојша Икодиновић***
nebojsa_ikodinovic@yahoo.com

Није лако, а ни корисно, рећи шта је то **математика**. Као и већина наука, она обухвата многе различите врсте проблема и нема тачно утврђене границе. Најбољи начин да се открије шта је математика јесте да се њоме бавимо.

У сваком делу овог чланка бавићемо се разним сегментима математике.

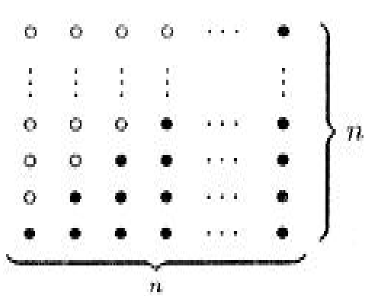
I

ТРАГАЊЕ ЗА НЕКИМ ФОРМУЛАМА

Верујем да је већини добро познато да за сваки природан број n важи следећа формула $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, коју веома лако доказујемо индукцијом, а до које долазимо, мање прецизним резоновањима, као на пример, сабирањем:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n & = S \\ n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & = S \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & = 2S \end{array}$$

или бројањем црних тачака на два начина:



$$1+2+3+4+\cdots+n=n^2-\frac{n^2-n}{2}$$

Како наћи сличне формуле за збирове:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2,\quad 1^3+2^3+\cdots+n^3,\quad 1^4+2^4+\cdots+n^4\ ?$$

Наравно, свако ко је учио доказивање математичком индукцијом имао је задатак да докаже да важе формуле:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad 1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\ \ldots .$$

Али, претпоставимо да су нам поменуте формуле непознате. Како наћи, на пример, формулу за збир $1^2+2^2+\ldots n^2$, тј. како наћи израз $I(n)$ такав да је:

$$(*)\qquad 1^2+2^2+\ldots n^2=I(n).$$

До тражене формуле можемо доћи уз помоћ комбинаторике. Наиме, позабавимо се следећим комбинаторним проблемом који, на први поглед, изгледа да нема никакве везе са тражењем поменуте формуле: *Одредити број уређених тројки* (x,y,z) *елемената скупа* $\{1,2,\ldots,n+1\}$ *таквих да је* $z>\max\{x,y\}$, *тј. за задато* n, *одредимо* $|A|$, *тј. број елемената скупа*

$$A=\{(x,y,z)\,|\,1\leqslant x,y,z\leqslant n+1,\ z>x,\ z>y\}.$$

Покушајмо са растављањем скупа A на дисјунктне подскупове чији је број елемената лако наћи. Наравно, поменутих растављања има више. Једно од њих је

$$A_1=\{(x,y,2)\,|\,1\leqslant x,y<2\},$$
$$A_2=\{(x,y,3)\,|\,1\leqslant x,y<3\},$$
$$\vdots$$
$$A_n=\{(x,y,n+1)\,|\,1\leqslant x,y<n+1\}.$$

Лако се види да су ови скупови међусобно дисјунктни, да је $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, као и да је $|A_1|=1, |A_2|=2^2,\ldots,|A_n|=n^2$. Дакле, $|A|=1^2+2^2+\cdots+n^2$. Скуп A је такође унија скупова:

$$A'=\{(x,y,z)\,|\,1\leqslant x<y<z\leqslant n+1\},$$
$$A''=\{(x,y,z)\,|\,1\leqslant x=y<z\leqslant n+1\},$$
$$A'''=\{(x,y,z)\,|\,1\leqslant y<x<z\leqslant n+1\},$$

који су међусобно дисјунктни, при чему је $|A'|=\binom{n+1}{3}$, $|A''|=\binom{n+1}{2}$, $|A'''|=\binom{n+1}{3}$, па је $|A|=\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$. Дакле,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}.$$

Такође, тражени идукцијски доказ за $(*)$, можемо открити израз $I(n)$.

Ако је $n = 1$, тада се $(*)$ своди на $1 = I(1)$, и то мора да важи. Даље, ако претпоставимо да важи формула $(*)$ за неки природан број n, тада додавањем израза $(n+1)^2$ на обе стране следи једнакост:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = I(n) + (n+1)^2.$$

Сада видимо да ће нам индукцијски доказ успети уколико важи једнакост $I(n) + (n+1)^2 = I(n+1)$. Дакле, треба одредити израз $I(n)$, тако да важи:

$$I(1), \quad I(n+1) - I(n) = (n+1)^2.$$

Прво нам на памет падају полиноми првог, другог, ... степена. Лако се види да I не може бити ни линаран, ни квадратан, али да може да буде полином трећег степена, односно полином облика $an^3 + bn^2 + cn + d$. Користећи метод неодређених коефицијената из једнакости

$$a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d - an^3 - bn^2 - cn - d = n^2 + 2n + 1$$

и

$$1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$$

налазимо да је $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$.

Задаци за самостални рад

Наћи одговарајуће формуле за збирове $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ и $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

II

„Табличне формуле"

Неке једнакости троугла

Нека је ABC произвољан троугао и нека су a, b и c дужине страница BC, CA и AB тог троугла; P површина тог троугла; $s = \frac{a+b+c}{2}$ његов полуобим; h_a, h_b и h_c дужине висина AA_1, BB_1 и CC_1, а h'_a, h'_b и h'_c растојања између ортоцентра H и темена A, B и C, редом; t_a, t_b и t_c дужине тежишних дужи AA_2, BB_2 и CC_2, а t'_a, t'_b, t'_c растојања између тежишта T и темена A, B, C редом; l_a, l_b и l_c дужине симетрала углова AA_3, BB_3 и CC_3 (A_3, B_3, C_3 су тачке у којима симетрале углова $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCA$ секу странице BC, CA и AB), а l'_a, l'_b и l'_c растојања између центра уписаног круга S и темена; R полупречник описаног круга, а k_a, k_b, k_c растојања центра описаног круга O од страница BC, CA, AB; r полупречник уписаног круга; S_a, S_b и S_c центри споља уписаних (приписаних) кругова, а r_a, r_b и r_c њихови полупречници. Тада важе формуле:

$$1)\ P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$
$$= \frac{abc}{4R} = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4};$$

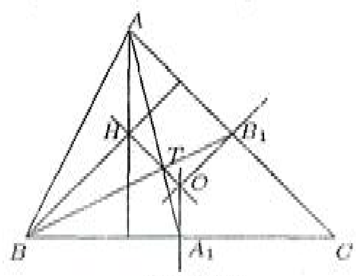
$$2)\ h_a' = 2k_a = \frac{|b^2+c^2-a^2|}{2h_a},\ h_b' = 2k_b = \frac{|c^2+a^2-b^2|}{2h_b},\ h_c' = 2k_c = \frac{|a^2+b^2-c^2|}{2h_c};$$

$$3)\ t_a = \frac{3}{2}t_a' = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\ t_b = \frac{3}{2}t_b' = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},$$
$$t_c = \frac{3}{2}t_c' = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2};$$

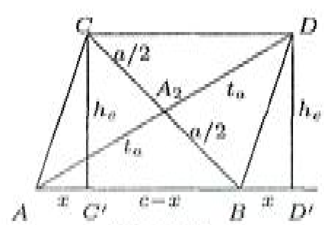
$$4)\ l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)},\quad l_b = \frac{2\sqrt{ca}}{c+a}\sqrt{s(s-b)},\quad l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)};$$
$$l_a' = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}},\quad l_b' = \sqrt{\frac{ca(s-b)}{s}},\quad l_c' = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}.$$

Доказ. 1) Претпостављамо да су вам формуле за израчунавање површине троугла познате. Доказе ових формула можете наћи у стандардној средњошколској литератури. Помоћу наведених формула лако можемо израчунати висине као и полупречнике описаног, уписаног и споља уписаних кругова, неког троугла, у функцији његових страница.

2) Ортоцентар H, тежиште T и центар описаног круга O су колинеарне тачке (Ојлерова права), $H - T - O$ и при томе тежиште дели дуж OH у односу $2:1$.



Слика 1



Слика 2

Троуглови AHT и A_1OT су слични, са коефицијентом сличности $\frac{1}{2}$, па је $h_a' : k_a = 2:1$. С друге стране, имамо да је

$$k_a^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16P^2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{16P^2}(b^2c^2 - 4P^2)$$
$$= \frac{a^2}{16P^2}\left(b^2c^2 - \frac{1}{4}(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)\right)$$
$$= \frac{a^2}{64P^2}(a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2)$$
$$= \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)^2}{64P^2} = \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{16h_a^2}$$

одакле следи тражена формула. Приметимо да је $a^2 < b^2 + c^2$, ако је угао код темена A оштар, док је $a^2 > b^2 + c^2$, уколико је угао код темена A туп.

3) Одредимо дужине тежишних дужи троугла у функцији његових страница.

Применом Питагорине теореме на правоугле троуглове $BA'A$, $BD'D$ и $AA'C$ (слика 2) добијамо једнакости: $x^2 + h_c^2 = b^2$, $(c+x)^2 + h_c^2 = (2t_a)^2$ и $(c-x)^2 + h_c^2 = a^2$. Последица прве и друге једнакости је $c^2 - 2xc + b^2 = 4t_a^2$, а прве и треће $c^2 - 2xc + b^2 = a^2$. Сабирањем последње две једнакости добијамо t_a у функцији дужина страница a, b, c. На сличан начин добијамо и одговарајуће формуле за t_b, односно t_c. Према познатом тврђењу да тежиште дели сваку тежишну дуж у размери $2:1$, имамо да је, на пример, $t_a' = \frac{2}{3}t_a$.

4) Нека су K, M, N тачке у којима странице BC, CA, AB додирују уписани круг (са центром у S, полупречника r; нацртајте слику!). Користећи тврђење да су тангентне дужи из неке тачке на кружницу једнаке, није тешко добити да је $|AM| = |AN| = s - a$, $|BN| = |BK| = s - b$, $|CK| = |CM| = s - c$. Даље, применом Питагорине теореме на правоугле троуглове ANS, BKS и CMS можемо израчунати растојања l_a', l_b' и l_c', између центра уписане кружнице S и темена троугла A, B и C, у функцији његових страница. На пример:

$$\begin{aligned}
l_a'^2 &= |AS|^2 = r^2 + |AN|^2 = r^2 + (s-a)^2 = \frac{P^2}{s^2} + (s-a)^2 \\
&= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} + (s-a)^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c) + s(s-a)^2}{s} \\
&= \frac{(s-a)((s-b)(s-c) + s(s-a))}{s} = \frac{(s-a)(s^2 - bs - cs + bc + s^2 - as)}{s} \\
&= \frac{(s-a)(2s^2 - (a+b+c)s + bc)}{s} \\
&= \frac{bc(s-a)}{s}.
\end{aligned}$$

С друге стране, користећи тврђење да симетрала сваког унутрашњег троугла дели њему наспрамну страницу на делове који су пропорционални осталим двема страницама, имамо да је $|BA_3| : |A_3C| = c : b$, а како је $|BA_3| + |A_3C| = a$ лако можемо израчунати дужине дужи BA_3 и CA_3. Није тешко доказати формуле: $|BA_3| = \dfrac{ca}{b+c}$, $|CA_3| = \dfrac{ba}{b+c}$, $|AB_3| = \dfrac{cb}{c+a}$, $|CB_3| = \dfrac{ab}{c+a}$, $|AC_3| = \dfrac{bc}{a+b}$, $|BC_3| = \dfrac{ac}{a+b}$. Дакле, ако знамо дужине страница троугла, помоћу добијених формула можемо израчунати и дужине одсечака које на страницама граде симетрале углова. Применом добијених формула на $\triangle BA_3C$ (дужине страница овог троугла су $\dfrac{ca}{b+c}$, l_a и c), добијамо да је

$$l_a' = |AS| = \frac{b+c}{a+b+c}\, l_a = \frac{b+c}{2s}\, l_a.$$

Комбиновањем добијених формула добијамо формуле тачке 4).

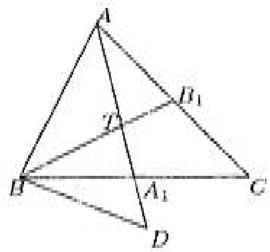
Пример 1. Доказати да је $4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Решење. На основу доказатих формула имамо да је

$$\begin{aligned} t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 &= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2) + \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \\ &= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Пример 2. Израчунати дужине страница троугла у функцији дужина тежишних дужи.

Решење. Нека је D тачка симетрична тежишту T у односу на тачку A_1.



Дужине страница троугла BDT су: $|BT| = \frac{2}{3}t_b$, $|BD| = \frac{2}{3}t_c$ и $|TD| = \frac{2}{3}t_a$. Пошто је BA_1 тежишна дуж троугла BDT имамо да је $|BA_1| = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{2}{3}t_b\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}t_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2}$, тј. $a = \frac{2}{3}\sqrt{2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2}$. Дужине осталих страница препуштамо читаоцу да пронађе.

Пример 3. Доказати да у оштроуглом троуглу важи формула:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{h_a h_b h'_a h'_b + h_b h_c h'_b h'_c + h_c h_a h'_c h'_a}.$$

Решење.

$$\begin{aligned} & h_a h_b h'_a h'_b + h_b h_c h'_b h'_c + h_c h_a h'_c h'_a \\ &\quad = h_a h_b \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2h_a}\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2h_b} + h_b h_c \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2h_b}\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2h_c} \\ &\qquad + h_c h_a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2h_c}\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2h_a} \\ &\quad = \frac{1}{4}((b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) + (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \\ &\qquad + (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)) \\ &\quad = \frac{1}{4}(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4) \\ &\quad = \frac{1}{4}\cdot 16P^2 \end{aligned}$$

Пример 4. Доказати да у сваком троуглу важи формула

$$P = \frac{l_a l_b l_c (b + c)(c + a)(a + b)}{8abcs}.$$

Решење.

$$\begin{aligned}
&\frac{l_a l_b l_c (b+c)(c+a)(a+b)}{8abcs}\\
&= \frac{\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}\cdot\frac{2\sqrt{ca}}{c+a}\sqrt{s(s-b)}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}(b+c)(c+a)(a+b)}{8abcs}\\
&= \frac{8\sqrt{bc\cdot ca\cdot ab}\sqrt{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}}{8abcs}\\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = P
\end{aligned}$$

Задаци за самостални рад

Доказати да важе следеће формуле:

1) $ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr;$

2) $a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr;$

3) $\dfrac{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{r_a r_b r_c} = \dfrac{4Rr}{s^2};$

4) $\dfrac{a^2}{r_a - r} + \dfrac{b^2}{r_b - r} + \dfrac{c^2}{r_c - r} = 2(r_a + r_b + r_c);$

5) $\dfrac{(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b)}{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b} = 4R;$

6) $\sqrt{\dfrac{r r_b r_c}{r_a}} + \sqrt{\dfrac{r r_c r_a}{r_b}} + \sqrt{\dfrac{r r_a r_b}{r_c}} = s;$

7) $k_a = \dfrac{r + r_b + r_c - r_a}{4};$

8) $\dfrac{R}{2r} = \dfrac{s^2}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b};$

9) $a{l'_a}^2 + b{l'_b}^2 + c{l'_c}^2 = abc;$

10) $\dfrac{l'_a l'_b l'_c}{r} = \dfrac{abc}{s}.$

* * *

III

ЗАДАТАК ИЗ АЛГЕБРЕ!?

Нека је $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и нека су $\oplus$ и $\odot$ операције на скупу B дефинисане са:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

1) Доказати да важи:

1. $(\forall x, y \in B)\, x \oplus y = y \oplus x$;

2. $(\forall x, y, z \in B)\, (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

3. $(\forall x \in B)\, x \oplus 0 = x$;

4. $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\, x \oplus y = 0$;

5. $(\forall x, y \in B)\, x \odot y = y \odot x$;

6. $(\forall x, y, z \in B)\, (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$;

7. $(\forall x \in B)\, x \odot 1 = x$;

8. $(\forall x \in B \setminus \{0\})(\exists y \in B)\, x \odot y = 1$;

2) У скупу B решити следеће једначине

(i) $(3 \odot x) \oplus 2 = 3$;

(ii) $x^2 \oplus x \oplus 3 = 0, (x^2 = x \odot x)$;

(iii) $(x \oplus 1) \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus 3) = 0$

3) Доказати да за произвољне $x, y \in B$, важи: $(x \oplus y)^5 = x^5 \oplus y^5$.

* * *

ЛИТЕРАТУРА: ARTHUR ENGEL, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1997.
П. С. МОДЕНОВ, *Сборник задач*, Москва, 1957.
СЛАВИША ПРЕШИЋ, *Разлике I*, Просветни преглед, Београд, 1997.

ШТА ЈЕ МАТЕМАТИКА?

„Штета је што нисам боље знао математику.“

Albert Einstein

Уређује: ***мр Небојша Икодиновић***
nebojsa_ikodinovic@yahoo.com

Није лако, а ни корисно, рећи шта је то **математика**. Као и већина наука, она обухвата многе различите врсте проблема и нема тачно утврђене границе. Најбољи начин да се открије шта је математика јесте да се њоме бавимо.

У сваком делу овог чланка бавићемо се разним сегментима математике.

I

Густи скупови

Ако бисмо на оси бројева означили све тачке које одговарају рационаланим бројевима, на њој би се појавило много шупљина, при чему не помаже чак ни чињеница да се између свака два рациналнa броја налази бесконачно много рационалних бројева. На тај начин, наша настојања да помоћу задате јединичне дужи измеримо произвољну дуж показују да свет рационалних бројева морамо употпунити и у њега увести и бројеве који се не могу представити у облику $\frac{m}{n}$. Бројеве које уводимо, и тиме попуњавамо поменуте шупљине, називамо ирационалним. Међутим, сваки реалан број можемо *произвољно добро* апроксимирати рационалним бројем, тј. сваки реалан број је *произвољно близак* неком рационалном броју. Кажемо да је скуп рационалних бројева *густ* (у скупу реалних бројева). Наиме, важи:

Теорема 1. *За свака два реална броја x и y за које је $x < y$, постоји рационалан број z, такав да је $x < z < y$, тј. сваки отворени интервал реалних бројева садржи рационалан број* [†].

[†] Штавише, сваки отворени интервал садржи бесконачно много рационалних бројева

Ово тврђење можемо формулисати и на следећи начин: За сваки реалан број r и сваки позитиван број ε[‡] постоји рационалан број q такав да је

$$r - \frac{\varepsilon}{2} < q < r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пример. За сваки реалан број r и произвољно изабран позитиван број ε, због Архимедовог својства, можемо наћи природан број n такав да је $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, па је $\dfrac{[nr]}{n}$ рационалан број такав да је

$$\left| \frac{[nr]}{n} - r \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тада кажемо да су елементи скупа $\left\{ \dfrac{[nr]}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ рационални бројеви произвољно блиски реалном броју r (наравно, ни за један конкретан елемент овог скупа не можемо рећи да је *произвољно* близак броју r).

Међутим, није скуп рационалних бројева једини густ подскуп скупа реалних бројева, тј. једини скуп који има својство изражено теоремом 1. Ова теорема је инспирација за следећу дефиницију.

Дефиниција. За неки подскуп D скупа реалних бројева кажемо да је *густ* (у скупу $\mathbb{R}$) ако и само ако за сваки реалан број r и сваки позитиван број ε постоји број d из D такав да је

$$r - \frac{\varepsilon}{2} < d < r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ако мало пажљивије погледамо последњу дефиницију, можемо рећи да су густи скупови они који су довољно богати да могу направити произвољно фину „мрежу“ на реалној оси, односно да реалну осу могу поделити на довољно мале делове (интервале).

Пример. Скуп

ирационалних бројева;

бројева облика $\dfrac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$, тј. скуп $\left\{ \dfrac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ (Слика 1.);

бројева облика $m\sqrt{2} + n, m, n \in \mathbb{Z}$, тј. $\{ m\sqrt{2} + n \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$

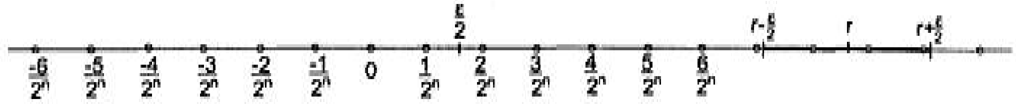
су само неки од примера густих скупова у $\mathbb{R}$. (За оне који су упознати са граничним вредностима низова поменимо и следеће тврђење: Ако је (a_n) низ позитивних бројева такав да је $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, тада је скуп $\{ m a_n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$ густ у скупу реалних бројева.)

[‡] Иако допуштамо да ε узима *ма које* позитивне вредности, у мислима га резервишемо за наше *произвољно мале вредности*, а у пракси му најчешће додељујемо оне вредности које сматрамо „малим“ у зависности од конкретне ситуације: $0,01; 2^{-5}; 10^{-7}; 10^{-10^{10}}; \ldots$ јер када кажемо *рационални бројеви блиски реалном броју* r или *(рационалне) приближне вредности реалног броја* r не мислимо на рационалне бројеве, на пример, из интервала

$$(r-1, r+1),\ (r-10, r+10),\ (r-100, r+100), \ldots$$

већ из

$$\left(r - \frac{1}{10}, r + \frac{1}{10} \right),\ \left(r - \frac{1}{100}, r + \frac{1}{100} \right),\ \left(r - \frac{1}{1000}, r + \frac{1}{1000} \right), \ldots$$



Слика 1.

Сви коначни скупови, скупови природних и целих бројева *нису* густи у скупу реалних бројева, као ни:

$\left\{\frac{m}{10^{10}} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{m\frac{1}{77} + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\vdots$

Теорема 2. *Ако је θ ирационалан број и M дати позитиван број, тада је скуп бројева облика $m\theta + n$, где су m и n цели бројеви и $m > M$, густ у скупу реалних бројева.*

Скица доказа. Нека је θ ирационалан број, M и ε позитивни бројеви и $\varepsilon < 1$. Треба да докажемо да за сваки реалан број r и свако $\varepsilon > 0$, постоје цели бројеви m и n, при чему је $m > M$, такви да је

$$r - \frac{\varepsilon}{2} < m\theta + n < r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Наредна тврђења није тешко доказати, а из њих теорема директно следи.

1) Затворен интервал $I = [0,1]$ можемо поделити на коначно много подинтервала I_1, $I_2, \ldots, I_k$ чије су дужине мање од ε.

2) За сваки природан број $m > M$, постоји цео број n такав да је $m\theta + n \in I$.

3) Постоји бесконачно много бројева $a_1 = m_1\theta + n_1$, $a_2 = m_2\theta + n_2, \ldots$ у интервалу I таквих да су m_i и n_i цели бројеви и важе неједнакости $m_i > M$ и $m_{i+1} - m_i > M$.

4) Из 3) следи да бар један од подинтервала, на које је подељен интервал I, садржи два од бројева $a_1, a_2, \ldots$; на пример a_i и a_j.

5) Ако је $j > i$, тада је разлика $a' = a_j - a_i$ број облика $m'\theta + n'$, $m', n' \in \mathbb{Z}$, $m' > M$, и различит је од нуле. Такође је и $|a'| < \varepsilon$.

6) Бројеви $0, \pm a', \pm 2a', \ldots$ деле скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ на интеравале чије су дужине мање од ε.

Задатак. Доказати да ако је θ рационалан број, претходна теорема не важи.

Решење. Нека је $\theta = \frac{1}{b}$, при чему је $b > 0$. Тада, за произвољне целе бројеве m и n, број $m\theta + n$ је облика $\frac{i}{b}$ за неко $i \in \mathbb{Z}$. Ако ставимо да је $r = \frac{1}{2b}$ и $\varepsilon = \frac{1}{2b}$, интервал $\left(r - \frac{\varepsilon}{2}, r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, тј. $\left(\frac{1}{4b}, \frac{3}{4b}\right)$ не садржи ни један број облика $\frac{i}{b}$. Заиста, ако би за неки цео број i било

$$\frac{1}{4b} < \frac{i}{b} < \frac{3}{4b},$$

имали би да је $1 < 4i < 3$, за неки цео број i, што је немогуће.

Слично се показује да теорема 2 не важи за сваки θ облика $\frac{a}{b}$.

По аналогији са претходним, за неки скуп A тачака у равни кажемо да је густ ако за сваку тачку (x, y) равни и сваки позитиван број ε постоји тачка (a, b) из скупа A таква да је

$$|x-a| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |y-b| < \varepsilon.$$

Тако, на пример, скуп $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ тачака са рационалним координатама је густ.

* * *

II

Густи скупови и непрекидне функције

Пример 1. Функција кореновања реалних бројева нам омогућава да дефинишемо степен позитивног реалног броја a рационалним бројем $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, на следећи начин $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Међутим, када бисмо означили тачке (q, a^q), $q \in \mathbb{Q}$, у координатној равни, добили бисмо један „шупљикав", али ипак „довољно густ", скуп тачака које на јединствен начин можемо повезати *„непрекидном линијом"*. Другим речима, на јединствен начин, можемо дефинисати *непрекидну* функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ (тј. вредности $a^{\sqrt{2}}$, a^{π}, $\ldots$) такву да њен график буде непрекидна линија којом смо спојили тачке (q, a^q), $q \in \mathbb{Q}$.

Чињеница да на јединствен начин можемо повезати тачке густог скупа непрекидном линијом веома је важна у математици, и формулисана је следећом теоремом: *Непрекидна реална функција f, на јединствен начин је одређена својим вредностима на скупу рационалних бројева, тј. са $f(q)$, $q \in \mathbb{Q}$.* Међутим, последње тврђење не важи само за скуп рационалних бројева, већ и за сваки густ скуп.

Теорема 3. *Непрекидна реална функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, на јединствен начин је одређена својим вредностима на неком густом подскупу D скупа $\mathbb{R}$, тј. вредностима $f(d)$, $d \in D$.*

Последња теорема може бити формулисана и на следећи начин:

Ако су $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидне функције чије се вредности поклапају на неком густом скупу D, тј. $f(d) = g(d)$, $d \in D$, тада су оне једнаке, тј. $f(x) = g(x)$, за сваки реалан број x.

Доказ ових теорема ћемо изоставити, али ћемо их искористити да би решили неколико проблема.

Задатак. Нека је $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \log_2 m - n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Израчунати $f(\sqrt{2})$.

Решење. Приметимо најпре да је скуп $\left\{\frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$ густ у скупу $\mathbb{R}^+$. Даље, логартимска функција $\log_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ је непрекидна и за све природне бројеве m и n

важи $\log_2 \frac{m}{2^n} = \log_2 m - n$. На основу теореме 3 следи да за сваки реалан број x имамо $f(x) = \log_2 x$, па је $f(\sqrt{2}) = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Задатак. Функција f дефинисана је на следећи начин:

$$f(x) = \sin \pi x + \sin \pi \sqrt{2} x.$$

Доказати да

1) једначина $f(x) = 2$ нема решења у скупу реалних бројева, тј. ни за један реалан број x, $f(x)$ није једнако 2;

2) постоје реални бројеви x такви да је $f(x)$ произвољно близу 2.

Решење. 1) Претпоставимо да постоји реалан број x такав да је

$$\sin \pi x + \sin \pi \sqrt{2} x = 2.$$

Пошто је за свако α, $\sin \alpha \leqslant 1$, следи да је

$$\sin \pi x = 1 \quad \text{и} \quad \sin \pi \sqrt{2} x = 1.$$

Из прве једначине добијамо да је за неки цео број m, $\pi x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, тј. $x = \frac{1}{2} + 2m$. Дакле, x је рационалан број.

Из друге једначине следи да је за неки цео број n, $\pi \sqrt{2} x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, одакле је $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + 2n \right)$. Дакле, x је ирационалан број.

Пошто реалан број не може истовремено бити и рационалан и ирационалан, дошли смо до контрадикције. Дакле, за сваки реалан број x, $f(x) \neq 2$.

2) Пошто је $\sin \pi \left(\frac{1}{2} + 2n \right) = 1$, за сваки цео број n, довољно је пронаћи такво n да је $\sin \pi \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 2n \right)$ довољно близу броју 1, односно n такво да је број $\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 2n \right)$ веома близу броју облика $\frac{1}{2} + 2m$, за неки цео број m.

Другим речима, за задато $\varepsilon > 0$, треба пронаћи целе бројеве m и n такве да је

$$\left(\frac{1}{2} + 2m \right) - \varepsilon < \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 2n \right) < \left(\frac{1}{2} + 2m \right) + \varepsilon,$$

тј.

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon < 2\sqrt{2}n - 2m < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon,$$

или еквивалентно

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{4} - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt{2}n - m < \frac{1 - \sqrt{2}}{4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Према теореми 2, постоје цели бројеви m и n који задовољавају последње неједнакости. Дакле, за те вредности m и n, $f\left(\frac{1}{2} + 2n \right)$ је довољно близу броју 2.

Задатак. Нека је θ ирационалан број. Одредити све непрекидне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је
$$f(x) = f(x+1) = f(x+\theta), \quad \text{за све реалне бројеве } x.$$

Решење. Пошто је $f(x) = f(x+1)$, за све реалне бројеве x, следи да је $f(x) = f(x+m)$, $x \in \mathbb{R}$, за сваки цео број m.

Такође, из $f(x) = f(x+\theta)$, $x \in \mathbb{R}$, следи да је $f(x) = f(x+\theta n)$, $x \in \mathbb{R}$, за сваки цео број n.

Дакле, за сваки реалан број x и све целе бројеве m и n имамо да је
$$f(x) = f(x+m+\theta n).$$
Ако ставимо да је $f(0) = c$, имамо да је $f(m+\theta n) = c$, за све целе бројеве m и n. Како је скуп $\{m+\theta n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ густ а f непрекидна функција, следи да је $f(x) = c$, за сваки реалан број x, тј. f је константна функција.

Задатак. Одредити све непрекидне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је $f(1) = 1$ и
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{за све } x \text{ и } y.$$

Решење. Пошто је $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$, имамо да мора бити и $f(0) = 0$. Такође, из
$$0 = f(0) = f(1+(-1)) = f(1) + f(-1) = 1 + f(-1),$$
следи да је $f(-1) = -1$.

Даље, за сваки природан број n је
$$f(n) = f(\underbrace{1+\cdots+1}_{n}) = \underbrace{f(1)+\cdots+f(1)}_{n} = n,$$
$$f(-n) = f(\underbrace{(-1)+\cdots+(-1)}_{n}) = \underbrace{f(-1)+\cdots+f(-1)}_{n} = -n,$$
као и
$$1 = f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n} = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$
тј. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$.

Најзад, за све природне бројеве m и n имамо да је
$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m} = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n},$$
као и $f\left(-\frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n}$, јер је $f\left(-\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{m}{n}\right) = f(0) = 0$.

Дакле, за сваки рационалан број q имамо да је $f(q) = q$, тј. функција f и идентично пресликавање $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ имају исте вредности на скупу рационалних бројева. Пошто су обе функције непрекидне, а $\mathbb{Q}$ густ скуп, следи да је за сваки реалан број x, $f(x) = x$. Другим речима идентично пресликавање скупа реалних бројева је једина функција која задовољава услове задатка.

Задатак. Нека су f и g непрекидне периодичне функције[§] различите од константних. Ако је 1 период функције f, а $\sqrt{2}$ период функције g, доказати да функција $f + g$ није периодична.

* * *

III

Одбијање светлости од огледала и реални бројеви

Светлосни зрак одбија се од равног огледала тако да је угао између упадног зрака и огледала једнак углу између рефлектованог зрака и огледала; чак, упадни зрак, огледало и рефлетујући зрак припадају једној равни.

Позабавимо се следећим проблемом: *Какав је пут светлосног зрака који се одбија од четири огледала која образују квадрат?*

Нека огледала образују квадрат $\mathcal{K} = ABCD$ и нека се извор светлости L налази на AB, а зрак светлости, емитован из овог извора, образује угао α са страницом AB.

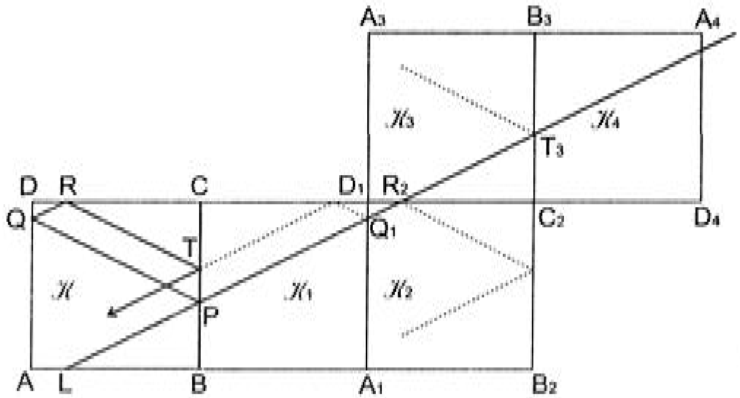
Докажимо да, на овај начин емитовани, зрак образује затворену изломљену линију (која може саму себе да сече) ако и само ако је $\operatorname{tg} \alpha$ рационалан број.

Поставимо координатни систем (Слика 2.) са почетком у тачки A и $x-$ и $y-$осом дуж страница AB и AD квадрата $\mathcal{K}$. Нека је 1 дужина странице квадрата. Тада је $L(a, 0)$, при чему је $0 < a < 1$. Поделимо раван на квадрате, правим линијама $x = m$, $y = n$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Пут светлосног зрака, унутар квадрата $\mathcal{K}$, може бити пресликан на праву. Наиме, претпоставимо да зрак, емитован из L, погађа страницу BC у тачки P, AD у Q, DC у R и BC у T.

Пресликајмо, осном симетријом у односу на CB, квадрат $\mathcal{K}$ у квадрат $\mathcal{K}_1 = A_1BCD_1$. Затим, симетријом у односу на A_1D_1, квадрат $\mathcal{K}_1$ у $\mathcal{K}_2 = A_1B_2C_2D_1$, па симетријом у односу на D_1C_2, $\mathcal{K}_2$ у $\mathcal{K}_3 = A_3B_3C_2D_1$. Најзад, симетријом у односу на B_3C_2, $\mathcal{K}_3$ у $\mathcal{K}_4 = A_4B_3C_2D_4$. Тачке L и P, као и одговарајуће слике $Q_1 \in \mathcal{K}_1$, $R_2 \in \mathcal{K}_2$, $T_3 \in \mathcal{K}_3$ (редом тачака Q, R, T) припадају једној правој l. Права l пролази кроз неке квадрате квадратне мреже.

[§] Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је периодична ако постоји позитиван број ω такав да је $f(x + \omega) = f(x)$, за свако x. Број ω назива се периодом функције f.



Слика 2.

Пошто права l садржи тачку $L(a, 0)$ и има коефицијент правца $\operatorname{tg} \alpha$, њена једначина је

$$(*) \qquad y = \operatorname{tg} \alpha (x - a).$$

Лако се види да се светлосни зрак унутар квадрата $\mathcal{K}$ враћа у тачку L ако и само ако права l пролази кроз тачку $L_1(a + 2n, 2m)$ за неке природне бројеве m и n, тј. ако и само ако координате тачке L_1 задовољавају једначину $(*)$

$$2m = \operatorname{tg} \alpha \cdot 2n,$$

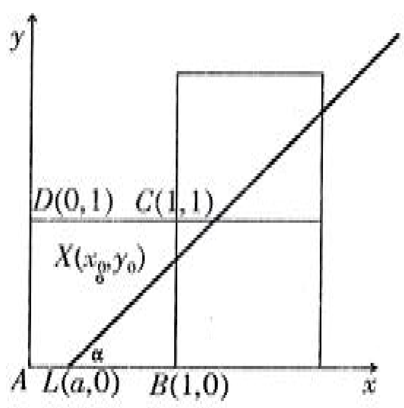
или еквивалентно

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}.$$

Дакле, зрак се враћа у „извор“ ако и само ако је $\operatorname{tg} \alpha$ рационалан број, различит од нуле. Лако се види, да у овом случају, пут светлосног зрака се периодично понавља.

Међутим, шта се дешава ако је $\operatorname{tg} \alpha$ ирационалан број, тј. како зрак путује унутар квадрата ако његов пут није затворена изломљена линија?

Показаћемо да, ако је $\operatorname{tg} \alpha$ ирационалан број, светлосни зрак, једном пролази произвољно близу било које тачке унутар квадрата $\mathcal{K}$.



Слика 3.

Нека је $X(x_0, y_0)$ произвољна тачка унутар квадрата $\mathcal{K}$ (Слика 3.). Довољно је доказати да права l пролази произвољно близу слике $X' \in \mathcal{K}_i$ тачке X, чије су координате $(x_0 + 2n, y_0 + 2m)$, за неке природне бројеве m и n. Дакле, наш циљ је да пронађемо тачку $Z'(x', \operatorname{tg}\alpha(x' - a))$, праве l, која је произвољно близу некој тачки $X'(x_0 + 2n, y_0 + 2m)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, тј. ако је ε произвољно мали позитиван реалан број, да важи:

$$|x' - (x_0 + 2n)| < \varepsilon \tag{1}$$

и

$$|\operatorname{tg}\alpha(x' - a) - (y_0 + 2m)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ако решимо, по x', једначину $\operatorname{tg}\alpha(x' - a) - (y_0 + 2m) = 0$, добијамо да је

$$x' = \frac{y_0 + 2m}{\operatorname{tg}\alpha} + a,$$

што очигледно задовољава неједнакост (2), и добијену вредност за x' заменимо у (1) добијамо:

$$\left|\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}m - \left(-\frac{y_0}{2\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x_0\right) - n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

тј.

$$|(\theta m - n) - r| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где је $r = -\dfrac{y_0}{2\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}x_0$ и $\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Према теореми 2, постоје цели бројеви m и n, при чему је m већи од задатог природног броја M, такви да је

$$r - \frac{\varepsilon}{2} < \theta m - n < r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одавде следи да су, за ове вредности m и n, тачке

$$X'(x_0 + 2n, y_0 + 2m) \quad \text{и} \quad Z'\left(a + \frac{y_0 + 2m}{\operatorname{tg}\alpha}, y_0 + 2m\right)$$

произвољно близу, односно да постоји тачка унутар квадрата $\mathcal{K}$ која је произвољно близу тачки X и лежи на светлосном зраку.

* * *

Литература

Judita Cofman, *Numbers and Shapes Revisited*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

ШТА ЈЕ МАТЕМАТИКА?

„Штета је што нисам боље знао математику.“

Albert Einstein

Уређује: ***мр Небојша Икодиновић***
nebojsa_ikodinovic@yahoo.com

Није лако, а ни корисно, рећи шта је то **математика**. Као и већина наука, она обухвата многе различите врсте проблема и нема тачно утврђене границе. Најбољи начин да се открије шта је математика јесте да се њоме бавимо.

У сваком делу овог чланка бавићемо се разним сегментима математике.

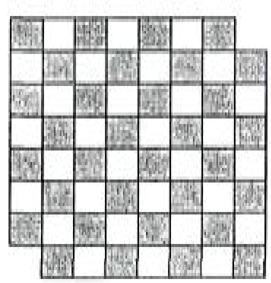
I

Бојење у равни

Наведену тему илустроваћемо примерима препуштајући читаоцу да открије шта наредне *примере чини математичким* проблемима, тј. *који се све математички садржаји* користе при њиховом решавању.

1. Из квадрата 8×8, подељеног на 64 јединична квадрата (поља) изрезана су два поља из супротних углова и на тај начин је добијена табла са 62 поља. Може ли се та нова табла покрити правоугаоницима 1×2, тако да сваки правоугаоник покрива два суседна поља?

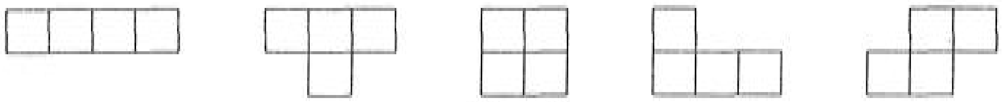
Решење. Претпоставимо да је табла обојена као на слици 1.



Слика 1.

Сваки правоугаоник покрива једно сиво и једно бело поље. Према томе, ако тражено покривање постоји, онда сви правоугаоници заједно покривају 31 сиво и 31 бело поље. Међутим, два изрезана поља су исте боје, на пример, беле. Међу преосталим пољима су 32 сива и 30 белих. Добијена контрадикција показује да тражено покривање не постоји.

2. Да ли је могуће формирати правоугаоник од следећих делова?

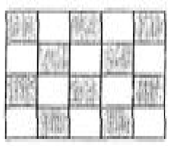


Слика 2.

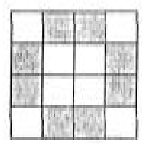
Решење. Није тешко видети да је немогуће од датих делова формирати правоугаоник 1×20, нити 2×10.

Да од задатих делова не можемо формирати ни правоугаоник типа 4×5, закључујемо на основу бојења приказаног на слици 3.

Четири фигуре приказане на слици 2, ма како биле постављене на обојену таблу 3, прекривају 2 бела и 2 сива поља, док једна (друга по реду) увек прекрива 3 бела и једно сиво или 3 сива и једно бело. Пошто имамо 10 сивих и 10 белих поља немогуће је задатим фигурама прекрити правоугаоник 4×5.



Слика 3.



Слика 4.

3. У пресеку друге врсте и прве колоне таблице 4×4 уписан је број -1 а у осталим пољима таблице уписан је број 1. Дозвољено је истовремено помножити са -1 све бројеве једне врсте или све бројеве једне колоне или све бројеве дуж једне праве паралелне некој од дијагонала таблице (специјално, број у једном угаоном пољу). Доказати да ма колико пута поновили ту операцију, у таблици ће увек остати бар један број -1.

Решење. Обојимо осам поља таблице као на слици 4.

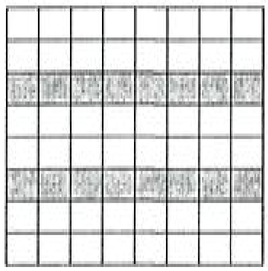
У свакој врсти, у свакој колони, као и дуж сваке праве паралелне једној од дијагонала, налази се паран број обојених поља. То значи да ће после сваког корака, паран број бројева на обојеним пољима променити знак.

Како на почетку број негативних бројева на обојеним пољима једнак 1, тј. непаран, то ће и после сваког корака тај број бити непаран, тј. у обојеном делу таблице ће увек бити бар један број -1.

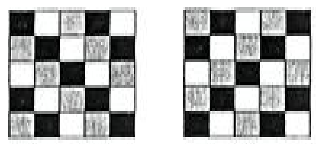
4. У свако пољу таблице 8×8 написан је цео број. Дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 (састављен од 9 поља) или квадрат 4×4 (састављен од 16 поља) и повећати за 1 сваки број на пољима изабраног квадрата. Да ли се свака полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни?

Решење. Не. Обојимо поља треће и шесте врсте дате таблице као на слици 5.

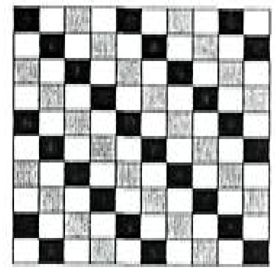
Уочимо да сваки квадрат 3×3 садржи 6 белих поља а сваки квадрат 4×4 или 8 или 12 белих поља. У сваком случају је број белих поља у сваком изабраном квадрату паран. Сваким дозвољеним потезом се збир бројева на белим пољима повећава за паран број, тј. парност тога збира је инваријанта. Према томе, ако је у полазној таблици збир бројева на белим пољима непаран, онда ће и после било ког броја корака тај збир остати непаран, тј. међу бројевима на белим пољима биће бар један непаран.



Слика 5.



Слика 6.



Слика 7.

5. Да ли је могуће из табле 5×5 изрезати једно поље, тако да се остатак може поплочати са 8 правоугаоника 1×3?

Решење. Обојимо поља табеле са три боје на два различита начина, као на сликама 6.

У оба случаја, црном бојом обојено је 9 поља, а осталим двема бојама по 8. У оба случаја, свака од три поља која се могу покрити правоугаоником 1×3, обојена су различитим бојама. Једино поље које је у оба случаја обојено црно је централно поље.

Према томе, ако одстрањено поље није централно, тражено покривање је немогуће.

Ако је одстрањено поље централно, покривање је могуће и остављамо читаоцу да се у то непосредно увери.

6. Да ли је могуће таблу 10×10 покрити правоугаоницима 1×4?

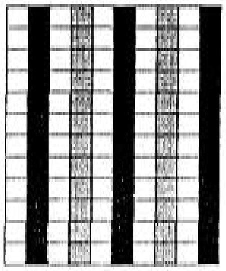
Решење. Обојимо таблу дијагонално са четири боје као на слици 7. Немогуће је ову таблу покрити правоугаоницима 1×4, јер сва четири поља, покривена правоугаоником 1×4, обојена су различитим бојама. Дакле, 25 правоугаоника би покрило по 25 квадрата сваке од боја. Међутим постоји 26 белих квадрата.

7. Доказати да је правоугаоник $a \times b$ могуће покрити правоугаоницима $1 \times n$ ако и само ако $n \mid a$ или $n \mid b$.

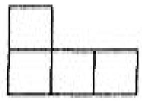
Решење. Ако $n \mid a$ или $n \mid b$, очигледо се табла $a \times b$ може покрити правоугаоницима $1 \times n$.

Претпоставимо да се табла $a \times b$ може покрити правоугаоницима $1 \times n$ и да $n \nmid a$. Тада је, за неке q и r, $a = qn + r$, $0 < r < n$. Обојимо таблу са n боја (означених бројевима $1, 2, \ldots, n$) тако што сва поља једне колоне бојимо истом бојом. На пример, за $a = 10$, $b = 12$, $n = 4$ бојење је приказано на слици 8.

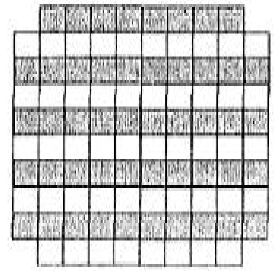
Тада имамо $bq + b$ квадрата обојених сваком од боја $1, 2, \ldots, r$ и bq квадрата сваке од боја $r + 1, \ldots, n$. Сваки хоризонтално постављен правоугаоник покрива n поља која су обојена различитим бојама. Сваки вертикално постављен правоугаоник покрива n поља исте боје. Ако је h број правоугаоника $1 \times n$ који су постављени хоризонтално, тада је преостало $bq + b - h$ квадрата обојених сваком од боја $1, 2, \ldots, r$ и $bq - h$ квадрата обојених сваком од боја $r+1,\dots,n$ и које треба покрити вертикалним правоугаоницима. Дакле, $n \mid bq+q-h$ и $n \mid bq-h$, па $n \mid (bq+b-h)-(bq-h)$, тј. $n \mid b$.



Слика 8.



Слика 9.



Слика 10.

8. Из квадрата $n \times n$ (подељеног на n^2 јединична квадрата-поља) изрезана су сва четири угаона поља и на тај начин је добијена табла са n^2-4 поља. За које вредности n се ова нова табла може покрити фигурама приказаним на слици 9?

Решење. Очигледно $4 \mid n^2-4$, па n мора бити паран број. Међутим, то није довољно. Обојимо нашу таблу као на слици 10.

Свака од датих фигура покрива три бела поља и једно сиво или три сива и једно бело. Пошто имамо једнак број белих и сивих поља на табли, при сваком покривању табле датим фигурама користимо једнак број фигура првог типа (које покривају 3 бела поља) и фигура другог типа (које покривају 3 сива поља). Дакле, користимо паран број фигура, тј. $8 \mid n^2-4$, па број n мора бити облика $4k+2$.

Остављамо читаоцу да се непосредно увери да се табле $(4k+2)\times(4k+2)$ могу покрити датим фигурама.

Дакле, потребан и довољан услов да се табла $n \times n$ може покрити фигурама са слике 9 је да n буде облика $4k+2$.

* * *

II

Бојење у простору

1. Може ли се са 250 цигли димензија $1\times1\times4$ напунити кутија димензија $10\times10\times10$?

2. Доказати да се кутија $a\times b\times c$ може напунити циглама димензија $1\times1\times n$ (стране цигли постављене су паралелно странама кутије) ако и само ако $n \mid a$ или $n \mid b$ или $n \mid c$.

* * *

Литература

Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag New York, 1998
Ратко Тошић, *Инваријанте - варијације на тему*, Алеф, 1996.

Статиите се објавени во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2004/05 година