СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 15 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке? *Алексей Толпыго*
4	2. Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, его стороны AB и CD параллельны. Известно, что углы DAC и ABD равны, а также углы CAB и DBC равны. Обязательно ли $ABCD$ — квадрат? *Александр Тертерян*
5	3. У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил? *Татьяна Казицына*
5	4. По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023? *Сергей Дворянинов*
5	5. Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 — чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник? *Николай Чернятьев*

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 15 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(-x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов $a_n, \ldots, a_1, a_0$ (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон? *Борис Френкин*
4	2. На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки? *Александр Юран*
4	3. Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра — какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}? *Павел Кожевников*
5	4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P — произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' — проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP. *Алексей Заславский*
6	5. У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил? *Татьяна Казицына*

45-й Международный математический Турнир городов

2023/24 учебный год

Решения задач осеннего тура

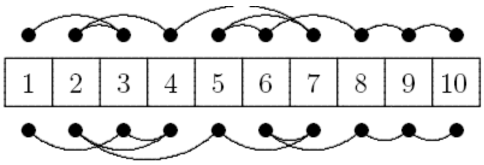
Базовый вариант

Младшие классы

1. [4] На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

Алексей Толпыго

Ответ: не обязательно. **Решение**. На рисунке проход Ани указан над полосой, а проход Вари – под полосой.

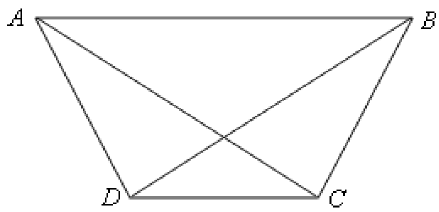


Замечание. Разумеется, есть и другие примеры: скажем, Аня могла прыгать в порядке 1-6-3-7-5-9-8-4-2-10, а Варя – в порядке 1-6-9-5-3-7-8-4-2-10.

2. [4] Четырёхугольник *ABCD* выпуклый, его стороны *AB* и *CD* параллельны. Известно, что углы *DAC* и *ABD* равны, а также углы *CAB* и *DBC* равны. Обязательно ли *ABCD* – квадрат?

Александр Тертерян

Ответ: не обязательно. **Решение**. Пусть *A*, *D*, *C*, *B* – последовательные вершины правильного шестиугольника. Тогда *ABCD* – равнобедренная трапеция (половина правильного шестиугольника), и все упомянутые в условии углы равны 30°.

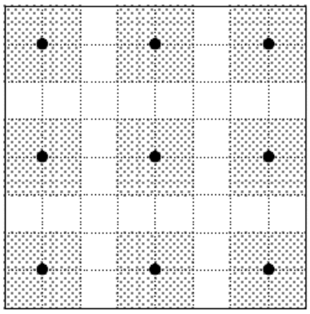


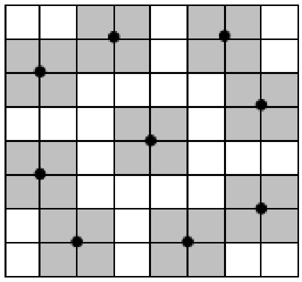
Замечание: четырёхугольник из условия может быть любой равнобедренной трапецией, у которой одно из оснований равно боковой стороне, или квадратом. Других вариантов нет.

3. [5] У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына

Ответ: может. **Решение**. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке слева. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Поэтому никакие две утащенные вороной ягоды не могут лежать внутри одного участка – ведь участок имеет площадь 8 клеток и состоял бы тогда ровно из двух таких квадратов, а они не образуют многоугольник.





Замечание. Возможен и пример, аналогичный примеру из решения задачи 5 старших классов (рисунок справа).

4. [5] По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?

Сергей Дворянинов

Ответ: не может. **Решение.** Рассмотрим любые два соседних числа, пусть a – меньшее из них. Тогда большее равно либо $2a$, либо $5a$, и вместе с меньшим оно даёт либо $3a$, либо $6a$. Значит, сумма любых двух соседних чисел кратна 3. Дальше можно рассуждать по-разному.

1-й способ. Найдём для каждого числа сумму его и следующего за ним по часовой стрелке, и все эти суммы сложим. Получим, что удвоенная сумма всех чисел кратна 3. Значит, она не может равняться 4046.

2-й способ. Найдём для каждого числа его отношение к следующему за ним по часовой стрелке. Каждое такое отношение равно одному из чисел 2, ½, 5, 1/5, а произведение всех таких отношений равно 1. Значит, двоек среди этих отношений столько же, сколько и чисел ½, а пятёрок – столько же, сколько чисел 1/5 (по основной теореме арифметики). Тогда общее количество чисел чётно и их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3.

3-й способ. Если общее количество чисел чётно, то их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3. Если общее количество чисел нечётно, то выберем любое число x из них, а остальные разобьём на пары соседних с суммой, кратной 3. Получим, что x имеет такой же остаток от деления на 3, что и общая сумма 2023, то есть остаток 1. Но в качестве x можно взять любое из чисел, поэтому все они имеют остаток 1 от деления на 3. Тогда сумма двух соседних имеет остаток 2 от деления на 3, а должна делиться на 3 – противоречие.

5. [5] Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 – чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Николай Чернятьев

Ответ: Вася. **Решение**. Назовём башенку *белой*, если её нижний и верхний кубики белые, и *бело-чёрной*, если её нижний кубик белый, а верхний чёрный. Аналогично определяются чёрная и чёрно-белая башенки. В начале игры имеется 50 белых и 50 чёрных башенок. Петя из белой и чёрной башенок соберёт *разноцветную* (*чёрно-белую* или *бело-чёрную*). В любом случае Вася, присоединяя к ней с нужной стороны белую башенку, склеивает белую башенку. В результате остаются по 49 белых и чёрных башенок. Далее Вася продолжает действовать так же, пока не оставит после своего хода две белые и две чёрные башенки. Петя своим ходом снова соберёт разноцветную башенку. Теперь Вася из оставшихся белой и чёрной башенок соберёт противоположную башенку (чёрно-белую, если Петя собрал бело-чёрную), и у Пети не будет хода.

Старшие классы

1. [3] Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(–x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов a_n, …, a_1, a_0 (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон?

Борис Френкин

Ответ: не ошибается. **Решение**. Отметим действительные корни многочлена $P(x) + P(–x)$ на координатной прямой. Поскольку $P(x) + P(–x)$ – чётная функция, отмеченные корни симметричны относительно нуля. Так как их нечётное количество, один из этих корней равен нулю. Тогда $2a_0 = P(0) + P(–0) = 0$, откуда $a_0 = 0$.

Замечание: никакой другой коэффициент не определён условием однозначно.

2. [4] На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?

Александр Юран

Ответ: не обязательно.

1-е решение. *Контрпример*. Пусть длинная стрелка за час делает один оборот, средняя – $\frac{1}{8}$ оборота, короткая – половину оборота, «утром» длинная и короткая стрелки были направлены «вверх», а средняя отстояла от них на $\frac{3}{8}$ оборота против часовой стрелки. Тогда через 3 часа длинная и средняя стрелки встретятся «в верхней точке» циферблата, так как обе будут направлены «вверх», а ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки встретятся в «нижней точке» циферблата, так как обе будут направлены вниз (то есть условия выполнены). Поскольку длинная стрелка быстрее короткой на половину оборота в час, они встречаются в точности через каждые два часа, то есть все их встречи происходят через *чётное* число часов после «утра», и значит, происходят «в верхней точке» циферблата. Но средняя стрелка проходит через «верхнюю точку» только через *нечётное* число часов после «утра», поэтому все три стрелки никогда не совпадут.

2-е решение. Пусть угловые скорости короткой, средней и длинной стрелок равны соответственно α, $\alpha + \beta$ и $\alpha + \gamma$ градусов в час (нам удобны именно эти обозначения, ведь β и γ окажутся относительными скоростями стрелок). Назовём утреннее направление короткой стрелки (совпадающее с направлением длинной) начальным. Пусть средняя в этот момент отстояла от начального направления на угол δ градусов по часовой стрелке.

Тогда через t часов после начального момента короткая стрелка отстоит от начального направления на αt градусов, средняя – на $(\alpha + \beta)t + \delta$ градусов, длинная – на $(\alpha + \gamma)t$ градусов.

Чтобы через 3 часа длинная и средняя стрелки совпали, достаточно выполнения равенства $3(\alpha + \gamma) = 3(\alpha + \beta) + \delta$, или, что то же самое, $\delta = 3(\gamma - \beta)$.

Аналогично, чтобы ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки совпали, достаточно того, чтобы $7\alpha = 7(\alpha + \beta) + \delta$, то есть, $\delta = -7\beta$.

Итого, для выполнения условия задачи достаточно выполнения равенств $\beta = -\frac{\delta}{7}$, $\gamma = \frac{10\delta}{21}$.

Докажем, что при иррациональном δ все три стрелки никогда не встретятся. Предположим противное. Чтобы три стрелки когда-нибудь встретились, необходимо и достаточно существования положительного вещественного числа T, для которого попарные разности чисел $((\alpha + \beta)T + \delta) - \alpha t$, и $(\alpha + \gamma)T - \alpha t$ оказались целыми числами, кратными 360. Иными словами, числа $\delta + \beta T$ и γT целые и кратны 360.

Подставим значения β и γ. Получим, что для некоторого T будут целыми числа $\delta(1 - \frac{T}{7})$ и $\delta(\frac{10T}{21})$. Отсюда отношение $\frac{\delta(1-\frac{T}{7})}{\delta(10\frac{T}{21})} = \frac{21}{10} \cdot \frac{1}{T} - \frac{3}{10}$ рационально. Но тогда и T рационально! Отсюда иррационально число $\delta(1 - \frac{T}{7})$ как произведение рационального и иррационального. Но оно должно быть целым. Противоречие.

3-е решение. Пусть p и q – произвольные различные действительные числа. Пусть «утром» длинная и короткая стрелки стартуют из одного положения и идут со скоростями p и q оборотов в час соответственно. Далее эти стрелки совпадают в точности в те моменты, когда более быстрая из них прошла на целое число оборотов больше, чем другая. Так как множество целых положительных чисел счётно, то и таких моментов счётно, а значит, множество положений в которых эти стрелки совпадают не более чем счётно (в случае, когда p/q рационально, этих положений конечное количество). Тогда пусть средняя стрелка неподвижно стоит в положении отличном от всех вышеописанных.

Теперь умножим скорости всех стрелок на одно и тоже положительное число (положения встреч длинной и коротких стрелок не поменяются) так, чтобы через q часов после «утра» длинная заняла положение средней. Тогда через p часов после «утра» короткая займёт это положение (отношение скоростей не поменялось). Теперь увеличим скорости всех стрелок на одно и то же положительное число, скорости станут ненулевыми, а даты встреч соответствующих стрелок не изменятся (в частности, не появится одновременной встречи всех стрелок). В частности, при $p = 7$, $q = 3$ получаем в точности ситуацию, описанную в условии.

3. [4] Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра – какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}?

Павел Кожевников

Ответ: 3^{100} чисел. **Решение**. Докажем по индукции, что есть ровно 3^n *хороших* n-значных чисел (кратных 2^n и составленных из указанных цифр). *База* ($n = 1$) очевидна.

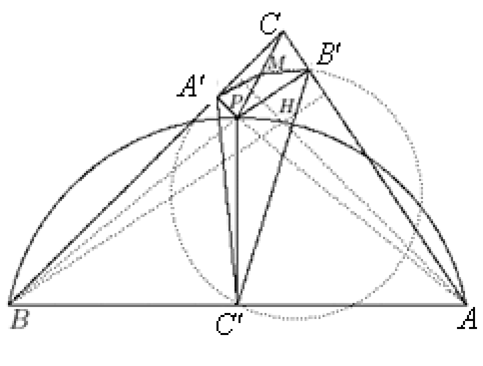
Шаг индукции. Если у хорошего (n+1)-значного числа стереть первую цифру, получится хорошее n-значное число (поскольку, стирая цифру x, мы вычитаем из числа, кратного 2^{n+1}, число $x10^n$, кратное 2^n).

С другой стороны, хорошее n-значное число имеет вид $y2^n$. Приписывая к нему цифру x, мы добавляем число $(x5^n)2^n$, и сумма будет делиться на 2^{n+1} тогда и только тогда, когда число $y + x5^n$ чётно, то есть, когда $x+y$ чётно. Видно, что для чётных y в качестве x подходят в точности чётные цифры 2, 4, 6, а для нечётного y – в точности нечётные цифры 3, 5, 7. Значит, хороших (n+1)-значных чисел в 3 раза больше, чем хороших n-значных.

4. [5] Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P – произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' – проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP.

Алексей Заславский

Решение. Пусть M – середина CP. Точки A' и B' лежат на окружности с диаметром CP и центром в M, а вписанный в эту окружность угол $A'CB'$ острый, поэтому $\angle A'MB' = 2\angle BCA$ и M лежит от прямой $A'B'$ по ту же сторону, что и C. Так как P лежит внутри остроугольного треугольника, её проекции A', B', C' лежат внутри сторон, тогда четырёхугольники $AB'PC'$ и $BA'PC'$ вписанные.



Используя равенства вписанных углов, имеем:

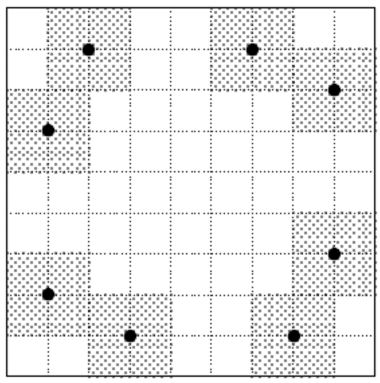
$180° - \angle A'C'B' = \angle AC'B + \angle BC'A = \angle BPA' + \angle APB' = 360° - \angle APB - \angle A'PB' =$
$= (180° - \angle AHB) + (180° - \angle A'PB') = \angle C + \angle C = 2\angle BCA$, откуда $\angle A'M'B' + \angle A'C'B' = 180°$, то есть точки A', M', B', C' лежат на одной окружности, что и требовалось.

Замечание: Утверждение задачи остаётся верным для всякого треугольника ABC, в котором углы при вершинах A и B не прямые, и для произвольной точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABH и отличной от вершин треугольника ABC.

5. [6] У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына

Ответ: может. **Решение**. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Если участок содержит две утащенные вороной ягоды, он, кроме соответствующих квадратов 2×2, содержит тогда ещё ровно одну клетку (так как площадь участка равна 9). Но тогда эти квадраты 2×2 соприкасаются (иначе одной клетки не хватит, чтобы получить связный участок). В этом случае образуется примыкающий к углу поля изолированный участок, «отсечённый» этими двумя квадратами, в котором будет одна или две клетки, что невозможно (площади всех участков равны 9).



СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 29 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
4	1.	В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую — число 6? *Егор Бакаев*
6	2.	В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади 1/6. *Александр Юран*
7	3.	Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку? *Алексей Глебов*
7	4.	Дан треугольник ABC с углом A, равным $60°$. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.) *Азамат Марданов*
9	5.	У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая — весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов — одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания. *Андрей Аржанцев*
10	6.	Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.) *Георгий Караваев*
12	7.	В белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон? *Александр Грибалко*

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 29 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, …, 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных?

Алексей Глебов

5 2. Для какого наибольшего N существует N-значное число со свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?

Алексей Глебов

3. Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.

3 а) Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?

6 б) Может ли количество прямоугольников равняться 23?

Александр Шаповалов

9 4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что $ABCD$ разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $S/8$.

Михаил Малкин

10 5. Хорда DE описанной около треугольника ABC окружности пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно, точка P лежит между D и Q. В треугольниках ADP и QEC провели биссектрисы DF и EG. Оказалось, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности. Докажите, что точки A, P, Q, C лежат на одной окружности.

Азамат Марданов

12 6. Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причём в первой строке стоят числа из набора $\{1, \ldots, 2023\}$. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой?

Иван Кухарчук

14 7. На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них весят по 9 г, а остальные n — по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общий вес каждой пары равнялся 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее).

Александр Грибалко