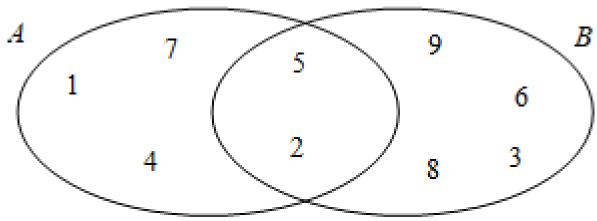
# IV ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017

## IV одделение

1. Дадени се броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Запиши ги со Венов дијаграм множествата $A$ и $B$, ако множеството $A$ е составено од броевите во чиј запис има барем една отсечка, а множеството $B$ е составено од броевите во чиј запис има барем една линија која не е отсечка.

   **Решение.** Имаме




2. Замислив еден трицифрен број. Збирот на неговите цифри е 15. Цифрата на единиците е за 5 помала од 14. Цифрата на десетките е поголема од 0 и помала од 2. Кој број го замислив?

   **Решение.** Ако цифрата на единиците е за 5 помала од 14, значи таа е $14-5=9$. Ако цифрата на десетки е поголема од 0 и помала од 2, тогаш таа е 1. Бидејќи збирот на цифрите е 15, следува дека цифрата на стотките е: $15-9-1=5$. Значи, замислениот број е 519.

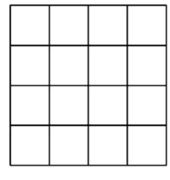
3. Четвртоодделенците од едно училиште отишле на екскурзија. Биле распоредени во 3 автобуси по 32 ученици. Во хотелот во кој биле сместени, спиеле во двокреветни соби. Колку вкупно соби биле зафатени од учениците?

   **Решение.** На екскурзија биле вкупно $3 \cdot 32 = 96$ ученици. Учениците биле сместени во $96:2=48$ соби.

4. Квадрат со должина на страна 4 *cm* е поделен на 16 мали квадрати со должина на страна 1 *cm* (види цртеж).

   а) Колку квадрати има на цртежот?

   б) Колку отсечки има на цртежот?



   **Решение.** а) На цртежот има: 16 квадрати со страна со должина 1*cm,* 9 квадрати со страна со должина 2 *cm,* 4 квадрати со страна со должина 3 *cm* и еден квадрат со страна со должина 4*cm*. Значи, на цртежот има вкупно $16+9+4+1=30$ квадрати.

б) На цртежот има вкупно 10 отсечки со должина 4 *cm*. На секоја од овие отсечки има 4 отсечки со должина 1 *cm*, 3 отсечки со должина 2 *cm* и 2 отсечки со должина 3 *cm*, т.е. вкупно има 9 отсечки. Според тоа, на цртежот има $10\cdot 9+10=100$ отсечки.

**V одделение**

1. Ана треба да испрати покани за свадбата на нејзината сестра. Таа има 2 пакета со покани и во секој пакет има по 24 покани. Треба да покани 60 гости. Дали Ана ќе има доволно покани за сите гости? Одговорот да се образложи!

   **Решение.** Вкупно во двата пакети, има $2\cdot 24=48$ покани. Бројот 48 е помал од бројот 60. Значи, Ана има помалку покани од потребното, па затоа нема да има доволно покани за сите гости.

2. Ако од збирот на најголемиот четирицифрен број со различни цифри и најмалиот петцифрен број со различни цифри одземеш непознат број ќе го добиеш бројот 20000. Определи го непознатиот број.

   **Решение.** Најголемиот четирицифрен број со различни цифри е бројот 9876, а најмалиот петцифрен број со различни цифри е бројот 10234. Нивниот збир е $9876+10234=20110$. Според тоа, бараниот број е $20110-20000=110$.

3. Матеј е за 5 *cm* повисок од Лука, кој е 20 *cm* понизок од Ивана. Определи ја висината на секое од децата, ако сите тројца се високи вкупно 475 *cm*.

   **Решение.** Нека со $l$ ја означиме висината на Лука. Матеј е за 5 *cm* повисок од Лука, што значи дека тој е висок $l+5cm$, а Ивана е за 20 *cm* повисока од Лука, што значи дека таа е висока $l+20cm$. Од условот дека збирот на нивните висини е 475 cm, следува

$$
\begin{aligned}
l+5+l+l+20=475 &\Leftrightarrow 3l+25=475\\
&\Leftrightarrow 3l=475-25\\
&\Leftrightarrow 3l=450\\
&\Leftrightarrow l=450:3\\
&\Leftrightarrow l=150.
\end{aligned}
$$

   Значи, висината на Лука е 150*cm*, висината на Матеј е $150+5=155\,cm$, а на Ивана е $150+20=170\,cm$.

4. Должините на страните на даден правоаголник се 21 *cm* и 7 *cm*. Со права тој е поделен на еден квадрат и еден правоаголник. Колкава е разликата меѓу периметрите на добиените фигури?
   **Решение.** Ако правоаголникот го поделиме на квадрат и правоаголник, тоа значи дека сме добиле квадрат со должина на страна 7 *cm* и правоаголник со должини на страни *7 cm* и 14 *cm* (направи цртеж). Периметарот на квадратот е $L_1 = 4 \cdot 7 = 16 \ cm$, а периметарот на правоаголникот е $L_2 = 2(7+14) = 2 \cdot 21 = 42 \ cm$.
   Нивната разлика е $L_2 - L\ _1 = 42 - 21 = 21 \ cm$.

**VI одделение**

1. Определи ги суплементните агли $\alpha$ и $\beta$ такви што $\alpha$ е за $12^\circ$ поголем од $\beta$ .
   **Решение.** Од условот на задачата имаме $\alpha = \beta + 12^\circ$. Понатаму, аглите $\alpha$ и $\beta$ се суплементни, па затоа $\alpha + \beta = 180^\circ$. Ако во последното равенство замениме за $\alpha$ добиваме $(\beta + 12^\circ) + \beta = 180^\circ$, од каде следува $2\beta = 180^\circ - 12^\circ$, т.е. $\beta = 84^\circ$. Конечно, $\alpha = \beta + 12^\circ = 84^\circ + 12^\circ = 96^\circ$.

2. Мајка ѝ на Оливера донела бецови и планирала да ги подели на нејзините другарки подеднакво. Кога размислила како да ги подели на 4, 5 или 6 нејзини другарки, секогаш и останувал по 1 бец неподелен. Колку најмалку бецови имала мајка ѝ на Оливера?
   **Решение.** Најмалиот број на бецови кои можат да се поделат на 4, 5 или 6 девојчиња е $\text{НЗС}(4,5,6) = 60$. Бидејќи на мајка ѝ на Оливера секогаш ѝ останувал еден бец, добиваме дека таа имала вкупно 61 бец.

3. Александар и Елеонора појадуваат. Додека Елеонора јаде по 2 кифлички, Александар изедува по 4 кифлички. По појадокот се покажало дека Александар изел 6 кифлички повеќе од Елеонора. Колку кифлички изеле двајцата заедно?
   **Решение.** За секои две кифлички кои ги изедува Елеонора Александар изедува $4 - 2 = 2$ кифлички повеќе. Бидејќи $6:2 = 3$ добиваме дека Александар изел 3 пати по две кифлички повеќе, односно изел 3 пати по 4

кифлички. Според тоа, Елеонора изела 3 пати по 2 кифлички. Тие двајцата заедно изеле $3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 18$ кифлички.

4. Кои цифри треба да стојат на местото на $a, b$ за збирот $\overline{323a} + \overline{b410}$ да биде делив со 9?
**Решение.** Собирајќи ги броевите, може да забележиме дека добиениот збир ќе има 4 или 5 цифри.
Ако збирот е четирицифрен, вредноста на $b$ е најмногу 6, а цифрите се: прва $3 + b$, втора 6, трета 4, четврта $a$. За збирот да е делив со 9 треба $3 + b + 6 + 4 + a = 13 + a + b$ да е број делив со 9, при што $b$ е најмногу 6. Можни се повеќе случаи:
- $b = 6$, збирот е $19 + a$, па $a = 8$,
- $b = 5$, збирот е $18 + a$, па $a = 0$ или $a = 9$,
- $b = 4$, збирот е $17 + a$, па $a = 1$,
- $b = 3$, збирот е $16 + a$, па $a = 2$,
- $b = 2$, збирот е $15 + a$, па $a = 3$,
- $b = 1$, збирот е $14 + a$, па $a = 4$.

Во случај збирот да е петцифрен број, цифрите се петта $a$, четврта 4, трета 6, втора $b + 3 - 10$ и прва 1. Збирот на цифрите е
$a + 4 + 6 + b + 3 - 10 + 1 = a + b + 4$
каде $b$ прима вредности 7, 8 и 9. Можни се следниве случаи:
- $b = 7$, збирот е $11 + a$, па $a = 7$,
- $b = 8$, збирот е $12 + a$, па $a = 6$,
- $b = 9$, збирот е $13 + a$, па $a = 5$.

**VII одделение**

1. Од едно шише сок на растворање од 750 *ml* може да се наполнат 16 чаши од 250 *ml*. Колку шишиња и колку милилитри сок на растворање се потребни да се добијат 12 *l* растворен сок?
**Решение.** 16 чаши од 250 *ml* содржат 4000 *ml* = 4 *l* растворен сок. Треба да добиеме 12*l* растворен сок, т.е. треба да добиеме $12 : 4 = 3$ пати поголемо количество растворен сок. Значи ќе ни требаат 3 шишиња сок за рсаторање, во кои има вкупно $3 \cdot 750 = 2250$ *ml* сок.

2. Во областа на аголот $\measuredangle AOB$ се повлечени симетралата $OC$ и полуправа $OD$ така што $\measuredangle AOD$ е еднаков на $\frac{1}{5}$ од аголот $\measuredangle AOB$.

Пресметај го аголот $\measuredangle AOB$, ако $\measuredangle COD = 30°$.

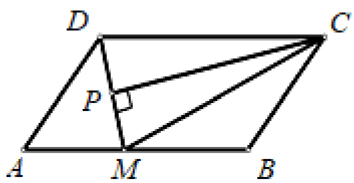
**Решение.** Од условот на задачата, $\measuredangle AOD = \frac{1}{5}\measuredangle AOB$, $\measuredangle AOC = \measuredangle BOC$, $\measuredangle COD = 30°$ и $\measuredangle AOC + \measuredangle BOC = \measuredangle AOB$. Понатаму, $\measuredangle AOC = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$ и $\measuredangle BOC = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$. Според тоа, $\frac{1}{2}\measuredangle AOB - \frac{1}{5}\measuredangle AOB = \measuredangle COD$, односно $(\frac{1}{2} - \frac{1}{5})\measuredangle AOB = \measuredangle COD$, од каде следува $\frac{3}{10}\measuredangle AOB = 30°$, што значи дека $\measuredangle AOB = 100°$.

3. Во едно училиште 30% од учениците се помали од 10 години, $\frac{1}{20}$ имаат точно 10 години, $\frac{3}{10}$ се постари од 10 но помали од 12 години, а останатите 70 ученици имаат 12 и повеќе години. Колку ученици имаат точно 10 години?

**Решение.** Нека $x$ е вкупниот број на ученици. Од условот на задачата следува дека $30\% \cdot x + \frac{1}{20}x + \frac{3}{10}x + 70 = x$. Решението на последната равенка е $x = 200$. Значи точно десет години имаат $\frac{200}{20} = 10$ ученици.

4. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка $M$ на страната $AB$ таква што $\measuredangle AMD = \measuredangle CMD$. Докажи дека ако точката $P$ е средина на отсечката $MD$, тогаш $CP \perp DM$

**Решение.** Од условот на задачата имаме $\measuredangle AMD = \measuredangle CMD$. Од друга страна имаме $\measuredangle AMD = \measuredangle CDM$ како агли на трансферзала, па затоа $\measuredangle CDM = \measuredangle CMD$, што значи дека $\triangle CDM$ е рамнокрак и притоа важи $\overline{CM} = \overline{CD}$. Но, точката $P$ е средина на отсечката $MD$, па затоа $CP$ е симетрала на основата $MD$, од што следува дека $CP \perp DM$.




**VIII одделение**

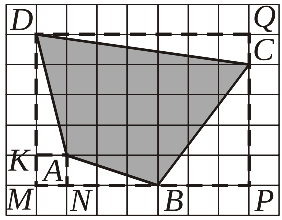
1. Замислив една број, кој го помножив со бројот $\frac{5}{6}$ и на добиениот резултат го додадов бројот $\frac{3}{4}$, после што го добив бројот $\frac{5}{4}$. Кој број го замислив?

**Решение.** Имаме

$$x \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 10x + 9 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad 10x = 6 \quad x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Значи, бројот што го замислив е $\frac{3}{5}$.

2. Правоаголникот на цртежот десно е составен од еднакви квадратчиња и има плоштина $252cm^2$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.




**Решение.** Правоаголникот од условот на задачата се состои од $9 \cdot 7 = 63$ мали квадратчиња, па затоа плоштината на едно квадратче е $252:63 = 4cm^2$. Значи, должината на страната на едно квадратче е $2cm$. За бараната плоштина имаме:

$$P = P_{MPQD} - (P_{MNAK} + P_{NBA} + P_{BPC} + P_{CQD} + P_{KAD}).$$

Последователно наоѓаме:

$$P_{MPQD} = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140cm^2,\ P_{MNAK} = 4cm^2,\ P_{NBA} = 6cm^2,$$

$$P_{BPC} = 24cm^2,\ P_{CQD} = 14cm^2 \text{ и } P_{KAD} = 8cm^2.$$

Конечно,

$$P = 140 - (4 + 6 + 24 + 14 + 8) = 84cm^2.$$

3. Во три гајби има $72\,kg$ јаболки. Во првата гајба има $\frac{4}{5}$ пати повеќе јаболки отколку во втората, а во третата има $12$ килограми помалку јаболки отколку во втората. По колку килограми јаболки има во секоја гајба?

**Решение.** Нека со $x, y$ и $z$ ја означиме масата на јаболките кои се наоѓаат во првата, втората и третата гајба, соодветно. Тогаш,

$x + y + z = 72$ и $x = \frac{4}{5}y$ и $z = y - 12$.

Според тоа, $\frac{4}{5}y + y + y - 12 = 72$, од каде добиваме $2y + \frac{4}{5}y = 84$, т.е. $y = 30\,kg$. Конечно, $x = \frac{4}{5} \cdot 30 = 24\,kg$ $y = 30\,kg$ и $z = 30 - 12 = 18\,kg$.

4. Определи ги сите прости броеви $p$ такви што и бројот $p^3 + 3^p$ е прост.

**Решение.** Нека $p = 2$. Тогаш

$$p^3+3^p=8+9=17$$

е прост број. Нека $p>3$ прост број. Тогаш $p$ е непарен. Но, тогаш бројот $p^3$ е исто така непарен, а $p^3+3^p$ е парен како збир од два непарни броеви. Според тоа, само $p=2$ е прост број кој ги задоволува условите на задачата.

**IX одделение**

1. Од местата А и Б оддалечени едно од друго 120 *km* истовремено тргнуваат еден кон друг двајца велосипедисти, првиот со брзина $10\frac{4}{5} km/h$, а вториот со 12,5 *km/h*. По колку време од тргнувањето велосипедистите ќе се сретнат?

**Решение.** *Прв начин.* Ако од местото А до местото на средба на велосипедистите има $x$ *km* (растојанието што го поминал првиот велосипедист), тогаш од местото Б до местото на средба на велосипедистите има $120-x$ *km* (растојанието што го поминал вториот велосипедист). Тие се движат ист временски период, па, имаме:

$$\frac{x}{10\frac{4}{5}}=\frac{120-x}{12,5} \Leftrightarrow \frac{5x}{54}=\frac{10(120-x)}{125} \Leftrightarrow 125x=108(120-x)$$

$$\Leftrightarrow 125x+108x=12960 \Leftrightarrow x=\frac{12960}{233}.$$

Времето кое се бара е:

$$t=\frac{\frac{12960}{233}}{10\frac{4}{5}}=\frac{\frac{12960}{233}}{\frac{54}{5}}=\frac{5\cdot 12960}{233\cdot 54}=5\frac{35}{233}h.$$

*Втор начин*. До средбата веоспедистите заедно ќе поминат 120 *km.* Тие взат еднакво време и со вкупна брзина $10\frac{4}{5}+12,5=23,3\ km/h$. Тоз значи дека е се сретнат по $\frac{120}{23,3}=5\frac{35}{233}h$

2. Ако $\frac{y}{x}=3$, пресметај ја вредноста на дропката $\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}$.

**Решение.** *Прв начин.* Имаме

$$\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2}}{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}}=\frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{2xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{xy}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{3(\frac{y}{x})^2-2\frac{y}{x}+1}{1+\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2}=\frac{3\cdot 3^2-2\cdot 3+1}{1+3+3^2}=\frac{22}{13}.$$

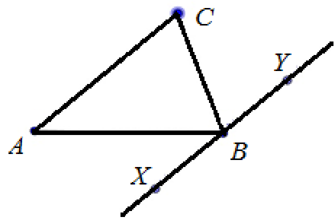
*Втор начин*. Ако $\frac{y}{x}=3$, тогаш $y=3x$ . Имаме:

$$\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{3(3x)^2-2x(3x)+x^2}{x^2+x(3x)+(3x)^2}=\frac{27x^2-6x^2+x^2}{x^2+3x^2+9x^2}=\frac{22x^2}{13x^2}=\frac{22}{13}.$$

3. Даден е триаголник $ABC$ . Низ точката $B$ повлекуваме права паралелна со страната $AC$ . На оваа права избираме две точки $X$ и $Y$ така што $X$ и $A$ лежат во иста полурамнина определена со правата $BC$ , а $Y$ и $C$ лежат во иста полурамнина определена со правата $AB$. За аглите $\measuredangle XBA, \measuredangle ABC$ и $\measuredangle YBC$ важи $\measuredangle XBA : \measuredangle ABC : \measuredangle YBC = 3:10:5$. Определи ги аглите на триаголникот $ABC$ .

**Решение.** Од $\measuredangle XBA : \measuredangle ABC : \measuredangle YBC = 3:10:5$ имаме

$\measuredangle XBA = 3k$ , $\measuredangle ABC = 10k$ и $\measuredangle YBC = 5k$ .




Од друга страна

$$\measuredangle XBA + \measuredangle ABC + \measuredangle YBC = 180^\circ$$

$$3k+10k+5k=180^\circ$$

$$18k=180^\circ \Leftrightarrow k=10.$$

Следува $\measuredangle XBA = 30^\circ$, $\measuredangle ABC = 100^\circ$ и $\measuredangle YBC = 50^\circ$ . Тогаш

$$\measuredangle BAC = \measuredangle XBA = 30^\circ,\ \measuredangle ACB = \measuredangle YBC = 50^\circ$$

како наизменични агли над трансверзала.

4. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}\ .$$

**Решение.** Ако $x$ и $y$ се природни броеви, тогаш од $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$ следува $x<48$ и $y<48$ . Од $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$ следува $\sqrt{x}=\sqrt{48}-\sqrt{y}$ и ако квадрираме добиваме $x=48-2\sqrt{48y}+y$. Но, $x, y$ се природни броеви, па затоа од последното равенство следува дека $48y$ мора да е квадрат на природен број. Од $48=4^2\cdot 3$, следува дека $y=3m^2$, при што $m\in\mathbb{N}$ . За $m=1$ добиваме $y=3, x=27$ . За $m=2$ , добиваме $x=y=12$ . За $m=3$ добиваме $y=27, x=3$. За $m\geq 4$ , добиваме $y\geq 48$ , што не е можно.