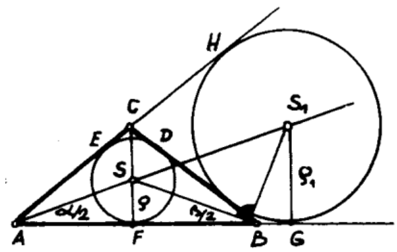
Ристо Малчески
Алексо Малчески

ХЕРОНОВИ ТРИАГОЛНИЦИ

Триагоникот за кој мерните броеви на страните се a,b,c, а мерниот број на плоштината е P го означуваме се (a,b,c,P). Предмет на нашите разгледувања ќе бидат триаголниците чии мерни броеви на страните и плоштината се рационални броеви. За таа цел најпрво ќе ја изведеме позната ***Херонова формула*** за плоштина на триаголник.

1. Херонова формула за плоштина на триагоник

Нека се зададени страните a,b,c на ΔABC (црт. 1), во кој е впишана кружница $K(S,\rho)$, а однадвор кружница $K_1(S_1,\rho_1)$ која ја допира страна BC и продолженијата на страните AB и AC, во точките J,G и H, соодветно. Од $\overline{CH}=\overline{CJ}$ и $\overline{BG}=\overline{BJ}$ добиваме



Црт. 1

$$\overline{AH}+\overline{AG}=(\overline{AC}+\overline{CH})+(\overline{AB}+\overline{BG})=$$
$$=b+c+\overline{CJ}+\overline{BJ}=a+b+c=2s,$$

и како $\overline{AH}=\overline{AG}$ имаме
$\overline{AH}=\overline{AG}=s=\frac{a+b+c}{2}$, $\overline{BG}=s-c$ $\overline{CH}=s-b$.

Кружницата $K(S,\rho)$ ги допира страните на ΔABC во точките D, E и F, па затоа $\overline{AE}=\overline{AF}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$ и $\overline{CE}=\overline{CD}$, односно $\overline{AF}=s-a$, $\overline{BF}=s-b$ и $\overline{CE}=s-c$.

Бидејќи $\Delta AFS \sim \Delta AGS_1$ имаме

(1) $$\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}=\frac{s-a}{s}.$$

Од $\angle FBS=\angle BS_1G$ добиваме $\Delta BFS \sim \Delta S_1GB$, па затоа $\rho:\overline{BF}=\overline{BG}:\rho_1$, т.е.

(2) $$\rho\rho_1=(s-b)(s-c).$$

Од (1) и (2) имаме

(3) $$\rho^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

Од друга страна имаме $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ABS}+P_{\Delta BCS}P_{\Delta CAS}=\frac{a\rho}{2}+\frac{b\rho}{2}+\frac{c\rho}{2}$ т.е.

(4) $$P_{\Delta ABC}=s\rho.$$

Конечно, од (3) и (4) следува

(5) $$P_{\Delta ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Формулата (5) е позната како Херонова формула за плоштина на триаголник и во неа мерниот број на плоштината е во функција од мерните броеви на страните a,b и c.

Забелешка. Ако $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$, тогаш $a:a_1=b:b_1=c:c_1=k$, каде а,б,ц се мерните броеви на страните на ΔABC, а a_1,b_1,c_1 се мерните броеви на страните на $\Delta A_1B_1C_1$. Според тоа,

$$s=ks_1,\; s-a=k(s_1-a_1),\; s-b=k(s_1-b_1),\; s-c=k(s_1-c_1)$$

па затоа

(6) $$P_{\Delta ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=k^2\sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)}=k^2P_1.$$

2. Што е тоа Херонов триаголник

За триаголникот (a,b,c,P) ќе велиме дека е **Херонов триаголник од прв вид** ако мерните броеви на страните a,b,c и на плоштината P се природни броеви. Ако, пак, меѓу мерните броеви на страните и плоштината има рационален број, тогаш за триаголникот (a,b,c,P) велиме дека е **Херонов триаголник од втор вид**.

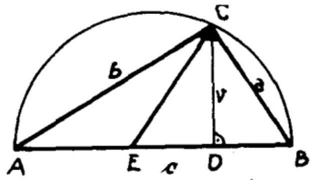
Непосредно од релацијата (6) следува дека, ако страните на Хероновиот триаголник од втор вид се помножат со нивниот најмал заеднички содржател, тогаш добиваме Херонов триаголник од прв вид и обратно, множејќи ги страните на произволен Херонов триаголник од прв вид со произволен позитивен рационален број, кој не е цел број, добиваме Херонов триаголник од втор вид, кој е сличен со дадениот триаголник.

За Хероновиот триаголник од прв вид ќе велиме дека е **основен** ако НЗД$(a,b,c)=1$.

Логично се наметнува прашањето, дали воопшто постојат Херонови триаголници? Одговорот на ова прашање го дава следниот пример.

Пример 1. Нека m и n се природни броеви такви што $m>n$. Тогаш $a=m^2-n^2$, $b=2mn$ и $c=m^2+n^2$ се мерни броеви на катетите и хипотенузата на правоаголен триаголник. Притоа, мерниот број на плоштината на овој триаголник е $P=mn(m^2-n^2)$, па затоа триаголникот е Херонов. За m=2,3,4,5 и n=1 ги добиваме триаголниците (3,4,5,6); (8,6,10,24); (15,8,17,60) и (24,10,26,120), а за m=3,4,5,6 и n=2 триаголниците (5,12,13,30); (12,16,20,96); (21,20,29,210) и (32,24,40,384). ♦

Да забележиме дека, од секој правоаголен Херонов триаголник со слепување на катетите a и b можат да се добијата два рамнокраки Херонови триаголници $(c,c,2a,2P)$ и $(c,c,2b,2P)$. Така на пример, од триаголникот (3,4,5,6) можат да се добијат триаголниците (5,5,3,12) и (5,5,8,12), а од триаголникот (5,12,13,30) триаголниците (13,13,10,60) и (13,13,24,60).



Црт. 2

Да го разгледаме правоаголниот Херонов ΔABC со катети a и b и хипотенуза c (црт. 2). Ако точката E е симетрична на точката B, во однос на висината CD, тогаш косоаголниот разностран ΔACE е Херонов. Навистина, неговите страни се a, b и

$$\overline{AE} = c - 2\sqrt{a^2 - v^2} = c - 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2b^2}{c^2}} = \frac{b^2 - a^2}{c},$$

па ако ги помножиме со c добиваме херонов триаголник од прв вид $\left(ac, bc, b^2 - a^2, \frac{ab(b^2-a^2)}{2}\right)$. Така, на пример, со опишаната постапка од триаголникот (5,12,13,30) го добиваме триаголникот (65,156,119,3570), а од триаголникот (3,4,5,6) го добиваме триаголникот (15,20,7,42). Хероновите триаголници (15,20,7,42) и (65,156,119,3570) не се ниту правоаголни, ниту рамнокраки. Значи, множеството Херонови триаголници не се состои само од правоаголни и рамнокраки триаголници, туку истото содржи и косоаголни триаголници,за кои подетално ќе говориме во натамошните разгледувања.

3. Други елементи на Херонов триаголник чии мерни броеви се рационални

Од дефиницијата на Херонов триаголник имаме дека мерните броеви на страните и плоштината се рационални броеви. Во овој дел ќе се осврнеме и на други елементи во Хероновиот триаголник чии мерни броеви припаѓаат на множеството рационални броеви.

Според формулите (2) и (4) имаме

(7) $$\rho = \frac{P}{s}, \ \rho_1 = \frac{P}{s-a}, \ \rho_2 = \frac{P}{s-b}, \ \rho_3 = \frac{P}{s-c},$$

т.е. радиусот на впишаната кружница и радиусите на кружниците кои однадвор ги допираа страните на Хероновиот триаголник се рационални броеви.

Од косинусната теорема имаме

(8) $$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \ \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \ \cos\gamma = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ba},$$

па значи и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ се рационални броеви. Слично, од

(9) $$\sin\alpha = \frac{2P}{bc}, \ \sin\beta = \frac{2P}{ac}, \ \sin\gamma = \frac{2P}{ab},$$

добиваме дека $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ се рационални броеви. Од (8) и (9) следува дека $tg\alpha$, $tg\beta$, $tg\gamma$, $ctg\alpha$, $ctg\beta$, $ctg\gamma$ се рационални броеви. Освен тоа, имаме дека (црт. 1)

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}, \ tg\frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{s-b}, \ tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{s-c},$$

што значи дека и овие величини се рационални броеви, а исто така и $ctg\frac{\alpha}{2}$, $ctg\frac{\beta}{2}$, $ctg\frac{\gamma}{2}$ се рационални броеви. Да забележиме дека и мерниот број на радиусот на опишаната кружница околу секој Херонов триаголник $r=\frac{abc}{4P}$ е рационален број, а истото важи и за висините на Хероновиот триаголник $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$, $h_c=\frac{2P}{c}$.

Пример 2. За триаголникот (25,39,56,420) имаме

$$\rho=7,\ \rho_1=12,\ \rho_2=20,\ \rho_3=105,\ r=\frac{65}{2},$$

$$\sin\alpha=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=\frac{12}{13},\ tg\alpha=\frac{5}{12},\ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5},\ ctg\frac{\alpha}{2}=5,\ ctg\alpha=\frac{12}{5},\ h_a=\frac{168}{5}$$

итн. ♦

4. Како да ги определиме Хероновите триаголници?

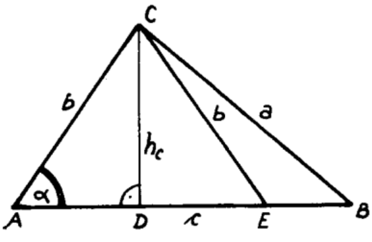
Во рпимер 1 презентиравме формули со кои можат да се добијата правоаголни Херонови триаголници. Може да се докаже дека со формулите од пример 1 се исцрпува множеството правоаголни Херонови триаголници од прв вид, па затоа множејќи ги страните со рационални броеви ги наоѓаме сите правоаголни Херонови триаголници.

Исто така, покажавме како од правоаголен Херонов триаголник (a,b,c,P) се добива, во општ случај, косоаголен Херонов триаголник $\left(ac,bc,b^2-a^2,\frac{ab(b^2-a^2)}{2}\right)$. Опишаната постапка, во вториот параграф, ќе ја обопштиме во случај на косоаголен разностран Херонов триаголник.

Да го разгледаме косоаголниот Херонов ΔABC (црт. 3), во кој точката Е е симетрична на темето А, во однос на висината $h_c=\overline{CD}$. Во претходниот параграф констатиравме дека h_c и $ctg\alpha$ се рационални броеви, па затоа страната $\overline{BE}=c-2\overline{AD}=c-2h_c ctg\alpha$, на ΔEBC е рационален број. Конечно $P_1=\frac{h_c\cdot\overline{BE}}{2}$ е рационален број, па затоа ΔEBC е Херонов триаголник.

Ако претходно опишаната постапка ја повториме и за другите темиња, тогаш од секој косоаголен разностран Херонов триаголник добиваме три нови Херонови триаголници, кои во општ случај се косоаголни и разнострани. Да забележиме дека ΔAEC е рамнокрак Херонов триаголник и истиот може да се добие со веќе опишаната постапка на слепување на катетите кај правоаголен Херонов триаголник.

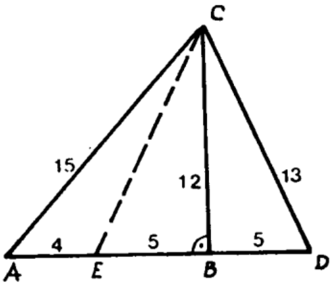
Пример 3. Да го разгледаме триаголникот (13,14,15,84). Со помош на претходно опишаната постапка, од овој триаголник ги добиваме следните три разнострани косоаголни Херонови триаголници (65,70,9,252); (13,14,15,84) и (29,182,195,2436). ♦



Црт. 3

Нека се дадени два основни правоаголни Херонови триаголници. Може да се докаже дека, во општ случај, со нивна помош можат да се добијат осум различни косоаголни основни Херонови триаголници. Користејќи го овој факт индискиот математичар *Брахмагупта* ги нашол формулите за мерните броеви на страните и плоштините на Хероновите триаголници. Во нашите разгледувања, нема да се осврнеме на постапката за добивање на овие формули, туку преку следниот пример истата ќе ја објасниме, а самите формули за добивање на спомenатите триаголници ќе ги изведиме со помош на аналитичка геометрија.

Пример 4. Нека се дадени основните Херонови триаголници (3,4,5,6) и (5,12,13,30). Страните на триаголникот (3,4,5,6) ги зголемуваме во размер 3:1 и го добиваме триаголникот (9,12,15,54). Нека ΔABC (црт. 4) е таков што $\overline{BC} = 12$. Ако го ставиме триаголникот (5,12,13,30) во положба BCE добиваме два нови Херонови триаголници $ACD \equiv (13,14,15,84)$; $ACE \equiv (13,4,15,24)$.



Црт. 4

Сега страните на триаголникот (3,4,5,6) ги зголемуваме во размер 4:1 и го добиваме триаголникот (12,16,20,96). Со сложување на триаголниците (12,16,20,96) и (5,12,13,30) така што катетата 12 да биде заедничка ги добиваме хероновите триаголници (13,11,20,66) и (13,21,20,126).

Ако страните на триаголникот (3,4,5,6) ги помножиме со 5, а страните на триаголникот (5,12,13,30) ги помножиме со 3, па со 4 ги добиваме триаголниците

(15,20,25,150); (15,36,39,270) и (20,48,52,480).

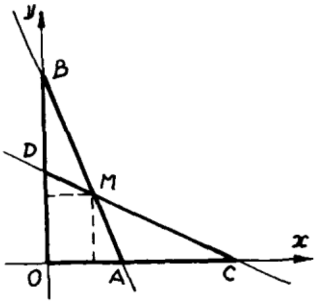
Од триаголниците (15,20,25,150) и (15,36,39,270) со претходно опишаната постапка ги добиваме триаголниците (39,56,25,420) и (39,16,25,120), а од триаголниците (15,20,25,150) и (20,48,52,480) ги добиваме триаголниците (52,63,25,630) и (52,33,25,330).

Конечно, од основните Херонови триаголници (3,4,5,6) и (5,12,13,30) ги најдовме следните осум косоаголни Херонови триаголници (13,14,15,84); (13,4,15,24); (13,11,20,66); (13,21,20,126); (39,56,25,420); (39,16,25,120); (52,63,25,630) и (52,33,25,330). ♦

Да се вратиме на косоаголниот разностран Херонов триаголник ABC (црт. 3). За овој триаголник висината $h_c = \overline{CD}$ е рационален број, а тоа се и отсечките $\overline{AD} = h_c \cdot ctg\alpha$ и $\overline{DB} = h_c \cdot ctg\beta$. Ако мерните броеви на $h_c, \overline{AD}$ и $\overline{DB}$ не се природни броеви, тогаш множејќи ги страните на триаголникот со именителот на висината h_c добиваме Херонов триаголник сличен на дадениот. Истиот е составен од два правоаголни Херонови триаголници, на начин покажан во пример 4. Според тоа,со укажаната постапка во пример 4 можат да се добијат сите Херонови триаголници.

Пример 5. Нека е зададен Хероновиот триаголник (15,34,35,252). Висината спуштена кон страната 35 е $h=\frac{72}{5}$ и новиот триаголник е (75,170,175,6300). Истиот е составен од триаголниците (72,21,75,756) и (72,154,170,5544). ♦

На крајот од овој дел ќе презентираме поедноставна постапка за определување на осумте Херонови триаголници од пример 4, зададени со помош на два основни правоаголни триаголници.



Црт. 5

Нека се зададени правоаголните Херонови триаголници

$$(a,b,\sqrt{a^2+b^2},\tfrac{ab}{2}) \text{ и } (c,d,\sqrt{c^2+d^2},\tfrac{cd}{2}).$$

Ставајќи ги темињата на правите агли во координатниот почеток, на овие триаголници им ги придружуваме точките $A(a,0)$; $B(0,b)$; $C(c,0)$ и $D(d,0)$ (црт. 5). Правите AB и CD чии равенки се $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ и $\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1$ се сечат во точката $M\left(\frac{ac(d-b)}{ad-bc},\frac{abd(a-c)}{ad-bc}\right)$. Должините на страните на ΔACM се:

$$\overline{AC}=c-a;\ \overline{AM}=\frac{d(a-c)\sqrt{a^2+b^2}}{ad-bc} \text{ и } \overline{CM}=\frac{b(a-c)\sqrt{c^2+d^2}}{ad-bc},$$

а плоштината е $P_1=\frac{-bd(c-a)^2}{2(ad-bc)}$. Јасно, $\overline{AC},\overline{AM},\overline{CM}$ и P_1 се рационални броеви, т.е. ΔACM е Херонов.

Слично, за ΔBDM важи

$$\overline{BD}=b-d;\ \overline{BM}=\frac{(d-b)\sqrt{a^2+b^2}}{ad-bc};\ \overline{DM}=\frac{a(d-b)\sqrt{c^2+d^2}}{ad-bc} \text{ и } P_2=\frac{-ac(b-d)^2}{2(ad-bc)},$$

што значи дека и тој е Херонов.

Пример 6. Нека се дадени основните правоаголни Херонови триаголници (3,4,5,6) и (5,12,13,30).

Ставаме a=3, b=4, c=5, d=12 и добиваме

$$\overline{AC}=2;\overline{AM}=-\tfrac{15}{2};\overline{CM}=-\tfrac{13}{2} \text{ и } P_1=-6.$$

Множејќи со 2 и испуштајќи ги предзнаците го добиваме триаголникот (4,15,13,24). Страните и плоштината на ΔBDM се

$$\overline{BD}=-8;\overline{BM}=\tfrac{25}{2};\overline{DM}=\tfrac{39}{2} \text{ и } P_2=-30.$$

Како и во претходниот случја множејќи со 2 и испуштајќи ги предзнаците го добиваме триаголникот (16,25,39,120).

За a=4, b=3, c=5, d=12 ги добиваме триаголниците (11,20,13,66) и (33,25,52,330).

За a=-3, b=4, c=5, d=12 ги добиваме триаголниците (14,15,13,84) и (56,25,39,420).

За a=-4, b=3, c=5, d=12 ги добиваме триаголниците (21,20,13,126) и (63,25,52,630). ♦

5. Херонови триаголници чии страни образуваат аритметички прогресија

Нека x и d се природни броеви, такви што $2x>d$. За да триаголникот, со страни $2x-d$, $2x$, $2x+d$ е Херонов потребно и доволно е да $P = x\sqrt{3(x^2-d^2)}$ биде цел број, односно $x^2-d^2=3y^2$. Според тоа, ако последната равенка има решение во множеството цели броеви, тогаш постојат бесконечно многу Херонови триаголници со страни $2x-d$, $2x$, $2x+d$. За да ги определиме овие решенија ставаме

$$x \pm d = 3\cdot 2\alpha^2;\ \ x \mp d = 2\beta^2,\ \text{каде } \alpha,\beta \in Z.$$

Значи, $x = 3\alpha^2+\beta^2;\ \ d = \pm 3\alpha^2 \mp \beta^2;\ \ y = 2\alpha\beta.$

Пример 7. За $\alpha = 1, \beta = 2$ добиваме x=7, d=1, y=4 и триаголник (13,14,15,84). Со помош на решението x=7, y=4 добиваме ново, ако z го пресметаме од равенката $(z+7)^2-1=3(z-4)^2$. Наоѓаме z=19, x=26, y=15 и триаголник (51,52,53,1170), а од равенката $(z+2)^2-1=3(z-15)^2$ добиваме z=51, x=97, y=5 и триаголник (193,194,195,16296). Продолжувајќи ја постапката можеме да конструираме бесконечно многу Херонови триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија со разлика d=1. ♦

Пример 8. За $\alpha = 2, \beta = 1$ добиваме x=13, d=11, y=4 и триаголник (15,26,37,156). Со помош на решението x=13, y=4 добиваме ново, ако z го пресметаме од равенката $(z+13)^2-11^2=3(z-4)^2$. Наоѓаме z=25, x=38, y=21 и триаголник (65,76,87,2394). Продолжувајќи ја постапката можеме да конструираме бесконечно многу Херонови триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија со разлика d=11. ♦

Пример 9. За $\alpha = 1, \beta = 4$ добиваме x=13, d=13, y=8 и триаголник (25,38,51,456). Со помош на решението x=13, y=8 добиваме ново, ако z го пресметаме од равенката $(z+19)^2-13^2=3(z-8)^2$. Наоѓаме z=43, x=62, y=35 и триаголник (111,124,137,6510) итн. ♦

6. Херонови триаголници кај кои мерните броеви на периметарот и плоштината се еднакви

Во последниот дел од оваа статија ќе се задржиме уште на една класа Херонови триаголници, т.е. ќе дадеме одговор на прашањето, дали постојат Херонови триаголници за кои мерните броеви на периметарот и плоштината се еднакви. Ако такви триаголници постојат, тогаш според релацијата (4) имаме $\rho s = 2s$, односно $\rho = 2$.

Во претходните излагања констатиравме дека, ако страните на основен Херонов триаголник ги помножиме со произволен рационален број, тогаш добиваме сличен на него Херонов триаголник. Од бесконечно многу такви слични триаголници само еден е таков што $\rho = 2$, односно $P = 2s$.

Пример 10. За триаголникот (25,39,56,420) имаме s=60, $\rho = 7$. За да $\rho_1 = 2$ ги множиме страните на триаголникот со $k = \frac{2}{7}$ и го добиваме триаголникот $\left(\frac{50}{7}, \frac{78}{7}, 16, \frac{240}{7}\right)$, кој го исполнува бараниот услов. ♦

Пример 11. Во овој пример ќе докажеме дека постојат само два правоаголни Херонови триаголници од прв вид, за кои $\rho = 2$. Според пример 1, за овие триаголници имаме $s=m(m+n)$ и $P=mn(m-n)(m+n)$. Од $P=2s$ добиваме $n(m-n)=2$, $m>n$. Последната равенка има решенија m=3, n=1 и m=3, n=2, за кои ги добиваме триаголниците (8,6,10,24) и (5,12,13,30), соодветно. ♦

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ