

Катерина Аневска

ДВОПОЛОВИ МРЕЖИ: ПРОТОЦИ, БОЕЊЕ И ОЦЕНКИ

Скопје, 2012

СОДРЖИНА

Вовед

ii

ГЛАВА I ГРАФОВИ

1. Поим за граф. Изоморфизам на графови	1
2. Задавање на граф	2
3. Видови графови. Подграфови	4
4. Вериги. Цикли. Сврзаност	6
5. Дрва	8
6. Ојлерови графови. Цикломатски број	11

ГЛАВА II ДВОПОЛОВИ МРЕЖИ

1. Мрежи. Вериги во мрежи. Соединување на мрежи	15
2. Протоци во мрежи	18
3. Силно сврзани мрежи. Несепарабилни графови	31
4. Канонично разложување на мрежи	36
5. Една примена на графовите во АСУ	47

ГЛАВА III ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА БРОЈ НА ГРАФОВИ И МРЕЖИ

1. Елементарни оценки	58
2. Пресметување број на дрва	59
3. Оценки на бројот на графови и мрежи со p -ребра	62

ГЛАВА IV БОЕЊЕ НА ГРАФОВИ

1. Хроматски број и хроматска класа	68
2. Боење на темиња	69
3. Боење на ребра	74

Литература	82
Индекс на поими	85

ВОВЕД

Предмет на разработка на оваа магистерска работа се двополовите мрежи, протоците низ двополовите мрежи, боењето на графовите и мрежите и пресметување на број на графови и мрежи. Самата магистерска работа е конципирана во четири поглавја и тоа: Графови, Двополови мрежи, Пресметување на број на графови и мрежи и Боење на графови.

Во првата глава, која воедно е и воведен дел на магистерската работа во шест параграфи се презентирани основните поими од теоријата на графови, како што се: изоморфизам на графови, видови графови, вериги, цикли, сврзаност, дрва и Ојлерови графови, при што се разработени низа важни тврдења и во врска со Ојлеровите графови воведен е и поимот цикломатски број.

Втората глава, во која се разработуваат двополовите мрежи, е централна во магистерската работа и е поделена на шест параграфи. Во првиот параграф се презентирани основните поими за двополовите мрежи, при што се разработуваат паралелното, последователното и паралелно-последователното соединување на двополови мрежи. Во вториот параграф се разработени протоците низ мрежи, при што со користење на пропустната моќ на прост пресек е докажана теоремата на Форд-Фалкерсон, која е класичен резултат во оваа теорија, а посебно внимание е посветено на простите бариери, нивното дополнување до прост пресек и е докажано дека *за секоја двополова мрежа максималната големина на допустлив проток е еднаква на минималната пропустна моќ на мешовитата бариера*. Третиот параграф е посветен на силно сврзаните мрежи и несепарабилните графови. Овде се презентирани два потребни и доволни услови за силна сврзаност на двополова мрежа. Понатаму, воведени се поимите несепарабилен граф и цикличен граф и е докажано дека *граф е несепарабилен ако и само е цикличен*. Во четвртиот параграф од оваа глава е разгледувано каноничното разложување на мрежи, воведен е поимот поминувачка подмрежа и се докажани основните тврдења за поминувачките подмрежи. Во натамошните разгледувања се воведени поимите

s -мрежа, p -мрежа и H -мрежа и во врска со овие поими се дадени критериуми за тоа кога една мрежа може да биде s -мрежа, односно p -мрежа, од кои следува фундаменталниот резултат, а тоа е дека: *Секоја мрежа е или s -мрежа или p -мрежа или H -мрежа, при што припадноста кон еден тип ја исклучува припадноста кон другиот тип.* На крајот од овој параграф се воведени поимите разложива, неразложива мрежа, канонично разложување на s -мрежа, односно p -мрежа и е докажано дека *секоја H -мрежа допушта единствено канонично разложување.* Во петтиот параграф од овој дел се дадени модел за обезбедување на веродостојност на податоците во автоматизиран систем на управување и модел за пресметување на сложеноста на формирање на излезите, во кои модели посебна улога имаат контролните повратни врски, а за кои е воведен поимот јачина на контролна повратна врска. И двата модели се потпираат на дискретната теорија на веројатност, при што е докажано дека сложеноста на формирање на излезот е математичко очекување на дискретна случајна променлива.

На почетокот на третата глава се презентирани неколку елементарни оценки за бројот на графовите и класата неизоморфни двополови мрежи со p -ребра, за да во продолжение се даде доказот на теоремата на Кејли. Понатаму, се разгледани уште две оценки за бројот $|\tau(p)|$ на неизоморфните коренови дрва со p -ребра, за да на крајот се разгледани и асимптотските оценки на бројот на графови и мрежи со p -ребра, кога $p \rightarrow \infty$.

Во четвртата, завршна глава, е разгледано боењето на графови, при што откако се воведени поимите хроматски број и хроматска класа, после презентирање на низа елементарни резултати за боењето на темињата на еден граф е докажано следново важно тврдење: *Ако полниот граф K_χ е подграф на графот G , тогаш неговиот хроматичен број очигледно не е помал од χ . Постои граф G_χ кој како подграф не го содржи полниот граф K_3 и кој има произволно голем хроматичен број χ , од што следува дека постои граф со произволно голем хроматски број.* Завршните разгледувања од овој дел се посветени на боењето на ребра. Во овој дел е докажана теоремата на Шенон, а се разгледани и неколку тврдења кои се поврзани со овој фундаментален резултат од теоријата на графови.

ГЛАВА I

ГРАФОВИ

1. ПОИМ ЗА ГРАФ. ИЗОМОРФНИ ГРАФОВИ

1.1. Дефиниција. Граф G ја нарекуваме подредената тројка (V, U, φ) , каде $V = \{v\}$ е множество елементи кои ги нарекуваме *темиња* на графот; $U = \{u\}$ множество елементи кои ги нарекуваме *ребра* на графот, при што $U \cap V = \emptyset$ и φ е функција на инциденција која на секое ребро $u \in U$ му става во соодветствие подреден или неподреден пар темиња v_1, v_2 , кои ги нарекуваме краеве на реброто u .

Множеството $U \cup V$ го нарекуваме *множество елементи на графот*. Според бројот на елементите графовите ги делиме на *конечни* и *бесконечни*.

Ако $\varphi(u) = (v_1, v_2)$ е подреден пар, т.е. $v_1 \neq v_2$ и $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$, тогаш реброто u го нарекуваме *ориентирано*, или *лак* кој што излегува од темето v_1 и влегува во темето v_2 ; v_1 го нарекуваме почеток, а v_2 крај на лакот u . Ако $\varphi(u) = (v_1, v_2)$ е неподреден пар тогаш реброто го нарекуваме *неориентирано*. Графот на кој сите ребра му се ориентирани (неориентирани) го нарекуваме *ориентиран* (*неориентиран*). На секој граф $G = (V, U, \varphi)$ можеме да му го ставиме во соодветствие соодветниот неориентиран граф $\hat{G} = (V, U, \hat{\varphi})$ каде $\hat{\varphi}$ му го придружува на реброто истиот тој пар на темиња како и φ но сите парови се неподредени.

Темињата кои не се инцидентни со ниту едно ребро ги нарекуваме *изолирани*. Темињата кои се инцидентни на едно и само едно ребро ги нарекуваме *завршни* или *висечки* темиња. Реброто на кое краевите му се совпаѓаат го нарекуваме *петља* (*лупа*). Две темиња кои се инцидентни на едно исто ребро ги нарекуваме *гранични* (*соседни*). Ребрата на кои им соодветствува еден исти пар темиња ги нарекуваме *кратни* или *паралелни*. За графот G ќе велиме дека е *прост* ако тој не содржи паралелни ребра и лупи.

1.2. Често пати е важно да определиме кои графови ги сметаме за суштински различни, а кои нема да ги разликуваме. Обично, тоа е поврзано со поимот изоморфни графови. Така ја имаме следнава дефиниција.

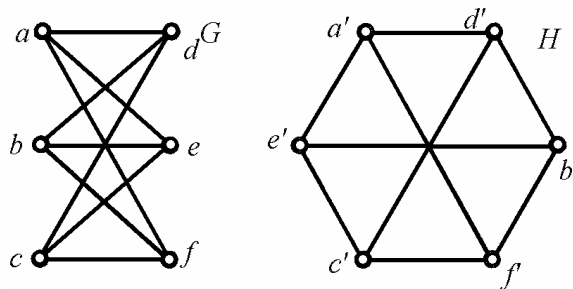
Дефиниција. За графовите $G_1 = (V_1, U_1, \varphi_1)$ и $G_2 = (V_2, U_2, \varphi_2)$ ќе велиме дека се *изоморфни* ако постојат биекции $f: V_1 \rightarrow V_2$ и $g: U_1 \rightarrow U_2$ кои ја запазуваат инциденцијата, т.е. такви што за секое $u \in U_1$ од $\varphi_1(u) = \{v_1, v_2\}$ (односно $\varphi(u) = (v_1, v_2)$) следува $\varphi_2(g(u)) = \{f(v_1), f(v_2)\}$ (односно $\varphi_2(g(u)) = (f(v_1), f(v_2))$). Притоа велиме дека графот G_1 *изоморфно се пресликува* во графот G_2 .

Изоморфното пресликување на еден граф во себе го нарекуваме *автоморфизам*.

Јасно, автоморфизмите на еден граф во однос на операцијата композиција на пресликувања образуваат група.

1.3. Забелешка. Во многу случаи можеме да не ги разликуваме изоморфните графови, т.е. да ги разгледуваме графовите со точност до изоморфизам. Сепак ако било кое теме или ребро на графот поседува различна индивидуалност тогаш природно при споредувањето на два графа таа индивидуалност се зема во предвид.

1.4. Пример. Графовите G и H дадени на цртеж 1 се изоморфни, бидејќи пресликувањето на темињата зададено со $f(x) = x'$ е биекција кое ја запазува инциденцијата. ♦



Цртеж 1

2. ЗАДАВАЊЕ НА ГРАФ

2.1. Постојењето на различни начини на задавање на графови е сврзано со различни зададени функции φ . Така, графот може да се зададе со набројување на ребрата на графот, со укажување на нивните краеви и доставување список на изолираните темиња. Меѓутоа, графот може да се зададе и со таканаречените матрица на инциденција и матрица на соседство, чии дефиниции ќе ги наведеме во продолжение.

2.2. Дефиниција. Нека G е ориентиран граф со n темиња и m ребра, кој не содржи лупи. Матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ определена со

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } v_i \text{ е почетно теме за реброто } u_j, \\ -1, & \text{ако } v_i \text{ е крајно теме за реброто } u_j, \\ 0, & \text{ако } v_i \text{ не е инцидентен со реброто } u_j, \end{cases}$$

ја нарекуваме *матрица на инциденција* на графот G . Редовите на матрицата на инциденција ги нарекуваме *вектори на инцидентност* за графот G .

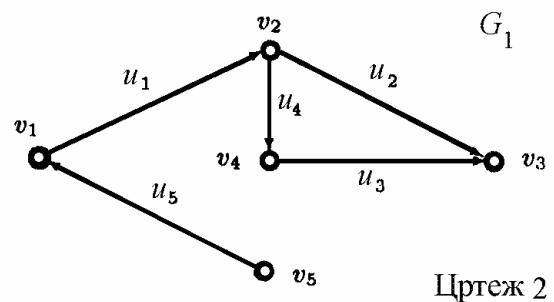
2.3. Забелешка. Ако графот G е неориентиран, тогаш матрицата A на инциденција на G може да се дефинира на следниов начин:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } v_i \text{ е инцидентно теме со реброто } u_j, \\ 0, & \text{ако } v_i \text{ не е инцидентно теме со реброто } u_j. \end{cases}$$

2.4. Пример. а) Матрицата на инциденција за графот G_1 претставен на цртеж 2

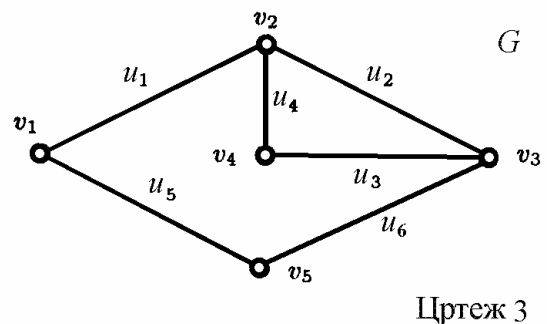
е:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



б) Согласно забелешка 2.2 матрицата на инциденција на графот G даден на цртеж 3 е:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \blacklozenge$$



2.5. Дефиниција. Нека $G = (V, U, \varphi)$ е произволен ориентиран граф со n темиња и без паралелни ребра. Матрицата $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ определена со

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } (v_i, v_j) \in U, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$$

ја нарекуваме *матрица на соседство* на графот G .

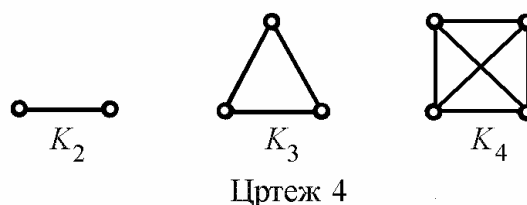
2.6. Забелешка. Ако графот G е неориентиран, тогаш матрицата A на соседство на G може да се дефинира на следниов начин:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \{v_i, v_j\} \subseteq U, \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

2.7. Коментар. Јасно, во случај на прост граф матриците на инциденција и соседство еднозначно го задаваат графот.

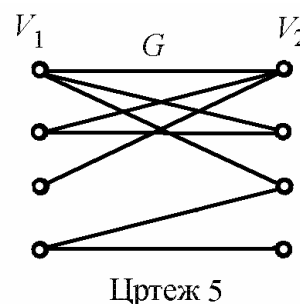
3. ВИДОВИ ГРАФОВИ. ПОДГРАФОВИ

3.1. Дефиниција. *Комплетен граф* го нарекуваме графот без паралелни ребра и лупи во кој секои две темиња се соседни. Комплетниот неориентиран граф со n темиња го означуваме со K_n . Комплетниот граф K_1 го нарекуваме *тривијален* граф.



На цртеж 4 се дадени комплетните графови K_2, K_3 и K_4 .

3.2. Дефиниција. За графот $G = (V, U, \varphi)$ ќе велиме дека е *биполарен*, ако множеството темиња V може да се разбие на две подмножества V_1 и V_2 такви што $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и $V_1 \cup V_2 = V$ и секое ребро поврзува теме од V_1 со теме од V_2 (не постојат две темиња од едно исто V_i кои се поврзани со ребро).



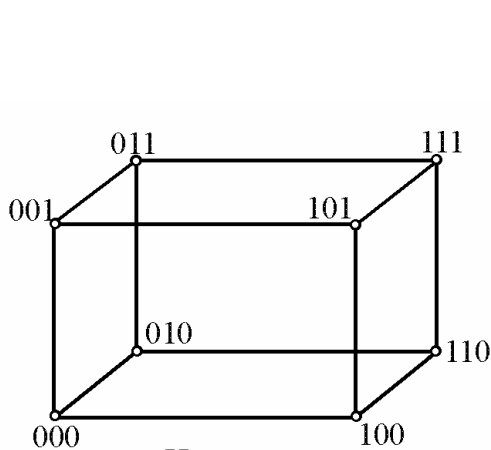
Класите V_1 и V_2 ги нарекуваме *хроматски класи*. Биполарните графови обично ги означуваме со $G = (V_1 \cup V_2, U, \varphi)$ или $G = (V_1, V_2, U, \varphi)$.

За биполарниот граф ќе велиме дека е *комплетно биполарен* $K_{m,n}$ ако множеството V_1 содржи m темиња, множеството V_2 содржи n темиња и секои две темиња $v \in V_1$ и $v' \in V_2$ се поврзани со ребро.

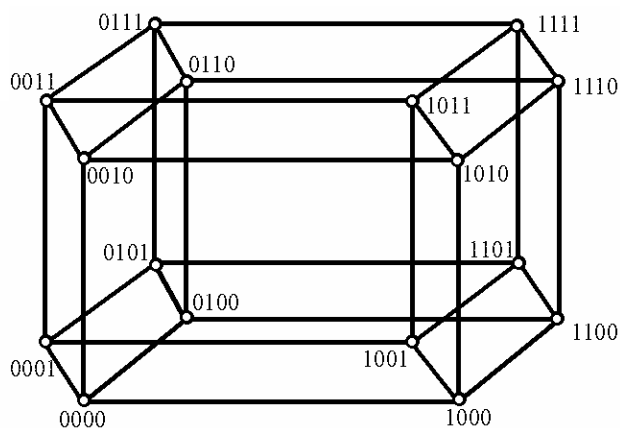
Графот прикажан на цртеж 5 е биполарен, но не е комплетно биполарен.

3.3. Дефиниција. n -димензионален единичен куб го нарекуваме графот чии темиња се сите низи од нули и единици со должина n , а ребрата ги поврзуваат само темињата кои се разликуваат во едно место.

На цртеж 6 графички е прикажан случајот за $n = 3$, а на цртеж 7 за $n = 4$.



Цртеж 6



Цртеж 7

3.4. Дефиниција. Нека $G = (V, U, \varphi)$ е граф. Графот $H = (V', U', \varphi')$ го нарекуваме *подграф* на графот G , во ознака $H \subseteq G$, ако $V' \subseteq V, U' \subseteq U$ и φ' е рестрикција на φ над множеството E' . За подграфот $H = (V', U', \varphi')$ на графот $G = (V, U, \varphi)$ ќе велиме дека е *вистински подграф* ако множествата V' и U' се вистински подмножества на множествата V и U , соодветно.

3.5. Дефиниција. Нека $G = (V, U, \varphi)$ е граф. Нека $V' \subseteq V$ и U' е множеството ребра во G кои се инцидентни само со темињата од V' . Тогаш, графот $H = (V', U', \varphi)$ го нарекуваме *подграф на графот G генериран од темињата во V'* .

Нека $U' \subseteq U$ и V' е множеството темиња во G кои се инцидентни само со ребрата од U' . Графот $H = (V', U', \varphi)$ го нарекуваме *подграф на графот G генериран од ребрата U'* .

3.6. Дефиниција. Нека $G = (V, U, \varphi)$ е граф. Графот $\overline{G} = (V, U', \varphi')$ го нарекуваме *комплемент* на графот G ако $(v_i, v_j) \in U'$ (односно $\{v_i, v_j\} \in U'$) секогаш кога $(v_i, v_j) \notin U$ (односно $\{v_i, v_j\} \notin U$).

3.7. Дефиниција. Нека $G = (V, U, \varphi)$ е граф. Подграфот $Z(v)$ кој се состои од сите ребра инцидентни на темето v го нарекуваме *свезда на темето v* .

За графот без лупи *степен* $\deg(v)$ на темето v го нарекуваме бројот на ребрата во свездата $Z(v)$.

3.8. Теорема. Нека $G = (V, E, \varphi)$ е произволен неориентиран граф. Тогаш:

а) $\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2m$, каде m е бројот на ребрата на графот;

б) бројот на темињата со непарен степен е парен број.

Доказ. Види [45] теорема 4.2. ♦

4. ВЕРГИ. ЦИКЛИ. СВРЗАНОСТ

4.1. Дефиниција. Низата темиња и ребра на графот G

$$v_{i_0}, u_1, v_{i_1}, u_2, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n-1}}, u_n, v_{i_n} \quad (1)$$

ја нарекуваме *пат* $[v_{i_0}, v_{i_n}]$ од темето v_{i_0} во темето v_{i_n} ако $\varphi(u_k) = (v_{i_{k-1}}, v_{i_k})$ за $k = 1, 2, \dots, n$. Темето v_{i_0} го нарекуваме *почеток*, а v_{i_n} *крај на патот*; бројот n го нарекуваме *должина на патот* (пат со нулта должина се состои од едно теме).

Притоа, ќе велиме дека патот $[v_{i_0}, v_{i_n}]$ поминува последователно низ темињата $v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n-1}}, v_{i_n}$ по ребрата $u_1, u_2, \dots, u_n$.

4.2. Забелешка. Општо кажано средните темиња и ребра од низата (1) можат да се повторат. Понатаму, секое ребро од патот може да биде ориентирано (обавезно од $v_{i_{k-1}}$ во v_{i_k}) или неориентирано.

4.3. Дефиниција. Низата темиња и ребра кои формираат пат во соодветниот неориентиран граф ја нарекуваме *верига*.

Јасно, секој пат е верига, но обратното е точно само за неориентираните графови во кои поимите пат и верига се совпаѓаат. Ако низата (1) е верига, тогаш очигледно и нејзината *инверзија* $v_{i_n}, u_n, v_{i_{n-1}}, u_{n-1}, v_{i_{n-2}}, \dots, v_{i_1}, u_1, v_{i_0}$ е верига. Во натамошното разгледување овие вериги нема да ги разликуваме и ќе зборуваме за верига меѓу темињата v_{i_0} и v_{i_1} .

4.4. Дефиниција. Ако во низата (1) $v_{i_0} = v_{i_n}, (n > 0)$, тогаш таквиот пат (соодветно верига) поточно, множеството на сите циклични пермутации на таа низа

$$v_{i_k}, u_{k+1}, v_{i_{k+1}}, u_{k+2}, \dots, u_n, v_{i_0}, u_1, v_{i_1}, u_2, \dots, u_k, v_{i_k}$$

го нарекуваме *контура* (соодветно *циклус*) со должина n .

Петлите се јавуваат како циклус (и уште повеќе контура) со должина 1.

Патот, веригата, контурата, циклусот го нарекуваме *прост* (соодветно *елементарен*) ако секое негово ребро (соодветно секое теме и секое ребро) припаѓа на низата (1) само еднаш (не го читаме последното теме во записот на циклусот).

4.5. Проверката на елементарноста на патот, веригата, контурата, циклусот се упростува ако се земе во предвид дека во низата (1) реброто може да се повтори само тогаш кога во неа се повторува некое теме или кога низата (1) има вид:

$$v_{i_0}, u_1, v_{i_1}, u_1, v_{i_0} \quad (2)$$

Елементарниот пат, верига, контура, циклус може да се разгледува како подграф од графот G .

Ако веригата $[v_{i_0}, v_{i_n}]$, различна од (2), не е елементарна тогаш некое теме v_{i_k} влегува во низата (1) барем двапати. Делот од низата меѓу овие две совпаѓачки темиња v_{i_k} е циклус и после исфрлањето на овој дел од низата (1) останува верига со истите краеве v_{i_0} и v_{i_n} . Повторувајќи ја оваа операција додека е можно наоѓаме елементарна верига или верига од вид (2), која ја заменуваме со елементарна верига, составена од едно теме v_{i_0} . Ова може да се направи и со простиот циклус. Според тоа точна е следнава лема:

Лема. Секоја верига $[v_1, v_2]$ содржи елементарна подверига со истите краеве. Простата, но не елементарна верига содржи елементарен циклус. Простиот циклус, кој минува низ реброто u (врвот v) содржи елементарен подциклус кој поминува низ u (врвот v). ♦

4.6. Лесно може да се види дека за секој граф релацијата меѓу темињата „да се биде сврзан со верига“ е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Транзитивноста се гледа од тоа што последователното поминување по веригите $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, \gamma]$ е верига $[\alpha, \gamma]$. Според тоа оваа релација е релација за еквиваленција, која темињата на графот

ги разбива на класи на еквиваленција. Подграфовите, распнати на овие класи темиња ги нарекуваме *компоненти на сврзаност на графот*. Секои две темиња од една компонента на сврзаност се сврзани со барем една верига, а темињата од различни компоненти не се сврзливи со верига.

Графот го нарекуваме *сврзан* ако тој има само една компонента на сврзаност; т.е. ако секои две негови темиња се сврзливи со верига. Компонентите на сврзаност на секој граф G претставуваат максимални сврзливи подграфови на графот G . За решавање на многу задачи доволно е да разгледуваме само сврзани графови.

На множеството темиња V од сврзаниот граф G можеме да воведеме *растојание* како минимална должина на веригите меѓу темињата, т.е.

$$d(\alpha, \beta) = \min L_{[\alpha, \beta]}$$

каде $L_{[\alpha, \beta]}$ е должина на веригата $[\alpha, \beta]$, а минимумот го земаме по сите вериги $[\alpha, \beta]$. Очигледно минимумот се достигнува на елементарните вериги. Јасно, за вака дефинираното растојание $d(\alpha, \beta)$ исполнети се аксиомите за растојание:

- i) $d(\alpha, \alpha) = 0$ и $d(\alpha, \beta) > 0$ за $\alpha \neq \beta$
- ii) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$
- iii) $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \geq d(\alpha, \gamma)$,

што значи дека V е метрички простор.

5. ДРВА

5.1. Дефиниција. За реброто u на графот G ќе велиме дека е *циклично* ако тоа припаѓа барем на еден елементарен циклус во графот. За реброто u на граф G ќе велиме дека е *ациклично* ако тоа не е циклично.

5.2. Забелешка. Согласно лема 4.5 реброто припаѓа на елементарен циклус ако и само ако тоа припаѓа на некој прост циклус.

5.3. Лема. Ако од сврзан граф отстраниме циклично ребро, тогаш добиениот подграф е сврзан; а при отстранување на ациклично ребро добиениот подграфот е не-сврзан.

Доказ. Во прост циклус краевите на секое ребро (α, β) се сврзани со веригата $A = [\alpha, \beta]$ која не го содржи тоа ребро и се состои од сите останати ребра на циклусот. Бидејќи во секоја верига меѓу секои две темиња v_1, v_2 на графот G секое циклично ребро може да се замени со веригата A наоѓаме верига $[v_1, v_2]$, т.е. секои две темиња се сврзани со верига и во графот $G / \{(\alpha, \beta)\}$. Со тоа е покажано првото тврдење.

Ако α и β се темиња на сврзаниот граф G , тогаш реброто (α, β) додадено кон G е циклично во графот $G \cup \{(\alpha, \beta)\}$. Имено елементарен циклус во $G \cup \{(\alpha, \beta)\}$ кој го содржи реброто (α, β) добиваме со соединување на тоа ребро со произволна елементарна верига $[\alpha, \beta]$ во G . Од тука следува второто тврдење на лемата. ♦

5.4. Дефиниција. Сврзаниот граф на кој сите ребра се ациклични го нарекуваме *дрво*.

5.5. Теорема. Секои две темиња на дрвото се сврзани точно со една елементарна верига.

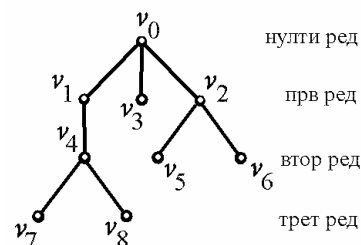
Доказ. Ако графот не е дрво, тогаш или тој не е сврзан, т.е. не секој пар негови темиња се сврзани со верига, или тој содржи елементарен циклус. Но тогаш, секои две темиња на циклусот се сврзани со две елементарни вериги – делови на циклусот.

Обратно, ако меѓу две темиња α и β постојат две различни елементарни вериги, тогаш некое ребро (γ, δ) на едната од тие вериги не припаѓа на другата. Тргнуваме по првата верига на обете страни од реброто (γ, δ) до првото пресретнување на втората верига во темињата ε_1 и ε_2 , т.е. ја земаме максималната подверига од првата верига која го содржи (γ, δ) и не содржи во себе темиња (со исклучок на ε_1 и ε_2) од втората верига. Делот $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ од првата верига, заедно со делот $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ од втората верига формира елементарен циклус. Според тоа графот не е дрво. ♦

5.6. Избираме во дрвото произволно теме α_0 кое го нарекуваме негов *корен*, или теме со нулти ред. Соседните темиња ги нарекуваме темиња од прв ред итн. темињата, соседни на темињата од $(i-1)$ -от ред, кои не соодветствуваат кон ниту еден претходен ред ги нарекуваме темиња од i -ти ред. Очигледно е дека бројот на редот се совпаѓа со растојанието меѓу неговите темиња и коренот на дрвото. Според теорема 5.5 секое теме

од i -тиот ред е сврзано преку ребро со точно едно теме од $(i-1)$ -от ред и не е сврзано со ребро со ниту едно теме од i -тиот ред (цртеж 8). Ваквото претставување на дрвото честопати е корисно. Тоа всушност покажува дека во конечно дрво секогаш постојат завршни темиња (на пример темињата од последниот ред).

Воведувањето корен во дрвото D определува на множеството темиња на дрвото делумно подредување: $\alpha < \beta$ ако $\alpha \neq \beta$ и елементарната верига од коренот до темето β содржи α . Коренот α_0 е единствен и минимален елемент во ова делумно подредено множество темиња, а сите завршни (крајни), со исклучок на коренот, темиња се максимални. Секое теме α еднозначно определува кореново поддрво D_α , распнато на множеството од такви темиња β , што $\alpha \leq \beta$. Во секое такво поддрво D_α ($D_{\alpha_0} = D$) можеме да одделиме темиња непосредно потчинети на коренот на поддрвото, т.е. такви темиња γ_i , што $\alpha < \gamma_i$ и не постојат темиња δ_i за кои $\alpha < \delta_i < \gamma_i$. За секое такво теме γ_i определуваме гранка D_{α, γ_i} на дрвото D_α како кореново поддрво со корен α распнато на множеството темиња $\{\alpha\} \cup \{\delta \mid \delta \geq \gamma_i\}$. Јасно, секое поддрво D_α го наоѓаме од неговите гранки слепени во коренот α .



Цртеж 8

5.7. Во сврзаниот граф G последователно ќе ги отстрануваме цикличните ребра додека тоа е можно, т.е. додека не остане ниту едно циклично ребро. Со тоа преминуваме кон сврзан подграф на графот G со истото множество темиња, но без елементарни циклуси, т.е. кон дрвото наречено *покривно дрво* на графот G . Покривното дрво го избираме во општ случај нееднозначно, но сите ациклични ребра влегуваат во секое покривно дрво.

Очигледно, дека отстранувањето на крајните ребра заедно со крајните темиња доведува до сврзан граф без елементарен циклус, т.е. до дрво. Продолжувајќи го овој процес доаѓаме до (ако почетното дрво е конечно) дрво кое се состои од едно ребро и две темиња. Бидејќи од почетното дрво исфрливме еднаков број на ребра и темиња може да се заклучи дека во секое конечно дрво бројот на ребрата е за еден помал од бројот на темињата.

Обратно, нека сврзаниот граф G со b темиња содржи $(b-1)$ -но ребро. Ќе докажеме дека G е дрво. Навистина, во спротивен случај со отстранување на некој број q циклични ребра ние наоѓаме покривно дрво со b темиња и $b-1-q$ ребра, што не е можно бидејќи покривното дрво е дрво. Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема. За да конечниот сврзан граф биде дрво потребно и доволно е да бројот на неговите ребра биде за 1 помал од бројот на темињата. ♦

5.8. Ако на дрвото D му додадеме ребро (α, β) , каде $\alpha, \beta \in D$, тогаш во графот се појавува (единствен) елементарен циклус, составен од тоа ребро и (единствената) елементарна верига $[\alpha, \beta] \subseteq D$.

Ако од дрвото D отстраниме произволно ребро (γ, δ) и не отстрануваме темиња, тогаш добиваме несврзан граф (бидејќи секое ребро кај дрвото е ациклично) кој се состои точно од две компоненти на сврзаност. Секој подграф H од дрвото D не содржи елементарен циклус, па затоа сите компоненти на сврзаност, подграфови H се дрва.

6. ОЈЛЕРОВИ ГРАФОВИ. ЦИКЛОМАТСКИ БРОЈ

6.1. Нека G е граф кој содржи p нумерирани ребра $u_1, u_2, \dots, u_p$. На секој подграф $H \subseteq G$ му ставаме во соодветствие p -димензионален вектор $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ од нули и единици: $a_i = 1$ ако $u_i \in H$ и $a_i = 0$ ако $u_i \notin H$ (карактеристичен вектор на подграфот H). Ова соодветствие е обратно еднозначно. Уште повеќе збир по модул 2 на подграфови соодветствува со збир по модул 2 на нивните карактеристични вектори. Значи, множеството од сите подграфови во однос на операцијата собирање по модул 2 образува Абелова група. Над полето коефициенти $\{0, 1\}$ оваа Абелова група образува векторски простор (производот на секој простор H со 1 дава H , производот со 0 е празниот граф, т.е. подграфот кој не содржи ребра). Не е тешко да се види дека просторот подграфови на графот G и просторот карактеристични вектори на подграфовите се изоморфни и имаат димензија p .

6.2. Дефиниција. За графот G ќе велиме дека е *парен* ако степените на сите негови темиња се парни парни.

6.3. Секоја елементарна верига (освен циклусот) во парен граф може да се продолжи со ребра кои не припаѓаат на веригата, бидејќи крајот на веригата има степен 1 во веригата и степен не помал од 2 во графот. Ако графот е конечен тогаш продолжувајќи ја веригата, после конечен број чекори, повторно поминуваме по веќе поминатите темиња, т.е. дел од најдената (можеби веќе не елементарна) верига формира елементарен циклус, после чие отстранување останува парен граф, бидејќи сите степени се менуваат за парен број. Во новиот граф можеме одново да одделиме елементарен циклус итн. се додека во графот не остане ниту едно ребро. На таков начин секој конечен парен граф го претставуваме во вид на збир на попарно дисјунктни (по ребра) елементарни циклуси, од што следува дека секое ребро е циклично.

Ако конечниот парен граф е сврзан, тогаш не е тешко да се докаже (на пример со индукција по бројот на неговите елементарни циклуси) дека во него постои прост циклус, кој ги содржи ребрата на графот. Таквиот циклус го нарекуваме *Ојлеров циклус*, а соодветниот граф го нарекуваме *Ојлеров граф*. Бидејќи секое теме на простиот циклус во него има парен степен (секое поминување низ темето по циклусот користи две ребра инцидентни на тоа теме), од претходно изнесеното следува точноста на следнава теорема.

Теорема. За да конечниот сврзан граф е Ојлеров, потребно и доволно е тој да е парен. ♦

6.4. Забелешка. Од теорема 6.3 непосредно следува дека во конечен несврзан парен граф сите компоненти на сврзаност се ојлерови графови.

6.5. Дефиниција. Темето на ориентираниот граф го нарекуваме *рамнотежно*, ако бројот на ребрата кои влегуваат во темето е еднаков на бројот на ребрата кои излегуваат од него. Ориентираниот граф го нарекуваме *рамнотежен* ако сите негови темиња се рамнотежни.

6.6. Обиколувањето на неориентираниот Ојлеров граф по Ојлеровиот цикл го ориентира секое ребро на графот во направеното обиколување. Јасно дека при таква ориентација Ојлеровиот граф е рамнотежен.

Нека сега е даден рамнотежен граф. Повторувајќи го претходното размислување (наместо за циклус треба да зборуваме за контура) лесно се покажува дека секој коне-

чен рамнотежен граф се претствува како збир на попарно дисјунктни елементарни контури (а исто така дека во конечен сврзан рамнотежен граф постои контура која ги содржи сите ребра на графот).

6.7. Збир на два парни подграфови од секој граф е исто така парен подграф, т.е. степенот $s(\alpha)$ на темето α во подграфот $H_1 + H_2$ е еднаков на $s_1 + s_2 - s_{12}$ каде s_1 и s_2 се степените на тоа теме во подграфовите H_1 и H_2 соодветно, а s_{12} е степенот на темето α во пресекот $H_1 \cap H_2$. Затоа парните подграфови образуваат подпростор во просторот од сите подграфови, кој очигледно се совпаѓа со подпросторот распнат над сите елементарни циклуси.

Да преминеме кон разјаснување на димензијата $\mathcal{G}$ на тој подпростор. Нека G е сврзан граф со p -ребра и b -темиња, а D е некое негово покривно дрво. Бројот на ребрата (тетивите) - тетивниот број е еднаков на $p - b + 1$. Секоја тетива (α, β) заедно со единствената елементарна верига $[\alpha, \beta] \subseteq D$ формира елементарен циклус, при што векторите на сите такви циклуси (за разни тетиви) формираат независен систем Σ , бидејќи секој од циклусите содржи ребро (свое на тетивите) кое не припаѓа на ниту една од останатите циклусни системи. Оттука

$$\mathcal{G} \geq p - b + 1 .$$

Од друга страна, секој парен граф, особено секој прост циклус се изразува преку циклусите на системот Σ . Навистина, кон парниот подграф H го додаваме оној циклус од Σ кој ја содржи тетивата на графот G , која припаѓа на H . Најдената сума нема да содржи ниту една тетива, т.е. ќе биде некој подграф од дрвото D , од што следува дека тој е празен подграф, бидејќи во спротивен случај парниот подграф (сумата на H и циклусот), кој има елементарен циклус би се содржел во дрвото D . Според тоа

$$\mathcal{G} = p - b + 1 .$$

За неврзаниот граф кој содржи компоненти на сврзаност базата на просторот на парни подграфови ја добиваме со обединување на базите на неговите сврзливи компоненти, а бројот на ребрата и темињата ги собираме. Затоа, ако i -тата компонента содржи p_i -ребра и b_i -темиња, тогаш

$$\mathcal{G} = p - b + k .$$

каде

$$p = \sum_{i=1}^k p_i \text{ и } b = \sum_{i=1}^k b_i .$$

Бројот $\mathcal{G}$ го нарекуваме *цикломатски број на графот*. Ако земеме во предвид дека $\mathcal{G} \geq 0$ за секој граф точно е равенството: $k \geq b - p$. Значи, дрво е сврзан граф со цикломатски број еднаков на нула.

ГЛАВА II

ДВОПОЛОВИ МРЕЖИ

1. МРЕЖИ, ВЕРИГИ ВО МРЕЖИ. СОЕДИНУВАЊЕ НА МРЕЖИ

1.1. Дефиниција. Графот за кој некои темиња се одделиви го нарекуваме *мрежа*. Одделивите темиња ги нарекуваме *полови* на мрежата.

На пример, дрвото со корен можеме да го разгледуваме како еднополова мрежа.

Изоморфизам на мрежи го нарекуваме изоморфното пресликување на нивните графови, при кое половите задолжително поминуваат во полови (понекогаш даваме дополнителни услови, за да определени полови преминуваат во определени полови).

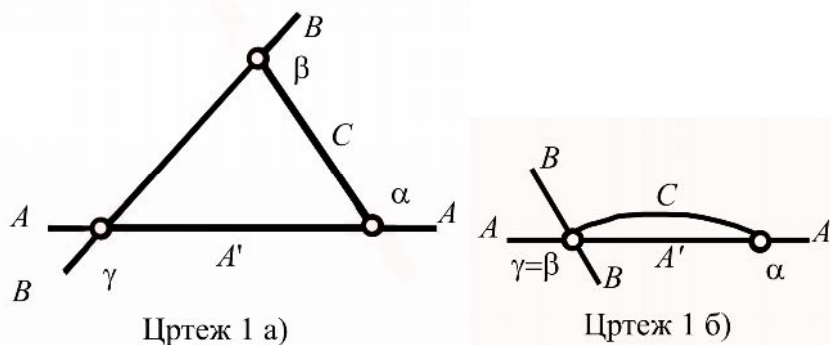
Темињата, различни од половите ги нарекуваме *внатрешни темиња на мрежата*. Ребрата, инцидентни со барем еден пол ги нарекуваме *полносни ребра*, а останатите ребра ги нарекуваме *внатрешни*.

(k, l) -полосник ја нарекуваме мрежата со $(k + l)$ -полови, разбиени на две класи и тоа k влезни и l излезни полови. $(1, 1)$ -полосникот го нарекуваме двополова мрежа.

1.2. Во оваа глава ќе бидат разгледувани единствено мрежите без петљи и без изолирани внатрешни темиња, при што допуштаме кратките ребра. Главно ќе бидат разгледувани двополовите мрежи. Нив ќе ги нарекуваме *прости мрежи*. Елементарните вериги меѓу половите на мрежата за кои не ги цитираме краевите ќе ги наречеме *прости вериги*, во спротивен случај задолжително ќе укажуваме на краевите на веригата. Влезните и излезните полови на мрежата S ќе ги означуваме со симболите α_s и β_s . Полносните ребра образуваат влезни и излезни свезди Z_{α_s} и Z_{β_s} чиј пресек се состои од ребра (тој може да биде и празен) инцидентни на двата пола.

1.3. Лема. Нека A и B се две вериги на мрежата S (може да се сечат или дури и да се совпаѓаат); α и β се две различни темиња, при што $\alpha \in A$ и $\beta \in B$.

Ако некоја елементарна верига $C = [\alpha, \beta]$ не се сече со A и B никаде, освен во своите краеве, тогаш во S постои верига, која ја содржи C како подверига.

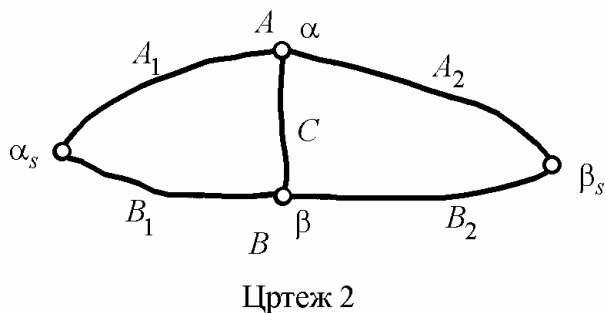


Доказ. Да го означиме со γ првото заедничко теме на веригите A и B одејќи по веригата A од α во правец на еден од половите. Темето γ може да се совпадне со α ако $\alpha \in B$, може да се совпадне со полот, при што делот $A' = [\alpha, \gamma]$ на веригата A нигде, освен во темето γ не се сече со B . Ако $\gamma \neq \beta$ тогаш (цртеж 1 а)) $C' = C \cup A'$ е елементарна верига која се пресекува со B само во своите краеве β и γ . Тогаш делот $[\beta, \gamma]$ на веригата B може да се замени со C' . Ако пак $\gamma = \beta$ (цртеж 1 б)), тогаш делот $[\alpha, \gamma]$ на веригата A може да се замени со C . ♦

1.4. Ако C се состои од едно ребро, тогаш точна е следнава последица.

Последица. Ако во мрежата поминуваат вериги низ краевите на реброто, тогаш некоја верига поминува и низ реброто h . ♦

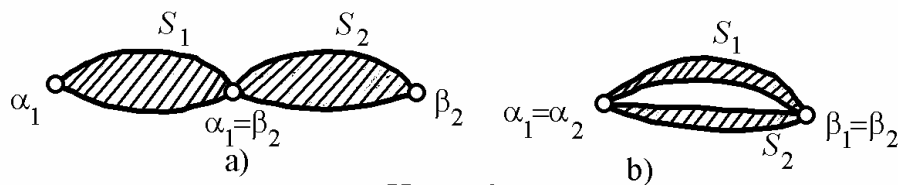
1.5. Забелешка. Ако веригите A и B немаат заеднички внатрешни темиња, а α и β се внатрешни темиња на тие вериги, тогаш постојат две вериги, кои минуваат низ C во различни правци (цртеж 2) $\alpha_s A_1 \alpha C \beta B_2 \beta_s$ и $\alpha_s B_1 \beta C \alpha A_2 \beta_s$. За подграфот формиран од таквите вериги A и B и поврзувачката верига C (познати краеве) велíme дека е *премостив*.



1.6. Дефиниција. Нека е S_1 мрежа со полови α_1 и β_1 , а S_2 -мрежа со полови α_2 и β_2 , при што S_1 и S_2 немаат заеднички елементи. Мрежата $S_1 \bullet S_2$ со полови α_1 и β_2 , најдена со соединување на темињата β_1 и α_2 ја нарекуваме *последователно соединување* на мрежите S_1 и S_2 ; мрежата $S_1 \vee S_2$ со полови α_1 и β_1 , добиена со

соединување на половите α_1 и α_2 и половите β_1 и β_2 ја нарекуваме *паралелно соединување* на мрежите S_1 и S_2 (цртеж 3).

Аналогно определуваме последователно и паралелно соединување на поголем број мрежи: $S_1 \bullet S_2 \bullet \dots \bullet S_n$ и $S_1 \vee S_2 \vee \dots \vee S_n$.



Цртеж 3

1.7. Дефиниција. Мрежите добиени како резултат на конечен број паралелни и последователни соединувања на едноребрени мрежи ги нарекуваме *паралелно-последователни мрежи*.

Од досега изнесеното следува дека класата на паралелно-последователни мрежи (скратено П-мрежи) ја определуваме индуктивно:

- (1) едноребрената мрежа е П-мрежа
- (2) ако S_1 и S_2 се две мрежи тогаш $S_1 \bullet S_2$ и $S_1 \vee S_2$ се П-мрежи

1.8. Кон мрежата S додаваме таканаречено *изворно ребро*, кое ги сврзува половите (понекогаш, на пример, во случај на ориентирана мрежа погодно е тоа ребро да се ориентира од излезот кон влезот на мрежата). Најдената проширена мрежа ја означуваме со $\tilde{S}$. Забележуваме дека изворното ребро секоја елементарна верига A ја претвора во елементарен циклус $\tilde{A}$.

Теорема. Во произволна мрежа збирот по модул 2 на непарен број вериги содржи верига.

Доказ. Ги собираме по модул 2 циклусите $\tilde{A}_i$, соодветни на дадените вериги A_i . Во резултатот се добива парен граф $\sum \tilde{A}_i$. Изворното ребро влегува во овој збир, бидејќи тоа учествува во собирањето непарен број пати. Очигледно дека тоа претставува циклично ребро во $\sum \tilde{A}_i$. Од циклусот кој го содржи изворно ребро истото го отстрануваме и ја добиваме бараната верига. ♦

2. ПРОТОЦИ ВО МРЕЖИ

2.1. Нека е S произволна делумно ориентирана мрежа во која на секое ребро u нека му е придружен ненегативен број $c(u)$, кој го нарекуваме *пропусна моќ*. Проток во мрежата S го нарекуваме парот (f, w) каде w е некоја ориентација на сите неориентирани ребра на мрежата, а $f(u)$ е ненегативна функција, зададена на множеството ребра, која не ја надминува пропустната моќ, и таква што во секое внатрешно теме α е исполнет законот на Кирхоф, согласно кој збирот на вредностите на протокот по ребрата влезни во темето е еднаков на збирот на вредностите на протокот на ребрата излезни од темето. Со други зборови, за $f(u)$ се исполнети условите:

1. $0 \leq f(u) \leq c(u)$, за секое ребро u ,
2. за секое внатрешно теме α важи $R(\alpha) = 0$, каде

$$R(\alpha) = \sum_{u \in \Gamma(\alpha)} f(u) - \sum_{u \in \Gamma'(\alpha)} f(u),$$

при што $\Gamma(\alpha)$ (соодветно $\Gamma'(\alpha)$) е множеството од сите ребра излезни од α (соодветно влезни во α) при ориентација w .

Бидејќи збирот на вредностите $R(\alpha)$ по сите темиња, вклучувајќи ги и половите е еднаква на нула (секое ребро е излезно за едно теме и влезно за друг), добиваме дека

$$R(\alpha_s) = -R(\beta_s).$$

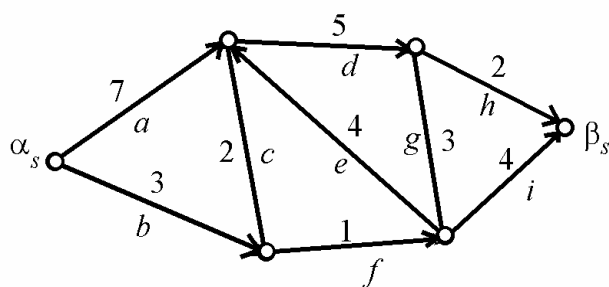
Бројот $R = R(\alpha_s)$ ја нарекуваме *големина на потокот низ мрежата*. Меѓу другото, слично размислување покажува дека ако мрежата допушта проток со ненулта големина, тогаш половите на мрежата се наоѓаат во една компонента на сврзаност. Ако мрежата претставува било каков спроводлив систем, тогаш R ја определува големина на протокот која влегува во едниот пол и излегува од другиот, т.е. големината на протокот што поминува низ мрежата. Ако на ориентираното од β_s кон α_s изворно ребро ставиме $f = R$ (допуштаме за тоа ребро f да биде помал од нула), тогаш Кирховиот закон ќе биде исполнет за сите темиња на мрежата, а R ќе ја определува *големината на циркулацијата низ мрежата*.

2.2. Да ја разгледаме задачата за определување на максималната големина $R_{\max}$ на протокот низ мрежата S при зададена вредност на пропустната моќ на секое ребро.

За таа цел ќе го воведеме поимот пресек (сечење) на мрежа. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција А. Пресек на мрежа го нарекуваме множеството ребра при чие отстранување мрежата станува несврзана, при што половите припаѓаат во различни компоненти на сврзаност.

Јасно, секоја верига (а уште повеќе секој пат од α_s во β_s) минува низ барем едно ребро на пресекот. Во мрежата прикажана на цртеж 4 пресеци се:



Цртеж 4

$$\{d, e, f\}, \{b, c, e, g, h\}, \{d, g, h, i\}.$$

Дефиниција Б. За пресекот ќе велиме дека е *прост*, ако при отстранување на секое негово ребро тој престанува да биде пресек.

Јасно, $\{d, e, f\}$ и $\{b, c, e, g, h\}$ се прости пресеци, а додека $\{d, g, h, i\}$ не е прост пресек. Очигледно, дека за секое ребро од прост пресек може да се укаже на верига, која поминува низ тоа ребро, но не минува низ другите ребра на дадениот пресек.

2.3. Ако во сврзана мрежа отстраниме прост пресек, тогаш мрежата се распаѓа на точно два дела: *лев дел* кој го содржи темето α_s и *десен дел* кој го содржи β_s . Јасно, секое ребро од прост пресек сврзува темиња од различни делови. Реброто на пресекот ќе го нарекуваме *право*, ако тоа во мрежата не е ориентирано или е ориентирано од лево на десно, и *обратно* – во спротивен случај. Дали ориентираното ребро ќе биде право или обратно, општо кажано ќе зависи од изборот на пресекот. Така во примерот на цртеж 4 реброто e за пресеците $\{d, e, f\}$ и $\{b, c, e, g, h\}$ е обратно, а за пресекот $\{a, c, e, g, i\}$ е право.

Дефиниција. Збирот од пропустните моќи на правите ребра на простиот пресек W го нарекуваме *пропусна моќ на W* , во ознака $c(W)$.

Во примерот на цртеж 4 пресекот $\{d, e, f\}$ има пропусна моќ $5+1=6$, а пресекот $\{b, c, e, g, h\}$ има пропусна моќ $3+2+3+2=10$.

Ако мрежата е несврзана и нејзините полови се наоѓаат во различни компоненти на сврзаност, тогаш природно сметаме дека единствениот прост пресек на мрежата е празното множество, а неговата пропусна моќ е еднаква на нула.

2.4. Теорема (Форд-Фалкерсон). Максималната големина на протокот $R_{\max}$ низ мрежата S е еднаква на минимумот од пропустните моќи $c_{\min}$ на нејзините прости пресеци.

Доказ. На почетокот ќе докажеме дека $R_{\max} \leq c_{\min}$. За тоа доволно е да се докаже дека за секој проток и секое пресекување.

Ги собираме $R(\alpha)$ по сите темиња α од левата компонента на мрежата. Овој збир, од една страна е еднаков на $R = R(\alpha_s)$, а од друга страна е еднаков на алгебарскиот збир на големината на протокот, кој оди низ пресекот од лево кон десно (протоците по ребрата, кои одат од левата компонента во десната, ги собираме со знак плус, а по ребрата кои одат во обратен смер со знак минус). Бидејќи $f(u) \leq c(u)$, од тука следува бараното неравенство. Јасно е дека равенството $R = c(w)$ може да се постигне само, ако сите прави ребра на пресекот (при ориентацијата w) се ориентирани од лево на десно и за нив важи $f(u) = c(u)$, а за сите обратни ребра $f(u) = 0$.

Ќе докажеме сега дека во мрежата S може да се создаде проток со големина $c_{\min}$. Доказот ќе го спроведеме со индукција по бројот на ребрата во мрежата S . Ако бројот на ребрата е еднаков на нула, т.е. мрежата S се состои од два изолирани пола тогаш е јасно дека $R = c_{\min} = 0$.

Да претпоставиме, дека за секоја мрежа S , која содржи помалку од p ребра тврдењето е докажано. Ќе докажеме дека тогаш:

(*) во мрежата S (содржи помалку од p – ребра) може да се создаде проток со произволно мала величина.

Имено нека R е произволен број кој го задоволува условот $0 \leq R \leq c_{\min}$. Наоѓаме во мрежата S прост пресек со пропусна моќ $c_{\min}$ и со намалување на истата до R (намалувајќи ја тоа пропусната моќ на некои прави ребра во пресекот), конструираме мрежа во која согласно со индуктивната претпоставка може да се создаде проток

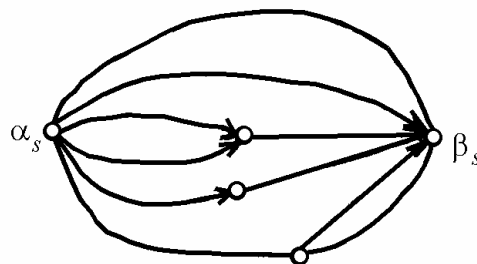
со големина R . При тоа е јасно дека истиот овој проток претставува проток и во мрежата S .

Користејќи ја (*) ќе го докажеме тврдењето за произволна мрежа S со p -ребра. Простиот пресек на мрежата кој има пропусна моќ $c_{\min}$ ќе го наречеме минимален. Во мрежата S можеме да ја намалиме пропусната моќ на некои ребра така што во изменетата мрежа (да ја наречеме нејзина редукција) ќе бидат исполнети условите:

- 1) пропусната моќ на секој прост пресек не е помала од $c_{\min}$,
- 2) секое ребро се јавува како право во некој минимален пресек или има нулта пропусна моќ.

За наоѓање на редуцираната мрежа во било каков редослед ги разгледуваме сите ребра на мрежата S и ја намалуваме (може и до нула) пропусната моќ на сите оние кои го задоволуваат условот 2), при што се води сметка условот 1) да не се наруши. (Општо кажано во зависност од избраниот редослед можеме да најдеме различни редуцирани мрежи). Забележуваме дека, ако во мрежата S пропусната способност на сите ребра е цел број, тогаш можеме да сметаме дека и редуцираната мрежа го има тоа својство. Очигледно дека секој проток во редуцираната мрежа е проток и во почетната мрежа. Затоа доволно е да се констатира, дека проток со големина $c_{\min}$ може да се создаде во редуцираната мрежа.

Ако редуцираната мрежа содржи ребра со нулта пропусна моќ, тогаш со нивно отстранување ние добиваме мрежа која содржи помалку од p ребра и се допуштени истите протоци. Не е тешко да се провери дека во оваа мрежа секој прост пресек има пропусна моќ не помалку од $c_{\min}$. Според тоа, согласно индуктивната прет-



Цртеж 5

поставка во оваа мрежа можеме да создадеме проток со големина $c_{\min}$. Значи, него можеме да го создадеме и во самата редуцирана мрежа.

Сега, ќе сметаме дека редуцираната мрежа има ребра со нулта пропусна моќ, т.е. секое нејзино ребро е право во некој минимален пресек (својство 2)) и следствено припаѓа на некоја верига (во спротивно пресекот не е прост). Ќе разгледаме два случаи:

- а) секоја верига од редуцираната мрежа содржи не повеќе од две ребра, и
- б) во редуцираната мрежа има верига која содржи не помалку од три ребра.

Во случајот под а), очигледно сите ребра на мрежата се полносни и или се ориентирани или се ориентирани од лево кон десно. Притоа редуцираната мрежа претставува за себе паралелно соединување на директни ребра и подмрежи (по една на секое внатрешно теме) соединоставни структури: секоја од нив претставува последователно соединување на два свои дела, во кои сите ребра се соединуваат паралелно (цртеж 5). Очигледно е дека простите пресеци на оваа мрежа се такви и само такви множества, кои ги содржат сите директни ребра, а од секоја подмрежа или сите ребра од нејзиниот лев дел и ниту едно ребро од десниот, или обратно. Од овде не е тешко да се заклучи, дека за секоја подмрежа големината на пропусната моќ на ребрата од нејзиниот лев дел е еднаква на големината на пропусната моќ на ребрата од нејзиниот десен дел. (Имено, ако било која од тие збирони, да речеме, првиот е помал, тогаш земаме минимален пресек кој содржи кое било ребро од десниот дел на подмрежата и ги заменуваме во него сите ребра од десниот дел со ребрата од левиот дел и наоѓаме прост пресек со пропусна моќ помала од $c_{\min}$, што според својството 1) не е можно). Но, тогаш пропусните моќи на сите прости пресеци се еднакви на $c_{\min}$. Бидејќи во редуцираната мрежа може да се создаде проток со големина $c_{\min}$, следува дека го оптоваруваме секое ребро се до неговата пропусна моќ.

Во случајот под б), очигледно редуцираната мрежа содржи внатрешно ребро. Да ја разгледаме следната трансформација на редуцираната мрежа. Земаме минимален пресек кој содржи внатрешно ребро. Забележуваме дека ни Z_{α_s} ни Z_{β_s} не се содржат во целост во тој пресек. Секое ребро $a_i = (\alpha_i, \beta_i)$ на овој пресек да го замениме со две последователно соединети ребра (α_i, γ_i) и (γ_i, β_i) (сите γ_i се нови темиња), кои имаат пропусна моќ како и реброто a_i . Потоа ги идентификуваме сите темиња γ_i , т.е. ги слеваме во едно теме γ , и наоѓаме мрежа која е претставена како последователно соединување на две подмрежи од кои секоја содржи помалку од p ребра (левата подмрежа не може да ги содржи сите ребра, трансформациите на кои во редуцираната мрежа влегуваат во Z_{β_s} , а десната подмрежа ги има истите својства во однос на Z_{α_s}). Секој прост пресек на секоја од овие подмрежи има пропусна моќ не помала од $c_{\min}$. Според тоа согласно претпоставката во секоја од овие подмрежи може да се создаде проток со големина $c_{\min}$. Дадениот проток ги оптеретува сите ребра (α_i, γ_i) и (γ_i, β_i)

до нивната пропусна моќ. Оттука е јасно дека трансформацијата на овој проток во редуцираната мрежа исто така е проток. Со тоа теоремата е докажана. ♦

2.5. Забелешка. Во редуцираната мрежа секое ребро е оптеретено со максималниот проток до својата пропусна моќ, а правецот на протокот определен со секое минимално пресекување го содржи тоа ребро. Во нередуцираните мрежи, општо кажано, максималниот проток го избираме нееднозначно, и имаме слобода во изборот на правецот на протокот по некои ребра. Сепак, при секој максимален проток во произволна мрежа S за сите прави ребра на секое минимално пресекување важи $f = c$, а за сите обратни ребра $f = 0$.

2.6. Дефиниција. Ќе велиме дека множеството елементи на мрежата, ребра и темиња, ги блокира сите вериги (сите патишта), ако тоа содржи барем по еден елемент од секоја верига (секој пат).

Множеството ребра кое ги блокира сите патишта од α_s во β_s го нарекуваме *бариера на мрежата S* .

Бариерата ја нарекуваме *проста* ако ниту едно нејзино вистинско подмножество не е бариера.

Од претходно изнесеното следува дека пресекот ги блокира сите вериги од α_s во β_s . Не е тешко да се докаже дека множеството прави ребра во прост пресек ги блокира сите патишта од α_s во β_s и дека во секој пат првото од α_s ребро на простиот пресек е право.

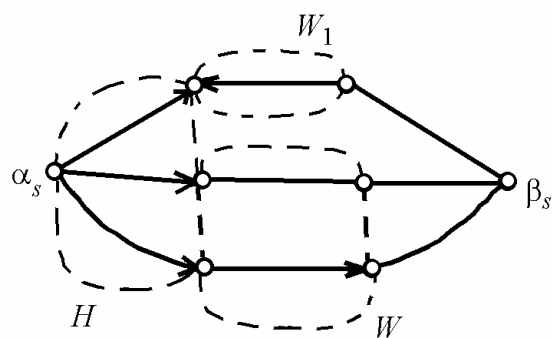
Јасно, за неориентираните мрежи поимите пресек и бариера се совпаѓаат.

2.7. Лема. Секоја проста бариера W може да се дополни до прост пресек така што сите ребра од W во тој пресек ќе бидат прави, а сите додадени ребра обратни.

Доказ. Нека H е множество темиња за кои постои пат $[\alpha_s, \alpha]$ кој не содржи ребра од W . Очигледно дека $\beta_s \notin H$. За секое ребро од W постои пат од α_s во β_s кој го содржи тоа ребро и не содржи други ребра од W , бидејќи во спротивен случај реброто можеме да го исфрлиме од W со запазување на блокирањето на сите патишта. Јасно, постои и елементарен пат со истото тоа својство. Не е тешко да се провери дека

во тој пат сите темиња кои ги среќаваме пред реброто од W припаѓаат на H , а сите темиња кои ги среќаваме после него не припаѓаат на H . Оттука следува дека почетокот на секој лак и еден од краевите на секое неориентирано ребро од W припаѓаат на H , а вториот крај на (ориентирано или неориентирано) реброто не припаѓа на H .

Понатаму нека $\alpha \in H, \beta \notin H$. Ако (α, β) е ориентирано од α кон β или неориентирано ребро на мрежата S , тогаш $(\alpha, \beta) \in W$, ако пак (β, α) е ориентирано ребро во мрежата S , тогаш согласно на претходно кажаното $(\beta, \alpha) \notin W$. Множеството на сите ориентирани ребра (β, α)



Цртеж 6

такви што $\alpha \in H, \beta \notin H$ да го означиме со W_1 . Очигледно дека во секоја верига од α_s во β_s постои ребро за кое левиот крај припаѓа на H , а десниот не. Затоа $W \cup W_1$ е пресек (може да не е прост). Прост пресек може да се добие од него (општо кажано нееднозначно) со исклучување на некои ребра, при што ниту едно ребро од W не може да биде исклучено, така што елементарниот пат во кој се јавува единствено ребро од W не содржи ориентирани ребра од видот (β, α) каде $\alpha \in H, \beta \notin H$, т.е. не содржи ни други ребра од W , ниту ребра од W_1 . Во најдениот прост пресек ребрата од W ќе бидат прави, а ребрата од W_1 ќе бидат обратни. (цртеж 6). ♦

2.8. На секоја бариера W ќе и припишеме пропусна моќ $\tilde{c}(w)$, еднаква на збирот на пропусните моќи на сите влезни во неа ребра. Од претходно докажаното следува дека на секој прост пресек соодветствува некоја бариера со иста таква пропусна моќ, а на секоја проста бариера – некој прост пресек со иста таква пропусна моќ. Значи минималната пропусна моќ $c_{\min}$ на прост пресек е еднаква на минималната пропусна моќ $\tilde{c}_{\min}$ на бариера, што значи во теорема 2.4 може да се зборува како за $c_{\min}$ така и за $\tilde{c}_{\min}$.

2.9. Нека пропусна моќ припишеме не само на ребрата, туку и на внатрешните темиња на мрежата S . Протоколот ќе го сметаме за допустлив ако за секое внатрешно

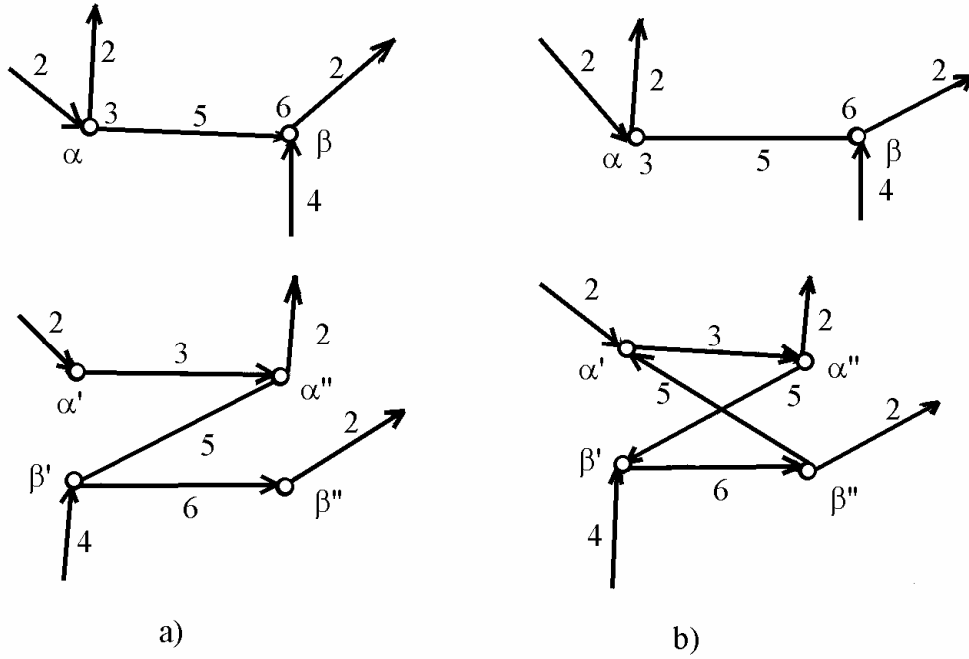
теме α на мрежата S бројот $\sum_{u \in \Gamma(\alpha)} f(u)$ (исто така и бројот $\sum_{u \in \Gamma'(\alpha)} f(u)$) не ја надминува пропустната моќ на темето α .

Теоремата 2.4 може да биде пренесена на допустливите протоци, ако разгледуваме *мешовита бариера*: множество, составено од ребра и внатрешни темиња на мрежата S кое ги блокира сите патишта од α_s и β_s . Притоа, отстранувањето на мешовитата бариера ги прекинува сите патишта од α_s во β_s , бидејќи отстранувањето на темето по себе повлекува отстранување на сите на него инцидентни ребра, се разбира ако тие не припаѓаат на мешовитата бариера. Да забележиме воедно дека мешовитата бариера воопшто зборувано не е подграф бидејќи припадноста на едно ребро во бариерата не повлекува и припадност на неговите краеве. *Пропусната моќ* $\tilde{c}(w)$ на *мешовитата бариера* W ја определуваме како збир на пропусните моќи на припадните кон неа темиња и ребра.

Теорема. Максималната големина $\tilde{R}_{\max}$ на допустливиот проток на мрежата S е еднаква на минималната пропусна моќ $\tilde{c}_{\min}$ на нејзина мешовита бариера W .

Доказ. Го заменуваме секое внатрешно теме α на мрежата S со парот темиња α' и α'' и воведуваме ребро (α', α'') ; ги запазуваме претходните полови α_s и β_s , но условуваме дека $\alpha_s = \alpha_s' = \alpha_s''$ и $\beta_s = \beta_s' = \beta_s''$; на крајот секое ребро (α, β) го заменуваме со реброто (α'', β') ако тоа е ориентирано и парот споени ребра (α'', β') и (β'', α') ако тоа е неориентирано. Во најдената (ориентирана) мрежа S' на секое ребро (α', α'') му ја припишуваме пропусната моќ на темето α , а на секој лак (α'', β') пропусната моќ на реброто (α, β) , (цртеж 7).

Најдената замена определува природно соодветствие меѓу елементите на мрежите S и S' , при кое на половите на мрежата S соодветствуваат половите на мрежата S' , а на останатите елементи на мрежата S ребра на мрежата S' , при што на неориентирано ребро на мрежата S соодветствуваат две ребра на мрежата S' . Не е тешко да се докаже дека ако некоја низа на темиња и ребра на мрежата S формира пат од темето δ во темето γ тогаш соодветната низа елементи на мрежата S' (подразбираме дека на неориентираното ребро (α, β) кое поминува во насока од α кон β во тој случај му соодветствува само реброто (α'', β')) формира пат од δ' во γ'' и обратно.



Цртеж 7

Ова соодветствие меѓу патиштата е обратно еднозначно и тоа е точно и за елементарни патишта, бидејќи на елементарен пат во S соодветствува елементарен пат во S' , и обратно. Од соодветствието меѓу патиштата во мрежите S и S' следува дека на секоја мешовита бариера W на мрежата S соодветствува бариера W' на S' и обратно, при што $\tilde{c}_{\min}(W') \geq \tilde{c}_{\min}(W)$, бидејќи на неориентираните ребра од W соодветствуваат по две ребра од W' .

Сепак во просторната бариера на мрежата S' споените ребра (α'', β') и (β'', α') истовремено не можат да влезат. Имено, нека H е множеството темиња α , за кои постои пат $[\alpha_s, \alpha]$ кој не содржи лак од проста бариера W' на мрежата S' . Тогаш исто како и во претходните разгледувања, ако $(\alpha'', \beta') \in W$ тогаш $\alpha'' \in H$, па значи и $\alpha' \in H$ (бидејќи секој пат $[\alpha_s, \alpha'']$ минува низ α') и следствено $(\beta'', \alpha') \notin W'$.

Оттука следува, дека простата бариера W' на мрежата S' соодветствува со мрежата S на мешовита бариера со пропусна моќ $\tilde{c}(W')$, а на мешовитата бариера W на мрежата S соодветствува во мрежата S' бариера, во која се содржи проста бариера со пропусна моќ не поголема од $\tilde{c}(W)$. Затоа

$$\tilde{c}_{\min}(W') = \tilde{c}_{\min}(W).$$

На крајот постои природно соодветствие меѓу допуштените протоци f во мрежата S и протоците f' во мрежата S' кое ја запазува големината на протокот.

Од една страна ако на реброто (α, β) протокот е f тогаш и на реброто (α'', β') , протокот мора да се стави еднаков на f ; ако на неориентираното ребро (α, β) протокот е еднаков на f и насочен од α кон β , тогаш на реброто (α'', β') протокот мора да се стави еднаков на f , а на реброто (β'', α') еднаков на нула. Освен тоа, на секое ребро $u' = (\alpha', \alpha'')$ мора да ставиме $f'(u') = \sum_{u \in \Gamma(\alpha)} f(u)$.

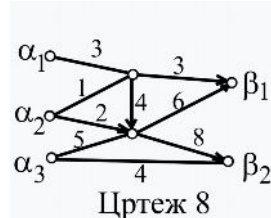
Од друга страна ако (α, β) е ребро на мрежата S и во мрежата S' на реброто (α'', β') протокот е еднаков на f' , тогаш на реброто (α, β) протокот мора да го ставиме еднаков на f' ; ако пак (α, β) е неориентирано ребро на мрежата S и во мрежата S' на ребрата (α'', β') и (β'', α') протокот е еднаков соодветно на f'_1 и f'_2 при што $f'_1 \geq f'_2$, тогаш на реброто (α, β) мора да ставиме проток еднаков на $f'_1 - f'_2$ и насока од α кон β .

Од кажаното следува дека максималната големина $\tilde{R}_{\max}$ на допуштениот проток во мрежата S е еднаква на максималната големина $R'_{\max}$ на протокот во мрежата S' . Затоа конечно имаме $\tilde{R}_{\max} = \tilde{c}_{\min}(W)$. ♦

2.10. Забелешка. Јасно, дека отсуствувањето на ограничување на пропусната моќ на некои елементи може да се смета како доволно голема пропусна моќ. Имено, во таа смисла понатаму ќе зборуваме за пропусна моќ еднаква на ∞ .

2.11. Нека мрежата S има неколку влезови $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ и неколку излези $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_e$ (цртеж 8). Треба да се определи со максимална збирлива големина

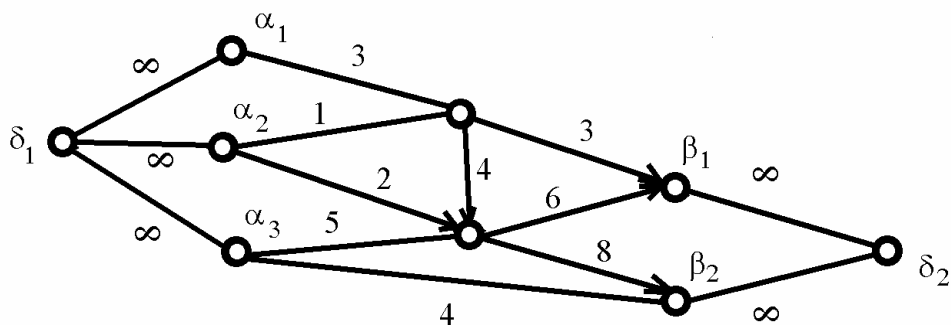
$$R_{\max}^{\Sigma} = \max \sum_{i=1}^k R(\alpha_i).$$



Теоремата 2.4 можеме да ја прошириме и на овој случај. Затоа конструираме двополова мрежа, присоединуваме кон графот S две нови темиња δ_1 и δ_2 – полови на новата мрежа

$$(\delta_1, \alpha_1), (\delta_1, \alpha_2), \dots, (\delta_1, \alpha_k), (\beta_1, \delta_2), (\beta_2, \delta_2), \dots, (\beta_e, \delta_2).$$

На новите ребра им придружуваме пропусна моќ еднаква на ∞ . (На (3,2) полносникот претставен на цртеж 8 соодветствува двополова мрежа претставена на цртеж 9).



Цртеж 9

Теорема. Максималната збирлива големина $R_{\max}^{\Sigma}$ на протокот низ многуполовата мрежа S е еднаква на минималната пропустлива моќ $\tilde{c}_{\min}$ на нејзината бариера која ги блокира сите патишта од влезот кон излезот.

Доказ. Јасно, на секој проток во многуполовата мрежа соодветствува проток со иста големина во двополовата мрежа и обратно, а бидејќи минимум пропустната моќ во двополовата мрежа се достигнува на бариера која не содржи нови ребра, тој е еднаков на $\tilde{c}_{\min}$. ♦

2.12. Теоремите 2.9 и 2.11 може да се соединат на следниов начин.

Теорема. Максималната збирна големина на допустливиот проток на многуполовата мрежа е еднаква на минималната пропустна моќ на нејзината мешовита бариера која ги блокира сите патишта од влезовите кон излезите. ♦

2.13. Забелешка. Од доказот на теорема 2.4 се гледа дека: ако пропустната моќ на сите ребра на мрежата е цел број, тогаш постои целоброен максимален проток, т.е. максимален проток, при кој по секое ребро поминува цел број единици на проток. Ова е точно и за допустливиот проток во многуполовите мрежи со целобројна пропустна моќ во сите внатрешни темиња и ребра. Последното дозволува од теорема 2.4 да се изведат важни комбинаторни последици. Да разгледаме некои од нив.

2.14. Дефиниција. Нека X и Y се две дисјунктни подмножества темиња во произволен неориентиран граф; останатите темиња на графот ги нарекуваме внатрешни. (X, Y) -*верига* ќе ја наречеме секоја верига $[v_1, v_2]$ во која $v_1 \in X, v_2 \in Y$, а сите останати темиња не се содржат ни во X ни во Y . (X, Y) -*бариера* го нарекуваме множеството ребра и внатрешни темиња на графот кое ги блокираат сите (X, Y) -вериги. *Поминувачко (директно) ребро* го нарекуваме реброто кое образува (X, Y) -верига.

2.15. Теорема. Максималниот број (X, Y) -вериги, заемно дисјунктни во внатрешните темиња, е еднаков на минималниот број елементи во (X, Y) -бариерите, составени од поминувачки ребра и внатрешни темиња на графот.

Доказ. Да го разгледаме графот како мрежа со множество влезни полови $X = \{\alpha_i\}$ и множество излезни полови $Y = \{\beta_j\}$. Кон ваквата мрежа ја применуваме теорема 2.12, ставајќи пропустната моќ на поминувачките ребра, внатрешните темиња и ребрата со двата краеви во X или во Y да е еднаква на 1, а пропусната моќ на сите останати ребра да е еднаква на ∞ . Тогаш (X, Y) -бариерата со минималната пропустна моќ ќе биде составена само од поминувачки ребра и внатрешни темиња. Јасно, нејзината пропусна моќ ќе се совпадне со бројот на нејзините елементи, што значи и со минималниот број поминувачки ребра и внатрешни темиња, кои формираат (X, Y) -бариера.

Од забелешка 2.13 следува дека во оваа мрежа може да се создаде целоброен максимално допустлив проток кој на секое ребро е очигледно еднаков на 0 или 1. Ребрата со единечен проток формираат ориентиран граф K , во кој сите темиња, освен можеби половите, се равнотежни (имаат по еден влезен и еден излезен лак). Воведуваме ново теме γ и нови лаци сврзани со нејзините полови на следниот начин: ако $R(\alpha_i) > 0$, тогаш воведуваме $R(\alpha_i)$ на лакот (γ, α_i) , а ако пак $R(\alpha_i) < 0$, тогаш воведуваме $|R(\alpha_i)|$ на лакот (α_i, γ) . Исто така, воведуваме $|R(\beta_j)|$ на лакот (γ, β_j) ако $R(\beta_j) > 0$ или на лакот (β_j, γ) ако $R(\beta_j) < 0$. Множеството нови лаци го означуваме со K' . Збирот на (по сите i) бројот на лациите од облик (γ, α_i) е еднаков на

$\sum_{R(\alpha_i) > 0} R(\alpha_i)$, а на бројот на лациите од вид (α_i, γ) е еднаков на

$$\sum_{R(\alpha_i) < 0} |R(\alpha_i)| = - \sum_{R(\alpha_i) < 0} R(\alpha_i).$$

Аналогни изрази имаме и за половите β_j . Затоа од равенството

$$\sum_i R(\alpha_i) + \sum_j R(\beta_j) = 0$$

во кое

$$\sum_i R(\alpha_i) = \sum_{R(\alpha_i) < 0} R(\alpha_i) + \sum_{R(\alpha_i) > 0} R(\alpha_i) \quad \text{и} \quad \sum_j R(\beta_j) = \sum_{R(\beta_j) < 0} R(\beta_j) + \sum_{R(\beta_j) > 0} R(\beta_j)$$

следува дека темето γ е равнотежно, што значи и целиот граф $K \cup K'$ е равнотежен. Следствено, тој може да се разбие на дисјунктни по ребрата елементарни контури. Ако контурата содржи ребро од вид (γ, α_i) , тогаш таа содржи исто така или едно ребро од видот (α_i, γ) или едно ребро од видот (β_j, γ) , но не обете ребра истовремено. Затоа бројот на контурите кои содржат истовремено ребро од вид (γ, α_i) и ребро од вид (β_j, γ) не е помал од

$$\sum_i R(\alpha_i) = \sum_{R(\alpha_i) > 0} |R(\alpha_i)| - \sum_{R(\alpha_i) < 0} R(\alpha_i),$$

т.е. не е помал од големината на максималниот проток низ почетната мрежа. Секоја таква контура определува во графот K една (X, Y) -верига, при што различните вериги не можат да имаат не само заеднички ребра, туку и заеднички внатрешни темиња, така што секое од нив во графот K се јавува како почеток (крај) на точно едно ребро.

Од друга страна, секој слог елементарни дисјунктни во внатрешните темиња (X, Y) -вериги задава допустив проток во мрежата, при што неговата големина е еднаква на бројот на веригите. Затоа максималната големина на протокот се совпаѓа со максималниот број (X, Y) -вериги, дисјунктни во внатрешните темиња. ♦

2.16. Теорема. Максималниот број (X, Y) -вериги без заеднички ребра е еднаков на минималниот број ребра, кои формираат (X, Y) -бариера.

Доказ. Ќе разгледаме исто таква мрежа како и во доказот на претходната теорема, но пропусната моќ на сите ребра да е 1, а пропусната моќ на темињата да е ∞ . Целобројниот максимален проток на секое ребро ќе биде еднаков на 0 или 1, а (X, Y) -бариерата со минимална пропусна моќ ќе биде составена само од ребра. Воведувајќи дополнително теме γ и ребра како во доказот на теорема 2.15 можеме да покажеме дека

графот $K \cup K'$ е рамнотежен. На таков начин одделуваме $\sum_i R(\alpha_i)$ на број (X, Y) -вериги без заеднички ребра, некои од кои може да имаат заеднички внатрешни темиња.

Обратно, секоја фамилија попарно дисјунктни (по ребра) (X, Y) -вериги задава допустлив проток со големина 1, следува точноста на теоремата. ♦

2.17. Теорема. Нека множеството (X, Y) -вериги е непразно. Тогаш ако секои две (не обавезно различни) (X, Y) -вериги имаат заеднички внатрешни темиња, тогаш постои внатрешно теме, заедничко за сите (X, Y) -вериги, кое го нарекуваме *разделувачко (зглобно) теме* за (X, Y) -веригите.

Доказ. Според теорема 2.15 минималниот број елементи во (X, Y) -бариерата од поминувачки ребра и внатрешни темиња во дадениот случај е еднаков на 1. Но бидејќи поминувачки ребра не може да има, единствен елемент на таквата (X, Y) -бариера ќе биде внатрешното теме, кое очигледно е разделувачко. ♦

2.18. Дефиниција. Минималниот број ребра l во веригите на двополовата мрежа S го нарекуваме *должина* на S , во ознака $l = d(\alpha_S, \beta_S)$. Минималниот број ребра t во пресеците на двополовата мрежа S го нарекуваме *ширина* на S .

2.19. Теорема. Вкупниот број ребра на мрежата S не е помал од производот на нејзините должина l и ширина t .

Доказ. Имено, нека $X = \{\alpha_S\}$ и $Y = \{\beta_S\}$. Согласно теорема 2.16 може да се изберат t дисјунктни по ребра вериги, секоја од кои содржи не помалку од l ребра. ♦

3. СИЛНО СВРЗАНИ МРЕЖИ И НЕСЕПАРАБИЛНИ ГРАФОВИ

3.1. Во натамошните разгледувања ќе се задржиме само подграфови без изолирани темиња.

Дефиниција. Два подграфа на графот G ќе ги наречеме *допирни* ако тие немаат заеднички ребра, но имаат барем едно заедничко теме, кое го нарекуваме *допирно теме*.

Темето α на подграфот H на мрежата S го нарекуваме *гранично*, ако е исполнет барем еден од условите:

1. α е пол на мрежата S
2. α е допирно теме на подграфовите H и $S \setminus H$

Подграфот на мрежата го нарекуваме *изданок*, ако тој има точно едно гранично теме. Реброто на мрежата низ кое не поминува ниту една верига го нарекуваме *холостно*. Мрежата, која содржи барем едно ребро, ја нарекуваме *силно сврзана*, ако тоа не содржи холостни ребра, т.е. ако низ секое нејзино ребро поминува верига.

3.2. Забелешка. Во сврзаната мрежа гранично теме нема само празниот подграф. Очигледно, секоја силно сврзана мрежа е истовремено и сврзана. Условите при кои сврзаната мрежа е силно сврзана ги дава следнава теорема.

3.3. Теорема. За да една сврзана мрежа S биде силно сврзана, потребно и доволно е таа да не содржи изданоци.

Доказ. Ќе докажеме дека:

1. секој изданок H на мрежата S се состои само од холостни ребра, и
2. секое холостно ребро a се содржи во некој изданок $H(a)$.

За доказ на првото тврдење да забележиме, дека ниту едно теме β на изданокот H , различно од неговото единствено гранично теме α , не може да биде пол на мрежата S (бидејќи таквото теме β исто така се јавува како гранично). Според тоа, барем еден од половите на мрежата S е различен од α и не припаѓа на H .

Ако постои верига која излегува од тој пол и која поминува низ ребро на изданокот H , тогаш таа мора прво да помине низ α . Бидејќи не е можно по втор пат да помине низ темето α , вториот пол на мрежата мора да припаѓа на H и да е различен од α . Последното противречи на претходно дадената забелешка за темето α . Следствено, секое ребро на изданокот H е холостно.

За доказ на второто тврдење ќе го разгледаме максималниот сврзан подграф $H(a)$ кој го содржи холостното ребро a и се состои само од холостни ребра.

Да претпоставиме дека $H(a)$ има не помалку од две гранични темиња. Тогаш постои елементарна верига C (познати краеве), која лежи во $H(a)$, која ги соединува таквите гранични темиња α и β и не поминува низ други гранични темиња. Темето α е инцидентно на барем едно ребро од графот $S \setminus H(a)$ и како $H(a)$ добиваме дека ова ребро не е холостно. Затоа низ α поминува во крајна мера една верига A . Слично, низ β поминува веригата B . Внатрешните темиња на веригата C не се гранични за $H(a)$, не припаѓаат ни на веригата B и на веригата A , бидејќи во спротивно веригата A или веригата B би поминувала низ холостно ребро од $H(a)$. На веригите A и B и веригата (ги знаеме краевите) C ја применуваме лема 1.3 и заклучуваме дека во мрежата S постои верига која ја содржи C како подверига, што противречи на тоа дека $H(a)$ се состои од холостни ребра.

Така $H(a)$ има помалку од две гранични темиња, но бидејќи мрежата е сврзана S и $H(a)$ не е празно тој има во крајна мера едно гранично теме, следствено $H(a)$ е изданок. ♦

3.4. Теорема. Мрежата S е силно сврзана ако и само ако проширената мрежа $\tilde{S}$ е граф таков што низ секои две ребра поминува елементарен циклус.

Доказ. Ако графот $\tilde{S}$ го поседува укажаното својство, тогаш низ изворното ребро u и произволното ребро a поминува елементарен циклус. Неговиот пресек со мрежата S е верига која го содржи реброто a .

За доказот на обратното тврдење пред се да забележиме дека од силната сврзаност на мрежата S следува дека во мрежата $\tilde{S}$ низ секое ребро a поминува елементарен циклус кој го содржи реброто u .

Нека a и b сега се две различни ребра на мрежата S , A и B се вериги во мрежата S , поминувачки соодветно низ a и b . Ако $b \in A$, тогаш $A \cup \{u\}$ е бараниот елементарен циклус. Нека $b \notin A$ и $D = [\gamma, \delta]$ е максимална подверига на веригата B која го содржи реброто b и не се сече со A никаде освен во своите краеве. Тогаш краевите γ и δ на веригата D (тие можат да бидат полови) се различни и лежат на веригата A . Нека $E = [\gamma, \delta]$ е подверига на веригата A со истите краеве како и D . Ако $a \in E$ тогаш $D \cup E$ е бараниот елементарен циклус. Ако $a \notin E$ тогаш $(A \setminus E) \cup D \cup \{u\}$ е бараниот циклус. ♦

3.5. Ќе се ограничине (како и за мрежите) на разгледување на графови без петљи.

Дефиниција. Темето α го нарекуваме *разделувачко за темињата β и γ* во графот G ако β и γ припаѓаат на една компонента на сврзаност и секоја верига $[\beta, \gamma]$ го содржи α . *Разделувачко теме за мрежата* го нарекуваме темето кое ги разделува нејзните полови.

Реброто a го нарекуваме *разделувачко* за темињата β и γ во графот G , ако β и γ припаѓаат на една компонента на сврзаност и секоја верига $[\beta, \gamma]$ го содржи реброто a . Разделувачкото ребро го нарекува исто така и *преломно (мост)* ребро.

Забелешка. Со отстранување на мост ребро се зголемува бројот на компонентите на сврзаност на графот. Секој од краевите на произволно мост ребро, со исклучок на крајните темиња на графот, е разделувачко теме. Во дрво секое ребро е мост ребро, а секое теме кое не е крајно е разделувачко.

3.6. Лема. Во секој граф има најмалку едно неразделувачко теме.

Доказ. Не е тешко да се види дека во дрво секое крајно теме не е разделувачко. Секоја компонента на сврзаност на графот може да се добие од нејзино покривно дрво со додавање на ребра. Останува да забележиме дека при додавање ребра кон сврзаниот граф, сврзувајќи ги веќе постојните темиња, темиња кои не се разделувачките не можеме да ги направиме разделувачки, бидејќи сите стари вериги се запазуваат, и само додаваме нови. ♦

3.7. Забелешка. Не е тешко да се види дека секој граф кој содржи барем едно ребро, има не помалку од две темиња кои не се разделувачки.

3.8. Дефиниција. Сврзаниот граф без разделувачки темиња го нарекуваме *несепарабилен*. Ако за секој пар темиња на графот постои елементарен циклус кој ги содржи, тогаш графот го нарекуваме *циклично сврзан*.

3.9. Постоењето во графот G на две елементарни, дисјунктни во внатрешните темиња, вериги меѓу различни темиња β и γ е еквивалентно на егзистенцијата на

елементарен циклус, кој ги содржи β и γ . Во тој случај во графот G нема теме кое ги разделува β и γ .

Нека, обратно, во сврзаниот граф G нема темиња кои ги разделуваат β и γ . Тогаш, ставајќи во теорема 2.15 $X = \{\beta\}$ и $Y = \{\gamma\}$, ќе докажеме дека во графот G постојат во крајна мера две елементарни вериги меѓу β и γ дисјунктни во внатрешните темиња, т.е. постои елементарен циклус кој ги содржи β и γ ; или соодветната бариера (X, Y) се состои од еден елемент, кој може да биде само поминувачкото ребро (β, γ) кое се јавува во графот G како мост ребро. Во последниот случај или графот G се состои од едно ребро (β, γ) или едно од темињата β или γ е разделувачко.

Претходно изнесеното може сега да се формулира на следниов начин.

Лема. За несепарабилност на графот, кој содржи повеќе од едно ребро, потребно и доволно е графот да биде циклично сврзан. ♦

3.10. Ако во циклично сврзаниот граф G како краеве на произволното ребро u се јавуваат половите, а самото ребро u како изворно ребро, тогаш очигледно мрежата $S = G \setminus \{u\}$ ќе биде сврзана. Освен тоа, во мрежата S ќе нема изданоци. Имено, ако би постоел изданок H , тогаш единственото гранично теме α на изданокот H би било во проширената мрежа $\tilde{S} = G$ единствено допирно теме на подграфовите H и $G \setminus H$, но тогаш α ќе биде разделувачко теме на циклично сврзаниот граф G , што противречи на неговата несепарабилност. Значи, мрежата S е силно сврзана. Според теорема 3.4 точна е и следнава теорема:

Теорема. Ако низ секои две темиња на графот поминува елементарен циклус, тогаш низ секои две ребра на графот исто така поминува елементарен циклус. ♦

3.11. Забелешка. Според теорема 2.16 отсуството на разделувачки ребра во сврзан граф е потребен и доволен услов да низ секои две темиња поминува прост циклус.

3.12. Дефиниција. Максималниот несепарабилен подграф на сврзаниот граф го нарекуваме *компонента на несепарабилност*.

Секој пар компоненти на несепарабилност има не повеќе од едно заедничко теме (инаку нивната унија повторно би била несепарабилен подграф, што е невозможно со обзир на нивната максималност). Според тоа сврзаниот граф го добиваме од неговите компоненти на несепарабилност слепени во некои темиња, не повеќе од едно за секој пар компоненти. Притоа компонентите на несепарабилност не образуваат „циклус“, т.е. секое теме на слепување се јавува како разделувачко за темињата од различни компоненти слепени во тие темиња,

4. КАНОНИЧНО РАЗЛОЖУВАЊЕ НА МРЕЖИ

4.1. Во овој параграф ќе ги нарекуваме мрежи силно сврзаните мрежи. Од теорема 3.3 следува дека секој нејзин непразен подграф има не помалку од две гранични темиња. Ако подграфот T на мрежата S има точно две гранични темиња, тогаш него го нарекуваме *двополова подмрежа*, а тие темиња полови на подмрежата T и ги означуваме со α_T и β_T .

Очигледно, дека едно ребро на секоја мрежа образува подмрежа. Сите мрежи исто така се јавуваат како свои подмрежи. Овие подмрежи ги нарекуваме *тривијални*.

Не е тешко да ја провериме точноста на следните тврдења:

1. Секоја верига на мрежата S , која поминува низ ребро на подмрежата T поминува низ α_T и β_T , при што нејзината подверига $[\alpha_T, \beta_T]$ е верига во мрежата T . Веригата нема со подмрежата T други заеднички елементи, освен елементите од подверигата $[\alpha_T, \beta_T]$.
2. Секоја верига на подмрежата T може да биде продолжена до верига во мрежата S .
3. Подмрежата T на силно сврзаната мрежа S е силно сврзана

Подмрежата ја нарекуваме *поминувачка*, ако нејзините полови се совпаѓаат со половите α_S и β_S на мрежата S .

4.2. Лема. Нека S_1 и S_2 се две произволни подмрежи на мрежата S , а $S_\cap$ и $S_\cup$ нејзините подграфови определени со:

$$S_{\cap} = S_1 \cap S_2 \text{ и } S_{\cup} = S_1 \cup S_2.$$

Ако $S_{\cap}$ содржи барем едно ребро, тогаш $S_{\cap}$ и $S_{\cup}$ се исто така подмрежи на мрежата S .

Доказ. Како непразни подграфови $S_{\cap}$ и $S_{\cup}$ имаат во крајна мера по две гранични темиња. Затоа доволно е да се покаже дека секој од нив има не повеќе од две гранични темиња.

Пред се ќе покажеме дека гранични темиња за $S_{\cap}$ и $S_{\cup}$ можат да бидат само половите на подмрежите S_1 и S_2 . Навистина, ако γ е гранично теме за $S_{\cap}$, тогаш тоа е инцидентно на некои ребра $a \in S_{\cap}$ и $b \in \hat{S} \setminus S_{\cap}$, каде $\hat{S}$ е проширувањето на мрежата (забелешка кон дефиницијата на граничните темиња). Тогаш $a \in S_1, a \in S_2$ а $b \in \hat{S} \setminus S_1$ или $b \in \hat{S} \setminus S_2$ и темето γ се јавува или како пол на подмрежата S_1 или како пол на подмрежата S_2 . На аналоген начин, ако γ е гранично теме за $S_{\cup}$ тогаш тоа е инцидентно на некои ребра $a \in S_{\cup}$ и $b \in \hat{S} \setminus S_{\cup}$, но тогаш $b \in \hat{S} \setminus S_1$ и $b \in \hat{S} \setminus S_2$, а $a \in S_1$ или $a \in S_2$, т.е. темето γ е пол на подмрежата S_1 или е пол на подмрежата S_2 .

Да разгледаме верига која содржи произволно ребро од $S_{\cap}$. Го наоѓаме првото, сметајќи од α_s , теме на оваа верига, кое припаѓа на $S_{\cup}$. Ова теме, според покажаното, е пол на една од почетните подмрежи, на пример, полот α_1 на подмрежата S_1 . Нека α_2 е првото теме на веригата, кое припаѓа на S_2 , т.е. еден од нејзините полови. Тогаш или $\alpha_1 = \alpha_2$ или α_2 влегува во веригата после α_1 . Во последниот случај $\alpha_1 \notin S_2$ и следствено $\alpha_1 \notin S_{\cap}$. Освен тоа, бидејќи α_2 се сретнува во веригата порано од секое ребро од $S_{\cap}$, а β_1 -вториот пол на подмрежата S_1 се сретнува после тоа ребро, заклучуваме дека α_2 е внатрешно теме на подверигата $[\alpha_1, \beta_1]$, што значи и внатрешно теме на подмрежата S_1 . Но тогаш $\alpha_2 \notin \tilde{S} \setminus S_1$ и следствено $\alpha_2 \notin \tilde{S} \setminus S_{\cup}$, т.е. α_2 не е гранично теме за $S_{\cup}$.

Така, во двата подграфови $S_{\cap}$ и $S_{\cup}$ еден од половите α_1 или α_2 не е гранично теме (или се совпаѓа со другиот). Аналогното размислување е точно за онаа верига на која се однесува првото теме, кое припаѓа на $S_{\cup}$, почнувајќи од β_s и двата други полови β_1 и β_2 на подмрежите S_1 и S_2 . Забележуваме дека α_1 и α_2 не можат да се сов-

паѓаат со кое било од темињата β_1, β_2 . На таков начин две темиња од четирите, за кои можеме да претпоставиме дека се гранични за $S_{\cap}$ (соодветно за $S_{\cup}$) или се совпаѓаат со другите две или не се јавуваат како гранични. ♦

4.3. Последица. Ако S_1 и S_2 се поминувачки подмрежи на мрежата S , тогаш $S_{\cap}$ (ако содржи барем едно ребро) и $S_{\cup}$ се исто така поминувачки подмрежи.

Доказ. Доволно да забележиме дека полови на подмрежите $S_{\cap}$ и $S_{\cup}$ можат да бидат само α_S и β_S . ♦

4.4. Нека двете мрежи S и T немаат заеднички елементи. Да замениме некое ребро $a = (\alpha_a, \beta_a)$ на мрежата S со мрежата T , т.е. да ги идентификуваме α_T и β_T со α_a и β_a и го отстрануваме реброто a . Очигледно дека при тоа одново наоѓаме силно сврзана мрежа, во која T ќе биде подмрежа. Оваа мрежа ќе ја означиме со $S_a(T)$ и ќе ја наречеме *суперпозиција* на надворешната мрежа S и внатрешната мрежа T . Разгледаната операција ја нарекуваме операција на *суперпозиција*, или *подметнување* на мрежата T наместо реброто a во мрежата S . Обратната операција, која го заклучува преминот од $S_a(T)$ во S ја нарекуваме *редуцирање* на подмрежата T во ребро a . Во истата смисла може да се разгледува *суперпозиција* на надворешната мрежа и неколку внатрешни мрежи подметнати наместо различните ребра на мрежата S , во ознака $S_{a_1, a_2, \dots, a_k}(T_1, T_2, \dots, T_k)$, а исто така редуцирање на неколку дисјунктни подмрежи.

Општо кажано, подметнувањето на мрежата T наместо реброто a може да биде остварено на два начина, во зависност од тоа, дали α_a се идентификува со α_T или со β_T . Таквите две замени ќе ги наречеме *алтернативни*. Прифатената дефиниција за суперпозиција не ја дозволува оваа можност. Во врска со ова ја воведуваме уште операцијата *превртување на подмрежата T* , зададена со преминот од суперпозиција генерирана од некое подметнување, во суперпозиција, генерирана од алтернативното подметнување. Забележуваме, дека алтернативните суперпозиции можат да се совпаѓаат, ако мрежата T има автоморфизам, преместувајќи ги половите.

Ако со ја означиме со E еднореврената мрежа (нејзиното единствено ребро го означуваме со e), тогаш за секоја мрежа ќе биде исполнето $E_e(S) = S_a(E) = S$, за било кое ребро $a \in S$. Таквата суперпозиција ја нарекуваме *тривијална*.

4.5. Во терминот суперпозиција може да се определи последователно и паралелно соединување на мрежите. Така $S_1 \bullet S_2 = s_{a_1, a_2}(S_1, S_2)$, каде s е мрежа со две ребра, претставена на цртеж 10 а). Аналогно, $S_1 \vee S_2 = p_{a_1, a_2}(S_1, S_2)$, каде p е мрежа со две паралелни ребра прикажана на цртеж 10 б). Ова може да се направи и за соединување на поголем број мрежи, ако ги воведеме во разгледаните мрежи s^n и p^n претставени на цртежите 11 а) и б). Во нив означуваме:



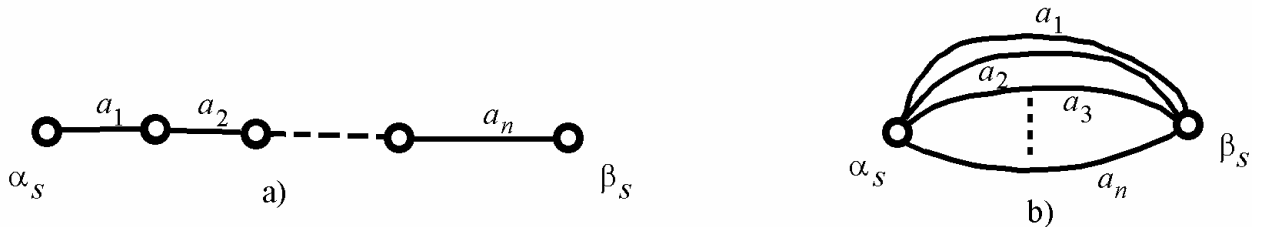
Цртеж 10

$$T_1 \bullet T_2 \bullet \dots \bullet T_n = s^n_{a_1, a_2, \dots, a_n}(T_1, T_2, \dots, T_n)$$

$$T_1 \vee T_2 \vee \dots \vee T_n = p^n_{a_1, a_2, \dots, a_n}(T_1, T_2, \dots, T_n)$$

или скратено

$$s(T_1, T_2, \dots, T_n) \text{ и } p(T_1, T_2, \dots, T_n).$$



Цртеж 11

Мрежата претставена во вид $s(T_1, T_2, \dots, T_n)$ ја нарекуваме s -мрежа, а мрежата претставена во вид $p(T_1, T_2, \dots, T_n)$ ја нарекуваме p -мрежа. Мрежата која не е ниту s -мрежа ниту p -мрежа ја нарекуваме H -мрежа.

4.6. Лема. За да мрежата S биде s -мрежа, потребно и доволно е да во S постојат разделувачки темиња.

Доказ. Очигледно дека условот е потребен.

Условот е доволен. Секоја верига $[\alpha_s, \beta_s]$ на мрежата ја разбиваме со разделувачкото теме γ на две подвериги $[\alpha_s, \gamma]$ и $[\gamma, \beta_s]$. Било кои две елементарни вериги

$[\alpha_s, \gamma]$ и $[\gamma, \beta_s]$ (кои ги наоѓаме од различни вериги) немаат други заеднички елементи освен темето γ , бидејќи во спротивен случај би постоела верига која не поминува низ темето γ . На таков начин целата мрежа ја разбиваме на две последователно соединети подвериги $S_1 = \cup[\alpha_s, \gamma]$ и $S_2 = \cup[\gamma, \beta_s]$, формирани од ребрата и темињата соодветно од првиот и вториот дел на веригите на мрежата S , т.е. $S = s(S_1, S_2)$. Јасно дека S_1 и S_2 се силно сврзани. ♦

4.7. Лема. За мрежата S да биде p -мрежа, потребно и доволно е да содржи поминувачка подмрежа, различна од целата мрежа S .

Доказ. Очигледно дека условот е потребен.

Условот е доволен. Нека S' е вистинска поминувачка подмрежа на мрежата S . Ќе докажеме дека $S = p(S', S \setminus S')$. Подграфот $S \setminus S'$ на силно сврзаната мрежа S не е празен и следствено на тоа има не помалку од две гранични темиња. Понатаму S / S' не може со S' да има допирни точки, различни од половите на подмрежата S' , т.е. од α_s и β_s . Но гранични темиња на подграфот S / S' се или половите на мрежата S или неговите со S' допирни темиња. Затоа S / S' има точно две гранични темиња α_s и β_s и е поминувачка подмрежа. ♦

4.8. Од лемите 4.6 и 4.7 следува точноста на следнава последица.

Последица. Секоја мрежа е или s -мрежа или p -мрежа или H -мрежа, при што припадноста кон еден тип ја исклучува припадноста кон другиот тип. ♦

4.9. Дефиниција А. Мрежата ја нарекуваме *разложлива*, ако таа содржи барем една нетривијална подмрежа, и *неразложлива* во спротивен случај.

Претставувањето на мрежата S во суперпозиција $S = R_{a_1, a_2, \dots, a_n}(S_1, S_2, \dots, S_n)$, каде барем една од подмрежите S_i е нетривијална го нарекуваме *разложување* на мрежата S .

Ако било која од мрежите $S_1, S_2, \dots, S_n$ или R е разложлива, тогаш нив повторно можеме да ги подложиме на разложување итн. се дотогаш додека сите составни мрежи се неразложливи. На таков начин, секоја мрежа може да биде добиена со супер-

позиција од неразложиви мрежи. Во врска со ова од интерес е стандардното, или каноничното претставување на разложивите мрежи.

Дефиниција Б. Разложувањето $S = s(S_1, S_2, \dots, S_n)$ на s -мрежата S го нарекуваме *канонично*, ако ниту една од подмрежите S_i не се јавува како s -мрежа. Разложувањето $S = p(S_1, S_2, \dots, S_n)$ на p -мрежата S ќе го наречеме *канонично*, ако ниту една од подмрежите S_i не е p -мрежа.

Ако $S = s(S_1, S_2, \dots, S_n)$ е таква како во лема 4.6, тогаш секој од $(n-1)$ -те заеднички полови $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ на подмрежите $S_1, S_2, \dots, S_n$ е разделувачко теме на мрежата S . Секое друго разделувачко теме на мрежата S лежи внатре во некоја подмрежа S_i и е за S_i разделувачко. Имено, секоја верига на подмрежата S_i е подверига на некоја верига на мрежата S и следствено го содржи секое разделувачко теме на мрежата S кое лежи во S_i . Затоа, во случај да разложувањето на s -мрежата S е канонично, никакви други разделувачки темиња освен $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ во мрежата S нема (лема 4.6).

Избираме во секоја подмрежа S_i , $(1 \leq i \leq n)$ произволна верига $A = [\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ (подразбираме дека половите на мрежата S_i ги означуваме со γ_{i-1} и γ_i при што $\gamma_0 = \alpha_s$ и $\gamma_n = \beta_s$) и да ја составиме веригата $A = A_1 A_2, \dots, A_n$. Очигледно дека A е верига во мрежата S и е разделена со темињата кои се среќаваат на неа во следниот ред: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$. Ќе докажеме дека и на секоја друга верига на мрежата S овие темиња одат во истиот тој ред. Нека допуштиме овој ред во некоја верига B да се нарушува. Нека разделувачките темиња на веригата B се во следниот редослед: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_j, \dots$ при што $j > i$ (ако $i = 1$, тогаш првото теме е γ_j). Тогаш, бидејќи делот $[\alpha_s, \gamma_j]$ на веригата B исто така, како и делот $[\gamma_j, \beta_s]$ на веригата A не го содржи темето γ_i , постои верига која не поминува низ разделувачкото теме γ_i , што е невозможно.

На крајот, секое ребро на подмрежата S_i , $(1 \leq i \leq n)$, заради силната сврзаност на S_i , припаѓа на некоја елементарна верига $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$, а секоја елементарна верига

$[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ содржи во себе елементи од S_i (во спротивно можна е конструкција на верига која не поминува низ γ_{i-1} или низ γ_i што е невозможно). Затоа $S_i = \cup[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$.

Според тоа множеството од сите разделувачки темиња на s -мрежата на единствен начин го определува нејзиното канонично разложување.

Ако $S = p(S_1, S_2, \dots, S_n)$, тогаш секоја од подмрежите S_i е поминувачка подмрежа. Од ова и од лема 4.7 следува дека во каноничното разложување на p -мрежата S ниту една подмрежа S_i не содржи поминувачка подмрежа на мрежата S , т.е. секоја поминувачка подмрежа S_i е минимална. Очигледно, дека секое ребро $a \in S$ влегува во некоја минимална поминувачка подмрежа. Бидејќи никои минимални поминувачки подмрежи на мрежата S немаат заеднички ребра, на секое ребро $a \in S$ може да му се придружи единствена минимална поминувачка подмрежа S_a на мрежата S која го содржи a . Јасно, S_a припаѓа на каноничното разложување на мрежата S . На таков начин множеството од сите минимални поминувачки подмрежи на p -мрежата на единствен начин (со точност до пермутација на подмрежи) го определува нејзиното канонично разложување.

4.10. Теорема. Нека се S_1 и S_2 произволни подмрежи на мрежата S , $S_\cap = S_1 \cap S_2$, $S_\cup = S_1 \cup S_2$. Тогаш евозможен еден и само еден од следните случаи (со точност до пермутација на S_1 и S_2):

- а) $S_\cap$ е празен подграф
- б) $S_1 \subseteq S_2$
- в) $S_\cup = p(S_1 \setminus S_\cap, S_\cap, S_2 \setminus S_\cap)$
- г) $S_\cup = s(S_1 \setminus S_\cap, S_\cap, S_2 \setminus S_\cap)$

Доказ. Претпоставуваме дека $S_\cap$ не е празен и $S_1 \not\subseteq S_2$ и $S_2 \not\subseteq S_1$ и добиваме дека се реализира еден од случаите в) или г). Нека A е произволна верига на мрежата S , која поминува низ некое ребро од $S_\cap$. Од доказот на лема 4.2 се гледа дека A поминува низ сите полови на подмрежите S_1, S_2 во следниов редослед: најпрво се сретнува првиот пол на една од подмрежите, да речеме полот α_1 на подмрежата S_1 , потоа првиот пол α_2 на S_2 , после тоа реброто од $S_\cap$ и на крајот двата други пола β_1

и β_2 на подмрежите S_1 и S_2 . Според тоа овие четири пола можат да бидат распоредени на веригата A само во еден од следните начини:

1. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_1$ и
2. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

Случај 1. S_1 е поминувачка подмрежа во $S_\cup$. Имајќи во предвид дека $S_2 \not\subset S_1$, добиваме подграфот $S_\cup \setminus S_1$ не е празен и е поминувачка подмрежа во $S_\cup$ (доказот од лема 4.7).

Бидејќи $S_\cup \setminus S_1 \subseteq S_2$, тогаш $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\beta_1 = \beta_2$. Но тогаш S_2 , а заедно со неа и $S_\cap$ и $S_\cup \setminus S_\cup$ исто така се поминувачки подмрежи во $S_\cup$. Од тука следува дека $S_\cup$ може да се претстави како паралелно соединување на поминувачките подмрежи $S_1 \setminus S_\cap, S_\cap$ и $S_2 \setminus S_\cap$, т.е. исполнет е случајот в).

Случај 2. Ќе сметаме дека сите четири полови се различни, во спротивно случајот 2) се сведува на случајот 1).

Бидејќи $\alpha_1 \notin S_2$ и $\beta_2 \notin S_1$, секоја верига $[\alpha_1, \beta_2]$ на подмрежата $S_\cup$ започнува со ребро од S_1 и завршува со ребро од S_2 . Затоа таа поминува и низ другите два пола α_2 и β_1 на подмрежите S_1 и S_2 , т.е. овие темиња се разделувачки во $S_\cup$. Оттука непосредно следува дека е исполнет случајот г), така што разделувачкиот темиња ја расчленуваат $S_\cup$ на последователно споени подмрежи: $S_1 \setminus S_\cap$ меѓу α_1 и α_2 , $S_\cap$ меѓу α_2 и β_1 , $S_2 \setminus S_\cap$ меѓу β_1 и β_2 . ♦

4.11. Дефиниција. Вистинската подмрежа S' на мрежата S ја нарекуваме *максимална*, ако не постои нетривијална подмрежа S'' таква што $S' \subset S''$.

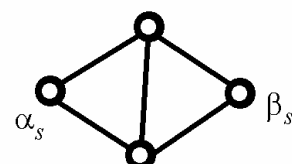
4.12. Нека се S_1 и S_2 различни максимални подмрежи на мрежата S со непразен пресек. Од лема 4.2 следува дека подграфот $S_1 \cup S_2$ е тривијална подмрежа, т.е. $S_1 \cup S_2 = S$. Значи, исполнет е еден од случаите в) или г) од теорема 4.10, т.е. S е p -мрежа или s -мрежа. Според тоа, точна е следнава последица.

Последица. Максималните подмрежи на H -мрежа се заемно дисјунктни. ♦

4.13. Ако сите максимални подмрежи на H – мрежата S истовремено ги редуцираме (ова е возможно бидејќи овие мрежи се попарно дисјунктни) тогаш наоѓаме мрежа Φ без нетривијални подмрежи, т.е. неразложива мрежа.

Дефиниција. Разложувањето на H – мрежата $S = \Phi(S_1, S_2, \dots, S_n)$ го нарекуваме *канонично*, ако $S_1, S_2, \dots, S_n$ е слогот на сите максимални подмрежи на мрежата S .

Согласно на претходно изнесеното мрежата Φ која е канонично разложување на H – мрежата е неразложива. Од дефиницијата на H – мрежата следува дека мрежата Φ е различна од мрежите s и p (цртеж 12) и има не помалку од пет ребра. Очигледно, дека секоја H – мрежа допушта единствено канонично разложување.



Цртеж 12

Во врска со разложувањето на разложивите мрежи (особено на H – мрежите) на повеќе прости претставувања од интерес е изучувањето на неразложивите мрежи. Ќе се ограничime на поедноставни факти. Со непосредна проверка можеме да се увериме во точноста на следниве тврдења:

1. Постојат само две неизоморфни разложиви мрежи со две ребра. Тоа се мрежите s и p претставени на цртеж 10.
2. Не постојат неразложиви мрежи со: 3, 4, 6 ребра.

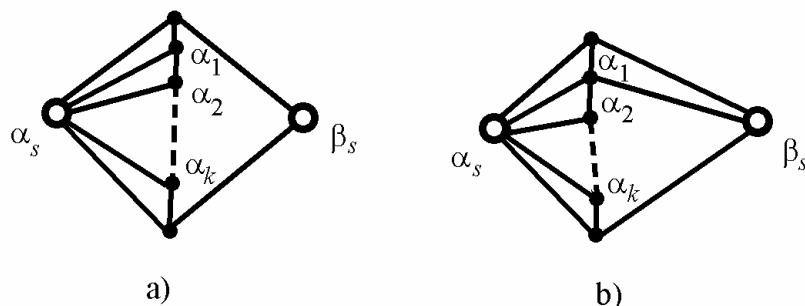
Ова лесно може да се провери ако го искористиме парот неравенствата кои ја изразуваат зависноста меѓу бројот b – темиња и бројот p – ребра во неразложивите мрежи ($p \geq 3$):

$$\frac{3b-2}{2} \leq p \leq \frac{b(b-1)}{2} - 1.$$

(Првото неравенство следува од тоа што во неразложивите мрежи при $p \geq 3$ степенот на секој пол не е помал од 2, а степенот на секое внатрешно теме не е помал од 3. Второто неравенство следува од тоа што во неразложивите мрежи при $p \geq 3$ нема паралелни ребра и нема ниту едно поминувачко ребро).

3. Постои само една неразложива мрежа со 5 ребра: мост, претставена на цртеж 12.
4. За секој $p \geq 7$ може да се конструира неразложива мрежа со p – ребра, на пример, така како што е покажано на цртеж 13 а) (за $p = 2k + 5$) и 13 б) (за $p = 2k + 6$), ($k \geq 1$).

5. Неразложивата мрежа која содржи повеќе од две ребра не може да биде s – мрежа или p – мрежа и затоа претставува H – мрежа.



Цртеж 13

4.14. На крајот од оваа глава ќе дадеме едно карактеристично својство на паралелно-последователни мрежи (Π – мрежи).

Дефиниција. Темето δ го нарекуваме *достижно* за веригата A од мрежата S ако $\delta \in A$ или за некое внатрешно теме α на веригата A постои елементарна верига $[\alpha, \delta]$ која не поминува низ половите на мрежата S .

4.15. Лема. За да една мрежа која содржи барем едно внатрешно теме биде p – мрежа потребно и доволно е да во неа постои верига A и теме δ , кое не е достижно за веригата A .

Доказ. Ако $S = p(S_1, S_2)$ и на пример S_1 содржи внатрешно теме δ , тогаш за секоја верига на подмрежата S_2 темето δ не е достижно.

Нека S_1 е подграф, распнат на множеството темиња достижни за веригата A . Јасно S_1 ги содржи двата пола α_s и β_s на S . Понатаму ако внатрешното теме на S не е достижно за A , тогаш и сите соседни со него темиња не се достижни за A .

Од тука следува дека во почетокот $S \setminus S_1$ ги содржи обата пола α_s и β_s (затоа што секоја верига поминувачка низ темето δ , недостижно за A , се состои од ребра кои не припаѓаат на S_1); и понатаму S_1 и $S \setminus S_1$ немаат допирни темиња различни од α_s и β_s . На таков начин, S_1 и $S \setminus S_1$ се поминувачки подмрежи на мрежата S и $S = p(S_1, S \setminus S_1)$. ♦

4.16. Теорема. За да мрежата S биде P -мрежа, потребно и доволно е да можеме сите ребра да ги ориентираме на таков начин, што секоја верига се јавува како пат од полот α_S во полот β_S .

Доказ. Прво да забележиме дека условот на теоремата може да се формира на следниот начин: *низ секое ребро на мрежата сите вериги поминуваат во еден правец.*

Условот е потребен. Ќе докажеме со индукција по бројот на ребрата на мрежата. За еднореврените мрежи тврдењето е очигледно.

Ако $S = s(S_1, S_2)$ тогаш секоја верига на мрежата S ја разбиваме на две подвериги, првата од кои е верига во S_1 , а втората во S_2 . Ако пак $S = p(S_1, S_2)$, тогаш секоја верига на мрежата S припаѓа исцело или во S_1 или во S_2 , и претставува верига во соодветната подмрежа. Во двата случаи потребната ориентација на ребрата на мрежата е очигледна.

Условот е доволен. За мрежите кои содржат само една верига, односно за еднореврените мрежи, тврдењето е тривијално. Затоа, доволно е да се покаже дека секоја друга мрежа S , која ги задоволува условите на теоремата, претставува или последователно, или паралелно соединување на помали (по број на ребра) мрежи.

Ќе разгледаме два случаи:

1) Секои две вериги на мрежата S имаат заедничко внатрешно теме. Тогаш според теорема 2.17, во мрежата S постојат разделувачки темиња, и од лема 4.6, S е s -мрежа

2) Постојат две вериги A и B дисјунктни во внатрешните темиња. Можеме да сметаме дека обете вериги содржат внатрешни темиња, бидејќи во спротивно едната од нив е поминувачко ребро, т.е. поминувачка подмрежа, и според лема 4.7, S е p -мрежа. Ако внатрешните темиња на веригата B не се достижни за веригата A , тогаш според лема 4.15, S е p -мрежа. Претпоставката дека внатрешните темиња на веригата B се достижни за веригата A противречи на условот. Имено во тој случај на елементарната верига која ги соединува веригите A и B , можеме да доделиме подверига $C = [\alpha, \beta]$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$ и C се пресекува со веригите A и B само во темињата α и β , при што α и β се внатрешни темиња на овие вериги. Тогаш, согласно со забелешка 1.5 постојат две вериги поминувачки во спротивните насоки низ веригата C , т.е. A, B и C ќе формираат мост. ♦

4.17. Последица. Неразложливите мрежи со повеќе од две ребра содржат мост. ♦

5. ЕДНА ПРИМЕНА НА ГРАФОВИТЕ ВО АСУ

5.1. Еден од основните проблеми кај автоматизиран систем на управување (АСУ) е обезбедувањето веродостојност на податоците во истиот. Во оваа работа ќе дадеме модел за пресметување на веродостојноста на податоците во АСУ и модел за пресметување на сложеноста на формирање на излезите. Притоа, посебна улога имаат контролните повратни врски (КПВ), со чие отстранување од ориентирираниот граф на проток на податоците се добива основниот граф на протокот на податоците, а од КПВ се конструира таканаречениот граф на КПВ.

Моделот на АСУ најчесто се претставува со помош на ориентиран сврзан граф. Притоа, самиот модел најчесто алиментира функционално разнородни потсистеми и ги вклучува растечките (од објектот на управување кон доносителот на одлуки) и опаѓачките (од доносителот на одлуки кон објектот на управување) врски, за чие претставување се користи КПВ. Меѓутоа, КПВ произлегуваат и од недоволното разбирање на податоците на единични податоци и групи податоци, кое во практиката е доста сложено, но кое моделот го ослободува од КПВ.

5.2. Во натаможните разгледувања ќе претпоставиме дека е конструиран ориентирираниот сврзан граф $G(V, U, \varphi)$ (моделот на АСУ) во кој се застапени КПВ. За графот G со n темиња, без паралелни ребра и петљи, ја конструираме матрицата на соседство $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Ставаме $G_1 = G$ и $A_1 = A$. Во матрицата A_1 сите елементи на главната дијагонала се еднакви на нула. Ја пресметуваме матрицата A_1^2 . Ако истата има ненулни елементи на главната дијагонала, тогаш според на соодветното теме му припаѓа циклус со должина 2. Ги анализираме најдените циклуси и од нив ги отстрануваме ребрата на сите повратни врски, освен контролните. Од вака најдениот граф ги отстрануваме ребрата на КПВ, кои ги внесуваме во нов граф на КПВ и во кој темињата се идентични со темињата на графот G_1 . На тој начин добиваме нов граф G_2 , со матрица на соседство A_2 . Ја пресметуваме матрицата A_2^3 . Ако матрицата A_2^3 има ненулни елементи на главната дијагонала, тогаш според теорема 11.1 [14] на соодветното теме му

припаѓа циклус со должина 3. Ја повторуваме постапката, при што ребрата на новооткриените КПВ ги внесуваме во графот на КПВ а сите ребрата на сите повратни врски ги отстрануваме од графот G_2 и добиваме граф G_3 , со матрица на соседство A_3 .

Продолжувајќи ја постапката ги пресметуваме матриците $A_3^4, A_4^5, \dots, A_{n-1}^n$, при што ги во секој чекор од новодобиениот граф ги отстрануваме повратните врски и КПВ ги внесуваме во графот на КПВ. На тој начин оперираме со три графови и тоа:

- графот G кој го нарекуваме *граф на протокот на податоците*,
- графот G_n кој го нарекуваме *основен граф* и
- графот на *КПВ*.

5.3. Забелешка. Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека темињата на графот на протокот на податоците се нумерирани така што ако $(v_i, v_j) \in U$, тогаш $j > i$ во случај кога (v_i, v_j) не е ребро на повратна врска и $j < i$ во случај кога (v_i, v_j) е ребро на повратна врска.

5.4. Веродостојност на излезните податоци. Да разгледаме граф $G(V, U, \varphi)$ во кој имаме прост циклус C_{mn} , во кој реброто (v_n, v_m) е КПВ, што значи дека во процесот на обработка на податоците темето v_m е влезно, а темето v_n е контролно. Нека веројатноста на настанот: *податоците од влезот во темето v_m до влезот од темето v_n не се деформирата*, е еднаква на q_s . Понатаму, нека веројатноста во контролното теме v_n податоците да бидат класифицирани како деформирани е еднаква на q_n . Значи, веројатноста во контролното теме v_n податоците да не бидат класифицирани како деформирани е $p_n = 1 - q_n$ и во овој случај тие излегуваат од C_{mn} и се предаваат на натамошна обработка.

Ќе ја пресметаме веројатноста на настанот: *од циклусот C_{mn} ќе бидат издадени деформирани податоци*. Јасно, при влезот во темето v_n веројатноста податоците да се деформирани е еднаква на $1 - q_s$ и со веројатност $(1 - q_s)p_n$ тие излегуваат од C_{mn} , а со веројатност $(1 - q_s)q_n$ тие преку КПВ се враќаат во темето v_m . Понатаму, веројатноста после втората обработка податоците да излезат од C_{mn} е еднаква на

$$(1-q_s)p_n[(1-q_s)q_n],$$

а веројатноста тие преку КПВ да се вратат во темето v_m е еднаква на

$$[(1-q_s)q_n]^2.$$

Сега, веројатноста после третата обработка податоците да излезат од C_{mn} е еднаква на

$$(1-q_s)p_n[(1-q_s)q_n]^2,$$

а веројатноста таа преку КПВ да се вратат во темето v_m е еднаква на

$$[(1-q_s)q_n]^3$$

итн. Од друга страна, настаните

B_i : при i – тото поминување податоците деформирани излегуваат од C_{mn} , $i = 1, 2, 3, \dots$

се по парови дисјунктни, па затоа веројатноста на настанот

B : од циклусот C_{mn} секогаш излегуваат деформирани податоци

е

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = (1-q_s)p_n + (1-q_s)p_n[(1-q_s)q_n] + (1-q_s)p_n[(1-q_s)q_n]^2 + \dots \\ &= (1-q_s)p_n \{1 + (1-q_s)q_n + [(1-q_s)q_n]^2 + \dots\} = \frac{(1-q_s)p_n}{1-(1-q_s)q_n}. \end{aligned}$$

Според тоа, веројатноста на спротивниот настан

$\bar{B}$: од циклусот C_{mn} не излегуваат деформирани податоци

е

$$\begin{aligned} q(C_{mn}) &= P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{(1-q_s)p_n}{1-(1-q_s)q_n} = \frac{1-(1-q_s)q_n - (1-q_s)p_n}{1-q_n+q_sq_n} \\ &= \frac{1-(1-q_s)(q_n+p_n)}{p_n+q_sq_n} = \frac{1-(1-q_s)}{p_n+q_sq_n} = \frac{q_s}{p_n+q_sq_n}. \end{aligned}$$

Веројатноста на настанот: податоците од влезот во темето v_m до влезот од темето v_n не се деформираат ја означивме со q_s . Јасно, оваа веројатност е еднаква на веројатноста на настанот: *податоците не се деформирата во ниту едно од темињата* $v_m, v_{m+1}, \dots, v_{n-1}$ и ако земеме во предвид дека деформирањето на податоците настанува независно во секое теме одделно, добиваме дека настаните

D_k : податоците се деформираат во темето v_k , $k = m, m+1, \dots, n-1$

се независни во целина, што значи дека и настаните $\bar{D}_k$, $k = m, m+1, \dots, n-1$ се независни во целина, па затоа

$$q_s = P\left(\bigcap_{k=m}^{n-1} \overline{D}_k\right) \prod_{k=m}^{n-1} P(\overline{D}_k) \prod_{k=m}^{n-1} q_k. \quad (1)$$

Конечно, ако замениме во претходното равенство добиваме

$$q(C_{mn}) = \frac{q_s}{p_n + q_s q_n} = \frac{\prod_{k=m}^{n-1} q_k}{p_n + \prod_{k=m}^n q_k}. \quad (2)$$

Според тоа, точна е следнава лема.

Лема. Ако веројатноста податоците да не се деформираат во v_x е еднаква на q_x и ако деформирањето на податоците е независно во секое теме, тогаш при влез во темето v_m и излез во темето v_n веројатноста $q(C_{mn})$ од циклусот

$$C_{mn} : v_m, v_{m+1}, \dots, v_{n-1}, v_n$$

да излезат податоци кои не се деформирани е дадена со формулата (2). ♦

Дефиниција. Нека C_{mn} е прост циклус во кој реброто (v_n, v_m) е КПВ. Количникот

$$J_{KPV} = \frac{q(C_{mn})}{q_s} \quad (3)$$

го нарекуваме *јачина на КПВ*.

Забелешка. а) Бидејќи $q(C_{mn})$ е веројатноста од циклусот

$$C_{mn} : v_m, v_{m+1}, \dots, v_{n-1}, v_n$$

да излезат податоци који не се деформирани, а q_s е веројатноста од влезот во темето v_m до влезот од темето v_n податоците да не се деформираат, формулата (3) всушност дава колку пати се зголемува веројатноста за добивање веродостојни податоци кога од циклусот C_{mn} ќе се отстрани КПВ, т.е. реброто (v_n, v_m) .

б) Од (1), (2) и (3) следува дека

$$J_{KPV} = \frac{1}{p_n + \prod_{k=m}^n q_k}. \quad (4)$$

в) Нека е даден графот G на протокот на податоците во АСУ. Во графот G наоѓаме прост циклус C_{mn} во кој темето v_m е влезно, а темето v_n е контролно. Кори-

стејќи ја формулата (2) ја наоѓаме веројатноста $q(C_{mn})$ и го заменуваме циклусот C_{mn} со темето v_m , на кое му доделуваме нова веројатност податоците да не се деформираат: $q'_m = q(C_{mn})$. Јасно, притоа се добива нов граф G' во кој во темето v_m ќе влегуваат сите ребра кои влегуваа и за графот G , а ќе излегуваат сите излезни ребра кои претходно излегуваа од темето v_n .

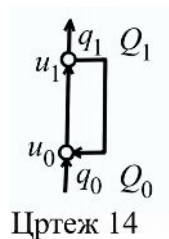
Понатаму, постапката ја повторуваме за графот G' итн. се додека не добиеме граф во кој нема да има циклуси, т.е. граф без контролни повратни врски.

5.5. Сложеност на формирање на излезите. Поимот сложеност на формирање на излезот во зависност од влезот може да се дефинира најразлично. На пример, како мерка за сложеност можеме да земеме:

- средното времетраење на формирање на излезот,
- средниот број потребни операции за формирање на излезот итн.

Јасно, ако графот не содржи циклуси, т.е. ако нема КПВ, тогаш за пресметување на сложеноста на формирање на излезот доволно е да се соберат вредностите на сложеноста за сите темиња во графот, по кои оди патот влезот до разгледуваниот излез. Меѓутоа, во случај на граф со КПВ пресметувањето на сложеноста на формирање на излезот не е можно со просто собирање на дадените вредностите на сложеност за сите темиња во графот, по кои оди патот за разгледуваниот излез.

Да го разгледаме простиот циклус прикажан на цртеж 14, при што во КПВ немаме обработка на податоци. Со Q_0 да ја означиме сложеноста на формирање на излезот од темето v_0 , а со Q_1 да ја означиме сложеноста на обработка на податоците во темето v_1 . Според лема 1 веројатноста за излез на податоци кои не се деформирани е:



Цртеж 14

$$q(C_{01}) = \frac{q_0}{p_1 + q_0 q_1}. \quad (5)$$

При првото поминување по циклусот сложеноста на формирање на излезот е еднаква на

$$Q^{(1)} = Q_0 + Q_1$$

и истата се реализира со веројатност

$$p^{(1)} = 1 - (1 - q_0)q_1.$$

Понатаму, при две поминувања по циклусот сложеноста на формирање на излезот е еднаква на

$$Q^{(2)} = 2(Q_0 + Q_1)$$

и истата се реализира со веројатност

$$p^{(2)} = [1 - (1 - q_0)q_1][(1 - q_0)q_1],$$

при три поминувања по циклусот сложеноста на формирање на излезот е еднаква на

$$Q^{(3)} = 3(Q_0 + Q_1)$$

и истата се реализира со веројатност

$$p^{(3)} = [1 - (1 - q_0)q_1][(1 - q_0)q_1]^2$$

итн. Според тоа, имаме дискретна случајна променлива

Q	$Q^{(1)}$	$Q^{(2)}$	$Q^{(3)}$	...	$Q^{(k)}$	$Q^{(k+1)}$	...
p	$p^{(1)}$	$p^{(2)}$	$p^{(3)}$	...	$p^{(k)}$	$p^{(k+1)}$	...

чие математичко очекување $E(Q)$ ја дава очекуваната вредност на сложеноста на формирање на излезот од циклусот прикажан на цртеж 1. Имаме

$$\begin{aligned}
 E(Q) &= \sum_{i=1}^{\infty} Q^{(i)} p^{(i)} = (Q_0 + Q_1)[1 - (1 - q_0)q_1] + 2(Q_0 + Q_1)[1 - (1 - q_0)q_1][(1 - q_0)q_1] + \\
 &\quad + 3(Q_0 + Q_1)[1 - (1 - q_0)q_1][(1 - q_0)q_1]^2 + \dots \\
 &= (Q_0 + Q_1)[1 - (1 - q_0)q_1] \{1 + 2(1 - q_0)q_1 + 2[(1 - q_0)q_1]^2 + \dots\} \\
 &= (Q_0 + Q_1) \frac{1 - (1 - q_0)q_1}{[1 - (1 - q_0)q_1]^2} = \frac{Q_0 + Q_1}{1 - (1 - q_0)q_1} = \frac{Q_0 + Q_1}{1 - q_1 + q_0q_1} = \frac{Q_0 + Q_1}{p_1 + q_0q_1},
 \end{aligned}$$

т.е.

$$E(Q) = \frac{Q_0 + Q_1}{p_1 + q_0q_1}. \quad (6)$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема А. Со Q_0 и p_0 , соодветно, да ги означиме сложеноста на формирање на излезот од темето v_0 и веројатноста податоците да не се деформираат во темето v_0 , а со Q_1 и q_1 , соодветно, да ги означиме означиме сложеноста на обработка на податоците во темето v_1 и веројатноста податоците да не се деформираат во темето v_1 . Тогаш,

очекуваната вредност на сложеноста на формирање на излезот од циклусот прикажан на цртеж 1 е дадена со формулата (6). ♦

Забелешка А. Ако во графот имаме прост циклус прикажан на цртеж 1, користејќи ги формулите (5) и (6) ги пресметуваме веројатноста $q(C_{01})$ и очекуваната вредност на сложеноста на формирање на излезот од циклусот и го заменуваме циклусот C_{01} со темето v_0 , на кое му доделуваме нова веројатност податоците да не се деформираат $q'_0 = q(C_{01})$ и нова сложеност на формирање на излезот $Q'_0 = E(Q)$. Јасно, притоа се добива нов граф во кој во темето v_0 ќе влегуваат сите ребра кои влегуваа и во почетниот граф, а ќе излегуваат сите излезни ребра кои претходно излегуваа од темето v_1 .

Нека графот G содржи прост циклус $C: v_0, v_1, v^*$, при што во темето v_0 е влезот, во темето v_1 се формира излезот од циклусот C , а темето v^* го означува делот од КПВ во кој се врши обработка на податоците (цртеж 2). Со q^* и Q^* , соодветно, да ги означиме веројатноста податоците да не се деформират во темето v^* и сложеноста на формирање на излезот од темето v^* .

Очекуваната вредност на сложеноста на формирање на излезот од циклусот прикажан на цртеж 2 е дадена со формулата

$$E(Q) = Q' p' + Q'' p'', \quad (7)$$

каде

- Q' е сложеноста на формирање на излезот во случај кога тој се формира непосредно по првото поминување на податоците низ темето v_0 ,
- Q'' е очекуваната вредност на формирање на излезот во случај кога тој се формира после второто, третото итн. поминување на податоците низ темето v_0 ,
- p' е веројатноста на настанот податоците ќе бидат издадени од циклусот C непосредно после првото поминување на податоците низ темето v_0 , и
- p'' е веројатноста на настанот податоците ќе биде издадени од циклусот C после второто, третото итн. поминување на податоците низ темето v_0 .

Јасно,

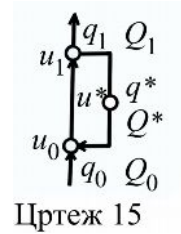
$$Q' = Q_0 + Q_1, \quad p' = 1 - (1 - q_0)q_1 \quad \text{и} \quad p'' = 1 - p' = (1 - q_0)q_1. \quad (8)$$

Да ја определиме очекуваната вредност на формирање на излезот Q'' . Прво, да забележиме дека во случај кога податоците не се издадени од циклусот C после првото поминување на податоците низ темето v_0 , темето v^* можеме да го сметаме за влезно во циклусот, при што до влезот во темето v^* сложеноста на формирање на излезот е еднаква на $Q_0 + Q_1$ и на истата треба да ја додадеме сложеноста на формирање на излезот после првото поминување на податоците низ темето v^* . Непосредно од лема 2 следува дека

$$Q'' = Q_0 + Q_1 + \frac{(Q_0 + Q_1) + Q^*}{p_1 + (q_0 q_1) q^*}. \quad (9)$$

Конечно, од (7), (8) и (9), за очекуваната вредност на сложеноста на формирање на излезот од циклусот прикажан на цртеж 15 добиваме:

$$\begin{aligned} E(Q) &= (Q_0 + Q_1)[1 - (1 - q_0)q_1] + [Q_0 + Q_1 + \frac{Q_0 + Q_1 + Q^*}{p_1 + q_0 q_1 q^*}](1 - q_0)q_1 \\ &= Q_0 + Q_1 + \frac{Q_0 + Q_1 + Q^*}{p_1 + q_0 q_1 q^*}(1 - q_0)q_1, \end{aligned}$$



т.е.

$$E(Q) = Q_0 + Q_1 + \frac{Q_0 + Q_1 + Q^*}{p_1 + q_0 q_1 q^*}(1 - q_0)q_1. \quad (10)$$

Понатаму, лесно се гледа дека веројатноста за излез на податоци која не се деформирани е:

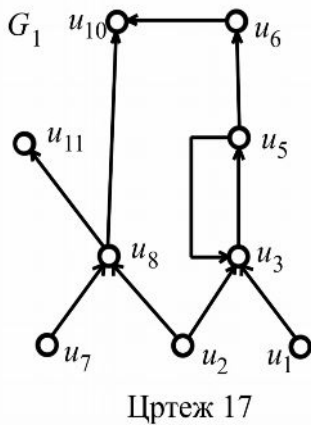
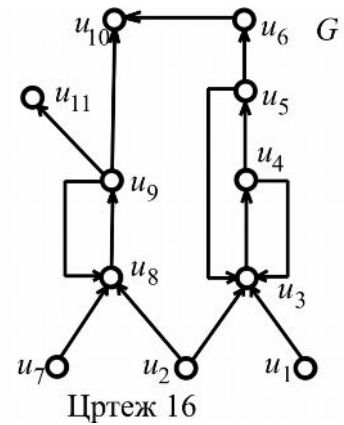
$$q(C) = \frac{q_0(p_1 + q^* q_1)}{p_1 + q_0 q_1 q^*}. \quad (11)$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема Б. Со Q_0 и p_0 , соодветно, да ги означиме сложеноста на формирање на излезот од темето v_0 и веројатноста податоците да не се деформираат во темето v_0 , со Q_1 и q_1 , соодветно, да ги означиме означиме сложеноста на обработка на податоците во темето v_1 и веројатноста податоците да не се деформираат во темето v_1 и со q^* и Q^* , соодветно, да ги означиме веројатноста податоците да не се деформираат во темето v^* и сложеноста на формирање на излезот од темето v^* . Тогаш, очекуваната вредност на сложеноста на формирање на излезот од циклусот прикажан на цртеж 2 е дадена со формулата (10), а веројатноста за излез на податоци која не се деформирани е дадена со формулата (11). ♦

Забелешка Б. Ако во графот имаме прост циклус прикажан на цртеж 15, користејќи ги формулите (11) и (12) ги пресметуваме веројатноста $q(C)$ и очекуваната вредност на сложеноста на формирање на излезот од циклусот и го заменуваме циклусот C со темето v_0 , на кое му доделуваме нова веројатност податоците да не се деформираат $q'_0 = q(C)$ и нова сложеност на формирање на излезот $Q'_0 = E(Q)$. Јасно, притоа се добива нов граф во кој во темето v_0 ќе влегуваат сите ребра кои влегуваа и во почетниот граф, а ќе излегуваат сите излезни ребра кои претходно излегуваа од темето v_1 .

5.6. Пример. Да ја разгледаме мрежата G прикажана на цртеж 16. Веројатностите q_i за оваа мрежа имаат смисла и нивното значење е претходно опишано. Оваа мрежа има три влезни пола: u_1, u_2, u_7 , два излезни пола: u_{10}, u_{11} и три циклуси K_{34}, K_{35}, K_{89} , од кои два се прости: K_{34}, K_{89} . Прво од мрежата ги отстрануваме простите циклуси K_{34}, K_{89} и ја добиваме мрежата G_1 , цртеж 17.



Во G_1 за веројатностите $q_3^{(1)}$ и $q_8^{(1)}$ добиваме

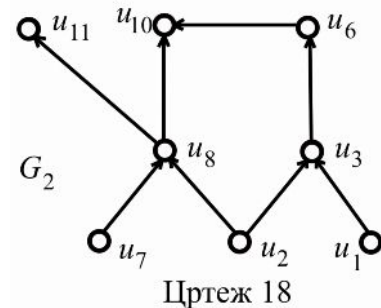
$$q_3^{(1)} = \frac{q_3}{p_4 + q_3 q_4} \text{ и } q_8^{(1)} = \frac{q_8}{p_9 + q_8 q_9},$$

а додека останатите веројатности остануваат непроменети, како и во мрежата G . Во вториот чекор, од мрежата G_1 го отстрануваме циклусот K_{35} и ја добиваме мрежата G_2 , цртеж 18. Во G_2 за веројатностите $q_i^{(2)}$ добиваме

$$q_1^{(2)} = q_1, q_2^{(2)} = q_2, q_3^{(2)} = \frac{q_3^{(1)}}{p_5 + q_3^{(1)} q_5} = \frac{q_3}{p_4 p_5 + q_3 q_4 p_5},$$

$$q_6^{(2)} = q_6, q_7^{(2)} = q_7, q_8^{(2)} = \frac{q_8}{p_9 + q_8 q_9} = q_{10}^{(2)} = q_{11}^{(2)} = q_{11}.$$

Според тоа, конструираме мрежа G_2 без циклуси во која веројатностите податоците од влезот до излезот да



не се деформираат се еднакви на производот на веројатностите податоците да не се деформираат во темињата кои се наоѓаат во веригите до излезниот пол (ако е потребна обработка на податоците во сите темиња). Така, за излезниот пол u_{10} имаме:

$$q = q_1^{(2)} q_2^{(2)} q_3^{(2)} q_6^{(2)} q_7^{(2)} q_8^{(2)} q_{10}^{(2)} = q_1 q_2 q_6 q_7 \frac{q_3}{p_4 p_5 + q_3 q_4 p_5} \frac{q_8}{p_9 + q_8 q_9} q_{10}$$

$$= \frac{q_1 q_2 q_6 q_7 q_3 q_8 q_{10}}{(p_4 p_5 + q_3 q_4 p_5)(p_9 + q_8 q_9)},$$

а за излезниот пол u_{11} имаме

$$q = q_2^{(2)} q_7^{(2)} q_8^{(2)} q_{11}^{(2)} = \frac{q_2 q_7 q_8 q_{11}}{p_9 + q_8 q_9}. \blacklozenge$$

5.7. Пример. За мрежата H , прикажана на цртеж 19 ќе ги определиме средната сложеност на формирање и веројатноста излезните податоци да не се деформирани.

Ги заменуваме простите циклуси K_{34} и K_{89} на мрежата H со темињата u_3 и u_8 и ги определуваме вредностите на q и Q за “новите” темиња u_3 и u_8 . Имаме:

$$q_3^{(1)} = \frac{q_3}{p_4 + q_3 q_4} \text{ и } Q_3^{(1)} = \frac{Q_3 + Q_4}{p_4 + q_3 q_4},$$

$$q_8^{(1)} = \frac{q_8}{p_9 + q_8 q_9} \text{ и } Q_8^{(1)} = \frac{Q_8 + Q_9}{p_9 + q_8 q_9}.$$

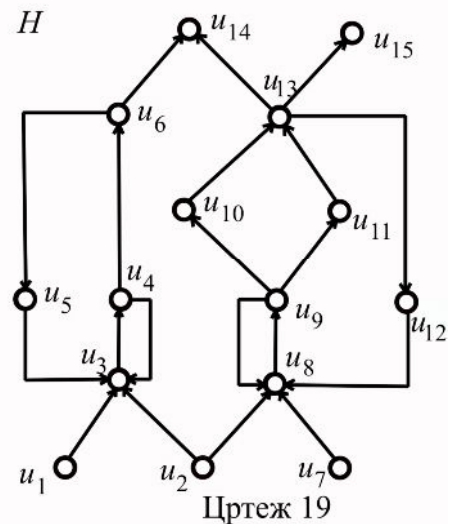
Новата мрежа H_1 , добиена со наведена смена, е прикажана на цртеж 20. Потоа ги заменуваме простите циклуси K_{36} и K_{813} на мрежата H_1 со темињата u_3 и u_8 и ги определуваме вредностите на q и Q за “новите” темиња u_3 и u_8 . Имаме:

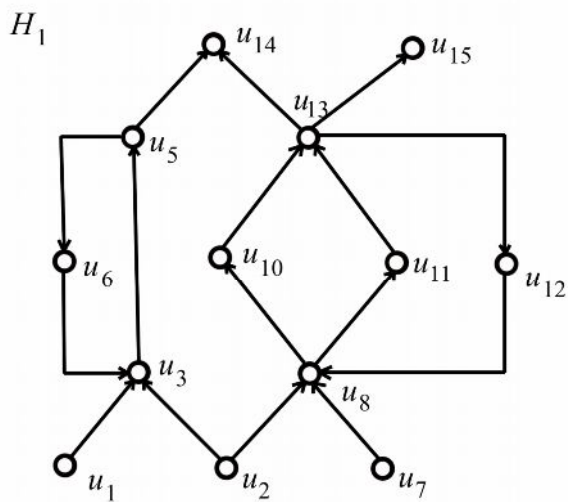
$$q_3^{(2)} = \frac{q_3^{(1)}(p_6 + q_5 q_6)}{p_4 + q_3^{(1)} q_5 q_6},$$

$$q_8^{(2)} = \frac{q_8^{(1)} q_{10} q_{11} (p_{13} + q_{12} q_{13})}{p_{13} + q_8^{(1)} q_{10} q_{11} q_{12} q_{13}},$$

$$Q_3^{(2)} = Q_3^{(1)} + Q_6 + \frac{(Q_3^{(1)} + Q_5 + Q_6)(1 - q_3^{(1)})}{p_4 + q_3^{(1)} q_5 q_6} \text{ и}$$

$$Q_8^{(2)} = Q_8^{(1)} + Q_{10} + Q_{11} + Q_{13} + \frac{(Q_8^{(1)} + Q_{10} + Q_{11} + Q_{12} + Q_{13})(1 - q_8^{(1)} q_{10} q_{11}) q_{13}}{p_{13} + q_8^{(1)} q_{10} q_{11} q_{12} q_{13}}.$$





Цртеж 20

Мрежата H_2 кој со извршените за-
мени е добиен од мрежата H_1 е прикажана
на цртеж 21. Оваа мрежа не содржи циклус,
па затоа веројатноста податоците да не се
деформирани на излезот u_{14} е еднаква на

$$q_1 q_2 q_3^{(2)} q_7 q_8^{(2)} q_{14},$$

а средната сложеност на формирање на из-
лезот е

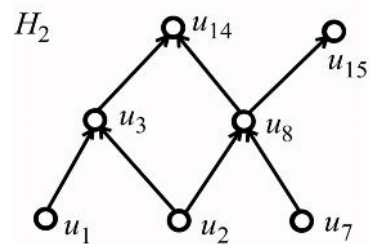
$$Q_1 + Q_2 + Q_3^{(2)} + Q_7 + Q_8^{(2)} + Q_{14}.$$

Слично веројатноста податоците да не се
деформирана на излезот u_5 е еднаква на

$$q_2 q_7 q_8^{(2)} q_{15},$$

а средната сложеност на формирање на излезот е

$$Q_2 + Q_7 + Q_8^{(2)} + Q_{15}. \blacklozenge$$



Цртеж 21

ГЛАВА III

ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА БРОЈОТ НА ГРАФОВИ И МРЕЖИ

1. ЕЛЕМЕНТАРНИ ОЦЕНКИ

1.1. При пресметување на бројот на мрежите (забележуваме дека графовите можеме да ги разгледуваме како мрежи со празно множество полови) за различни ќе ги сметаме неизоморфните мрежи (графови). Исто така, ако елементите на мрежата ги пренумерираме, тогаш различни ќе ги сметаме мрежите, кои не се преведуваат една во друга со изоморфизмот, кој ја запазува нумерацијата. Ваквите мрежи ќе ги наречеме мрежи со нумерирани темиња. Јасно, ако $\xi'(b)$ е било која конечна фамилија графови со b нумерирани темиња, а $\xi''(b)$ е фамилијата на истите тие графови со ненумерирани темиња, тогаш

$$|\xi'(b)| \geq |\xi''(b)| \geq \frac{1}{b!} |\xi'(b)|, \quad (1)$$

и во последното неравенство знак за равенството важи само ако ниту еден граф од фамилијата $\xi''(b)$ нема неидентичен автоморфизам.

За определување на бројот на графовите често пати се користи матрицата на соседство. Така, на пример, бројот на неориентирани графови со b нумерирани темиња без петљи и кратни ребра е еднаков на бројот на симетричните матрици од 0 и 1 со нула по главната дијагонала, т.е. тој е еднаков на $e^{\frac{b^2-b}{2}}$.

1.2. Нека сега σ_p е класата на неизоморфни двополови мрежи со p – ребра кои не содржат изолирани внатрешни темиња.

Лема. Нека $p \geq 1$. Тогаш $|\sigma_p| \leq (cp)^p$, каде c е некоја константа.

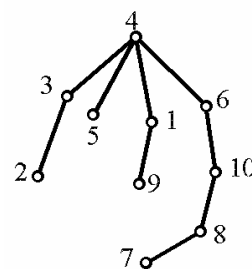
Доказ. Очигледно, бројот на темиња во секоја мрежа од σ_p не надминува $2p+2$. Ќе ги нумерираме со броевите $1, 2, \dots, 2p+2$ и ќе сметаме дека половите на мрежата се првите две од овие темиња. Секое ребро е определено со две темиња (не за-

должително различни), така што за секое ребро има не повеќе од $(2p+2)^2 \leq 16p^2$ можности, а за p -ребра не повеќе од бројот на комбинациите со повторување од $16p^2$ елементи по p -та класа, т.е.

$$|\sigma_p| \leq C_{16p^2+p-1}^p \leq \frac{(17p^2)^p}{p!} \leq \frac{(17p^2)^p e^p}{p^p} = (17e)^p = (cp)^p, \text{ каде } c = 17e. \blacklozenge$$

2. ПРЕСМЕТУВАЊЕ БРОЈ НА ДРВА

2.1. Да го разгледаме дрвото со b темиња, нумерирани со броевите $1, 2, \dots, b$. Ќе го означиме со i темето со број i . Нека i_1 е темето кое е означено со најмал број меѓу крајните темиња на дрвото; j_1 единствено теме соседно на i_1 . Ќе го отстраниме од дрвото темето i_1 и реброто (i_1, j_1) . Во остатокот од дрвото нека i_2 е одново теме кое е означено со најмал број



Цртеж 1

меѓу крајните темиња, а (i_2, j_2) е инцидентно негово ребро; го отстрануваме него итн. до тогаш кога после отстранувањето на реброто (i_{b-2}, j_{b-2}) ни остане едно ребро. Ставаме $I = (i_1, i_2, \dots, i_{b-2})$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_{b-2})$. За дрвото претставено на цртеж 1 имаме $I = (2, 3, 5, 7, 8, 9, 1, 4)$ и $J = (3, 4, 4, 8, 10, 1, 4, 6)$. Слогот $I = (i_1, i_2, \dots, i_{b-2})$, а заедно со него и слогот $J = (j_1, j_2, \dots, j_{b-2})$ го определуваме еднозначно по даденото дрво, при што во првиот слог сите темиња се различни, а вториот не мора сите темиња да се различни. Уште повеќе на секој слог $J = (j_1, j_2, \dots, j_{b-2})$ каде $1 \leq j_k \leq b$, за $k = 1, 2, \dots, b-2$ соодветствува некое дрво кое може да биде конструирано на следниов начин.

Нека i_1 е најмалиот број од $N = \{1, 2, \dots, b\}$ кој не се содржи во слогот J (тој обавезно постои, бидејќи J содржи $b-2$ броеви). Ги соединуваме со ребро темињата i_1 и j_1 и го прецртуваме бројот j_1 од слогот J , бројот i_1 од N и ја повторуваме постапката, избираме од $N_1 = N \setminus \{i_1\}$ најмал број i_2 кој не припаѓа на слогот

$J_1 = (j_2, \dots, j_{b-2})$, ги соединуваме i_2 со j_2 и го прецртуваме j_2 од слогот J_1 и i_2 од N_1 итн.

Не е тешко да се забележи дека за секој $k = 1, 2, \dots, b-2$ меѓу ребрата конструирани после k -тиот чекор нема ребра инцидентни на темето i_k и има барем едно ребро инцидентно на темето j_k . Сметајќи на ова и разгледувајќи го процесот на конструкција во обратен ред не е тешко да се покаже со индукција по k дека реално добиваме дрво, така што сега на секој чекор присоединуваме ребро со ново теме, т.е. крајно. На аналоген начин со индукција, но сега со разгледување на процесот на конструкција во правиот смер докажуваме дека на ова дрво му соодветствува еден слог J .

На крајот, на различни дрва, очигледно не може да соодветствува еден исти пар слогови: (I, J) , така што по парот (I, J) дрвото го добиваме еднозначно. Но ако $I' \neq I''$ тогаш и $J' \neq J''$ (имено: нека k е најмалиот број за кој $i_k' \neq i_k''$, да речеме $i_k' < i_k''$, тогаш i_k' не влегува во $(j_k', \dots, j_{b-2}')$, но влегува во $(j_k'', \dots, j_{b-2}'')$). Затоа за различни дрва соодветствуваат различни слогови J . Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема (Кејли). Бројот на дрвата со b нумерирани темиња е еднаков на b^{b-2} . ♦

2.2. Последица. Бројот на различни неизоморфни дрва со b темиња е поголем од $\frac{ce^b}{b^2}$, каде c е некоја константа.

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.1 и Стирлинговата формула. ♦

2.3. Забелешка. Бидејќи бројот на темиња во дрвото се разликува од бројот на ребра за единица, аналоген сооднос е точен и за бројот на неизоморфните дрва со p -ребра.

2.4. Ќе ги кодираме кореновите дрва со слогови од нули и единици по следното индуктивно правило:

I. Код на дрво кое се состои од едно ребро е слогот 01

II А. Ако дрвото има едно кореново ребро, тогаш неговиот код е слогот $0a1$ каде a е кодот на дрвото, добиено при отстранување на кореновото ребро и за корен е земен неговиот втор крај.

II В. Ако кореновите ребра се неколку, да кажеме k , тогаш можеме да сметаме дека дрвото е добиено со слепување на корените на k подрва со помал број на ребра. Ако $a_1, a_2, \dots, a_k$ се кодовите на тие подрва, тогаш слогот $a_1a_2 \dots a_k$ е кодот на целото дрво.

Очигледно, дека кај дрвото со p – ребра кодот е слог со должина $2p$, кој содржи нули и единици, при што во секој почетен дел на овој слог нули има не помалку од единици. На пример кодот на дрвото претставено на цртеж 1 има слог 001101001100001111 .

Забележуваме дека при примена на чекорот IIВ слогот a_1 е најмалиот непразен почетен интервал на слогот $a_1a_2 \dots a_k$, кој содржи ист број нули и единици, истото е точно за a_2 во однос на слогот $a_2 \dots a_k$ итн. Затоа по својот код дрвото се конструира еднозначно. Според тоа бројот $|\tau(p)|$ на неизоморфни коренови дрва со p – ребра не го надминува бројот на слоговите со должина $2p$ од нули и од единици, т.е. точно е следнава лема.

Лема. Точно е неравенството $|\tau(p)| \leq 2^{2p} = 4^p$.

2.5. Забелешка. Ако ги подредиме во секое теме α гранките на подрвото D_α и дрвата ги сметаме различни со точност до изоморфизам кој го запазува тоа подредување, тогаш претходно опишаното кодирање постанува еднозначно, а оценката се запазува.

2.6. Ќе разгледаме друг начин на кодирање на кореновите дрва, со зборови од нули и единици. Ќе го обиколуваме дрвото почнувајќи од коренот, по следното правило: ако во дадениот момент се наоѓаме во некое теме α во i – тиот радиус и од него излегува барем едно поминувачко ребро (непосредно потчинето на α) во теме со $(i+1)$ – от радиус, тогаш поминуваме во него, ако такво ребро нема, тогаш при $i > 0$

поминуваме во (единственото!) теме од $(i-1)$ – от радиус кое непосредно го потчинува темето α ; обиколката ќе ја завршине ако претходното правило е неприменливо.

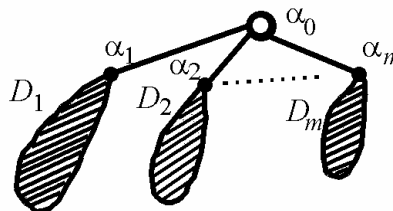
Со индукција можеме да покажеме дека:

- (1) обиколувањето завршува во коренот на дрвото после кое, низ секое ребро од дрвото поминуваме по еднаш во секој од спротивно насочените смерови, т.е. должината на поминувањето е еднаква на $2p$;
- (2) ако при тоа поминување последователно запишуваме нули и единици во зависност од тоа дали во дадениот чекор низ следното ребро поминуваме од коренот или кон коренот, тогаш определениот на крајот на поминувањето слог се совпаѓа со кодот на дрвото од претходното кодирање.

2.7. Лема. Нека $\sigma(p, m)$ е класата различни подредени системи од m коренови дрва (без заеднички елементи) кои содржат во целост p – ребра (при тоа допуштаме дрва без ребра составени од еден корен). Тогаш:

$$|\sigma(p, m)| \leq 4^{p+m}.$$

Доказ. На фамилијата дрва $(D_1, D_2, \dots, D_m)$ со корени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ му ставаме во соодветствие дрво D_0 (цртеж 2), кое го добиваме од дрвата $D_1, D_2, \dots, D_m$ ако додадеме теме α_0 , ребра $(\alpha_0, \alpha_1), \dots, (\alpha_0, \alpha_m)$ и го земеме α_0 за корен. Ова соодветствие е заемно еднозначно, ако ја земеме во предвид подреденоста на гранките во коренот. Бидејќи дрвото D_0 содржи $p+m$ ребра, бројот на различните дрва не надминува 4^{p+m} (забелешка 2.5). ♦



Цртеж 2

3. ОЦЕНКИ НА БРОЈОТ НА ГРАФОВИ И МРЕЖИ СО p -РЕБРА

3.1. Нека $\sigma(b, p, t)$ е класата од сите неизоморфни t – полносни мрежи, такви што секоја од нив да содржи по p – ребра (допуштени се петљи и кратни ребра), b –

темиња, меѓу нив t – полови, нумерирани со броевите $1, 2, \dots, t$ и во секоја сврзлива компонента барем по еден пол.

Теорема. Точно е неравенството

$$|\sigma(p, b, t)| \leq A^{p+t} b^{p-b+t}, \quad (1)$$

за некоја константа A .

Доказ. Во секоја мрежа S од $\sigma(p, b, t)$ на следниот начин одделуваме подреден систем од t коренови дрва, кои во целост ги содржат сите темиња на мрежата и имаат за корен нејзин пол.

Нека е T множество полови на мрежата S . Ќе му препишеме на секое теме α од мрежата S индекс i , $i = 0, 1, 2, \dots$ еднаков на неговото растојание до множеството T : $i = d(\alpha, T)$, (во граф растојанието од теме до некое множество темиња го определуваме како минимум од неговите растојанија до темињата на тоа множество). Множеството темиња со индекс нула е множеството T . Бидејќи секоја сврзана компонента на мрежата S содржи некој пол на секое теме од S е определен индексот.

За секое теме α со индекс i , $i \geq 1$, постои ребро (воопшто земено не единствено), кое го соединува α со теме со индекс $i - 1$ (такво ребро е инцидентно на α , кое припаѓа на најкратката верига од α до T). Ќе земеме за секое теме $\alpha \notin T$ точно едно такво ребро. Нивната унија E го дава бараниот систем од t коренови дрва.

Навистина краевите на секое од избраните ребра имаат индекси кои се разликуваат за единица. Ако претпоставиме дека E содржи елементарен циклус, тогаш темињата на циклусот, кои имаат максимални индекси, би биле инцидентни на две ребра, чии втори краеве имаат помали индекси. Меѓутоа во E секое теме со индекс i , $i \geq 1$ има точно едно соседно теме со индекс $i - 1$ и е сврзано со него со едно ребро. Понатаму, E содржи $b - t$ ребра, па затоа

$$b - t \leq p, \quad (2)$$

и затоа бројот на ребрата, кои припаѓаат на E е еднаков на $p - b + t$.

Сега секоја мрежа од $\sigma(p, b, t)$ може да биде најдена на следниот начин:

- 1) Избираме подреден систем од t – коренови дрва, кој содржи во целост $b - t$ ребра и b темиња. Според лема 2.7 тоа може да се направи на не повеќе од 4^{p+t} начини.

2) „Ги воспоставуваме“ останатите $n = p - b + t$ ребра (не е исклучено дека $n = 0$). За изборот на краевите на секое имаме не повеќе од b^2 можности. Бројот B од можностите за сите ребра не го преминува бројот на комбинациите со повторување од b^2 елементи по класа n , т.е.

$$B \leq C_{b^2+n-1}^n \leq C_{b^2+n}^n.$$

Затоа

$$|\sigma(p, b, t)| \leq 4^{p+t} C_{b^2+n}^n. \quad (3)$$

Ако $n = 0$ тогаш неравенството (1) очигледно следува од (3). Нека $n > 0$. Тогаш

1. Ако $b^2 \geq n$, тогаш од (2) следува

$$C_{b^2+n}^n \leq C_{2b^2}^n \leq \frac{(2b^2)^n}{n!} \leq \left(\frac{2eb^2}{n}\right)^n = (2e)^n \left(1 + \frac{b-n}{n}\right)^n b^n \leq 2^n e^b b^n \leq (2e)^{p+t} b^{p-b+t}.$$

2. Ако $b^2 < n$, тогаш

$$C_{b^2+n}^n < C_{2n}^n < 4^n \leq 4^{p+t}.$$

Оценката (3) и неравенствата во случаевите 1 и 2 покажуваат дека неравенството (1) е исполнето, на пример, за $A = 8e$. ♦

3.2. Последица. Бројот на неизоморфните графови, кои имаат p – ребра, b – темиња и повеќе од k – компоненти на сврзаност е помал или еднаков од

$$A^{p+k} b^{p-b+k} = A^{p+k} b^v,$$

за некоја константа A .

Доказ. Непосредно следува од теорема 3.1. ♦

3.3. Во натамошните разгледувања ќе најдеме оценки за бројот на сврзаните графови без петљи и кратни ребра. Нека е $\sigma(p, b)$ класата сврзани графови без петљи и кратни ребра, кои што содржат p ребра и b темиња. Сврзаниот граф со p – ребра не може да има повеќе од $p+1$ теме и ако $p > 0$, тогаш $b \geq 2$, па затоа

$$\sigma(p) = \bigcup_{b=2}^{p+1} \sigma(p, b).$$

3.4. Лема. Точно е неравенството

$$|\sigma(p, b)| \leq b^2 \left(\frac{e}{2}\right)^p 8^b \left(\frac{b^2}{p}\right)^{p-b}$$

Доказ. Секој граф од $\sigma(p, b)$ може да се добие од некое дрво со b темиња (покривното дрво на графот) со додавање на $p - b + 1$ ребро, слично како што е опишано во доказот на теорема 3.1. Разликата е само во тоа, што не се допуштени петљи и кратни ребра, затоа за ребрата (тетивите) кои се додаваат имаме не повеќе од $C_b^2 \leq \frac{b^2}{2}$ можности, а при пресметување за бројот B од теорема 3.1 треба да се земат класите без повторување. Оттука

$$|\sigma(p, b)| \leq 4^b C_{\frac{b^2}{2}}^{p-b+1}. \quad (4)$$

Ако е b еднаков на p или $p + 1$, тогаш лесно се проверува дека од (4) следува тврдењето на лемата. Понатаму, за $b < p$ имаме

$$\begin{aligned} C_{\frac{b^2}{2}}^{p-b+1} &< \frac{\left(\frac{b^2}{2}\right)^{p-b}}{(p-b)!} \cdot \frac{b^2}{2(p-b+1)} < b^2 \left(\frac{e}{2}\right)^{p-b} \left(\frac{b^2}{p-b}\right)^{p-b} \\ &= b^2 \left(\frac{e}{2}\right)^{p-b} \left(\frac{b^2}{p}\right)^{p-b} \left(1 + \frac{b}{p-b}\right)^{p-b} \leq b^2 \frac{e^p}{2^p} 2^b \left(\frac{b^2}{p}\right)^{p-b}. \end{aligned} \quad (5)$$

Конечно, од (4) и (5) следува тврдењето на лемата. ♦

3.5. Лема. Точно е неравенството

$$|\sigma(p)| \leq \left(\frac{2}{e} \cdot \frac{p}{\ln^2 p} \gamma_1(p)\right)^p, \text{ каде } \gamma_1(p) \rightarrow 1, \text{ кога } p \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Доказ. Од дефиницијата на $\sigma(p)$ и од лема 3.4 добиваме

$$|\sigma(p)| \leq \sum_{b=2}^{p+1} |\sigma(p, b)| \leq p \max_{2 \leq b \leq p+1} |\sigma(p, b)| \leq (p+1)^3 \left(\frac{e}{2}\right)^p \max_{2 \leq b \leq p+1} 8^b \left(\frac{b^2}{p}\right)^{p-b}. \quad (7)$$

За да го најдеме максимумот во неравенството (6) изводот по b на логаритмот го изедначуваме на нула и добиваме

$$\frac{2p}{b} + \ln p - 2 \ln b - 2 - \ln 8 = 0.$$

Ако го бараме $b_{\max}$ (единствено такво да изводот по b од левата страна на равенството е негативен) во вид $b_{\max} = \frac{2p\delta(p)}{\ln p}$, тогаш не е тешко да се покаже дека $\delta(p) \rightarrow 1$

кога $p \rightarrow \infty$, т.е. $b_{\max} \sim \frac{2p}{\ln p}$. Конечно, со замена во (7) ја добиваме оценката (6). ♦

3.6. Нека $\sigma'(p, b)$ е класата не обавезно сврзани графови со p ребра, b темиња, без петљи и кратни ребра, но, може да има изолирани темиња. Точна е следнава лема.

Лема. Точна е оценката

$$|\sigma'(p, b)| \geq \frac{1}{p!b!} \left(\frac{b(b-1)}{2} - p \right)^p.$$

Доказ. Секој граф од $\sigma'(p, b)$ е зададен со матрица на инциденција A , на која секоја колона има две единици и сите колони се различни. Во сите матрици A (за сите графови од $\sigma'(p, b)$) има $q = C_b^2$ различни колони. Затоа бројот на различните матрици е еднаков на

$$q(q-1)(q-2)\dots(q-p+1) > (q-p)^p.$$

Секој граф може да биде зададен со не повеќе од $p!b!$ различни матрици, од што следува тврдењето на лемата. ♦

3.7. Во однос на разделувачките темиња α сите останати темиња на сврзаниот граф ги разбиваме на класи на еквиваленција, ако во една класа ги вброиме сите темиња не разделени со темето α . Графот се распаѓа на графови, распнати на секоја таква класа темиња, проширена со додавање на α . Овие графови ги нарекуваме α -компоненти на графот. На пример, α -компонентите на графот, прикажан на цртеж 3 а) се претставени на цртеж 3 б).

Сите α -компоненти се сврзани и содржат барем по едно дрво. Да забележиме дека темето α во секоја од α -компонентите се јавува како неразделувачко.

Во сврзан граф $G \in \sigma(p)$ имаме не повеќе од $p+1$ теме, па затоа имаме најмногу p разделувачки темиња. Затоа ако го расчлениме графот G со ред по секое разделувачко теме α_i на α_i -компоненти, тогаш од него добиваме не повеќе од p различни графови $G' \in \sigma'(p) = \bigcup_{1 \leq b \leq 2p} \sigma'(p, b)$, (графот G' не содржи изолирани темиња;

следствено, вкупниот број на неговите темиња не надминува $2p$).

Од друга страна, секој граф G' без изолирани темиња од $\sigma'(p)$ или се совпаѓа со некој граф $G \in \sigma(p)$ или може да биде добиен од таков граф на веќе опишаниот начин (воопшто зборувано, на не единствен начин). Реално, избираме во секоја компонента на сврзаност на графот G' неразделувачко теме и ги сливаме сите избрани

темиња во едно, со што добиваме граф $G \in \sigma(p)$ од кој со расцепување по тоа теме го наоѓаме графот G' . Затоа во $\sigma'(p)$ се содржат не повеќе од $p+1|\sigma(p)|$ графови без изолирани темиња.

Од еден граф $G' \in \sigma'(p)$ без изолирани темиња добиваме не повеќе од $2p$ графови од $\sigma'(p)$ со додавање на изолирани темиња, и обратно, секој граф од $\sigma'(p)$ се добива на овој начин од граф без изолирани темиња.

Според тоа точна е следната лема:

Лема. Точна е оценката

$$|\sigma(p)| \geq \frac{1}{2p(p+1)} |\sigma'(p)|. \blacklozenge$$

3.8. Теорема. Точна е оценката

$$|\sigma(p)| = \left(\frac{2}{e} \frac{p}{\ln^2 p} \gamma(p)\right)^p, \text{ каде } \gamma(p) \rightarrow 1, \text{ кога } p \rightarrow \infty.$$

Доказ. Од лема 3.7 следува дека за секој $b \leq 2p$ важи

$$|\sigma(p)| \geq \frac{1}{2p(p+1)} |\sigma'(p, b)|. \quad (8)$$

Од (8) и лема 3.6 со примена на Стирлинговата формула имаме:

$$\ln |\sigma(p)| \geq p \ln \left(\frac{b^2 - b}{2} - p\right) - p \ln p + p - b \ln b + b - o(\ln p) + o(\ln b)$$

Ставаме $b = \left\lfloor \frac{2p}{\ln p} \right\rfloor$. Тогаш

$$b = \frac{2p}{\ln p} (1 + o(1)),$$

$$\ln b = \ln p (1 + o(1)),$$

$$b \ln b = 2p (1 + o(1)),$$

$$\ln \left(\frac{b^2 - b}{2} - p\right) = 2 \ln p - 2 \ln \ln p + \ln 2 + o(1),$$

$$\ln |\sigma(p)| \geq p (\ln p - 2 \ln \ln p + \ln 2 - 1 + o(1)),$$

од што следува

$$|\sigma(p)| \geq \left(\frac{2}{e} \frac{p}{\ln^2 p} \gamma_2(p)\right)^p, \text{ каде } \gamma_2(p) \rightarrow 1 \text{ кога } p \rightarrow \infty.$$

Конечно, тврдењето на теоремата следува од последното неравенство и лема 3.5. $\blacklozenge$

ГЛАВА IV

БОЕЊЕ НА ГРАФОВИ

1. ХРОМАТСКИ БРОЈ И ХРОМАТСКА КЛАСА

1.1. Дефиниција. За темето (соодветно реброто) на неориентираниот граф G без петљи ќе велиме дека е *правилно обоено*, ако на секое теме (соодветно на секое ребро) од графот му е придружена точно една од зададената гарнитура бои, при што на секои две соседни темиња (соодветно гранични ребра) му се придружени различни бои.

Графот, на кој темињата или ребрата се правилно обоени, ќе го нарекуваме *правилно обоен*, ако од контекстот е јасно, како елементите на графот ги боиме или тоа е сеедно.

1.2. Забелешка. а) Очигледно, секој подграф на правилно обоен граф е исто така правилно обоен.

б) Понатаму, заради практични причини боите ќе ги нумерираме со природните броеви $1, 2, \dots$. Множеството природни броеви од 1 до k ќе го означуваме со N_k .

Може да се каже дека правилното боење на темињата (соодветно ребрата) на графот е функција со вредности во множеството природните броеви, определена на множеството темиња (соодветно ребра), која прима различни вредности на краевите на секое ребро (соодветно на ребрата на секоја звезда) на графот.

1.3. Интересна и важна задача е определувањето на најмалиот број $\chi(G)$ (соодветно $\chi'(G)$) од различни бои, со помош на кои правилно можат да се обојат темињата (соодветно ребрата) на графот G .

Бројот $\chi(G)$ го нарекуваме *хроматичен број*, а бројот $\chi'(G)$ *хроматична класа* на графот G .

Во натамошните разгледувања ќе најдеме оценки на броевите χ и χ' , при што ќе користиме некои параметри на графот G . Притоа, доволно е да ги разгледуваме

сврзаните графови, бидејќи за несврзаните графови задачата се сведува на независно боење на одделните компоненти на сврзаност.

2. БОЕЊЕ НА ТЕМИЊА

2.1. Во овој дел ќе ги разгледуваме графовите без петљи и кратни ребра, бидејќи присутноста или отсуствувањето на кратни ребра воопшто не влијае на правилното боење на графот. Да забележиме дека подграфот распнат на множеството еднакво обоени темиња, при правилно боење на графот не содржи ребра.

Очигледно дека за секој граф G со b темиња важи $\chi(G) \leq b$, при што равенството се достигнува само за комплетен граф. Од друга страна, ако во графот има барем едно ребро тогаш $\chi(G) \geq 2$.

2.2. Дефиниција. За графот ќе велиме дека е *2-хроматски* (*бихроматски*) ако $\chi(G) = 2$.

Јасно, дека бихроматскиот граф е биполарен и обратно, секој двостран граф кој содржи барем едно ребро е бихроматичен.

2.3. Теорема. Графот G кој содржи барем едно ребро е бихроматски ако и само ако тој не содржи елементарен циклус со непарна должина.

Доказ. Бидејќи во циклусот при правилно боење мора да се менуваат, темињата на циклусот со непарна должина не можат да бидат правилно обоени во две бои и следствено графот кој ги содржи не може да биде бихроматски.

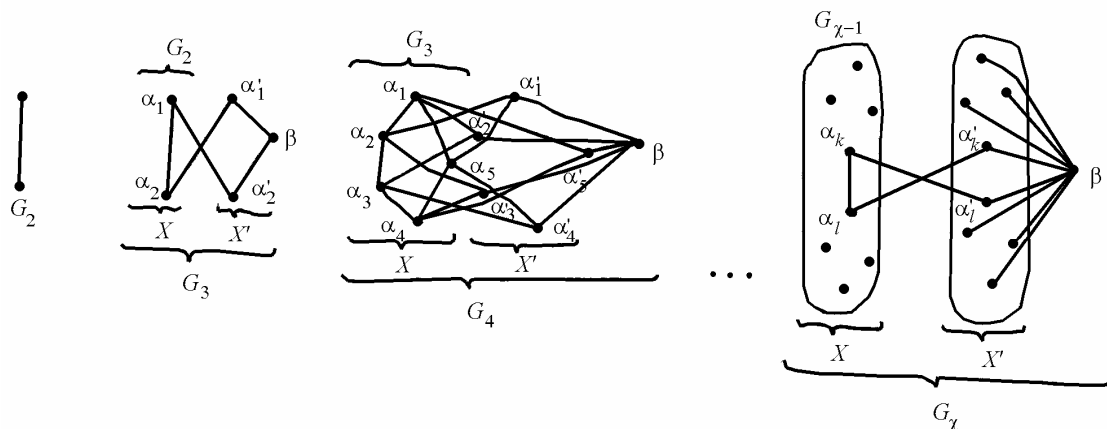
Обратно, пред се да забележиме дека дрвото е бихроматски граф. Јасно, доволно е да ги обоиме темињата со парен парен радиус во една боја, а темињата со непарен радиус во друга боја. Ова боење е правилно бидејќи ребро во дрво соединува само темиња со радиуси со различна парност.

Ќе разгледаме сега елементарна верига којашто соединува во дрвото теме од i -тиот и теме од j -тиот радиус. Со секое нејзино ребро се случува промена на бројот на радиусот за единица. Затоа нејзината должина ја има истата парност како и бројот $i - j$. Јасно, темињата кои припаѓаат на радиуси со еднаква парност се сврзани со елементарна верига со парна должина.

Ако сега во графот G кој не содржи елементарен циклус со непарна должина, избереме произволно покривно дрво, тогаш ребрата кои се тетиви на покривното дрво ќе сврзуваат темиња од радиуси со различна парност (во спротивно графот G ќе има елементарен циклус со непарна должина), што значи дека двобојното правилно боење на покривното дрво ќе биде правилно боење и на графот G . ♦

2.4. Ако полниот граф K_χ е подграф на графот G , тогаш неговиот хроматичен број очигледно не е помал од χ . Спротивното тврдење, очигледно не е точно. Постои граф G_χ кој како подграф не го содржи полниот граф K_3 и кој има произволно голем хроматичен број χ .

Графот G_χ ќе го конструираме индуктивно. G_2 се состои од едно ребро. Нека е $G_{\chi-1}$ веќе конструиран и неговото множество на темиња е $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_b\}$. Додаваме на $G_{\chi-1}$ множество темиња $X' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_b\}$ и дополнително теме β . Воведувајќи ребра кои го сврзуваат секое теме α'_i со β , а исто така со сите темиња од X соседни во $G_{\chi-1}$ со α_i (цртеж 1).



Цртеж 1

Ќе докажеме дека најдениот граф G_χ не содржи подграф K_3 . Според индуктивната претпоставка нив ги нема во $G_{\chi-1}$. Бидејќи темињата од множеството X' не се сврзани едно со друго, триаголникот не може да има повеќе од едно теме од X' , а исто така не може да го содржи темето β , бидејќи β е сврзана само со темињата од X' . На крајот ако постои триаголник $[\alpha_i, \alpha_j, \alpha'_k]$, тогаш бидејќи α_k и α'_k имаат во X

едни и исти соседни темиња ќе постои и триаголникот $[\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k]$, што противречи на индуктивната претпоставка.

Сега ќе докажеме дека $\chi(G_\chi) = \chi$. Очигледно дека $\chi(G_2) = 2$. Нека претпоставиме дека $\chi(G_{\chi-1}) = \chi - 1$. Тогаш G_χ можеме правилно да го обоиме со χ бои: на пример, може да се обои $G_{\chi-1}$ со $\chi - 1$ боја од $N_{\chi-1}$, а после тоа секое теме α'_i од X' да се обои во бојата на темето α_i , а темето β во нова боја χ .

Останува да се докаже дека G_χ не може правилно да се обои со $\chi - 1$ боја. Да го претпоставиме спротивното. Нека во графот G_χ правилно обоен со $\chi - 1$ боја, темето β е обоено во бојата χ . Тогаш темињата на множеството X' се обоени во бои различни од χ . Нека $A \subseteq X$ е подмножество темиња обоени во бојата χ . Секое теме $\alpha_i \in A$ ќе го пребоиме во боја, со која е обоено соодветното теме α'_i . После тоа, темињата на подграфот $G_{\chi-2} \subseteq G_\chi$ ќе бидат обоени со $\chi - 2$ бои, при што, како што ќе видиме соседните темиња ќе бидат обоени во различни бои. Имено: нека (α_i, α_j) е произволно ребро од графот $G_{\chi-1}$. Јасно дека во графот G_χ темињата α_i и α_j ќе бидат обоени во различни бои. Затоа тие не можат едновременно да припаѓаат на множеството A . Ако $\alpha_i \notin A, \alpha_j \notin A$, тогаш при пребојувањето нивното обојување не се менува. Ако пак $\alpha_i \in A, \alpha_j \notin A$, тогаш после пребојувањето тие по претходното обојување се различни, бидејќи во G_χ постои ребро (α'_i, α_j) и следствено темињата α'_i и α_j се обоени во различни бои. Според тоа, претпоставката не доведува до заклучокот дека постои правилно боење на графот $G_{\chi-1}$ во $\chi - 2$ бои, што противречи на индуктивната претпоставка.

2.5. Коментар. Ќе разгледаме како е сврзан хроматичниот број со степените на темињата на графот. Да го означиме со $s(G)$ максималниот од степените на темињата на графот G , а со Γ_s класата на графови без кратни ребра за кои $s(G) \leq s$.

Не е тешко да се докаже, со индукција по бројот на темиња, дека ако $G \in \Gamma_s$ тогаш $\chi(G) \leq s + 1$. Имено, ако бројот на темињата во графот е помал или еднаков на

$s+1$, тогаш тврдењето е тривијално. Нека сега тврдењето важи за сите графови од Γ_s , кои имаат помалку темиња од графот G . Ја отстрануваме од G свездата на произволно теме α и согласно со индуктивната претпоставка правилно го боиме графот $G \setminus Z_\alpha$ со $s+1$ боја. Во графот G на темето α не се повеќе од s соседни, па затоа во N_{s+1} постои барем една боја со која не е обоено ниту едно теме соседно со α . Таа боја може да се искористи за обојување на темето α , после што графот G ќе биде правилно обоен со $s+1$ боја.

Комплетниот граф K_{s+1} , кој има $s+1$ припаѓа на Γ_s и има хроматски број $s+1$. Во следната теорема ќе докажеме дека овој граф е единствен.

2.6. Нека $G \in \Gamma_s$ и нека е зададено произволно правилно боење на темињата на графот G во некој број бои (може да биде и поголем од $\chi(G)$). Одделуваме произволно теме i_0 и излезната од него елементарна верига $[i_0, i_1, \dots, i_n]$.

Ќе докажеме, дека може така да се измени обојувањето на темињата од веригата $[i_0, i_1, \dots, i_n]$, без да се менува обојувањето на останатите темиња на графот, така што секое теме од оваа верига, со исклучок можеби на темето i_0 , ќе биде обоено во една од боите N_s , а боењето на графот останува правилно.

Последователно ќе го менуваме обојувањето на темињата на веригата во насока од темето i_n кон темето i_0 . Графот G содржи не повеќе од s темиња соседни со i_n , а од нив не повеќе од $s-1$ се различни од i_{n-1} . Очигледно дека во N_s се наоѓа боја со која не е обоено ниту едно од тие темиња. Со неа ќе го обоиме темето i_n (при тоа може да излезе дека i_n ќе обоено во истата боја како и i_{n-1}). Понатаму, графот G содржи не повеќе од $s-1$ теме, соседни со i_{n-1} и различни од i_{n-2} . Јасно, дека i_{n-1} може да се обои во боја од N_s , различни од биоте на овие темиња. Аналогно ќе постапиме со темињата i_{n-2} , i_{n-3} итн. На крајот од процесот темето i_0 евентуално можеме да го обиме со боја која не припаѓа на N_s . Целиот процес ќе го наречеме обојување на темето i_n од темето i_0 по веригата $[i_0, i_1, \dots, i_n]$.

2.7. Теорема. Нека $s \geq 3$ и $G \in \Gamma_s$. Ако $G \neq K_{s+1}$, тогаш $\chi(G) \leq s$.

Доказ. Јасно, дека работејќи на последователно обојување на сите темиња на графот $G \in \Gamma_s$ од некое теме σ добиваме правилно боене на графот G , при кое сите темиња, освен можеби темето σ , се обоени со бои од N_s . Ако G содржи барем едно теме σ со степен помал од s тогаш работејќи на обојувањето на сите темиња од σ , можеме да го обоиме и σ со една од боите од N_s , што ја докажува теоремата во овој случај.

Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека сите темиња на графот G имаат степен s и доказот ќе го изведеме со индукција по бројот b темињата на графот G . Ако $b \leq s$, тогаш тврдењето на теоремата е очигледно. Нека сега теоремата е точна за сите графови со број на темиња помал од b , ($b > s$).

Можеме да сметаме дека графот G е несепарабилен. Имено, сепарабилен граф може да се претстави како слепување, во едно теме на два графа со помал број темиња. Овие графови со помал број темиња според индуктивната претпоставка можат правилно да се обојат со бои од N_s . Во еден од нив можеме да ги преименуваме боите така што темето на слепување δ ќе биде обоено со иста боја и во двата графа. Тогаш и обојувањето на целиот граф ќе биде правилно.

Бидејќи $G \neq K_{s+1}$, во графот G постојат две несоседни темиња α и β . Ќе ги обоиме сите темиња на графот G почнувајќи од темето α , при што темето β ќе биде обоено во боја од N_s . Сите s соседни со него темиња исто така ќе бидат обоени во боја од N_s , при што во бои различни од бојата на β . Затоа, меѓу нив постојат две темиња, нека тоа се γ и δ , обоени во една боја. Јасно дека γ и δ не се соседни, т.е. графот G не го содржи реброто (γ, δ) .

Ако во графот G постои верига $[\beta, \alpha]$, која не го содржи ниту γ ниту δ , тогаш обојувајќи го темето α од темето β по таа верига, можно е потоа да се пребои β во било која боја од N_s , така што помеѓу s -те соседни темиња на β двете темиња γ и δ , според претходното боене, се еднакво обоени. Така добиваме правилно обојување на графот во s бои.

Останува да го разгледаме случајот кога секоја верига $[\beta, \alpha]$ поминува низ γ или δ , т.е. кога темињата γ, δ се бариера во мрежата G со полови α и β . Нека V_1 е множество темиња на графот G сврзани со α , со вериги кои не го содржат како внатрешно теме ниту γ ниту δ ниту. Од несепарабилноста на графот G следува дека

$\gamma, \delta \in V_1$ (во спротивно сите вериги $[\beta, \alpha]$ ќе поминуваат низ едно од овие темиња). Нека H_1 е подграф распнат на V_1 , а $H_2 = G \setminus H_1$. Очигледно дека H_1 и H_2 се граничат во темињата γ и δ , при што степенот на темињата γ и δ во овие подграфови е позитивен и не го надминува $s-1$. Да забележиме исто така дека $\alpha \notin H_2$, а $\beta \notin H_1$.

Нека H_1^+ и H_2^+ се графови добиени соодветно од H_1 и H_2 со додавање на реброто (γ, δ) . Ако ниту H_1^+ ниту H_2^+ не се совпаѓаат со K_{s+1} , тогаш според индуктивната претпоставка $\chi(H_1^+) \leq s$ и $\chi(H_2^+) \leq s$. Притоа при правилно боење во графовите H_1^+ и H_2^+ темињата γ и δ ги обојуваме во различни бои. Со пренумерирање на боите, на пример во H_1 , можеме да добиеме темињата γ и δ бидат обоени во H_1 , во истите бои како и во H_2 , а потоа со нивно слепување добиваме правилно обојување на графот G .

Нека сега барем еден од графовите, на пример H_1^+ , се совпаѓа со K_{s+1} . Тогаш степенот на темињата γ и δ во подграфот H_1 е еднаков на $s-1$, а следствено во подграфот H_2 е еднаков на 1. Така $\chi(H_1^+) = s+1$, меѓутоа $\chi(H_1) \leq s$. Тоа означува дека при секое правилно обојување на подграфот H_1 со s бои темињата γ и δ добиваат иста боја. Во графот H_2^* добиен од H_2 со слепување на темињата γ и δ и кратните ребра, кои можат притоа да се појават, слепувањето на темињата има степен не поголем од 2, а сите останати степени се не поголеми од s . Следствено H_2^* не се совпаѓа со K_{s+1} и според индуктивната претпоставка $\chi(H_2^*) \leq s$. Ова покажува дека H_2 може правилно да се обои со s бои, при што γ и δ ќе имаат еднаква боја. Сега е јасно дека H_1 и H_2 можат да бидат слепени со добивање на правилно обојување. ♦

3. БОЕЊЕ НА РЕБРА

3.1. Во овој параграф ќе ги разгледуваме графовите без петљи (можат да бидат со кратни ребра). Функцијата, инверзна на функцијата на инциденција φ , која на секој пар темиња од графот му придружува инцидентно ребро, се јавува во општ случај,

повеќе значајна. Множеството нејзини значења за дадениот пар темиња образува сноп паралелни, или кратни ребра. Бројот на ребрата во снопот на (α, β) го нарекуваме кратност на реброто (α, β) . Граф без кратни ребра е оној граф на кој кратноста на сите ребра е не поголема од 1. Графот кој содржи кратни ребра го нарекуваме *мултиграф*.

Ќе зборуваме за *правилно непотполно обојување на графот*, ако е обоен само дел од неговите ребра и подграфот образуван од сите обоени ребра е правилно обоен.

За една боја од даден слог бои ќе велиме дека *отсутствува* во темето α , ако таа при зададено (може и непотполно) боене на графот не соодветствува на ниту едно ребро од Z_α . Множеството бои кои отсутствуваат во темето α ќе го означиме со M_α и $M_\alpha \cap M_\beta$ ќе го означиме со $M_{\alpha\beta}$.

Фамилијата графови, за кои $s(G) = s$ ќе го означиме со Δ_s (да напомниме дека кратните ребра овде се допуштени). Тривијална оценка на хроматичната класа за графот $G \in \Delta_s$ е дадена со неравенствата

$$s \leq \chi'(G) \leq 2s - 1.$$

Првото неравенство е очигледно, а второто следува од следниот начин на боене. Бидејќи секое ребро од графот $G \in \Delta_s$ има најмногу $2s - 2$ гранични, ребрата може да се обојат едноподруго така што секое ребро се обојува во било која од боите кои отсутствуваат во моментот на обојување на реброто во двата негови краеве. Оваа горна оценка на хроматичната класа за графовите од Δ_s ќе биде подобрена во натамошните разгледувања.

3.2. Нека ребрата на графот се правилно обоени и нека x и y се две различни бои. *Двобојна (x, y) верига* ја нарекуваме елементарната верига која се состои од ребра во графот обоени во боите x и y . Разбирливо боите x и y на таква верига се сменуваат. Двобојната верига може, особено, да се состои од едно теме, од едно ребро или да биде елементарен циклус. Пребојување на (x, y) веригата го нарекуваме истовремено пребојување на сите ребра со боја x во боја y и обратно сите ребра со боја y во боја x . (x, y) веригата ја нарекуваме *максимална* ако таа не се јавува како вистински дел на ниту една (x, y) верига. Не е тешко да се докаже дека две максимални (x, y) вериги (со еден ист пар бои x и y) не можат да имаат заеднички темиња. Оттука следува дека пребојувањето на секоја максимална двобојна верига на секој правилно обоен граф не

ја нарушува неговата правилна обоеност. Ако притоа γ е внатрешно теме на максималната (x, y) верига A (во случај кога A е циклус, сите темиња на циклусот A се внатрешни) или $\gamma \notin A$, тогаш M_γ не се менува при пребојување на веригата A . Ако пак γ е крај на максималната (x, y) верига A , која содржи барем едно ребро, тогаш во M_γ една од боите се заменува при пребојувањето со другата.

3.3. Лема. Нека α, β, γ се три различни темиња на правилно обоениот граф, при што во секое од нив отсуствува барем една од двете различни бои x и y . Тогаш барем едно од овие темиња не е сврзано ниту со едно од двете останати со (x, y) верига.

Доказ. Ако, на пример темето α е сврзано со темето β со (x, y) верига, тогаш очигледно таа верига е максимална. Затоа ако е и γ сврзано со (x, y) верига со α или β тогаш во графот би постоеле две различни максимални вериги, кои имаат заедничко теме, што не е можно. ♦

3.4. Нека имаме некое, може да биде и непотполно, боење на графот G и нека β е некое негово теме. Низата различни ребра $u_k = (\beta, \delta_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$ инцидентни на темето β (темињата δ_k се не задолжително сите различни) ја нарекуваме n -лепеза при темето β , ако обојувањето на реброто u_0 е произволно (во краен случај, тоа може воопшто да не е обоено), а за боите j_k , $k = 0, 1, \dots, n$ на останатите ребра (реброто u_k е обоено во бојата j_k) и некоја боја j_{n+1} се исполнети условите:

1. $j_k \in M_{\delta_{k-1}}$, $k = 1, 2, \dots, n+1$
2. Ако реброто u_n е паралелно со реброто u_k , $k = 0, 1, \dots, n$, тогаш $j_{n+1} \neq j_{k+1}$

Од дефиницијата на лепеза следува дека $j_k \neq j_l$ ако $k \neq l$, $(k, l = 1, 2, \dots, n)$. Бојата j_{n+1} може да се совпадне (не повеќе од) со една од претходните. Освен тоа $\delta_k \neq \delta_{k-1}$. Отсечок од лепезата $u_k, u_{k+1}, \dots, u_l$ исто така образува лепеза $(0 \leq k < l \leq n)$. Лепезата ќе ја наречеме *затворена* ако дополнително е исполнет условот:

3. $j_{n+1} \in M_{\delta_0}$; $\delta_n \neq \delta_0$

3.5. Нека е H множество обоени ребра од графот G .

Лема. Ако во графот G постои n -лелеза при темето β и $M_{\beta\delta_k} \neq \emptyset$ за некој $k = 0, 1, 2, \dots, n$, тогаш постои такво пребојување на ребрата, како резултат на кое правилно ќе биде обоен подграфот $H \cup \{u_0\}$, при што реброто u_0 ќе биде обоено во бојата j_1 или во некоја боја $m \in M_\beta$.

Доказ. Реброто u_k може да се обои во боја $m \in M_{\beta\delta_k}$ и во случај $k = 0$ лемата е докажана.

Ако $k > 0$, тогаш може потоа да се обои реброто u_{k-1} со ослободената боја j_k итн., т.е. секое ребро u_l , $l = 0, 1, 2, \dots, k-1$ да се обои во бојата j_{l+1} . Јасно, дека при тоа тврдењето на лемата ќе биде исполнето. ♦

3.6. Лема. Ако во графот G постои затворена лелеза при темето β и $M_\beta \neq \emptyset$, тогаш постои такво пребојување на ребрата, како резултат на кое правилно ќе биде обоен подграфот $H \cup \{u_0\}$, при што реброто u_0 ќе биде обоено во бојата j_1 или j_{n+1} или во некоја боја $m \in M_\beta$.

Доказ. Заради лема 3.5 доволно е да го разгледаме случајот:

$$M_\beta \cap \left(\bigcup_{k=0}^n M_{\delta_k} \right) = \emptyset. \quad (1)$$

Бидејќи $j_{n+1} \in M_{\delta_n}$, од (1) следува дека $j_{n+1} \notin M_\beta$. За парот различни бои $m \in M_\beta$ и j_{n+1} и тројката различни темиња $\beta, \delta_o, \delta_n$ исполнети се условите на лема 3.3. Реално во темето β отсутствува бојата m , а во темињата δ_o и δ_n отсутствува бојата j_{n+1} . Затоа некое од темињата $\beta, \delta_o, \delta_n$, да го означиме со σ , не се соединува со (j_{n+1}, m) -верига ниту со едно од двете останатите. Ја пребојуваме максималната (j_{n+1}, m) -верига C , со почеток во темето σ . Притоа се менува само едно од множествата $M_\beta, M_{\delta_o}, M_{\delta_n}$, а имено M_σ (во нашиот случај C не може да се состои од едно теме, бидејќи во темето β присуствува бојата j_{n+1} , а во темињата δ_o и δ_n , со оглед на (1) присуствува бојата m).

Можеме да претпоставиме три случаи:

1) $\sigma = \beta$. Тогаш при пребојување на веригата C , M_{δ_o} не се менува и бојата

j_{n+1} според претходното отсутствува во темето δ_o . Во темето β после пре-

бојувањето на веригата C бојата j_{n+1} исто така отсуствува. Затоа може да се обои реброто u_0 во бојата j_{n+1} .

2) $\sigma = \delta_o$. Тогаш при пребојување на веригата C , M_β не се менува и бојата m според претходното отсуствува од темето β . Во темето δ_o после пребојувањето на веригата C бојата m исто така отсуствува. Затоа може да се обои реброто u_0 во бојата m .

3) $\sigma = \delta_n$. Тогаш при пребојување на веригата C , M_β не се менува. Освен тоа, не се менува и бојењето на ребрата u_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Нека k е најмалиот број на такво теме δ_k , што δ_k се јавува како крајно на веригата C (δ_n во секој случај се јавува како крајно на веригата C). Јасно, во резултатот на пребојувањето на веригата C множеството M_{δ_l} , при $l < k$, не го менуваме. Понатаму, според (1) до пребојувањето е исполнет условот $m \notin M_{\delta_k}$, што значи, после пребојувањето е исполнет условот $m \in M_{\delta_k}$. Затоа, ребрата $u_0, u_1, \dots, u_k$ образуваат k – лепеца (улогата на j_{k+1} ја игра m). Бидејќи $m \in M_{\beta\delta_k}$, k – лепезата го задоволува условот на лема 3.5. ♦

3.7. Забелешка. Од доказот на лема 3.6 се гледа дека, од ребрата кои не припаѓаат на лепезата, при пребојувањето може да се измени бојата само на тие ребра кои биле обоени во боја j_{n+1} или во боја m .

3.8. Теорема (Шенон). Ако $G \in \Delta_s$, тогаш $\chi'(G) \leq \lceil \frac{3s}{2} \rceil$.

Доказ. Ја воведуваме ознаката $h = \lceil \frac{s}{2} \rceil$. Тогаш $\lceil \frac{3s}{2} \rceil = s + h$. Нека веќе имаме правилно бојење на некое подмножество H ребра од графот G во бои од N_{s+h} и нека $u = (\alpha, \beta)$ е произволно негово необоено ребро. Ќе покажеме дека е можно правилно да се обои $H \cup \{u\}$ (може и да се измени обојувањето на H).

Да забележиме дека за секое теме $\delta \in G$ важи

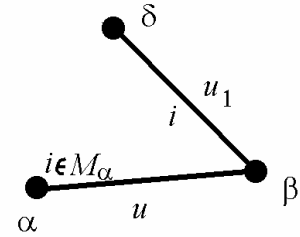
$$|M_\delta| \geq h$$

а за темињата α и β важи

$$|M_\alpha| \geq h+1, \quad |M_\beta| \geq h+1$$

доколку реброто (α, β) е необоено.

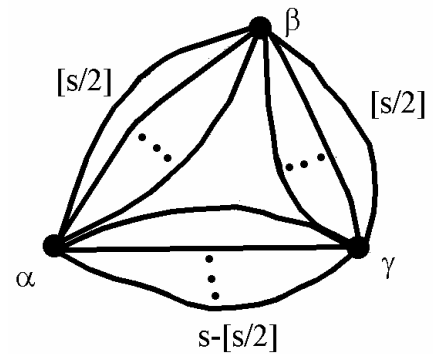
Ако $M_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, тогаш реброто u може да се обои во некоја боја од $M_{\alpha\beta}$. Ако пак $M_{\alpha\beta} = \emptyset$, тогаш за секоја боја $i \in M_\alpha$ постои ребро $u_1 = (\beta, \delta)$, обоено во бојата i , при што $\delta \neq \alpha$ (цртеж 2). Ако при тоа $M_{\beta\delta} \neq \emptyset$, тогаш реброто u_1 може да се пребои во секоја боја од $M_{\beta\delta}$, после што реброто u може да се обои во бојата i .



Цртеж 2

На крајот ако $M_{\alpha\beta} = \emptyset$ и $M_{\beta\delta} = \emptyset$, тогаш $M_{\alpha\delta} \neq \emptyset$, во спротивно случај имаме во N_{s+h} три попарно заемно дисјунктни подмножества $M_\alpha, M_\beta, M_\delta$ кои заедно содржат не помалку од $3h+2$ бои, што е невозможно, бидејќи $3h+2 > 3+h$. И така нека $j \in M_{\alpha\delta}$. Парот ребра $u, u_1 = (\beta, \delta)$ образува затворена 1-лепеза при темето β : $\delta_0 = \alpha, \delta_1 = \delta, j_1 = i, j_2 = j$. Според лема 3.6 може во тој случај правилно да се обои подграфот $H \cup \{u\}$. На таков начин можно е едноподруго да се обојат сите ребра на графот. Со тоа теоремата е докажана. ♦

3.9. Пример. Граф $G \in \Delta_s$ за кој $\chi'(G) = \lceil \frac{3s}{2} \rceil$ е графот со три темиња сврзани попарно со три снопа ребра, кои соодветно содржат $\lceil \frac{s}{2} \rceil$, $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ и $s - \lceil \frac{s}{2} \rceil$ ребра. Во овој граф има $\lceil \frac{3s}{2} \rceil$ ребра и сите тие се попарно гранични, (цртеж 3).



Цртеж 3

3.10. Ако, освен ограничувањата на максималниот степен на темињата на графот, направиме и ограничување на максималната кратност на ребрата, тогаш на сличен начин може да се определи уште поточна оценка на хроматичната класа. Нека Δ_s^q е фамилијата графови од Δ_s , кај кои кратноста на секое ребро не преминува q . Важи следната теорема.

Теорема. Ако $G \in \Delta_s^q$, тогаш $\chi'(G) \leq s + q$.

Доказ. Нека некое подмножество ребра на графот G е веќе обоено. Ќе покажеме дека може да се обои уште едно ребро $u = (\alpha, \beta)$. Притоа, можеме да сметаме дека $M_{\alpha, \beta} = \emptyset$, инаку обојувањето е тривијално.

При темето β постои лепеза. Навистина, во N_{s+q} постои боја $j_1 \in M_\alpha$, т.е. ставаме $\delta_0 = \alpha$. Бидејќи $M_{\alpha\beta} = \emptyset$, а $j_1 \notin M_\beta$, т.е. постои ребро $u_1 = (\beta, \delta_1)$ обоено во бојата j_1 . Ребрата $u_0 = u$ и u_1 образуваат 1-лепеза, бидејќи во N_{s+q} постои боја $j_2 \in M_{\delta_1}$. Нека ребрата $u_0, u_1, \dots, u_n$ веќе формираат n -лепеза. Ако $j_{n+1} \notin M_\beta$ и при тоа j_{n+1} е различна од сите бои $j_1, j_2, \dots, j_n$, тогаш постои ребро $u_{n+1} = (\beta, \delta_{n+1})$, кое е обоено во бојата j_{n+1} и не припаѓа на n -лепезата. Освен тоа, бидејќи $|M_{\delta_{n+1}}| \geq q$, а кратноста на реброто u_{n+1} не преминува q во $M_{\delta_{n+1}}$, постои таква боја j_{n+2} што за сите тие ребра u_k , кои се паралелни на реброто u_{n+1} е исполнет соодносот $j_{n+2} \neq j_{k+1}$. Затоа во зададениот случај лепезата може да се продолжи. Очигледно дека таквото продолжување е возможно само конечен број пати. Значи, во некој чекор $j_{n+1} \in M_\beta$ или $j_{n+1} = j_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. (Јасно дека $j_{n+1} \neq j_n$).

Во првиот случај за тврдењето следува од лема 3.5.

Во вториот случај имаме две можности:

1. $j_{n+1} = j_1$. Тогаш како прво $j_{n+1} \in M_{\delta_0}$, а како второ ребрата u_n и u_0 не се паралелни, т.е. $\delta_n \neq \delta_0$. На таков начин, при темето β постои затворена n -лепеза и за завршување на доказот останува само да се примени лема 3.6.
2. $j_{n+1} = j_k$, ($k > 1$). Тогаш аналогно на претходното $j_{n+1} \in M_{\delta_{k-1}}$, $\delta_n \neq \delta_{k-1}$ и отсечокот од n -лепезата кој се состои од ребрата $u_{k-1}, u_k, \dots, u_n$ образува затворена $(n-k+1)$ -лепеза при темето β . Да ја применима кон неа лема 3.6. Доколку $j_l \neq j_k$, при $l \neq k$, ($k, l = 1, 2, \dots$) и освен тоа $j_l \neq m$, пребојувањето не може да ги допира боите $j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$, со исклучок на тоа, што реброто u_{k-1} од бојата j_{k-1} ќе биде пребоено во бојата $j_k = j_{n+1}$ или во бојата m (забелешка кон лема 3.6). Оттука следува дека после ова пребојување на ребрата $u_1, u_2, \dots, u_{k-2}$ како и порано се формира $(k-2)$ -лепеза, при што сега

$j_{k-1} \in M_\beta$ и следствено $j_{k-1} \in M_{\beta\delta_{k-2}}$. На таков начин, оваа $(k-2)$ -лепеза ги задоволува условите на лема 3.5. Со тоа теоремата е покажана.

3.11. Последица. За графот $G \in \Delta_s$ без кратни ребра, т.е. за $G \in \Delta_s^1$ точна е следната оценка на хроматичната класа:

$$s \leq \chi'(G) \leq s+1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Acharjya, D. P.; Sreekumar: Fundamental Approach to Discrete Mathematics, New Age International (P) Limited, Publishers, New Delhi, 2009
2. Adamchik, V.: Graph theory, Concept of mathematics, 2005
3. Akiyama, J.; Egawa, Y.; Enomoto, H.: Graph theory and applications, North-Holland, 1988
4. Anderson, I.: A First Course in Discrete Mathematics, Springer – Verlag, London-Berlin-Heilderbeg, 2001
5. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
6. Avis, D.; Hertz, A.; Marcote, O.: Graph theory and combinatorial optimization, Springer, 2005
7. Bass, H.; Kingman, J. F. C.; Smithies, F.; Todd, J. A.; Wall, C. T. C.: Algebraic graph theory, Cambridge University Press, 1974
8. Beckenbach, E. E.: Applied Combinatorial Mathematics, John Wiley and sons, Inc. New Yor, London, Sydney, 1964 .
9. Beineke, L. W.; Wilson, R. J.: Topics in algebraic graph theory, Cambridge University Press, 2004
10. Bollobás, B.: Advances in graph theory, North-Holland, 1978
11. Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.: Graph theory with applications, North-Holland, 1982
12. Capobianco, M.; Frechen, J. B.; Krolik, M.: Recent trends in graph theory, Springer – Verlag, 1971
13. Copabianco, M.; Molluzzo, J. C.: Examples and Countereexamples in Graph Theory, North-Holland, New York-Amsterdam-Oxford, 1978
14. Cvetković, D.; Simić, S.: Diskretna matematika, Prosveta, Niš, 1995
15. Davis, T.: Graph theory problems and solutions, Geometer, 2005
16. Dickson, A.: Introduction to graph theory, CRC Pres, 2006
17. Erickson, M.: Pearls of Discrete Mathematics, CRC Pres, 2010
18. Godsil, C.; Royle, G.: Algebraic graph theory, Springer, 2001
19. Grimaldi, R. P.: Discrete and Combinatorial Mathematics, Pearson – Addison Wesley, Boston, 1999
20. Gross, J. L.; Yellen, J.: Handbook of graph theory, CRC Press, 2004
21. Grossman, P.: Discrete Mathematics for Computing, Macmillan, New York, 2002
22. Harju, T.: Lecture notes in graph theory, University of Turku, 2007

23. Harry, F.: Graph theory, Addison-Wesley publishing company, 1969
24. Hein, J. L.: Discrete Mathematics, Jones and Bartlett Publishers, London, 1995
25. Hsu, L. H.; Lin, Ch. K.: Graph Theory and Interconnection Networks, CRC Press, 2009
26. Joyner, D.; Nguyen, M. V.; Cohen, N.: Algorithmic graph theory, CRC Pres, 2010
27. Koshy, T.: Discrete Mathematics with Applications, Elsevier Academic Press, Burlington – San Diego – London, 2004
28. Lai, H. J.; Liu, B.: Matrices in combinatorics and graph theory, Kluwer Academic Publisher, 2000
29. Lipschutz, S.: Theory and Problems of Finite Mathematics, McGraw Hill, New York – Toronto – Sydney, 1966
30. Liu, B.; Lai, H. J.: Matrices in Combinatorics and Graph Theory, Kluwer, Dordrecht – Boston – London, 2000
31. Lovasz, L.; Pelikan, J.; Vesztergombi, K.: Discrete Mathematics – Elementary and Beyond, Springer, New York – Berlin – Heidelberg, 2003
32. McKee, T. A.; McMorris, F. R.: Topics in intersection graph theory, SIAM Monographs, 1999
33. Roberts, F. S.: Graph theory and its application to problem of society, Society for industrial and applied mathematics, 1978
34. Rosen, H. K.: Discrete Mathematics and its Applications, Mc Graw Hill, 2007
35. Rosen, H. K.; Michaels, J. G.; Gross, J. L.; Grossman, J. W.; Shier, D. R.: Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics, CRC Press, 2000
36. Sachov, V. N.: Combinatorial Methods in Discrete Mathematics, Cambridge University Press, Melbourne, 1996
37. Sarapa, N.: Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002
38. Scheinerman, E. R.; Ullman, D. H.: Fractional graph theory, a rational approach to the theory of graphs, John Wiley & Sons, Inc., 1997
39. Tutte, W. T.: Graph theory as I have known it, Oxford society publications, 1998
40. Walis W. D.: A beginner's guide to graph theory second edition, Birkhäuser, 2007
41. Wallis, W. D.: A Beginner's Guide to Graph Theory, Birkhauser – Boston - Basel – Berlin, 2007
42. West, D. B.: Introduction to graph theory – second edition, Pearson Education, 2001
43. Wilson, R. J.: Introduction to Graph Theory, Addison Wesley Longman Limited, Edinburgh, 1998
44. Басакер, Р.; Саати, Т.: Конечные графы и сети, Наука, Москва, 1974

45. Малчески, Р.; Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика, ФОН, Скопје, 2012
46. Малчески, Р.; Малческа, В.: Теорија на веројатност, ФОН, Скопје, 2010
47. Мирчев, И.: Графи, Неофит Рилски, Благоевград, 2001
48. Холл, М.: Комбинаторика, Мир, Москва, 1970
49. Цветковиќ, Д.; Шокаровски, Р.: Основи на теоријата на графови, Математички институт, УКИМ, Скопје, 1975
50. Ширяев, А. Н.: Вероятностей, Наука, Москва, 1989

ИНДЕКС НА ПОИМИ

А

Автоморфизам, 2
Ациклично ребро, 8

Б

Бариера на мрежа, 23
Бесконечен граф, 1
Биполарен граф, 4
Бихроматски (2-хроматски) граф, 69

В

Вектор на инциденција, 3
Верига, 6
Висечко (завршно) теме, 1
Вистински подграф, 5
Внатрешни ребра на мрежа, 15
Внатрешни темиња на мрежа, 15

Г

Големина на проток низ мрежа, 18
Големина на циркулација низ мрежа, 18
Гранични (соседни) темиња, 1
Гранично теме, 32
Граф на КПВ, 48
Граф на проток на податоци, 48
Граф, 1

Д

Двобојна верига, 75
Двополова мрежа, 36
Должина на двополова мрежа, 31
Должина на пат, 6
Допирни подграфови, 32
Допирно теме, 32
Дрво, 9

Е

Еднополова мрежа, 15

S

Свезда на теме, 6

И

(X, Y) –бариера, 29
 (X, Y) –верига, 29
Изворно ребро, 17
Изданок, 32
Изолирано теме, 1
Изоморфизам на мрежа, 15
Изоморфни графови, 2
Инверзија на верига, 6

J

Јачина на КПВ, 50

К

Канонично разложување, 40, 44
Комплемент на граф, 5
Комплетен граф, 4
Комплетно биполарен граф, 4
Компонента на несепабилност, 35
Компонента на сврзаност, 8
Конечен граф, 1
Контура, 7
Крај на пат, 6
Кратни (паралелни) ребра, 1
 (k, l) -полосник, 15

М

Максимална верига, 75
Максимална подмрежа, 43
Матрица на инциденција, 3
Матрица на соседство, 4
Мешовита бариера, 25
Множество елементи на граф, 1
Мрежа, 15

Н

n – димензионален единичен куб, 5
Неориентиран граф, 1
Неориентирано ребро, 1
Неразложива мрежа, 40

Несепарабилен граф, 34

О

Обратно ребро на пресек, 19
Ојлеров граф, 12
Ојлеров циклус, 12
Ориентиран граф, 1
Ориентирано ребро (лак), 1
Основен граф, 48

П

p -мрежа, 39
Паралелно соединување на мрежи, 17
Паралелно-последователни мрежи, 17
Парен граф, 11
Пат, 6
Петља (лупа), 1
Подграф генериран од ребра, 5
Подграф генериран од темиња, 5
Подграф, 5
Покривно дрво, 10
Полносни ребра, 15
Полови на мрежа, 15
Поминувачка подмрежа, 36
Поминувачко (директно) ребро, 29
Последователно соединување на мрежи, 16
Почеток на пат, 6
Правилно непотполно обоен граф, 75
Правилно обоен граф, 68
Правилно обоено ребро, 68
Правилно обоено теме, 68
Право ребро на пресек, 19
Превртување на подмрежа, 38
Премостив подграф, 16
Пресек на мрежа, 19
Пропусна моќ на мешовита бариера, 25
Пропусна моќ на пресек, 19
Пропусна моќ на ребро, 18
Прост граф, 1
Прост пат, 7
Прост пресек, 19
Прост циклус, 7
Проста бариера на мрежа, 23
Проста верига, 7
Проста контура, 7

Р

Раздеелувачко (мост) ребро за темиња, 34
Разделувачко (зглобно) теме, 31
Разделувачко теме за мрежа, 34
Разделувачко теме за темиња, 34
Разложива мрежа, 40
Рамнотежен граф, 12
Рамнотежно теме, 12
Ребро на граф, 1
Редуцирање на мрежа, 38

С

s -мрежа, 39
Сврзан граф, 8
Силно сврзана мрежа, 32
Степен на теме, 6
Суперпозиција на мрежи, 38

Т

Теме достижно за верига, 45
Теме на граф, 1
Теорема на Кејли, 60
Теорема на Форд-Фалкерсон, 20
Теорема на Шено, 78
Тривијален граф, 4
Тривијална мрежа, 36
Тривијална суперпозиција, 38

Х

H -мрежа, 39
Холостно ребро, 32
Хроматичен број, 68
Хроматична класа, 68
Хроматски класи, 4

Ц

Циклично ребро, 8
Циклично сврзан граф, 34
Цикломатски број, 14
Циклус, 7