Ристо Малчески
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 30

(збирка подготвителни задачи за натпревари за 8 и 9 одделение)

Скопје
7. јануари 2023

Рецензенти
д-р Катерина Аневска
д-р Методи Главче

СОДРЖИНА

Предговор			5
I		Алгебра	
	I.1.	Рационални и ирационални броеви	7
	I.2.	Алгебарски изрази	8
	I.3.	Равенки и неравенки	10
	I.4.	Неравенства	12
	I.5.	Дополнителни задачи	15
II		Теорија на броеви	
	II.1.	Воведни задачи	17
	II.2.	Деливост, НЗД и НЗС	18
	II.3.	Прости броеви	21
	II.4.	Диофантови равенки	22
	II.5.	Дополнителни задачи	24
III		Текстуални задачи	
	III.1.	Броеви и цифри	26
	III.2.	Времето е важно	27
	III.3.	Купуваме и пресметуваме пари	28
	III.4.	Задачи со мерни броеви	31
	III.5.	Дополнителни задачи	35
IV		Логика и комбинаторика	
	IV.1.	Логички задачи	38
	IV.2.	Пребројувања	40
	IV.3.	Инваријанти	45
	IV.4.	Принцип на Дирихле	47
	IV.5.	Боења и покривања	50
	IV.6.	Комбинаторна геометрија	52
V		Геометрија	
	V.1.	Триаголник	54
	V.2.	Четириаголник	58
	V.3.	Кружница и круг	65
	V.4.	Конструктивни задачи	69

	V.5.	Стереометрија	70
	V.6.	Дополнителни задачи	74
I		Алгебра	
	I.1.	Рационални и ирационални броеви	76
	I.2.	Алгебарски изрази	82
	I.3.	Равенки и неравенки	87
	I.4.	Неравенства	95
	I.5.	Дополнителни задачи	104
II		Теорија на броеви	
	II.1.	Воведни задачи	109
	II.2.	Деливост, НЗД и НЗС	113
	II.3.	Прости броеви	123
	II.4.	Диофантови равенки	128
	II.5.	Дополнителни задачи	136
III		Текстуални задачи	
	III.1.	Броеви и цифри	140
	III.2.	Времето е важно	144
	III.3.	Купуваме и пресметуваме пари	147
	III.4.	Задачи со мерни броеви	154
	III.5.	Дополнителни задачи	163
IV		Логика и комбинаторика	
	IV.1.	Логички задачи	168
	IV.2.	Пребројувања	175
	IV.3.	Инваријанти	196
	IV.4.	Принцип на Дирихле	201
	IV.5.	Боења и покривања	211
	IV.6.	Комбинаторна геометрија	218
V		Геометрија	
	V.1.	Триаголник	224
	V.2.	Четириаголник	243
	V.3.	Кружница и круг	266
	V.4.	Конструктивни задачи	278
	V.5.	Стереометрија	283
	V.6.	Дополнителни задачи	295

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 30 е наменета за талентираните ученици по математика од осмо и деветто одделение и е комплементарна со книгите Математички талент 5, 6, 17, 18, 21 и 24, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Меѓутоа, сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 473 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од четиринаесет до шестнаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Сепак, ќе споменеме дека задачите содржани во оваа книга се на ниво на општински, регионал-

ни и републички натпревари во нашата држава и во државите во нашето потесно опкружување. Затоа на учениците им препорачуваме истите да ги користат во подготовките за овие три нивоа на натпреварување, а додека за подготовки за Јуниорската македонска математичка олимпијада (ЈММО), Јуниорската балканска математичка олимпијада (ЈБМО), Европскиот математички куп (ЕМК–јуниори) и другите натпревари за учениците до 15,5 годинишна возраст подготовките да ги реализираат од соодветните книги од серијата Математички талент или од други книги и материјали кои им се достапни.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје — Авторите
јануари, 2023 г.

I. АЛГЕБРА

I.1. РАЦИОНАЛНИ И ИРАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

1. Која е 2021-та цифра по децималната запирка на бројот $\frac{20}{21}$?

2. Определи ја 2019-тата цифра по децималната запирка во децималниот запис на дропката $\frac{21}{26}$.

3. Докажи дека бројот
   а) 0,185185185...
   б) 2,01020102010...
   е рационален и претстави го во вид на дропка.

4. Ако x, y, z се реални броеви такви што xy, yz, zx се рационални броеви различни од нула, докажи дека бројот $x^2 + y^2 + z^2$ е рационален.

5. Докажи дека бројот 0,101001000100001... (по секоја единица секој пат има по една нула повеќе) е ирационален.

6. Докажи дека бројот е ирационален:
   а) $\sqrt{5}$,
   б) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$,
   в) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

7. Дали вредноста на изразот
   а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,
   б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$
   е рационален или ирационален број?

8. Докажи дека бројот

а) $A=\sqrt{111...111-222...222}$, (200 единици и 100 двојки),

б) $B=\sqrt{444...444+111..111-666...666}$, ($2n$ четворки, $n+1$ единица, n шестки),

е рационален.

9. Докажи дека вредноста на изразот

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

е рационален број.

10. Дали постојат рационални броеви x,y,z,t такви што важи

$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}. \qquad (1)$$

11. Докажи дека вредноста на изразот $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$ е рационален број.

12. Докажи дека вредноста на изразот

$$A=\sqrt{2021\cdot 2023\cdot 2025\cdot 2027+16}$$

е рационален број.

13. Нека a и b се реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Ако a^3 и b^3 се рационални броеви, докажи дека a и b се рационални броеви.

I.2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

14. Пресметај ја вредноста D на изразот $a^2-c^2+b^2+2ab$, ако $a=786$, $b=389$ и $c=175$.

15. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{2^{17}+2^{16}+2^{15}+...+2^2+2+1}{2^8+2^7+...+2^2+2+1}:3^3$ е природен број.

16. Пресметај 15% од $\frac{1+\frac{11}{24}}{\frac{5}{8}-1,5}$.

17. Определи ја вредноста на изразот $a^6+3a^2b^2+b^6$ ако $a^2+b^2=1$.

18. Ако $x+y=1$ и $x^2+y^2=2$, пресметај x^4+y^4.

19. Нека x,y,z се ненулти реални броеви такви што $x+y+z=2025$ и $xy+yz+zx=xyz$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}$.

20. Нека
$a=2^{2005}-2^{2004}+2^{2003}$, $b=2^{2004}-2^{2006}+2^{2006}$ и $c=3\sqrt{3}\cdot 2^{2003}$.
Докажи дека збирот на квадратите на некои два од овие броеви е еднаков на третиот број.

21. Пресметај ја вредноста на изразот
$$A=\frac{202120212019\cdot 202120212021\cdot 202120212023}{100010001\cdot(202120212021^2-4)}.$$

22. Дваесет броја се наредени во низа. Познато е дека секој број во низата, освен првиот, е два пати поголем од бројот кој е непосредно запишан пред него. Колку пати збирот на првите десет броја е помал од збирот на последните десет броја?

23. Пресметај ја вредноста на изразот
$$143\cdot 91\cdot 77-\sqrt{143}\cdot\sqrt{91}\cdot\sqrt{77}.$$

24. Упрости го изразот
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt{150}}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{2}.$$

25. Меѓу кои два последователни природни броја се наоѓа вредноста на изразот $\sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}$.

26. Определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{22+2\sqrt{21}}+\sqrt{22-2\sqrt{21}}\,.$$

27. Ако

$$\frac{1}{a+2019}+\frac{1}{b+2019}+\frac{1}{c+2019}=\frac{3}{2020}\,,$$

пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}\,.$$

I.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

28. Меѓу кои последователни цели броеви се наоѓа бројот x ако важи

$$2018:(1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}})=2019?$$

29. Реши ја равенката

$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1)-1)-1=2\,.$$

30. При решавање на равенката $\frac{10x+6}{5}=3-1{,}6x$, ученикот наместо коефициентот 1,6 пред непознатата на десната страна на равенката запишал некој друг број. Така тој добил за 0,1 помала вредност на непозната x во однос на вистинската нејзина вредност. Кој број ученикот го запишал наместо бројот 1,6?

31. Реши ја равенката

$$\frac{2010}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=2011\,.$$

32. За кои вредности на реалниот параметар m равенката

$$\frac{3x+4m}{4}-\frac{3mx}{2}=m-\frac{x-1}{4}$$

има негативни решенија?

33. Определи го реалниот број a така што равенките

$$(2a-\tfrac{2}{3})x=a-\tfrac{x}{3}+4 \text{ и } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-x)=x-\tfrac{x+1}{2}$$

ќе бидат еквивалентни.

34. Реши ја равенката

$$\sqrt{(x-2)^2}=x+5.$$

35. Реши ја равенката

$$||2x-4|-6|+|7-|1-y||=0.$$

36. Реши ја равенката

$$|x+|2x-|3x|||=2021.$$

37. Реши ја равенката

$$|2x+21|-|x-20|=2021.$$

38. Определи го збирот на сите решенија на равенката

$$||x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}|=\sqrt{5}.$$

39. Определи ги a и b ако

$$a+b=ab=\frac{a}{b}.$$

40. За кои реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a^{2002}+b^8+c^6+1}{2}=a^{1001}+b^4-c^3-1?$$

41. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy+yz=11, \\ yz+zx=17, \\ zx+xy=10. \end{cases}$$

42. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy+yz=882, \\ yz+zx=992, \\ zx+xy=572. \end{cases}$$

43. По напознати x,y,z,t реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3x+y+z+t=2a, \\ x+3y+z+t=4b, \\ x+y+3z+t=2b, \\ x+y+z+4t=4a. \end{cases}$$

44. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3, \end{cases}$$

каде a е реален параметар.

45. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x+y}{1-xy}+\frac{x-y}{1+xy}=5, \\ \frac{x+y}{1+xy}+\frac{x-y}{1-xy}=4. \end{cases}$$

46. Определи ги природните броеви a,b,c,d за кои важи

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{599}{121}.$$

47. Реши ја неравенката

$$||x|-1|\le 20.$$

I.4. НЕРАВЕНСТВА

48. Даден е бројот $x=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{19}$. Подреди ги по големина броевите $x, x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$.

49. Што е поголемо: $(-2)^{300}$ или $(-3)^{200}$?

50. Што е поголемо 2^{1991} или 1991^{181}?

51. Спореди ги броевите $3^{2007}-2^{3000}$ и $2007\cdot 2^{2007}$.

52. Спореди ги вредноста на изразот $\frac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}$ и бројот $\sqrt{\frac{79}{25}}$.

53. Спореди ги дропките

$$\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2} \text{ и } \frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}.$$

54. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc. \qquad (1)$$

55. Нека a,b,c,d се реални броеви такви што $a+d=b+c$. Докажи дека

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)\geq 0.$$

56. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(a+b)}\geq \frac{3}{4}.$$

57. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\leq 2(a^3+b^3+c^3).$$

58. Ако за броевите a и b важи $a+10b=1$, колкава е најголемата можна вредност на производот ab? За кои вредности на a и b се достигнува најголемата можна вредност?

59. Нека x,y,z и $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}}$ се природни броеви. Определи ја најмалата можна вредност на количникот $\frac{x+z}{y}$.

60. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c важи

$$a^2+5b^2+8c^2+4\geq 4ab+4bc+8c.$$

Кога важи знак за равенство?

61. Ако $a,b>0$ и $a+b=1$, докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b})\geq 9.$$

62. Докажи дека за позитивните реални броеви x,y важи
$$x^4+y^3+x^2+y+1>\tfrac{9}{2}xy.$$

63. Нека $a,b,c\geq 0$. Докажи дека
$$\tfrac{a}{b+c}+\tfrac{b}{c+a}+\tfrac{c}{a+b}\geq\tfrac{3}{2}.$$

64. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи
$$\sqrt{abc}(\tfrac{2}{a+b}+\tfrac{2}{b+c}+\tfrac{2}{c+a})\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

65. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи
$$a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ca})+c(c-\sqrt{ab})\geq 0.$$

66. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека важи
$$\tfrac{a-1}{b+1}+\tfrac{b-1}{c+1}+\tfrac{c-1}{a+1}\geq 0.$$

67. Докажи дека за должините на страните на триаголникот a,b,c важи
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

68. Нека a и b се катети, а c е хипотенуза на правоаголен триаголник. Дакажи дека важи
$$(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b})\geq 3+2\sqrt{2}.$$

69. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека:
$$a^9+b^9+c^9\geq a^5b^3c+b^5c^3a+c^5a^3b,$$

70. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека:
$$a^8b^4+b^8c^4+c^8a^4\geq a^6b^5c+b^6c^5a+c^6a^5b.$$

71. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0.$$

I.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

72. Во кординатен систем на права чиј почеток е точката O избрани се точки P,R и S такви што $\overline{OP}=70\,mm$, $\overline{OR}=0,2\,dm$ и $\overline{RS}=5\,cm$, а точката T е средина на отсечката PS. Ако должината на единечната отсечка е еднаква на $1cm$, определи ги координатите на точките S и T.

73. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+...+2021^{2022}. \qquad (1)$$

74. Цифрата на десетките на квадрат на природен број е непарна. Докажи дека цифрата на единиците на тој квадрат е еднаква на 6.

75. Определи ги сите природни броеви $x\geq 4$, за кои вредноста на изразот $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$ е природен број.

76. Определи ги сите подредени тројки (x,y,z) цели броеви за кои важат неравенствата
$$x>y>z>1 \text{ и } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1.$$

77. Докажи дека $2^n>n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

78. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:
а) $1^2+4^2+...+(3n-2)^2=\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$,
б) $1+x+x^2+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x\neq 1$,
в) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$,
г) $1\cdot 2\cdot 2^n+2\cdot 3\cdot 2^{n-1}+....+(n+1)(n+2)\cdot 1=2^{n+4}-(n^2+7n+14)$.

79. Докажи дека важи:

а) $2\sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$,

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$

в) $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \ldots (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{2}{n^2}$, за $n > 1$.

II. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека производот на било кои три последователни природни броја, зголемен за вториот од тие броеви е еднаков на кубот на вториот број.

2. Даден двоцифрен број се запишува два пати едно по друго и се добива четирицифрен број. Колку пати добиениот четирицифрен број е поголем од почетниот двоцфрен број?

3. Збирот на еден двоцифрен и еден трицифрен број е четирицифрен број. Секој од овие три броја е палиндром, т.е. исто се чита како од лево така и од десно. Определи ги овие броеви.

4. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се за 10 поголеми од трикратниот збир на своите цифри.

5. Замислив трицифрен број. Ако од неговите цифри ги составам сите можни двоцифрени броеви, па ги соберам, тогаш третина од добиениот збир ќе биде еднаква на првобитниот замислен трицифрен број. Кој број го замислив?

6. Определи го природниот број чиј квадрат е запишан со цифрите 0, 2, 3 и 5, при што секоја цифра е употребена само еднаш.

7. Од сите природни трицифрени броеви определи го бројот кој поделен со збирот на своите цифри дава најголем број.

8. Определи го природниот број n а кој важи
$$1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)=40000.$$

9. Дадени се пет различни цели броеви a,b,c,d,e такви што
$$(405-a)(405-b)(405-c)(405-d)(405-e)=12.$$
Определи го збирот $a+b+c+d+e$.

10. Докажи дека не постојат природни броеви m,n,p такви што
$$m^2+n^2+p^2=mn+np+pm+50.$$

II.2. ДЕЛИВОСТ, НЗД И НЗС

11. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се броеви еднакви на 1 или -1 и такви што
$$a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1=0.$$
Докажи дека $4\mid n$.

12. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни непарни броја е делива со 8.

13. Докажи дека разликата на четвртите степени на два непарни броја е делива со 16.

14. Определи го најмалиот четирицифрен природен број за кој збирот на цифрите на неговиот збир на цифри е еднаков на 9.

15. Определи го збирот на сите природни двоцифрени броеви секој од кои е делив со секоја своја цифра.

16. Докажи дека меѓу 11 природни броеви секогаш постојат два броја чија разлика е делива со 10.

17. Определи ги најголемиот и најмалиот седумцифрен број кој е делив со 11 и кој е запишан со ненулти цифри.

18. Еден двоцифрен број е делив со 3. Ако на овој број му се додаде 27, се добива број запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој е тој број?

19. Определи го двоцифрениот број кој поделен со својата цифра на единиците дава количник еднаков на цифрата на единиците и остаток еднаков на цифрата на десетките.

20. Определи ги сите природни броеви деливи со 8 чиј збир на цифри е помал од 10, а производ на цифри е еднаков на 12.

21. Дали постои природен број кој е точен квадрат и кој во декаден запис се запишува со 2022 единици и неколку нули?

22. Докажи дека не постојат природни броеви m и n такви што збирот на цифрите на бројот $m(m+3n)$ е еднаков на 2022.

23. Докажи дека постои број кој е делив со 2023 и чии први 10 цифри во декадниот запис се 1234567890.

24. Ако m е природен број, а n е непарен природен број, докажи дека $m(m+2)+n(n+2)$ не може да е квадрат на природен број.

25. Нека x и y се природни броеви такви што $xy=2009^{2010}$. Докажи дека збирот $x+y$ не е делив со 2008.

26. Нека m и n се природни броеви такви што $mn=2021^{2020}$. Докажи дека $m+n$ не е делив со бројот 2020.

27. На бројот 1972 од десно допиши му четири цифри така што добиениот број ќе биде делив со 7, 5 и 72.

28. Дропката $\frac{100^n+10^n}{100^n+4\cdot 10^n}, n\in\mathbb{N}$ сведи ја на облик $\frac{p}{q}$, каде p и q се заемно прости броеви.

29. Определи го остатокот при делењето на бројот $25\cdot 3^{2021}$ со бројот $4\cdot 3^{2020}$.

30. Ако a и b се цели броеви такви што $a-b$ е делив со 4, тогаш

$(3a+5b)^2$ е делив со 16. Докажи!

31. Низата цифри се состои од цифрите на редоследно запишаните први 222 природни броја. Во таа низа прво ги прецртуваме си сите цифри кои се наоѓаат на непарните места. Потоа повторно ги прецртуваме цифрите кои се наоѓаат на новите непарни места. Оваа постапка ја повторуваме се додека не остане само една цифра. Која е таа цифра?

32. Го прашале продавачот на јаболка колку јаболка има во корпата. Тој одговорил: „Ако ги бројам по две, или по три, или по четири, или по пет, или по шест, секогаш ми останува едно јаболко. Ако ги бројам по седум, не ми останува ниту едно јаболко.“
Колку јаболка биле во корпата? Определи го најмалиот број јаболка кој ги задоволува наведените услови.

33. Над северниот пол се наоѓаат три земјини сателити. Првиот ја обиколува Земјата за $90\,\text{min}$, вториот за $105\,\text{min}$ и третиот за $2\,h$. Колку пати првиот сателит ќе ја обиколи Земјата до моментот кога прв пат сите три сателити повторно ќе бидат над северниот пол?

34. Збирот на два броја е 168, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Кои се тие броеви?

35. Нека a и b се последователни цели броеви и нека n е природен број. Докажи дека $\text{NZD}(an+b, bn+a)$ е непарен број.

36. Определи го бројот на тројките последователни трицифрени природни броеви чиј производ е делив со бројот 120.

37. Нека $A=n^3+6n^2+8n$.
а) Докажи дека A е делив со 3 за секој природен број n.
б) Определи ги сите природни броеви n за кои A е делив со 96.

38. Нека d е природен број различен од 2, 5 и 13. Докажи дека од множеството $\{2,5,13,d\}$ може да се изберат два различни броја a и b такви што $ab-1$ не е квадрат на природен број.

39. Нека природниот број $n+1$ е делив со 24. Докажи дека збирот на сите делители на бројот n исто така е делива со 24.

II.3. ПРОСТИ БРОЕВИ

40. Докажи дека збирот на било кои пет последователни природни броја не може да е прост број.

41. Производот на два двоцифрени броеви е број кој е запишан само со цифрата 4. Кои се тие броеви?

42. Докажи дека $2020 \cdot 2024 - 21$ е сложен број.

43. Докажи дека за секој $a > 1$ број од видот $a^4 + 4$ е сложен број.

44. Определи ги сите прости трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 252.

45. Докажи дека не постојат непарни природни броеви a и b такви што $a+b$ и ab се точни квадрати на некои природни броеви

46. На секој ѕид на коцката е запишан по еден природен број, а потоа на секое теме му е придружен производот на броевите запишани на трите ѕида кои го определуваат тоа теме. Збирот на сите осум броеви придружени на темињата е 455. Определи го збирот на сите броеви запишани на ѕидовите на коцката.

47. На секој ѕид на коцка запишан е еден природен број. Потоа во секое теме на коцката запишан е производот на трите броја запишани на ѕидовите на кои тоа теме е заедничко. Збирот на така добиените осум броја е 175. Определи го збирот на броевите запишани на ѕидовите на коцката.

48. Определи ги сите вредности на целиот број m за кој бројот $\frac{m^2+2016}{|m|+2}$ е цел број.

49. Определи ги сите прости броеви p и q за кои бројот p^2+q^2+1 е точен квадрат.

50. Определи ги сите цели броеви n такви што бројот n^3-2n^2+2n-4 е прост.

51. Определи ги сите тројки прости броеви (a,b,c) за кои важи неравенството
$$abc<ab+bc+ca.$$

52. Дали може да се определат цифри a и b ($a\neq 0$) такви што дванаесетцифрениот број $\overline{abbaabbaabba}$ ќе биде точен квадрат на природен број?

II.4. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

53. Фибоначи за 30 исти сребреници купил 30 птици. За секои три сојки платил еден сребреник, за секои два канаринци платил еден сребреник и за секој гулаб платил по два сребреници. Колку птици од секој вид купил Фибоначи?

54. Во која година од дваесеттиот век е роден човек кој во 1969 година имал толку години колку што е збирот на цифрите на годината во која е роден?

55. Производот на два природни броја е 15 пати поголем од нивниот збир. Определи ја разликата на поголемиот и помалиот број?

56. Најди позитивна вистинска дропка чија вредност ќе се зголеми 3 пати ако нејзиниот броител го степенуваме на трет степен, а на именителот му додадеме 3.

57. Дали постојат природни броеви x,y,z такви што $4^x+9^y=11^z$?

58. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2019x^4 + 2020y^4 = 2021^{2021}.$$

59. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ такви што бројот $\sqrt{\overline{abc}+\sqrt{c}}$ е природен број.

60. Определи ги сите трицифрени броеви кои се пет пати поголеми од производот на своите цифри.

61. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$y^4 + x = xy + 8.$$

62. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$3(m^2 + n^2) - 7(m+n) = -4.$$

63. а) Определи ги остатоците од делењето на бројот $n^5, n \in \mathbb{N}$ со 11.
б) Докажи дека равенката
$$x^5 + y^5 + z^5 = 2022^{2022}$$
нема решенија во множеството природни броеви.

64. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^4 + y^{2022} = 2x^2.$$

65. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$(a+6)(b+5) = 3ab.$$

66. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2).$$

67. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$xy + 3y - 5x = 18.$$

68. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^4 + y^2 + 2y = 1.$$

69. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^2 + qr = 1996^2.$$

70. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$m^3 + 6m^2 + 5m = 8n^3 + 36n^2 + 40n + 8.$$

71. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

72. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$2(x^2 + y^2) = 5(xy + 1).$$

II.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

73. Определи го остатокот при делењето на бројот $1+2+2^2+...+2^{2021}$ со бројот 9.

74. Определи ги последните две цифри на бројот 7^{7^7}.

75. Определи ги сите природни броеви n за кои може некои броеви од множеството $\{1,2,...,n\}$ да се зголемат за 1, а сите останати да се намалат за 1, така што нивниот производ ќе остане непроменет.

76. Нека должините на страните на правоагониот триаголник се природни броеви. Докажи дека должината на барем една страна на триаголникот број делив со 5.

77. Докажи дека плоштината на секој правоаголен триаголник чии должини на страни се природни броеви е природен број делив со 6.

78. Колку има подредени парови (m,n) природни броеви за кои важи
$$mn + 2m - 2n = 2020.$$

79. Колку различни делители има бројот 144?

80. Колку различни делители има бројот 2023^{2023}?

III. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Разликата на квадратите на два последователни непарни броја е 48. Кои се тие броеви?

2. Бројот a е 92% од бројот b. Ако бројот b го зголемиме за 770, тогаш тој ќе биде поголем од a за 9% од својата нова вредност. Определи ги броевите a и b.

3. Кој број треба да се додаде на именителот и да се одземе од броителот на дропката $\frac{537}{463}$ за да се добие дропката $\frac{1}{9}$?

4. Постојат два трицифени броја со следново својство: ако на поголемиот број од десно му се допише помалиот број, ќе се добие шестцифрен број за 499500 поголем од бројот кој би се добил кога на помалиот од десно ќе му се допише поголемиот број, а ако помалиот шестцифрен број се подели со поголемиот трицифрен број се добива количник 201. Кои се тие броеви?

5. Некој трицифрен број се зголемува за 27 ако цифрите на единиците и десетките ги заменат местата, а истиот број се намалува за 450 цифрите на стотките и десетките ги заменат местата. Што ќе се случи со овој број ако цифирте на стотките и едиците ги заменат местата?

6. Ако некој број се подели со друг број, се добива количник 2 и остаток 5. Ако збирот на ови броеви се подели со нивната разлиа се добива количник 2 и остаток 7. Определи ги овие броеви.

7. Односот на збирот, разликата и производот на два природни броја е $5:1:18$. Определи ги овие броеви.

8. Дадена е низа од пет броја. Аритметичката средни на првите три броја е еднаква на 19, а аритметичката средина на сите пет броја е еднаква на 20. Определи ги последните два броја ако нивниот производ е еднаков на 456.

9. Аритметичката средина на некои 50 последователни парни природни броеви е еднаква на аритметичката средина на некои 41 последователни непарни природни броеви. Определи ги овие броеви ако разликата на квадратот на најголемиот парен број и квадратот на средниот по големина непарен број е еднаква на 7595.

10. Збирот на три дропки е еднаков на $\frac{83}{72}$, при што нивните броители се однесуваат како $5:7:1$. Именителот на третата дропка се однесува спрема именителот на првата дропка како $1:4$, а именителот на втората дропка се однесува спрема именителот на третата дропка како $3:2$. Определи ги овие дропки, ако тие се скратени до крај?

11. Андреј замислил еден реален број. Производот на неговиот квадрат и кавадратот на неговата трикратна вредност е еднаков на 36. Збирот на замисленият број и неговата апсолутна вредност е еднаков на 0. Кој број го замислил Андреј?

III.2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

12. По неколку работни дена, при изградбата на еден пат, менаџерот превзел чекори за побрзо завршување на изградбата, при што секои од предвидените 3 дена работа се завршувале за 2 дена. Ако целата работа е завршена за 70 неместо за 90 дена, колку дена се работело пред менаџерот да ја реорганизира работата?

13. Еден тракторист може парцелата планирана за сеидба да ја изора за 20 дена. Друг тракторист истата парцела може да ја изор за 30. Ако на првите двајца трактористи им се придружи трет тракторист и сите тројца работат заедно, тогаш парцелата ќе биде изорана за 7 дена. Колку дена му се потребни на третиот тракторист да ја изора парцела?

14. За да ја окосат ливадата покрај куќата на нивниот татко на Дарко и Хорват им требало 36 минути, на Хорват и Веселин им требале 45 минути, а на Веселин и Дарко им требале 60 минути. Се договориле дека секој од нив ќе окоси третина од ливадата. Колку време ќе работи Дарко, колку Хорват и колку Веселин?

15. Пабло купил, две свеќи со различни должини и дебелини. Подолгата свеќа целосно ќе изгори за 3,5 часа, а пократката за 5 часа. Пабло свеќите ги запалил истовремено и забележал дека по 2 часа горење тие имаат иста должина. За колку проценти на почетокот подолгата свеќа била подолга од пократката свеќа?

16. Ивана и Марија добиле порачка да направат 72 честитки. Секоја од нив изработила по 36 честитки, а секоја од нив своите честитки ги изработувала за еднакво време. Ивана изработувала 6 честитки за исто време за кое Марија изработувала 5 честитки. Ивана своите 36 честитки ги изработила за 1 час и 48 минути пократко време од времето кое Марија го потрошила за изработка на своите 36 честитки. Колку честитки за 1 час прави Марија, а колку Ивана?

17. Пабло излегол од дома неколку минути по 18 часот. Во моментот кога излегувал стрелките на часовникот зафаќале агол од 110°. Тој се вратил неколку минути пред 19 часот и во моментот кога влегол дома стрелките на часовникот повторно зафаќале агол од 110°. Колку минути Пабло бил отсутен од дома, при претпоставка дека часовникот работи точно?

III.3. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

18. Пет работници сработиле една работа, за што добиле 105000 денари. Парите ги поделиле така што првиот и вториот добиле $\frac{2}{5}$ од сума која ја добиле останатите тројца. Првите двајца својот дел го поделиле во однос 2:3, а другите тројца во однос 3:4:5. Колку пари добил секој работни?

19. Цената на една стока е намалена за 4%. За колку проценти треба да се зголеми новата цена за да се добие почетната цена на стоката?

20. Цените на еден вид патики во две продавници биле еднакви. Во едната продавница цената е покачена за 8%, а во другата е намалена за 8%. Разликата на новодобиените цени е еднаква на 1200 денари. Определи ја првобитната цена на патиките.

21. Второто издание на една книга, по нејзината преработка, се продава по цена која е за 20% повисока од цената на првото издание. Цената на третото издание е намалена за 20% во однос на цената на второто издание. Определи дали книгата е поевтина во првото или третото издание и за колку проценти била поевтина.

22. Киро и Рампо купуваат исти тетратки. На Киро му недостасуваа 60 денари за да купи 4 тетратки, а на Рампо му недостасуваат 60 денари за да купи 5 тетратки. Ако се здружат, тогаш ќе им недостасуваат 60 денари за да купат 6 тетратки. Колку чини една тетратка?

23. Шеснаесет работници за 5 дена завршуваат $\frac{4}{9}$ од некоја работа. Колку работници треба уште да се ангажираат за да преостанатиот дел од работата, работејќи со исто темпо, се заврши за 4 дена?

24. Цената на еден мопед е еднаква на 201900 денари. Прво цената на мопедот е зголемена за 10%, а потоа е намалена за 30%. Определи ја цената на мопедот по двете промени. Дали конечната цена е поголема или помала од почетната и за колку проценти?

25. За да ги намали трошоците за греење Марко одлучил да ја промени фасадата на куќата. За таа цел му се одобрени средства од Фондот за заштита на животната средина и енергетска ефикасност во висина од 60% од вкупните трошоци. Вкупниот трошок за новата фасада е 1200000 денари. Со новата фасада трошоците за греење ќе се намалат за 35%. Ако просечната годишна цена на греењето на куќата изнесувале 168000 денари, за колку години ќе се исплати оваа инвестиција на Марко?

26. Г-нот Јакопетрески во петокот стигнал во градот Иди-види и порачал

такси. Таксистот му објаснил дека поаѓањето се наплатува 100 денари и за секој изминат километар се доплаќа по 25 денари. Во саботата г-н Јакопетрески ја користел истата такси компанија, но тој ден заради годишнината од формирањето на компанијата сите цени биле намалени за 20%. Тој ден г-н Јакопетрески се возел $5\,km$ повеќе и платил исто колку претходниот ден. Колку километри се возел г-н Јакопетрески во петокот и колку платил за едно возење?

27. Во книжара стигнала кутија моливи за кои се планирало сите да се продадат по иста цена. Една четвртина од вкупниот број моливи е продадена по 5% повисока цена од планираната. Половина од моливите се продадени по 10% пониска цена од планираната. За колку проценти повисока цена трба да се продадат преостанатите моливи за да се оствари планираната заработувачка при пристигнувањето на моливите?

28. Филип купил патики по цена од 4550 денари. Патиките го платил со 23 банкноти од по 50 денари, 100 денари и 500 денари. Бројот на банкнотите од 50 денари е најмал. По колку банкноти од секој вид дал Филип за да ги плати патиките?

29. За излет на група ученици е изнајмен авобус по цена од 28800 денари. Во последен момент тројца ученици го откажале одењето на излетот. Заради тоа цената на превозот на секој ученик се зголемила за 40 денари. Колку ученици требало да одат на излет?

30. Тројца пријатели заштедиле определена сума пари. Ако првиот има пет пати помалку, вториот два пати помалку, а третиот два и пол пати помалку од својата заштеда, тогаш заедно ќе имаат 160 евра.
Ако првиот има два пати помалку, вториот четири пати помалку и третиот три пати помалку од својата заштеда, тогаш заедно ќе имаат 240 евра.
Колку пари заштедиле тројцата пријатели заедно?

31. На сезонското намалување Пабло купил чевли, пантолони и кошула. За чевлите ги потрошил половина од парите кои ги понел и уште 10 евра. За пантолоните потрошил половина од парите кои му преостанале и уште 20 евра, а за кошулата ги потрошил половина од парите

кои му преостанале и уште 30 евра, со што ги потрошил сите пари. Колку пари имал Пабло на почетокот?

32. Софија и Марина собираат монети од 2 и 5 денари, секоја во својата касичка. По еден месец ги отвориле касичките и ги пребројале монетите. Заедно имале 280 монети по 2 денари. Во касичката на Софија 60% од сите монети биле од по 2 денари, а во касичката ма Марина имало двапати повеќе монети од 2 денари отколку од 5 денари. Во двете касички вкупно имало 1360 денари. Колку пари имало во касичката на Софија, а колку во касичката на Марина?

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

33. Земјоделецот Киро земјиштето за сеидбата го подготвил за три дена. Првиот ден подготвил $\frac{3}{10}$ од земјиштето, вториот ден подготвил $\frac{3}{5}$ од преостанатото земјиште и третиот ден го подготвил преостанатото земјиште. Колкава е плоштината на тоа земјиште, ако третиот ден се обработени 11,2 хектари помалку од вториот ден? Колку земјиште Киро обработувал секој ден?

34. Фармерите Киро и Рампо минатата година ожнеале 300 тони пченица, а оваа година тие ожнеале $\frac{1}{3}$ пченица повеќе одколку минатата година. По колку пченица лани ожнеал секој фармер, ако годинава Киро ожнеал два пати повеќе од лани, а Рампо ожнеал за петтина повеќе од лани?

35. Орачот Марко од една парцела изорал 5 хектари и уште $\frac{3}{8}$ од парцелата, по што му преостанале дас изора $\frac{2}{5}$ од парцелата и уште 8 хекари. Колку хектари имала парцелата? Колку хектари изорал Марко, а колку му останале да изора?

36. Во три сада има вода. Ако половина од водата во првиот сад ја претуриме во вториот сад, потоа третина од така добиеното количество од вториот сад го претуриме во третиот сад, и на крајот, четвртина од

водата во третиот сад ја претуриме во првиот сад, во секој сад ќе има по 6 литри вода. Колку вода имало на почетокот во секој сад?

37. Патот меѓу местата A и B е долг $55\,km$. Андреј тргнал од местото A во местото B со брзина од $5\,km/h$. Два часа подоцна од B кон A тргнал Пабло со брзина од $4\,km/h$. По колку часа че се сретнат Андреј и Пабло, сметајќи од поаѓањето на Андреј? На кое растојание од A ќе се сретнат Андреј и Пабло?

38. Воз се движи со брзина од $60\,km/h$ од местото A во местото B. Заради затворен сигнал на пругата возот морал да застане и тука се задржал 3 минути. Потоа продолжил да се движи со брзина $75\,km/h$ и во местото B стигнал точно според редот на возењето. Колку километри пред местото B се наоѓа споменатиот сигнал?

39. Моторциклист тргнал од местото A во местото B, каде требало да стигне во определено време. Ако вози со брзина од $35\,km/h$ ќе задоцни 2 часа, а ако вози со брзина од $50\,km/h$ ќе стигне 1 час порано. Определи ја должината на патот меѓу местата A и B.

40. Одејќи од дома кон фудбалскиот стадион Горјан откако првиот час поминал $3\,km$, заклучил дека ако продолжи со истата брзина на стадионот ќе стаса $30\,\text{min}$ по почетокот ма натпреварот. Затоа преостанатиот дел од патот го поминал со брзина од $4\,km/h$ и на стадионот стигнал $40\,\text{min}$ пред почетокот на натпреварот. Определи ја должината на патот од домот на Горјан до фудбалскиот стадион.

41. За да го помине патот меѓу местата A и B мотоциклистот Филип возел определено време. Една четвртина од тоа време тој возел со брзина од $45\,km/h$, а преостанатото време со брзина од $75\,km/h$. Определи ја просечната (средната) брзина со која Филип го помиал патот од A до B.

42. По еден автомобил, кој тргнал од местото A, тргнал друг автомобил и го стигнал по 2,5 часа возење. Продолжувајќи го возењето во истата насока, побрзиот автомобил по 1,5 часа бил $24\,km$ пред поспориот

автомобил. Определи ги средните брзини на овие автомобили?

43. На аеродром се наоѓа подвижна лента со должина $500\,m$ која се движи со брзина $4\,km/h$. Дамјан и Вера истовремено зачекориле на лентата. Вера продолжила да оди со брзина од $6\,km/h$ во однос на лентата, додека Дамјан останал да стои на лентата. Колку метри Вера била пред Дамјан во моментот кога се симнала од лентата?

44. Марко е член на велосипедски клуб и секој ден вози велосипед до соседниот град кој е оддалечен $40\,km$. Во саботата до тој град и назад Марко се возел 3 часа и 12 минути. Во неделата, заради работи на патот, Марко на одење возел 12 минути подолго отколку дента пред тоа. Од истата причин, на враќање тој возел по заобиколен пат и, возејќи со просечната брзина од саботата, тој поминал $15\,km$ повеќе. За колку проценти неговата просечна брзина се намалила во неделата во однос на просечната брзина во саботата?

45. Морска вода содржи 5% сол. Колку литри дестилирана вода треба да се измеша со 40 литри морска вода за да се добие раствор со 1% сол?

46. Пред една седмица во 100 тони штотуку ископан камен јаглен имало 2% вода. До денес овој јаглен во себе впил определено количество вода, па сега тој содржи 12,5% вода. Определи ја сега масата на јагленот (заедно со водата).

47. Камен јаглен во јама содржи 2% вода, а по неколку дена надвор од јамата тој содржи 6% вода. За колку тони во тој момент се зголемила масата на јагленот, ако од јамата се извадени $1000\,t$ јаглен?

48. Во $1000\,kg$ свежи јагоди има 99% вода. Во текот на транспортот, заради несоодветни услови, испарило извесно количество од водата и новата маса на јагодите е $500\,kg$. Колкав процент вода сега содржат јагодите?

49. Влажноста на свежа штотуку окосена трева е 60%, а на сеното е 20%. Колку сено ќе се добие од $1t$ свежа трева?

50. Штотуку соборено стебло тежело $2,25t$ и содржело 64% вода. По една седмица ова стебло содржело 46% вода. За колку се намалила масата на стеблото за оваа седмица?

51. Во еден сад има $420g$ дваесетпроцентен раствор на сол во вода. По определено време, заради испарување, количеството раствор се намалило на $300g$. Колкав е сега процентот на солта во водата?

52. Колку литри вода треба да се измешаат со 120 литри 10% раствор на алкохол, за да се добие 4% раствор на алкохол?

53. Во садот A има два пати повеќе течност отколку во садот B. Притоа во садот A има хомогена мешавина од 90% вода и 10% алкохол, а во садот B има хомогена мешавина од 72% вода и 28% алкохол. Ако од садот A прелееме 40% од течноста во садот B, колку проценти алкохол ќе има во течноста во садот B?

54. Една легура на цинк и сребро, со маса $3,5kg$, содржи 76% сребро. Кога оваа легура ја стопиле со друга легура на цинк и сребро, добиена е нова (трета) легура, со маса $10,5kg$, која содржи 84% сребро. Определи го процентот на среброто во втората легура.

55. Имаме две смеси од злато и сребро. Во првата смеса количествата на овие метали са однесуваат како 2:3, а во втората како 3:7. Колку треба да се земе од секоја смеса за да се добие $8kg$ нова смеса во која односот на златото и среброто ќе биде 5:11?

56. Почва за цвеќе содржи 12% вода. Дафина сака да засади цвеќе, за кое е потребна влажност од 28%. Колку вода треба Дафина да налее во $5kg$ купена почва за да успешно го засади цвеќето?

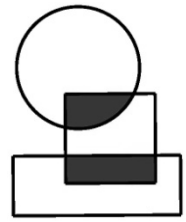
57. Во некоја продавница има три вреќи со ориз од различни класи. Во првата вреќа оризот е од прва класа, во втората вреќа од втора класа и во третата вреќа од трета класа. Во оризот од прва класа има 0,6% скршени зрна ориз, во оризот од втора класа има 1,5% скршени зрна и во оризот од трета класа има 8% скршени зрна. Продавачот од секоја вреќа со ориз зел определено количество, при што од вреќата со ориз

од втора класа зел двојно повеќе ориз отколку што зел од вреќата со ориз од прва класа, а од вреќата со ориз од трета класа зел $0,8\,kg$ повеќе отколку што зел од вреќата со ориз од прва класа, па така добил мешавина која содржела 3,3% скршени зрна. Колку килограми ориз зел продавачот од вреќата со ориз од прва класа?

58. Фросина сака да направи $400\,ml$ свој сок во кој ќе има 75% чист со од јаболка. На располагање има сокови со 85% учество и 60% учество на чист сок од јаболка. Како Фросина ќе го направи својот сок?

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧАИ

59. На цртежот десно е осенчена е $\frac{1}{8}$ од кругот и $\frac{1}{4}$ од правоаголникот. Плоштината на квадратот е еднаква на половина од збирот на плоштините на кругот и правоаголникот. Ако се знае дека е осенчено 40% од квадратот, определи го односот на збирот на плоштините на кругот и квадратот спрема плоштината на правоаголникот.



60. Андреј за три дена прочитал една интересна книга. Првиот ден прочитал $\frac{1}{5}$ од целата книга и уште 16 страници, вториот ден прочитал 30% од остатокот и уште 20 страници и последниот ден прочитал 0,75 од новиот остаток и последните 30 страници.

61. Во фабрика за намештај има два вида машини, нови и стари. Четири нови мажини, како и пет стари машини може да произведат 480 еден вид столици на ден. Колку столици од истиот вид заедно ќе произведат девет нови и единаесет стари машини за еден ден?

62. Реализирана е анкета во која учествувале 420 семејства. Констатирано е дека 95% од семејствата имаат телевисор, а 80% од семејствата имаат комјутер. Секое семејство има барем еден од наведените апарати. Колку семејства имаат само по еден од наведените апарати?

63. На еден тест требало да се одговори на 20 прашања. За секој точен одговор се добивале по 4 бода, а за секој неточен одговор или неодговорено прашање се губеле по 3 бода. Рампо на крајот освоил 38 бода. Колку прашања точно одговорил Рампо?

64. Во едно одделение 50% од учениците не се занимаваат со ниту еден спорт, $\frac{1}{5}$ од учениците тренираат кошарка и преостанатите 9 ученици тренираат пливање. Колку ученици има во ова одделение?

65. Еден шаховски клуб има определен број членови. Еден ден решиле да направат мала забава за сите членови на клубот. Меѓутоа некои од членовите заради други обврски не дошле на забавата. Познато е дека бројот на отсутните е еднаков на $\frac{1}{6}$ од бројот на присутните на забавата и ако уште еден член замине од забавата, тогаш бројот на отсутните ќе биде еднаков на $\frac{1}{5}$ од бројот на присутните. Колку членови има овој клуб?

66. Во салон за намештај се продаваат работни маси со една, две и три фиоки. На сите маси вкупно има 25 фиоки, а маси со една фиока има колку маси со 2 и 3 фиоки заедно. По колку маси може да има од секој вид?

67. Во една компанија работат работници од пет земји: Австријци, Белгијци, Кипарци, Данци и Естонци. Австријците се за 1 помалку од $\frac{1}{3}$ Естонците и за 3 помалку од половината од бројот на Белгијците. Естонците и Данците заедно се за 3 повеќе од Кипарците и Белгијците. Кипарците и Естонците заедно се за 1 помалку од половината од бројот на работниците во компанијата, а Кипарците и Белгијците заедно се $\frac{7}{10}$ од вкупниот број работници во компанијата, Колку работници работатво компанијата од секоја од петте земји?

68. На еден остров живеат само зелени и сини жаби. Оваа година, во однос на минатата, бројот на сините жаби се зголемил за 60%, а бројот на зелените жаби се намалил за 60%. Новонастанатиот однос на бројот на сините и бројот на зелените жаби останал ист како и односот во минатата година но во обратен редослед (број на зелени спрема број

на сини жаби). За колку проценти се променил вкупниот број жаби оваа година во однос на минатата година?

IV. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека во секое друштво бројот на луѓето кои се познаваат со непарен број луѓе од друштвото е парен.

2. Дали природните броеви од 1 до 15 може да се поделат во две множества A и B така што во множеството A се два броја, а во множеството се преостанатите тринаесет броја и збирот на броевите од множеството B е еднаков на производот на броевите од множеството A?

3. Дали може броевите $3, 3^2, 3^3, ..., 3^{n-1}, 3^n$ да се поделат во три групи (не задолжително со еднаков број елементи) така што производот на елементите во секоја група е еднаков,ако:
   а) $n = 2022$, б) $n = 2023$?

4. Во училишната кошаркарска лига учествуваат 10 екипи и секоја екипа игра со секоја екипа точно по еден натпревар. Докажи дека во секој момент на натпреварувањето постојат две екипи кои имаат одиграно еднаков број натпревари.

5. Квадратен под со должина на страна $10\,m$ е поделен на 100 единечни квадратни полиња, т.е. на 100 квадратни полиња со должина на страна $1m$. На почетокот биле поплочени 9 од единечните полиња. Плочкарот Марко тврди дека може да го поплочи целиот под така што секое следно единечно поле кое ќе го поплочува ќе биде соседно на најмалку две веќе поплочени единечни полиња. Дали Марко е во право?

6. Три точки A, B, C се сместени во координатен систем во рамнина. Нивните апсциси се $2, -3, 0$, а ординатите се $-3, 2, 5$, не задолжително

во овој редослед. Определи ги координатите на овие точки ако е познато дека:
- ниту една точка не е во третиот квадрант,
- точката A не припаѓа на координатна оска,
- ординатата на точката B е еднаква на збирот на ординатите на другите две точки,
- апсцисата на точката C е еднаква на ординатата на точката B

7. Природните броеви од 1 до $2n$ се запишани во низа во произволен редослед, а потоа под секој од нив е запишан редниот број во таа низа. Секој член од ницата е собран со својот реден број. Докажи дека меѓу добиените збирови постојат два чија разлика е делива со $2n$.

8. Имаме $2k+1$ картичка нумерирани со броевите од 1 до $2k+1$. Колку најмногу картички може да се изберат така што ниту еден од броевите запишан на извлечените картички не е еднаков на збирот на други два броја запишани на извлечените картички?

9. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 се случајно распоредени на кружница. За секој таков распоред ги определуваме сите осум збирови на по четири последователни броеви и најголемиот од нив да го означиме со m. Која е најмалата можна вредност на бројот m?

10. На секоја планета во еден галактички систем седи по еден астроном и ја набљудува најблиската планета. Растојанијата меѓу планетите се меѓусебно различни. Ако бројот на планетите е непарен, докажи дека има планета која никој не ја набљудува.

11. Во една држава меѓу секои два града постои едносмерна авионска линија. Докажи дека постои град од кој во секој друг град може да се стигне со најмногу едно преседнување.

12. Во секое од три училишта има по n ученици. Секој ученик познава најмалку $n+1$ ученик од преостанатите две училишта. Докажи дека постојат три ученика, по еден од секое училиште, кои меѓусебно се познаваат.

13. Седум гусари поделиле определено количество златници. Делеле така

што секој земал онолку златници колку што е збирот на цифрите на бројот на златниците пред тој да земе. Сеој зел точно два пати и на крајот не останал ниту еден златник. Сите добиле еднаков број златници, освен капетанот кој добил најмногу.

а) Колку златници биле?

б) Колку златници добил капетанот, а колку секој од преостанатите гусари?

в) Кој по ред на земање бил капетанот?

IV.2. ПРЕБРОЈУВАЊА

14. На Пелистер има три планинарски дома A,B,C. Од A до B водат 2 патеки, а од B до C водат 3 патеки, но не постои директна патека A до C. На колку различни начини може да се стигне од домот A до домот C.

15. Една држава има четири града A,B,C и D. Од градот A во градот B има 3 директни патишта. Од градот B во градот C има 2 директни патишта, а од градото C во градот D има 5 директни патишта. Градовите A и C, а исто така и градовите B и D не се поврзани со директни патишта. Од градот A до градот D има уште еден директен пат. На колку начини може да се стигне од градот A до градот D?

16. Во одделението на Филип има 24 ученици. На колку начини може да се избере претседател, заменик и благајник?

17. Колку трицифрени броеви може да добијат ако три пати фрламе хомогена коцка за играње на чии страни се запишани броевите од 1 до 6 и секогаш од лево кон десно го запишеме бројот кој ќе падне на горната страна?

18. Колку различни комбинации треба да се пополнат за да сме сигурни дека на спортска прогноза ќе имаме 13 погодоци (на ливчето имаме 13 парови, а за секој пар имаме три можни типувања: 0, 1 и 2).

19. Определи го бројот на десетцифрените броеви секој од кои е запишан

со различни цифри.

20. Определи го бројот на природните четирицифрени броеви такви што гледано од десно на лево цифрите запишани на непарните места се непарни, а цифрите запишани на парните места се парни.

21. На колку начини можеме да избереме три броја од 1 до 40 така што нивниот збир ќе биде парен?

22. За една година ќе велиме дека е среќна ако цифрите со кои таа е запишана се различни последователни цифри. На пример, последната срена година била 2013.
    а) Која е првата следна среќна година?
    б) Колку среќни години има во третиот милениум?

23. Колку има петцифрени природни броеви во чиј запис се појавува барем една парна и барем една непарна цифра?

24. Од множеството $\{2,3,4,5\}$ се избираат три различни броја a,b,c. На колку начини може да се изберат овие броеви така што бројот $a^{(b^c)}$ да биде делив со 8?

25. Колку има трицифрени броеви кои се запишани со различни цифри и се деливи со 5?

26. Колку има четирицифрени броеви кои се запишани со меѓусебно различни цифри од множеството $\{0,1,2,3,4,5\}$ и се деливи со 5?

27. На колку начини од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ може да се изберат три броја така што нивниот збир ќе биде делив со 3?

28. Колку има шестцифрени природни броеви деливи со 5, кои се запишуваат само со цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (цифрите не се повторуваат), при што цифрите 1 и 2 не може да се една до друга?

29. Да ги разгледаме сите шестцифрени броеви кои може да се запишат со цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, така што секоја цифра е употребена точно

еднаш. Колку од овие броеви се поголеми од бројот 345612, а колку се помали од овој број?

30. За еден природен број велиме дека е палиндром ако исто се чита од лево на десно и од десно на лево.
    а) Колку има петцифрени палиндроми кои се деливи со 5?
    б) Колку има петцифрени палиндроми кои се деливи со 3?

31. Колку има петцифрени броеви кои се запишани со различни цифри, а збирот на цифрите на десетките и единиците им е еднаков на 5?

32. На колку начини од множеството $\{1,2,3,...,30\}$ може да се изберат два броја така што:
    а) разликата на избраните броеви ќе биде делива со бројот 5,
    б) збирот на избраните броеви ќе биде делив со 5.

33. Определи го бројот на природните броеви кои се помали или еднакви на 10000, кои се запишани со различни цифри и се деливи со бројот 5.

34. Коцка за играње фрламе три пати. Колку пати производот на паднатите броеви ќе биде делив со 10.

35. Определи го бројот на деветцифрените броеви запишани со девет различни цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 такви што секој трицифрен број кој го формираат три последователни цифри на тој број е делив со 3.

36. Определи го бројот на целобројни парови (a,b) такви што
$$|a|+|b|<2019.$$

37. На колку различни начини во 3×3 табела може да се запишат броеви така што во секој ред и секоја колона производот на запишаните броеви е еднаков на 50?

38. Во кутија се наоѓаат 100 топчиња означени со броевите од 1 до 100. Избираме една топче и потоа топчето го враќаме во кутија, па повторно избираме едно топче. На колку начиии можеме топчињата да ги избереме така што производот на броевите кои се на нив запишани е делив со 9.

39. Колку има природни броеви n кои се помали од 2020 и такви што збирот на цифрите на бројот n и збирот на цифрите на бројот $n+1$ се непарни броеви?

40. Монета се фрла 5 пати. Колку различни случаи може да се добијат на овој начин?

41. Од 10 различни цветови треба да се направи букет во кој се наоѓаат најмалку два цвета. На колку начини тоа може да се направи?

42. Во кино отишле три момчиња и две девојчиња и купиле 5 карти така што ќе седат во ист ред еден до друг. На колку начини децата може да седнат на петте седишта така што девојчињата ќе седат едно до друго? Замената на местата на седење на било кои две лица се смета за нов распоред на седење.

43. На полица треба да се распоредат девет различни книги означени со броевите од 1 до 9. На колку начини тоа може да се направи така што:
    а) книгите 1 и 2 ќе бидат една до друга,
    б) книгите 1 и 2 нема да бидат една до друга.

44. На колку начини може n лица да се распоредат во ред така да лицата A и B не се едно до друго?

45. На колку начини можеме од 8 луѓе да избереме шест, но така што ако го избереме A, мора да го избереме и B?

46. Треба во низа да распоредиме 10 топчиња од кои 4 се црвени, 3 се сини и 3 се зелени. На колку начини тоа може да се направи?

47. Колку различни низи од 10 букви (зборови) може да се добијат со разместување на буквите на зборот МАТЕМАТИКА?

48. На шаховски турнир учествуваат 18 шахисти и секој игра со секого. Докажи дека до осмото коло може да се најдат тројца шахисти меѓу кои не постојат двајца кои меѓу себе одиграле партија шах?

49. На еден шаховски турнир учествувале n шахисти меѓу кои имало само мајстори и велемајстори. Секоја победа носи еден поен, партија која завршува реми (без победник) на секој играч му носи по половина поен и за пораз не се добиваат поени. По завршувањето на турнирот се покажало дека секој учесник половина од своите поени ги освоил играјќи против мајстори. Докажи дека n е точен квадрат.

50. Во некое одделение има 22 ученици, при што бројот на девојчињата е за 20% поголем од бројот на момчињата. Учениците меѓу себе избираат три претставници за натпревар, со услов дека не смее сите три натпреварувачи да се од ист пол. На колку различни начини може учениците да ја изберат екипата?

51. Паралелните прави a и b се разминуваат со правата c. Точките A,B,C редоследно припаѓаат на правите a,b,c. Колку најмногу рамнини определуваат овие три прави и три точки?

52. Во рамнината се дадени 8 точки, меѓу кои има точно четири тројки колинеарни точки. Колку прави определуваат овие точки?

53. Во просторот се дадени n точки, такви што никои три не се колинеарни и никои четири не се компланарни. Колку
    а) прави,
    б) триаголници,
    в) кружници,
    г) рамнини
    се определени со овие точки.

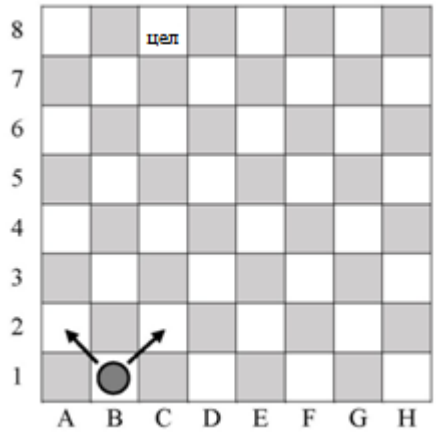
54. Дадени се две паралелни прави p и r. На правата p се дадени 7 точки, а на правата r се дадени 6 точки. Определи го бројот на:
    а) отсечките такви што едната крајна точка е на правата p, а другата крајна точка е на правата q,
    б) триаголниците чии темиња се дадените точки.

55. На секоја страна на квадрат се избрани по 10 точки такви што ниту една од нив не е теме на квадратот. Колку триаголници постојат чии темиња се некои од дадените точки?

56. Дадени се 10 црвени и 18 зелени точки такви што никои три од нив не се колинеарни. Колку различни триаголници се определени со овие точки, така што темињата на ниту еден триаголник не се еднобојни?

57. На секоја страна на правоаголникот $ABCD$ се означени по 5 точки кои не се темиња на правоаголникот. Колку четириаголници има чии темиња се некои од означените 20 точки?

58. На полето $B1$ на шаховската табла се наоѓа жетон. Жетонот може да се движи за едно поле дијагонално и тоа горе лево и горе десно, но не смее да излезе од таблата (види цртеж десно).
На колку начини жетонот може да дојде до полето $C8$?



59. Правилна шестстрана призма има основен раб со должина $1\,cm$ и визина со должина $2\,cm$. Определи го бројот на триаголниците чии темиња се воедно и темиња на дадената призма, а сите страни се со различна должина.

IV.3. ИНВАРИЈАНТИ

60. На масата имаме 100 чаши, од кои 95 се поставени правилно, а 5 се поставени превртено. Во еден потез е дозволено истовремено да се свртат било кои две чаши. Дали може, со повторување на оваа постапка, да се постигне сите чаши да бидат правилно поставени?

61. Горјан од подредената тројка реални броеви (a,b,c) може да ја формира подредената тројка $(2a-b,2b-c,2c-a)$. Дали може од тројката

$(1,7,9)$ со конечен број примени на дозволената трансформација да ја добие тројката:
а) $(3,7,11)$, б) $(3,6,8)$.

62. На еден остров живеат 8 сини, 10 црвени и 12 зелени камелеони. Кога ќе се сретнат два камелеони со различна боја, тие својата боја ја менуваат во третата боја. Дали може да се случи, по определен број средби, сите камелеони да се истобојни?

63. Филип на таблата ги запишал броевите $1,2,3,4,...,2n$, каде n е непарен број. Потоа почнал да избира по два броја a и b, кои ги бришел и на нивно место го запишувал бројот $|a-b|$, се додека на таблата не останал само еден број. Дали овој број е парен или непарен?

64. Во правоаголен координатен систем е зададена координатна мрежа како множество од сите точки (i,j), каде $i,j\in\mathbb{N}$ и по овие точки скокаат болви. Болвите скокаат според така што од точката (a,b) болвата може да скокне во една од следниве точки $(a+b,b)$, $(a,b+a)$, $(a-b,b)$,ако $a>b$ или $(a,b-a)$, ако $b>a$.
Болвата A на почетокот се наоѓа во точката $(6,3)$, болвата B во точката $(20,15)$, болвата C во точката $(45,18)$ и болвата D во точката $(9,15)$. За секој пар болви определи дали во текот на своите скокови може да скокнат во иста точка.

65. Волшебникот од приказната „Мачорот во чизми“ има вештина глувците да ги претвора во лавови и обратно. На вечера повикал 1 лав и 5 глувци и ги седнал околу тркалезна маса. Но волшебникот својата вештина одеднаш може да ја примени само на три соседни гости, па потоа повторно да ја примени на три соседни гости итн. Дали може волшебникот, со последователно повторување на оваа операција, да постигне околу масата повторно да има 1 лав и 5 глувци, но така што лавот ќе седи одма до место на кое на почетокот седел лав?

66. Нака $\overline{abcd}$ е произволен четирицифрен број. Ги дефинираме следниве трансформации:
- ако некои две соседни цифри на бројот се различни од нула, тогаш

двете може да се намалат за 1,
- ако некои две соседни цифри на бројот се помали од 9, тогаш двете може да се зголемат за 1.

Дали со опишаните трансформации бројот 2621 може да се трансформира во бројот:
а) 2128, б) 2016.

67. Во секое теме на дванесетаголник се наоаѓа по еден жетон. Во секој чекор произволно избираме два жетони и секој го преместуваме на негово соседно теме, така што едниот оди на соседното теме во насоката на движење на стрелката на часовникот, а другиот на соседното теме во спротивната насока. Дали може, со последователно повторување на вакви операции, по определен број чекори, да се постигне жетоните да се групирани:
а) во четири темиња, во секое по три жетони,
б) во три темиња, во секое по четири жетони.

IV.4. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

68. Докажи дека од произволни 2023 броеви може да се изберат два броја чија разлика е делива со 2022.

69. Дадени се пет различни природни броја. Докажи дека меѓу нив постојат три броја чиј збир е делив со 3.

70. Дадени се единаесет различни природни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат шест броја чиј збир е делив со 6.

71. Определи го најмалиот природен број n таков што да меѓу било кои n цели броеви може да се изберат 18 броја чиј збир е делив со 18.

72. Дадена е низата четирицифрени броеви 0006, 0036, 0216, 7776, 6656, ..., кои се последните четири цифри од броевите $6^1, 6^2, 6^3, 6^4, \ldots$. Докажи дека почнувајќи од некој член оваа низа е периодична.

73. Дванаесет пријатели одлучиле n вечери да излезат на заедничка ве-

чера. Во секое од тие n излегувања пријателите се распоредуваат така што седат околу m маси, околу секоја маса еднаков број пријатели. Дали постои распоред на седења таков што секој од нив седи барем еднаш околу иста маса со секој од преостанатите 11 пријатели, ако:

а) $n=5, m=4$,

б) $n=4, m=3$

в) $n=3, m=2$.

74. Секоја од 9 прави го дели квадратот на два четириаголници чии плоштини се однесуваат како 2:3. Докажи дека барем 3 од овие 9 прави минуваат низ иста точка.

75. Секоја од 13 прави го дели квадратот на два четириаголници чии плоштини се однесуваат како 3:5. Докажи дека барем 4 од овие 13 прави минуваат низ иста точка.

76. Сите дијагонали и страни на шестаголник се обоени во две бои црвена и сина. Докажи дека меѓу страните и дијагоналите на шестаголникот постојат три истобојни кои се страни на триаголник.

77. Докажи дека во множество од шест луѓе може да се најдат тројца кои меѓу себе не се познаваат или пак секој од нив го познава преостанатите двајца.

78. Даден е природен број n и конвексен $n-$аголник. Секоја страна и дијагонала на многуаголникот е обоена во црвена или сина боја. Определи го најмалиот природен број n таков што за секое такво боење постои триаголник со темиња во темињата на многуаголникот чии страни се еднобојни.

79. Сите страни и дијагонали на седумнаесетаголник се обоени во една од три бои: сина, црвена и зелена. Докажи дека меѓу страните и дијагоналите на седумнаесетаголникот постојат три истобојни кои се страни на триаголник

80. Во рамнината се дадени 25 точки, такви што меѓу секои три од дадените точки постојат две точки кои се на растојание помало од 1. Докажи дека постои кружница со радиус 1 во чија внатрешност се нао-

ѓаат најмалку 13 од дадените точки.

81. Определи го најмалиот природен број n таков што за секое множество од n точки со целобројни координати, од кои никои три не лежат на една права, постои триаголник со темиња од тоа множество за кои и средините на неговите страни се точки со целобројни координати.

82. Три меѓусебно паралелни прави се сечат со седум на нив нормални прави во 21 точка. Пресечните точки се наоѓаат во три реда и седум колони. Некои од точките се обоени црвено, а некои сино. Докажи дека постојат четири истобојни точки кои се темиња на правоаголник.

83. Во внатрешноста на правилен шестаголник со страна $2\,cm$ се дадени 193 точки, меѓу кои не постојат три колинерани, а кои се обоени со 4 бои. Докажи дека постојат три истобојни точки кои се темиња на триаголник со плоштина не поголема од $\frac{\sqrt{3}}{4}\,cm^2$.

84. Во квадрат со страна $31\,cm$ на произволен начин се распоредени 2022 точки. Докажи дека меѓу дадените точки постојат најмалку две точки кои се на растојание помало од $1\,cm$.

85. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со сина боја. Докажи дека вака испрсканата рамнина содржи две истобојни точки кои се на растојание $1\,cm$.

86. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со сина боја. Докажи дека во вака испрсканата рамнина постои правоаголен триаголник чија хипотенуза е со должина $2023\,cm$ и чии темиња се истобојни.

87. Во внатрешноста на квадрат со страна 2 произволно се распоредени пет точки. Докажи дека постои барем еден пар точки растојанието меѓу кои е помало од $\sqrt{2}$.

88. Во правоаголник со страни $a=4$ и $b=3$ се распоредени 6 точки. Докажи меѓу овие шест точки постојат две точки кои се на растојание помало или еднаков на $\sqrt{5}$.

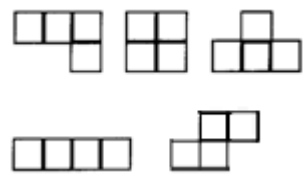
89. Даден е круг со дијаметар $d=3$ и во него неколку помали кругови. Збирот на дијаметрите на сите кругови е еднаков на 25. Докажи дека за секоја права која припаѓа на рамнината на круговите постои права паралелна на неа која сече најмалку 9 од малите кругови.

IV.5. БОЕЊА И ПОКРИВАЊА

90. Дали може табла со димензии 10×10 од која се отстранети две дијагонални полиња да се покрие со домино плочки, т.е. со плочки 2×1.

91. Подот на една сала е покриен со плочки 4×1 и 2×2. Една плочка е скршена, а на располагање имаме само една плочка од спротивниот вид. Докажи дека подот не може повторно да се покрие со прераспоредување на плочките кои ги имаме.

92. Пабло има сет од пет тетрамина во кои има барем по едно тетрамино од секој вид (цртеж десно). Дали, користејќи ги сите тетрамина, Пабло може да направи правоаголник?



93. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со $T-$тетрамина (цртеж десно).

94. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со тетрамина 1×4?

95. Квадратна табла со димензии 8×8 е шаховски обоена. Во еден потез се избира еден ред или една колона и во секое од осумте полиња во избраниот ред или колона се менува бојата од бела во црна и обратно. Дали може со конечна низа вакви потези да се постигне точно едно поле на таблата да е црно?

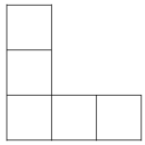
96. Имаме по желба голема квадратна табла на која во квадрат со димензии 3×3 се поставени 9 жетони, по еден во секое поле. Во секој чекор

можеме со еден жетон да скокнеме во хоризонтален или вертикален смер преку едно зафатено поле на слободно поле и притоа жетонот кој го прескокнуваме го отстрануваме. Дали на овој начин на таблата може да остане само еден жетон?

97. На шаховски обоена табла со димензии 12×12 на белите полиња од првите шест колони се поставени жетони. Во еден потез избран жетон го поместуваме по дијагонала за две полиња, а прескокнатиот жетон го отстрануваме од таблата. Дали е можно на крајот на таблата да остане само еден жетон?

98. Во полињата на табла со димензии $n\times n$ редоследно се запишани броевите од 1 до n^2. Во еден потез се избираат два соседни броја и од двата броја го одземаме помалиот и добиените резултати ги запишуваме соодветно на местата на избраните броеви. Дали може со конечно многу пати повторување на оваа постапка на таблата да бидат запишани само нули? (Ако двата избрани броја се еднакви, тогаш бројот го одземаме од двата избрани броја и добиваме нули.)

99. Секое поле на табла со димензии 10×10 е обоено во една од n бои. На таблата поставуваме фигура од видот прикажан на цртежот десно, која се состои од пет полиња 1×1, така што фигурата секогаш покрива точно 5 полиња од таблата. Определи го најмалиот природен број n за кој постои боење такво што, како и да се постави фигурата на таблата, таа покрива полиња обоени во различни бои.

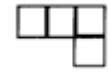


100. Определи го најголемиот природен број n за кој секое поле на правоаголна табла $5\times n$ може да се обои во една од две бои така што за секој иабор на два реда и две колони четирите единечни пресечни полиња не се обоени со иста боја.

101. а) Нека m и n се непарни природни броеви. Докажи дека шаховската фигура скокач (скокајќи според шаховското правило) не може да го обиколи секое поле на таблата со димензии $m\times n$ точно еднаш и да се врати на почетното поле.

б) Дали може скокачот да го обиколи секое поле на табла 4×8 точно еднаш и да се врати на почетното поле?

102. Имаме табла со димензии $n \times n$ со отстранети аголни квадратчиња. Определи ги потребен услов така што таблата може да се покрие со L тетрамина (цртеж десно).



IV.6. КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЈА

103. Дали може да се распоредат 10 точки на 5 отсечки така што на секоја отсечка има по 4 точки?

104. Докажи дека во секој конвексен единаесетаголник постојат најмалку две дијагонали кои зафаќаат агол помал од 5°.

105. Дадени се 201 точка. Докажи дека на било која кружница со радиус $r=1$ постои точка A таква што збирот на растојанијата од неа до дадените точки е поголем или еднаков на 2001.

106. Дали во круг со дијаметар $2r=\sqrt{2}$ може да се сместат определен број кругови кои немаат заеднички точки, така што збирот на нивните радиуси да е 2023?

107. Дадени се 3000 точки такви што секои три точки формираат триаголник чија плоштина е помала од 1. Докажи дека сите точки може да се сместат во правоаголник со плоштина 4.

108. Во рамнината се дадени 7000 точки такви што растојанието меѓу секои две од нив е помало од 1. Ако n е најмалото растојание меѓу дадените точки, докажи дека

$$n<\frac{2}{\sqrt{7000}-1}.$$

109. Докажи дека во круг со радиус $r=\frac{1}{4}$ може да се смести многуаголник со периметар 1.

110. Во рамнината се дадени 1014 точки меѓу кои нема три колинеарни и

такви што постојат три точки, да кажеме K, L, M кои формираат триаголник во чија внатрешност се преостанатите 1011 точки. Определи го бројот на триаголниците кои се во внатре во триаголникот и кои немаат заеднички внатрешни точки.

111. Даден е квадрат со страна 2 и во него се распоредени 2022 точки такви што никои три од овие точки и темињата на квадратот не се колинеарни. Квадратот е поделен на триаголници чии темиња се сите дадени точки и сите темиња на квадратот. Страните на делбените триаголници меѓу себе не се сечат. Докажи дека постои триаголник чија плоштина е помала од $\frac{1}{1011}$.

V. ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ТРИАГОЛНИК

1. Должините на страните на еден триаголник се:
$a=2^{2020}-2^{2019}$, $b=2^{2018}+2^{2017}$ и $c=2^{2019}+2^{2017}$.
Докажи дека овој триаголник е правоаголен.

2. Во триаголник со периметар $210\,cm$ должините на страните се однесуваат како $3:5:7$. Определи ги должините на страните на овој триаголник. Дали триаголникот е правоаголен?

3. Во правоаголен триаголник должината на тежишната линија која соодветствува на хипотенузата е $20\,cm$. Од средината на хипотенузата повлечена е нормала на хипотенузата до пресекот со катетата. Должината на оваа нормала е еднаква на $15\,cm$. Определи ги должините на катетите на триаголникот.

4. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC со должини на катети $\overline{AC}=\overline{BC}=1\,cm$ впишана е полукружница k со центар O на катетата AC. Полукружницата k минува низ темето C и ја допира хипотенузата AC. Определи го радиусот r на полукружницата k.

5. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C, $\overline{BC}=3\overline{AC}$. Нека M и N се точки на катетата BC такви што $\overline{BM}=\overline{MN}=\overline{NC}$ и K е средина на хипотенузата AB. Определи го $\measuredangle MKN$.

6. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Ако должината на едната катета се зголеми за $7\,cm$, а другата остане иста, тогаш хипотенузата на новиот триагоник ќе биде $5\,cm$ подолга од хипотенузата на почетниот триаголник.Ако должината на истата

катета во почетниот триаголник се намали за $4\,cm$, а другата катета остане иста,тогаш новата хипотенуза ќе биде за $2\,cm$ пократка од хипотенузата на почетниот триаголник. Определи ја плоштината на почетниот триаголник ABC.

7. Едниот остар агол на правоаголниот триаголник ABC е еднаков на 30°. Ако P е средината на хипотенузата AB, а S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC, определи го $\measuredangle SPC$.

8. Во правоаголниот триаголник ABC висината CD над хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела така што $\overline{AD}=8$ и $\overline{DB}=18$. Нека E е средина на висината CD. Правата AE ја сече катетата BC во точката F. Определи ја должината на отсечката EF.

9. Од точката M која ја дели страната AB на рамностраниот триаголник ABC на делови од $6\,cm$ и $2\,cm$ се повлечени нормали на другите две страни на триаголникот. Определи го растојанието на темето C до овие нормали.

10. Точката M ја дели страната BC на рамностраниот триаголник ABC во однос 1:3.
    а) Пресметај ги должините на нормалите повлечени од точката M кон страните AB и AC на триаголникот ABC.
    б) Пресметај ги односите во кои овие нормали ги делат страните AB и AC.

11. Даден е рамностран триаголник ABC со страна $8\,cm$ и точка D на страната BC таква што $\overline{DC}=2\,cm$. Од точката D се повлечени нормали DE и DF соодветно на страните AB и AC. Определи ги должините на отсечките BE и CF.

12. Должините на две страни на еден триаголник се a и b, а аголот меѓу ноив е еднаков на 120°. Определи ги плоштината на овој триаголник и должината на симетралата повлечена во дадениот агол.

13. Должините на основата и кракот на рамнокрак триаголник се однесу-

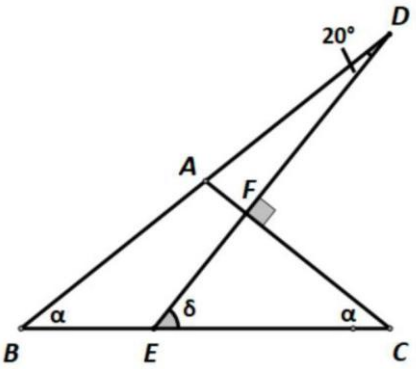
ваат како $4:3$. Должината на висината повлечена кон основата е $20\,cm$. Определи ја должината на радиусот на впишаната кружница во овој триаголник.

14. Даден е рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 108°. Докажи дека висината која соодветствува на основата на овој триаголник е еднаква на половина од должината на симетралата на аголот при основата, сметајќи ја должината на симетралата на аголот од темето до пресекот со спротивната страна.

15. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник $ABC\,(\overline{AC}=\overline{BC})$ е дадена точка M таква што $\measuredangle AMB=2\measuredangle ACB$. На отсечката AM е избрана точка N таква што $\measuredangle CNM=\measuredangle ACB$. Докажи дека $\overline{CN}=\overline{BM}+\overline{MN}$.

16. Даден е тапоаголен рамнокрак триаголник ABC основа AB. На основата AB е дадена точка D таква што $\measuredangle ACD=35^\circ$, а на кракот BC е дадена точка E таква што $\overline{CE}=\overline{CD}$. Определи го $\measuredangle BDE$.

17. На цртежот десно е даден рамнокрак триаголник ABC со основа BC и $AC\perp ED$. Определи го аголот δ.



18. Висината на основата AB на рамнокрак триаголник ABC има должина $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, а аголот при врвот C е еднаков на 45°. Определи ја должината на висината на кракот на овој триаголник.

19. Даден е триаголник во кој едниот негов агол е за 20% помал од другиот, а за $33\frac{1}{3}\%$ поголем од третиот. Определи ги аглите на овој триаголник.

20. Точките A, B и C ја делат кружницата на три лаци чии должини се однесуваат како $3:4:5$. Определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC.

21. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето A. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A. Кружница $k(D, \overline{AD})$ по втор пат ги сече правите AB и AC во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AC} \cdot \overline{AN}$.

22. Даден е триаголник $ABC: \overline{AB} = 125\,cm, \overline{AC} = 117\,cm, \overline{BC} = 120\,cm$. Симетралата на внатрешниот агол во темето A ја сече страната BC во точката L, а симетралата на внатрешниот агол во темето B ја сече AC во точката K. Нека M и N се подножјата на нормалите повлечени од темето C на BK и AL, соодветно. Определи ја должината на отсечката MN.

23. Даден е триаголник ABC. На страните AC и BC на $\triangle ABC$ се означени точки M и N такви што $\overline{AM} : \overline{MC} = 1 : m$ и $\overline{BN} : \overline{NC} = 1 : n$. Определи ги природните броеви m и n за кои важи $P_{\triangle ABC} : P_{\triangle MNC} = 2:1$.

24. Нека M е пресекот на симетралата на внатрешниот агол во темето A и страната BC на триаголникот ABC. Ако центарот на впишаната кружница на триаголникот ABM е истовремено и центар на опишаната кружница на триаголникот ABC, определи ги аглите на триаголникот ABC.

25. Во координатен систем е даден триаголник ABC чии темиња се $A(-4,4; 3,2), C(0,6; 1)$ и темето B е осносиметрична слика на темето A во однос на апсцисната оска. Определи ја плоштината на ово триаголник.

26. Даден е триаголник ABC, $\overline{AB} = 14\,cm$, $\overline{BC} = 15\,cm$ и $\overline{CA} = 13\,cm$.
    а) Определи ја плоштината на овој триаголник.
    б) Нека S е точка на страната AB која е еднакво оддалечена од страните AC и BC. Определи го растојанието од S до страните AC и BC.

27. Во триаголник ABC е впишана кружница. Тангентата на оваа кружница паралелна со страната AB ги сече страните BC и AC во точките M и N. Определи ја должината на отсечката MN ако должините на страните на триаголникот ABC се $\overline{AB}=14\,cm$, $\overline{BC}=13\,cm$ и $\overline{CA}=15\,cm$.

28. Даден е триаголник ABC. Нека N е подножјето на висината повлечена од темето C. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече висината CN во точката D, а страната BC ја сече во точката E. Триаголникот DEC е рамностран триагоник со плоштина $4\sqrt{3}\,cm^2$. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

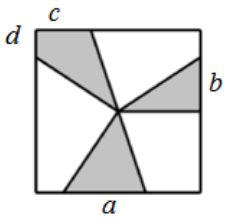
29. Нека ABK е триаголник со остри агли во темињата A и B. На страната KA се избрани точки D и N, а на страната KB точки C и M такви што правите DC, NM, AB се паралелни. Правите AB и DC се од правата NM оддалечени $4\,cm$. Средината на отсечката NM е од правата AK оддалечена $4\,cm$, а од правата BK е оддалечена $3\,cm$. Ако плоштината на четириаголникот $ABCD$ е еднаква на $80\,cm^2$, определи ја плоштината на триаголникот ABK.

V.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

30. Точките $K(-6,-3)$ и $R(-4,-5)$ се соседни темиња на квадрат. Определи ги координатите на другите две темиња, а потоа транслатирај го така добиениот квадрат за векторот на дијагоналата на квадратот чија почетна точка е K. На секоја добиена точка определи ги координатите.

31. Во правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AC}=4\,cm$ и $\overline{BC}=3\,cm$ е впишан квадрат чии две страни лежат на катетите, а едно теме на хипотенузата. Определи ги должините на отсечките на кои темето на квадратот ја дели хипотенузата.

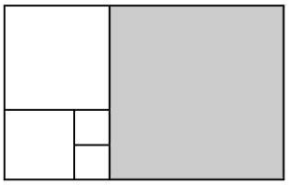
32. Во квадрат се осенчени три дела како на цртежот десно. Заедничката точка на три осенчени дела е еднакво оддалечена од сите страни на квадратот, а вкупната плоштина на осенчените делови е еднаква на третина од плоштината на квадратот. Колкав дел од периметарот на квадратот е збирот $a+b+c+d$?



33. Даден е квадрат $ABCD$. Над страната AB е конструиран рамностран триаголник ABE така што точката E е во внатрешноста на квадратот. Правата DE ја сече страната BC во точката F. Определи го $\measuredangle BEF$.

34. За колку проценти ќе се промени плоштината на правоаголникот ако едната негова страна се намали за 10%, а другата негова страна се зголеми за 10%.

35. Правоаголник е поделен на пет квадрати како на цртежот десно. Определи го процентот на површината на делот од правоаголникот правоаголникот кој е осенчен.



36. Во градина во форма на правоаголник $ABCD$ расте јаболкница која од темето A е оддалечена $70\,m$, од темето B е оддалечена $20\,m$ и од темето C е оддалечена $60\,m$. Колку метри јаболкницата е оддалечена од темето D.

37. Во квадрат $ABCD$ со страна a е впишана кружница k им околу темињата A и B се опишани кружници k_1 и k_2 со радиуси $r=\frac{a}{2}$. Пресметај ја плоштината на делот од квадратот кој е во внатрешноста на кружницата k и е надвор од кружниците k_1 и k_2.

38. Во правоаголникот $ABCD$ точката M е средина на отсечката AB, а точката E е пресек на дијагоналата AC и отсечката DM. Ако $\overline{AB}=\sqrt{2}\,cm$ и $\overline{BC}=1\,cm$, докажи дека $\measuredangle CED$ е прав.

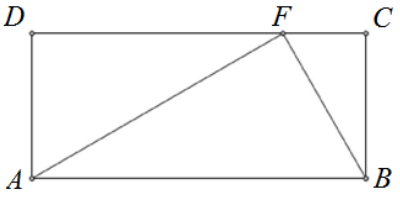
39. Во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е дадена точка T. Отсечките кои ја поврзуваат точката T со темињата на правоаголникот го

делат четириаголникот на четири триаголници. Плоштините на три од овие триаголници се $15\,cm^2, 54\,cm^2, 75\,cm^2$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

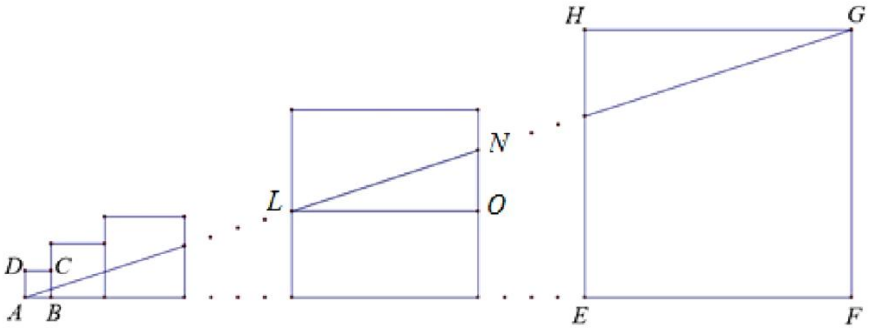
40. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $\overline{AB}=16\,cm$ и $\overline{BC}=12\,cm$. Дијагоналите на правоаголникот се сечат во точката S. На страната AB на правоаголникот $ABCD$ е земена точка E која е еднакво оддалечена од точките A и S. Определи ја плоштината на триаголникот AES.

41. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка E на страната BC. Отсечката DE го дели правоаголникот $ABCD$ на два дела чии плоштини се однесуваат како $6:1$. Определи го односот на должините на отсечките CE и BE.

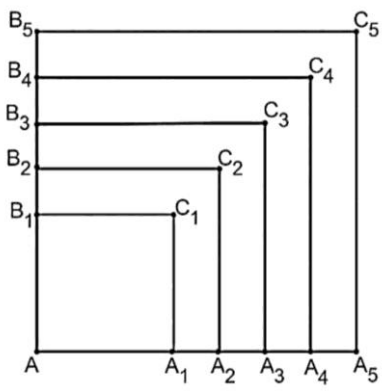
42. На цртежот десно се прикажани правоаголник $ABCD$ и триаголник ABF. Определи ја плоштината на триаголникот ABF ако важи $\measuredangle AFD = \measuredangle FBC$, $\overline{DF}=6\,cm$ и $\overline{CF}=2\,cm$.



43. Дадени се $2n+1, n\in\mathbb{N}$ квадрати, така што должината на страната на квадратот $ABCD$ е $1\,cm$, а должината на страната на секој следен квадрат е за $1\,cm$ поголема од должината на претходниот квадрат (вид цртеж). Отсечката AG ги сече сите квадрати. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголниот триаголник LON во средниот по големина квадрат, каде отсечката LN е пресекот на отсечката AG и средниот квадрат.



44. Марко нацртал квадрат $AA_1C_1B_1$ и многуаголници $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$, $A_2A_3C_3B_3B_2C_2$, $A_3A_4C_4B_4B_3C_3$, $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$, на кои соседните страни се заемно нормални и при што важи $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_5} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4} = \overline{B_4B_5}$, (цртеж десно). Ако плоштината на многуаголникот $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$ е еднаква на $80\,cm^2$, а плоштината на многуаголникот $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ е еднаква на $104\,cm^2$, определи ја плоштината на квадратот $AA_1C_1B_1$.



45. Даден е ромб чија една дијагонала е $90\,cm$, а плоштината му е $5400\,cm^2$. Определи го радиусот на впишаната кружница во ромбот.

46. Должините на дијагоналите на ромбот се разликуваат за $14\,cm$. Ако подолгата дијагонала ја продолжиме за $2\,cm$, а пократката за $8\,cm$, плоштината на ромбот ќе се зголеми за $144\,cm^2$. Определи ги должините на дијагоналите на почетниот ромб.

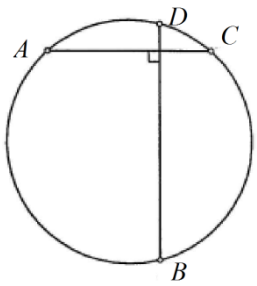
47. Даден е ромб $ABCD$ со остар агол 60°. Права MN отсекува на страните AB и BC отсечки MB и NB чиј збир е еднаков на страната на ромбот. Докажи дека триаголникот MDN е рамностран.

48. Во паралелограмот $ABCD$ страната AB е два пати подолга од страната BC. Нека точката M е средината на страната AB. Докажи дека отсечката CM е нормална на отсечката DM.

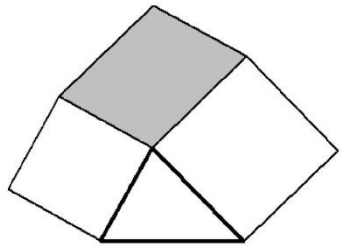
49. Даден е паралелограм $ABCD$ во кој пресекот на дијагоналите е точката S. Периметарот на $\triangle CDS$ е за $5,6\,cm$ помал од периметарот на $\triangle BCS$. Симетралата на $\sphericalangle BAD$ ја сече страната BC во точка M таква што $\overline{BM} : \overline{MC} = 7:4$. Определи ги должините на страните на паралелограмот $ABCD$.

50. Даден е паралелограм $ABCD$: $A(2,1), B(14,1), D(6,5)$. Точката P припаѓа на полуправата AB, а точката S припаѓа на полуправата AD. Должините на страните на паралелограмот $APRS$ се за 25% поголеми од соодветните должини на паралелограмот $ABCD$. Определи ги координатите на темињата на паралелограмот $APRS$. За колку проценти плоштината на паралелограмот $APRS$ е поголема од плоштината на паралелограмот $ABCD$?

51. Нека AC и BD се две заемно нормални тетиви во кружница k кои се сечат како на цртежот десно. Нормалата повлечена од точката A на правата CD ја сече правата BD во точка M, а нормалата повлечена од точката B на правата CD ја сече AC во точката N. Докажи дека четириаголникот $ABNM$ е ромб.



52. Должините на страните на квадратите нацртани над страните на триаголникот на цртежот десно се еднакви на $4\,cm$ и $5\,cm$. Плоштината на триаголникот е еднаква на $8\,cm^2$. Определи ја плоштината на осенчениот паралелограм.



53. Во трапез $ABCD$ краците се $\overline{AD}=3\,cm$ и $\overline{BC}=4\,cm$, пократката основа е $\overline{CD}=4\,cm$ и дијагоналата $\overline{AC}=4\,cm$. Определи ја должината на дијагоналата BD.

54. Периметарот на трапезот е еднаков на $135\,cm$. Подолгиот крак на трапезот е долг $36\,cm$ и тој зафаќа со пократката основа агол од 150°. Пократкиот крак на трапезот е еднаков на пократката основа и неговата должина изнесува 60% од должината на подолгата основа. Определи ја плоштината на овој трапез.

55. Аглите на поголемата основа на трапезот се по 60°, а неговиот пе-

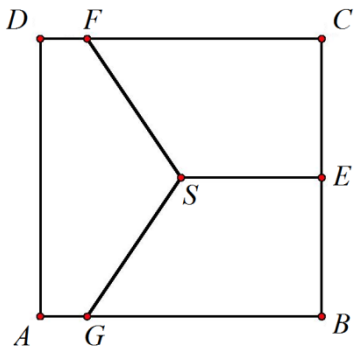
риметар е $200\,cm$. Определи ја должината на поголемата основа на трапезот така што неговата плоштина ќе биде максимална.

56. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=5\,cm$ и $\overline{CD}=3\,cm$. Дијагоналата AC е нормална на кракот BC, а дијагоналата BD е симетрала на аголот при подолгата основа. Определи ја висината на трапезот $ABCD$.

57. Даден е трапез $ABCD$ во кој е впишана кружница која подолгата основа ја допира во точка G таква што $\overline{AG}=15\,cm$ и $\overline{BG}=10\,cm$, а пократката основа е $\overline{CD}=8\,cm$. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

58. Дадени се точките $A(2;-4)$ и $B(3;1,5)$. Точката C централно е симетрична на точката B во однос на координатниот почеток $O(0,0)$, а точката D е осносиметрична на точката A во однос на $y-$оската. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

59. Квадрат $ABCD$ со страна $1\,m$ е поделен на два складни четириаголници и еден петаголник како на цртежот десно. Двата четириаголници и петаголникот имаат еднакви плоштини. Ако точката S е средината на квадратот , определи ја должината на отсечката FC.



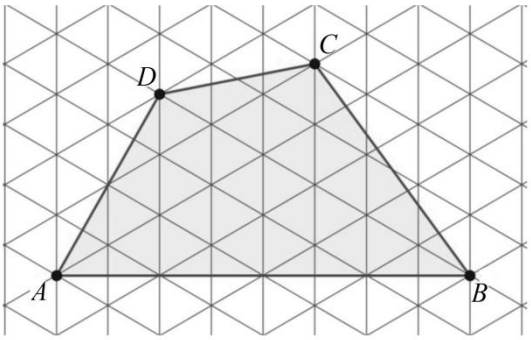
60. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ со основи AB и CD се сечат во точката S. Со P, P_1 и P_2 да ги означиме плоштините на трапезот $ABCD$, триаголнико ABS и триаголникот CDS. Докажи дека

$$P=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})^2.$$

61. Нека $ABCD$ е трапез кај кој едната основа е два пати подолга од другата основа. Ако M и N се средини на неговите дијагонали, докажи дека должината на отсечката MN е еднаква на половина од

должината на пократката основа.

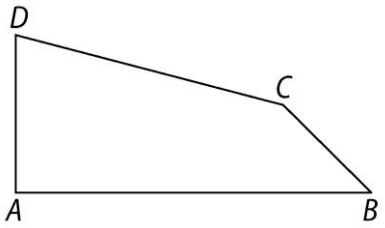
62. Во мрежата формирана од рамностранитриаголници со страна $1\,cm$ е нацртан четириаголник $ABCD$, цртеж десно. Определи ги плоштината и периметарот на овој четириаголник.



63. Во четириаголникот $ABCD$ (види цртеж) е:

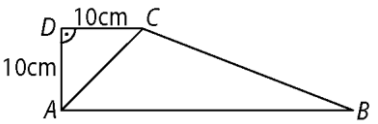
$AB \perp AD$ и $\measuredangle ABC = 45^\circ$.

Ако важи $\overline{AB} = 15\,cm$, $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,cm$ и $\overline{AD} = 8\,cm$, определи ја должината на страната CD.



64. Продавницата во која Горјан го купил телевизорот продава само телевизори во кои размерот на должината и ширината на екранот е 7:4. Ако дијагоналата на екранот на телевизотор на Горјан е еднаква на $10\sqrt{65}\,cm$, определи ги должината и ширината на екранот.

65. На цртежот десно е прикажан трапез $ABCD$. Плоштината на триаголникот ACD е пет пати помала од плоштината на триаголникот ABC. Определи ги плоштината и периметарот на трапезот $ABCD$.



66. Должините на основите на трапезот се $5{,}1\,cm$ и $4\frac{1}{4}\,cm$, а должината на едниот крак е еднаква на $4\,cm$. Колку треба да се продолжи овој крак за да се дојде до пресекот на продолжението на другиот крак?

67. Даден е трапез со основи $50\,cm$ и $14\,cm$, а краци $25\,cm$ и $29\,cm$.

Определи ја плоштината на овој трапез.

68. Пресметај ја плоштината на трапезот кај кој должината на едниот крак е $8\,cm$, а растојанието од средината на другиот крак до даденият крак е $6\,cm$.

69. Ако краците на трапезот се заемно нормални, докажи дека збирот на квадратите на неговите дијагонали е еднаков на збирот на квадратите на неговите основи.

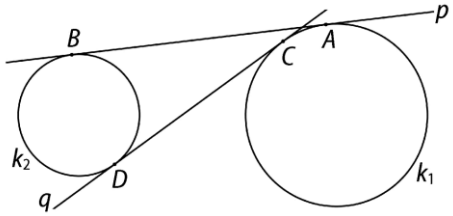
70. Определи ја плоштината на трапез со дијагонали $25\,cm$ и $26\,cm$ и висина $25\,cm$.

71. Плоштината на конвексниот четириаголник $ABCD$ е еднаква на $20\,cm^2$. Нека K, L, M и N се редоследно точки на правите AB, BC, CD и DA такви што точките B, C, D и A се средини на отсечките AK, BL, CM и DN. Определи ја плоштината на четириаголникот $KLMN$.

V.3. КРУЖНИЦА И КРУГ

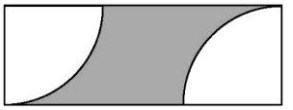
72. Дадени се отсечките AB и CD. Отсечката AB се гледа од точките C и D под агол од 30°. Отсечката CD се гледа од точките A и B под агол од 60°. Определи ја должината на отсечката AB ако должината на отсечката CD е $10\sqrt{3}\,cm$.

73. Правата p ги допира кружниците k_1 и k_2 во точките A и B, а правата q во точките C и D (види цртеж). Ако радиусот на кружницата k_1 е еднаков на $3\,cm$, а радиусот на кружницата k_2 е еднаков на $2\,cm$, определи ја вредноста на изразот $\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2$.

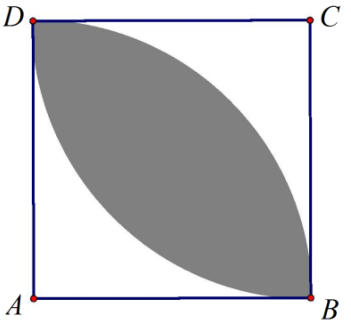


74. Во кружница со радиус $r=3\,cm$ впиши триаголник чии два внатрешни агли се еднакви на 45°. Колку проценти од плоштината на кругот зафаќа плоштината на тој триаголник?

75. На цртежот десно е даден правоаголник со страни $5\,cm$ и $14\,cm$. Определи го периметарот на осенчената фигура.



76. Во квадрат со страна a е нацртан лист како на цртежот десно. Определи ја плоштината на листот. Колкав дел од плоштината на квадратот е плоштината на листот?



77. На цртежот десно е прикажан квадрат со должина на страна $6\,cm$. Определи ја плоштината на штрафираниот дел на овој квадрат.

78. Во дадена кружница нацртај два заемно нормални дијаметри AB и CD, а потоа кружница со центар во A и радиус $\overline{AC}$. Спореди ги плоштините на триаголникот ACD и фигурата ограничена со помалиот лак CD на големата кружница и лакот CBD на малата кружница.

79. Во крајните точки A и B на дијаметарот AB, $\overline{AB}=2r$ на даден полукруг се опишани кружници со радиуси r. Определи ја плоштината на делот од полукругот определен со кружницата која ги допира полукружницата и двете кружници.

80. Дадена е полукружница со дијаметра $\overline{AB}=12\,cm$. Подели ја оваа полукружница на три еднакви лаци AC, CD, DB, па пресметај ја плоштината ограничена со лакот CD и тетивите AC и AD.

81. Дадена е отсечка AB со должина $4\,cm$. Нека M е една од пресечните

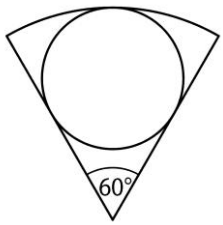
точки на кружниците со центри во A и B и радиуси $4\,cm$. Во така добиениот „криволиниски триаголник“ е впишана кружница. Определи го радиусот на оваа кружница.

82. Даден е правоаголен триаголник ABC таков што $\measuredangle A = 30^\circ$.
а) Ако S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC определи го $\measuredangle BSC$.
б) Должината на помалата катета на триаголникот ABC е $5\,cm$. Определи ја разликата на опишаната кружница околу триаголникот ABC и неговиот периметар.

83. а) Конструирај ромб $ABCD$ со страна $a = 4\,cm$ и внатрешен агол во темето A еднаков на 60°.
б) Нека S е пресекот на дијагоналите на ромбот и k е кружницата со центар во S која минува низ темињата B и D. Докажи дека k минува низ средината на секоја страна на ромбот $ABCD$.
в) Пресметај ја плоштината на оној дел од кругот кој се наоѓа надвор од ромбот $ABCD$.

84. На отсечката AB се дадени точките M, N, P, Q во овој редослед која отсечката ја делат на пет еднакви дела. Над отсечката AB се конструирани пет полукружници чии дијаметри се отсечките AM, AN, AP, AQ и AB, а под отсечката AB се конструирани пет полукружници чии дијаметри се отсечките AB, MB, NB, PB и QB. Со тоа кругот чиј дијаметар е AB е поделен на пет делови. Докажи:
а) сите пет дела имаат еднаква плоштина,
б) сите пет дела имаат еднакви периметри, кои се еднакви на периметарот на големиот круг.

85. Определи ја плоштината на кругот впишан во кружен исечок со плоштина $150\pi\,cm^2$ чиј централен агол е 60°.



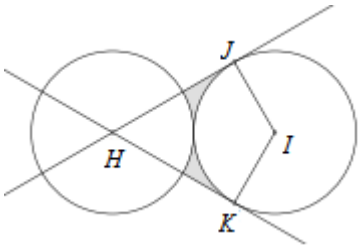
86. Кружниците k_1 и k_2 се допираат надворешно. Односот на нивните радиуси е 2:1. Заедничката тангента ја допира кружницата k_1 во

точката T, а кружницата k_2 во точката R. Определи го односот на должината на отсечката TR и должината на радиусот на поголемата кружница?

87. Нека A и B се две точки на кружницата $k_1(C,r)$ кои не се дијаметрално спротивни. Правата p минува низ точката C и е паралелна со правата AB, а правата q минува низ точката A и е паралелна со правата BC. Нека D е пресечната точка на правата q и кружницата $k_2(A,\overline{AB})$. Докажи дека правите p и DB се сечат на кружницата k_1.

88. Во кружен исечок со централен агол 90° е впишан квадрат така што едното теме е во центарот на кружниот исечок. Определи го односот на плоштините на квадратот и кружниот исечок.

89. Две кружници со еднакви радиуси се допираат надворешно. Од центарот на едната кружница се повлечени тангенти на другата кружница. Определи го односот на плоштината на четириаголникот чии темиња се центрите на кружниците и допирните точки на тангентите и плоштината на ликот определен со тангентите и круговите определени со дадените кружници (осенчениот дел на цртежот).



90. Нека A,B,C,D,E се точки во рамнината такви што:
- точката A е еднакво оддалечена од точките B,C,D,E и тоа растојание е 1,
- точката C е еднакво оддалечена од точките B и D и тоа растојание е еднакво на $\frac{1}{2}$,
- растојанието меѓу точките B и E е 2.

Определи ги преостанатите растојанија меѓу овие точки.

91. Околу рамностран триаголник ABC е опишана кружница. Помала кружница внатрешно ја допира поголемата кружница и страната AB на триаголникот ABC. Определи го односот на плоштиние на поголемиот и помалиот круг ограничени со овие кружници.

92. Односот на должината на основата на рамнокрак триаголник и радиусот на впишаната кружница во тој триаголник е еднаков на $4:1$. Определи го односот на плоштините на триаголникот и впишаната во него кружница.

V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

93. Даден се точки $A(0,4)$ и $B(-1,5)$. На правата $y=-x$ определи точка P таква што збирот на должините на отсечките AP и BP е најмал.

94. Во правоаголен координатен систем во рамнината се дадени точките $A(-4,-2), B(-3,1), C(-2,-1), D(0,-6)$ и $E(-1,1)$. Нацртај вектор еднаков на векторот $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ така што точката E е неговата почетна точка. Определи ги координатите на крајната точка F на така добиениот вектор $\overrightarrow{EF}$.

95. Конструирај триаголник ако се дадени висината и тежишната линија кои соодветствуваат на иста страна и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

96. Дадена е кружница k и нејзин дијаметар AB. Центарот на кружницата не е означен. Од дадена точка M повлечи нормала на правата AB користејќи само еден линијар. Разгледај ги случаите кога
а) точката M е надвор од дадената кружница,
б) точката M е внатре во дадената кружница.

97. Конструирај триаголник ABC ако се дадени средината F на страната AC, средината D на страната BC и подножјето H на висината повлечена од темето A на страната BC.

98. Конструирај триаголник ABC ако се дадени подножјето E на висината повлечена од темето A кон страната BC, подножјето F на висината повлечена од темето B кон страната AC и две произволни точки M и N од правата AB

99. Дадена е страната $b=10\,cm$ и збирот на дијагоналата и другата страна $a+d=15\,cm$ на правоаголник. Конструирај го овој правоаголник.

100. Дадена е права p и две точки D и M такви што $D\in p$ и $M\notin p$. Конструирај кружница која минува низ точката M и во точката D ја допира правата p.

101. Дадена е кружница k и две точки E и M такви што $E\in k$ и $M\notin k$. Конструирај кружница која ја допира кружницата k во точката E и минува низ точката M.

102. Тежиштето T на триаголникот ABC припаѓа на кружницата конструирана над страната AB како над дијаметар и важи $\sphericalangle TAB=30^\circ$.
а) Конструирај го триаголникот ABC ако $\overline{AB}=c=8\,cm$.
б) Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

103. Правите a и b се сечат во точката A под агол од 30° и на правата b е земена точка B така што $\overline{AB}=4\,cm$. Конструирај кружница која минува низ точката B, а правата a ја допира во точката A. Пресметај ги периметарот и плоштината на кругот определен со оваа кружница.

V.5. СТЕРЕОМЕТРИЈА

104. Точките A и B се наоѓаат на различни страни на рамнината α. Точката A од рамнината α е оддалечена $4\,cm$. Точката B од рамнината α е оддалечена $8\,cm$. Определи ја должината на отсечката AB, ако должината на нејзината ортогонална проекција е еднаква на $9\,cm$.

105. Ако ширината на еден квадар се зголеми за 25%, должината се зголеми за една своја третина и висината се намали за 10%, за колку проценти ќе се зголеми волуменот на тој квадар?

106. Димензиите на еден квадар се $3\,cm, 4\,cm$ и $12\,cm$. Определи го раб на коцка таква што плоштините на овие две тела се однесуваат како нивните волумени.

107. Определи го волуменот на права призма со висина $5\,cm$ и основа трапез $ABCD$ со дијагонали $\overline{AC}=17\,cm$ и $\overline{BD}=113\,cm$, а висината на трапезот е $15\,cm$.

108. Парче мраз добиено од дестилирана вода, кое има форма на квадар со димензии $0,6\,m$, $0,6\,m$ и $0,4\,m$, е ставено во цилиндричен сад со дијаметар $90\,cm$. Колкава ќе биде висината на слојот на водата во тој сад откако мразот ќе се стопи? Специфичната тежина на мразот е $0,92\,g/cm^3$.

109. Сад во форма на рамностран цилиндар, кој има дијаметар $10\,cm$, е наполнет со вода до $\frac{11}{12}$ од неговата висина. Определи го радиусот на најголемата топка која може да се потопи во водата и да не дојде до прелевање на водата.

110. Вода која се наоѓа во конусен сад со висина $0,18\,m$ и дијаметар на основата $0,24\,m$, се претура во цилиндричен сад со дијаметар на основата $0,1\,m$. До која висина ќе се наоѓа водата во цилиндричниот сад?

111. Омотачот на правилен конус е развиен во рамнина и е добиен кружен исечок со централен агол 36° и плоштина $110\pi\,cm^2$. Определи ги плоштината и волуменот овој конус.

112. Основата на конусот има плоштина $7\pi\,cm^2$. Кога ќе се развие омотачот на конусот се добива осмина круг. Определи ги плоштината и волуменот на овој конус.

113. На земјиште во форма на квадрат со страна $12\,m$ се копа цилиндрична јама со дијаметар $8\,m$. Ископаната земја рамномерно се растура на

преостанатиот дел од земјиштето и силно се набива. Колку длабоко треба да копаме за да јамата биде длабока $3\,m$.

114. Рамнина нормална на основата на прав цилиндар отсекува на основата тетива долга $6\,cm$. На оваа тетива и соодветствува централен агол од 120°. Определи го волуменот на помалиот дел на цилиндарот, поделен со оваа рамнина, ако висината на цилиндарот е еднаква на дијаметарот на основата.

115. Ромб со дијагонали $8\,cm$ и $6\,cm$ ротира околу едната своја страна. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

116. Дадена е права со равенка $3x+4y=10$. Определи ги:

а) должината на отсечокот MN на таа права меѓу координатните оски,

б) растојанието од координатниот почеток до таа права,

в) волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот MNO околу страната MN.

117. Паралелно со оската на прав цилиндар е поставена рамнина која основата на цилиндарот ја сече во тетива која соодветствува на централен агол од 90°.

а) Определи го односот на волумените на деловите на кои е поделен цилиндарот.

б) Определи го односот на плоштините на деловите на кои е поделен цилиндарот, ако цилиндарот е рамностран.

118. Дадена е отсечка $\overline{MN}=2a$.

а) Конструирај полукружница над дијаметар MN и на неа определи точка P која оваа полукружница ја дели во однос $1:2$.

б) Изрази ги периметарот и плоштината на триаголникот MNP во функција од a.

в) Определи ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот MNP околу страната MN.

г) Определи го односот на волумените на телата кои се добиваат со ротација на триаголникот MNP околу страните MN и MP.

119. Триаголник е ограничен со апсцисната оска и правите чии равенки се $5x+12y=60$ и $3x+4y=12$. Определи ги:

а) координатите на темињата на овој триаголникот,

б) плоштината на овој триаголник,

в) периметарот на овој триаголник,

г) волуменот и плоштината на телото кое се добива со ротација на овој триаголник околу апсцисната оска.

120. Чиграта се состои од полутопка и конус кои имаат заедничка основа (круг). Радиусот на полутопката е $2\,dm$, а висината на конусот во сантиметри е решение на равенката

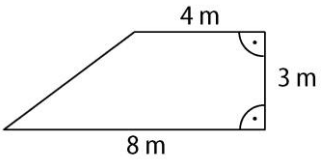
$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{2x+\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}}+x+10=0.$$

Определи ги плоштината и волуменот на чиграта.

121. Дадена е тристрана пирамида $ABCD$ со рабови $\overline{AB}=5\,cm$, $\overline{AC}=3\,cm$, $\overline{BC}=4\,cm$, $\overline{BD}=4\,cm$, $\overline{AD}=3\,cm$, $\overline{CD}=\frac{12}{5}\sqrt{2}\,cm$. Рамнината, која минува низ правата AB и е нормална на CD, ја сече отсечката CD во точката M. Рамнината, која минува низ правата CD и е нормална на AB, ја сече AB во точката N. Определи ја должината на отсечката MN.

122. Бочниот ѕид на правилна тристрана пирамида е рамнокрак триаголник со агол од 30° при врвот. Должината на бочниот раб е $8\,cm$. Определи ја плоштината на оваа пирамида.

123. За основа на бетонски столб, столбот е во вид на права призма, потребно е да се ископа дупка длабока $1{,}5\,m$ (основата е прикажана на цртежот десно). За колку часови дупката ќе ја ископаат тројца работници ако секој од нив копа по $0{,}75\,m^3$ за еден час?



124. Основата на права четиристрана призма е ромб со страна со должина $12\,cm$ и остар агол 60°. Определи го волуменот на оваа призма ако

висината е еднаква на половина од подолгата дијагонала на ромбот во основата.

125. Основата на тристрана пирамида $ABCS$ е рамнокрак правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B, а нормалната проекција на врвот S на рамнината на основата е средината D на работ AC. Ако бочниот ѕид ACS е правоаголен триаголник со прав агол во темето S и $\overline{SD} = \sqrt{2}\,cm$, определи ја плоштината на пирамидата $ABCS$.

126. Дадена е правилна тристрана призма $ABCA'B'C'$. Нека D е точка на работ AA' таква што $\overline{AD} : \overline{DA'} = 4:1$. Нека E и F се односиметрични точки на темињата B' и C' во однос на правата BC. Во кој однос рамнината DEF го дели волуменот на призмата?

127. Малиот дијагонален пресек на правилна шестстрана пирамида е рамностран триаголник со периметар $18\sqrt{3}\,cm$. Определи го волуменот на оваа пирамида.

128. Определи го волуменот на правилна осумстрана призма чиј најголем дијагонален пресек е квадрат со должина на страна $12\,cm$.

V.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

129. Во петаголникот $ABCDE$ важи $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 2\overline{DE} = 2\overline{AE} = 6\,cm$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle E = 120^\circ$. Определи ја плоштината на овој петаголник.

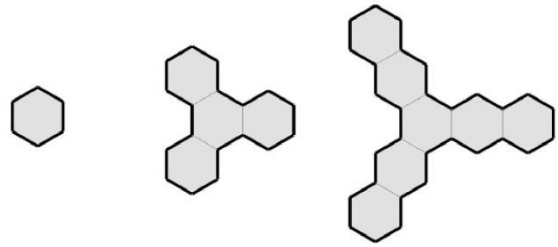
130. Средините на страните на правилен шестаголник се темиња на нов шестаголник. Определи го односот на плоштините на овие шестаголници.

131. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник со страна 1. Со X, Y, Z да ги означиме средините на страните AB, CD, EF, соодветно. Определи ги периметарот и плоштината на шестаголникот кој се добива во пресекот на триаголниците ACE и XYZ.

132. Определи го аголот меѓу дијагоналите AD и CG во правилниот осумаголник $ABCDEFGH$.

133. Даден е правилен петаголник $ABCDE$. Над страните на петаголникот, надвор од него, се конструирани рамнокраки правоаголни триаголници ABG, BCH, CDI, DEJ, EAK така што правите агли на триаголниците се во темињата на петаголникот. Докажи дека $GHIJK$ е правилен петаголник.

134. На цртежот десно се прикажани првите три фигури на низата фигури формирана од правилни шестаголници. Низата ја продолжуваме според истото правило.



а) Дали некоја фигура во низата може да биде составена од 2021 правилни шестаголници?

б) Определи го периметарот на 2021-та фигура во низата, ако периметарот на шестаголникот е $30\,cm$.

135. Колкав е најмалиот можен збир на четири внатрешни агли на конвексен седумаголник чии мери на аглите изразени во степени се природни броеви?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I. АЛГЕБРА

I.1. РАЦИОНАЛНИ И ИРАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

1. Која е 2021-та цифра по децималната запирка на бројот $\frac{20}{21}$?

   Решение. Имаме, $\frac{20}{21}=0,952380\ 952380...=0,952380\,(952380)$. Значи, периодот има 6 цифри и како $2021=6\cdot 336+5$, добиваме дека 2021-та цифра по децималната запирка на бројот $\frac{20}{21}$ е петтата цифра на периодот, т.е. тоа е цифрата 8.

2. Определи ја 2019-тата цифра по децималната запирка во децималниот запис на дропката $\frac{21}{26}$.

   Решение. Имаме, $\frac{21}{26}=21:26=0,8076923076923(076923)$. Според тоа, периодот има 6 цифри (076923). Првата цифра по децималната запирка е 8 и таа не се повторува. Сега, $2019-1=2018=336\cdot 6+2$, па затоа 2019-тата цифра по децималната запирка во децималниот запис на дропката $\frac{21}{26}$ е втората цифра од периодот,а тоа е цифрата 7.

3. Докажи дека бројот
   а) 0,185185185...
   б) 2,01020102010...
   е рационален и претстави го во вид на дропка.
   Решение. а) Нека $0,185185185...=x$. Тогаш $185,185185...=1000x$. Ако ги одземеме овие две равенства добиваме $185=999x$, од каде следува $x=\frac{185}{999}$, што значи дека дадениот број е рационален.
   б) Нека $2,01020102010...=x$. Тогаш $20102,0102010...=10000x$. Ако ги одземеме овие две равенства добиваме $20100=9999x$, од каде следува $x=\frac{20100}{9999}$, што значи дека дадениот број е рационален.

4. Ако x, y, z се реални броеви такви што xy, yz, zx се рационални броеви различни од нула, докажи дека бројот $x^2+y^2+z^2$ е рационален.

Решение. Броевите xy, yz, zx се рационални, па затоа

$$xy=\frac{m}{n}, yz=\frac{a}{b}, zx=\frac{c}{d},\ m,a,c\in\mathbb{Z};\ n,b,d\in\mathbb{N}.$$

Ако ги помножиме добиените равенства наоѓаме $x^2y^2z^2=\frac{mac}{nbd}$, односно $(xyz)^2=\frac{mac}{nbd}$. Понатаму, имаме

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \frac{(xyz)^2}{(yz)^2}+\frac{(xyz)^2}{(zx)^2}+\frac{(xyz)^2}{(xy)^2} \\ &= \frac{\frac{mac}{nbd}}{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{\frac{mac}{nbd}}{\frac{c^2}{d^2}}+\frac{\frac{mac}{nbd}}{\frac{m^2}{n^2}} \\ &= \frac{mbc}{nda}+\frac{mda}{nbc}+\frac{nac}{mbd}. \end{aligned}$$

Бројот $x^2+y^2+z^2$ е претставен како збир на три рационални броја, што значи дека тој е рационален број.

Забелешка. Ако се искористи равенството

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx),$$

од претходите разгледувања следува дека при дадените услови и бројот $(x+y+z)^2$ е рационален.

5. Докажи дека бројот 0,101001000100001... (по секоја единица секој пат има по една нула повеќе) е ирационален.

Решение. Очигледно дадениот број нема конечен децимален запис. Ќе докажеме дека неговиот запис не е ниту периодичен. Навистина, ако записот е периодичен, тогаш почнувајќи од некое место ќе се повторува некоја конечна низа цифри. Нека од некое $m-$то место по децималната запирка се повторува низа од k цифри $\overline{a_1a_2...a_k}$. Нека $N>\max\{m+k,3k+1\}$. Да видиме што се случува на местата по $N-$тата единица по децималната запирка. Тука се наоѓаат N нули. Бидејќи $N>m+k$ тоа значи дека нулите се во делот на бројот кој се повторува. Бидејќи $N>3k+1$ добиваме дека во овие N нули се содржи барем еден период, т.е. низата $\overline{a_1a_2...a_k}$. Но, тоа значи дека сите овие k цифри се нули, односно дека по $m-$тото место се наоѓаат само нули. Последното не е можно бидејќи по децималната запирка има

бесконечно многу единици. Конечно, од добиената противречност следува дека дадениот број нема периодичен децимален запис, па како нема и конечен децимален запис, тој е ирационален.

6. Докажи дека бројот е ирационален:

а) $\sqrt{5}$,

б) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$,

в) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Решение. а) Нека претпоставиме дека бројот $\sqrt{5}$ е рационален. Тоа значи дека $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$ каде $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Со квадрирање добиваме дека $5=\frac{p^2}{q^2}$, односно $p^2=5q^2$. Оттука следува дека $5\mid p^2$ и како 5 е прост број заклучуваме дека $5\mid p$. Нека $p=5a$. Со замена во $p^2=5q^2$, по скратувањето со 5 добиваме $q^2=5a^2$. Од последното равенство следува $5\mid q^2$, па затоа $5\mid q$. Сега, $5\mid p$ и $5\mid q$, па затоа $5\mid \mathrm{NZD}(p,q)=1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $\sqrt{5}$ е ирационален број.

б) Нека претпоставиме дека $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ е рационален број. Тоа значи дека $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ каде $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Последното равенство го квадрираме и добиваме дека $8+2\sqrt{15}=\frac{p^2}{q^2}$, од каде следува

$$\sqrt{15}=\frac{p^2-8q^2}{2q^2},$$

што значи дека $\sqrt{15}$ е рационален број. Последното не е точно, што може да се докаже на потполно аналоген начин како во задачата под а). Од добиената противречност следува дека $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ е ирационален број.

в) Нека претпоставиме дека $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ е рационален број. Тоа значи дека $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{p}{q}$ каде $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Од последното равенство со квадрирање последователно добиваме

$$1+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{p^2}{q^2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{p^2}{q^2}-1$$

$$2+\sqrt{3}=(\frac{p^2}{q^2}-1)^2,$$

$$\sqrt{3}=(\frac{p^2}{q^2}-1)^2-2,$$

што значи дека $\sqrt{3}$ е рационален број. Последното не е точно, што може да се докаже на потполно аналоген начин како во задачата под а). Од добиената противречност следува дека $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ е ирационален број.

7. Дали вредноста на изразот

а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,

б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

е рационален или ирационален број?

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}&=\sqrt{1^2+2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}-\sqrt{1^2-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}\\&=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}\\&=|1+\sqrt{5}|-|1-\sqrt{5}|\\&=1+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)=2.\end{aligned}$$

Според тоа, вредноста на дадениот израз е рационален број.

б) Имаме:

$$\begin{aligned}\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}&=\sqrt{3^2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}-\sqrt{3^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}\\&=|3+\sqrt{2}|-|3-\sqrt{2}|\\&=3+\sqrt{2}-(3-\sqrt{2})\\&=2\sqrt{2},\end{aligned}$$

што значи дека вредноста на дадениот израз е ирационален број.

8. Докажи дека бројот

а) $A=\sqrt{111...111-222...222}$, (200 единици и 100 двојки),

б) $B=\sqrt{444...444+111..111-666...666}$, ($2n$ четворки, $n+1$ единица, n шестки),

е рационален.

Решение. а) Имаме

$$A=\sqrt{\frac{10^{200}-1}{9}-\frac{2(10^{100}-1)}{9}}=\sqrt{\frac{10^{200}-2\cdot 10^{100}+1}{9}}=\sqrt{\frac{(10^{100}-1)^2}{3^2}}=\frac{10^{100}-1}{3},$$

што значи дека дадениот број е рационален.

б) Имаме

$$B=\sqrt{\frac{4(10^{2n}-1)}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}-\frac{6(10^n-1)}{9}}=\sqrt{\frac{4\cdot 10^{2n}-4+10^{n+1}-1-6\cdot 10^n+6}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^n+1}{9}}=\sqrt{\frac{(2\cdot 10^n+1)^2}{3^2}}=\frac{2\cdot 10^n+1}{3},$$

што значи дека дадениот број е рационален.

9. Докажи дека вредноста на изразот

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

е рационален број.

Решение. Ако се искористи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

добиваме:

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\cdot\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{100}-\sqrt{99}}$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}$$

$$=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9,$$

што значи дека вредноста на дадениот израз е ирационален број.

10. Дали постојат рационални броеви x,y,z,t такви што важи

$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека такви броеви постојат. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$x^2+2y^2+z^2+2t^2+2xy\sqrt{2}+2zt\sqrt{2}=5+4\sqrt{2}.$$

Бидејќи $x^2+2y^2+z^2+2t^2$ е рационален, а $2xy\sqrt{2}+2zt\sqrt{2}$ е ирационален број, од последното равенство следува

$$x^2+2y^2+z^2+2t^2=5 \text{ и } 2xy\sqrt{2}+2zt\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$5=x^2+2y^2+z^2+2t^2\geq 2xy\sqrt{2}+2zt\sqrt{2}=4\sqrt{2},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат рационални броеви x,y,z,t за кои важи равенството (1).

11. Докажи дека вредноста на изразот $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$ е рационален број.

Решение. Имаме

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$$

и

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}.$$

Според тоа,

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}\right)^2=2,$$

т.е. вредноста на дадениот израз е рационален број.

12. Докажи дека вредноста на изразот

$$A=\sqrt{2021\cdot 2023\cdot 2025\cdot 2027+16}$$

е рационален број.

Решение. Нека $x=2023$. Тогаш

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{(x-2)x(x+2)(x+4)+16}=\sqrt{(x^2+2x-8)(x^2+2x)+16}\\&=\sqrt{(x^2+2x)^2-8(x^2+2x)+16}=\sqrt{(x^2+2x-4)^2}\\&=x^2+2x-4,\end{aligned}$$

што значи дека вредноста на дадениот израз е рационален број. Поточно, неговата вредност е $2023^2+2\cdot 2023-4=4096571$.

13. Нека a и b се реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Ако a^3 и b^3 се

рационални броеви, докажи дека a и b се рационални броеви.

Решение. Имаме $a+b=1$ и

$$\begin{aligned}1=(a+b)^3&=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+b^3+3ab.\end{aligned}$$

Бидејќи броевите 1, a^3 и b^3 се рационални, од последното равенство следува дека бројот $3ab$ е рационален, што значи дека бројот ab е рационален. Понатаму, од

$$\begin{aligned}a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=(a-b)((a+b)^2-ab)\\&=(a-b)(1-ab),\end{aligned}$$

и фактот дека броевите 1, a^3, b^3 и ab се рационални, следува дека бројот $a-b=p$ е рационален. Сега, од $a+b=1$ и $a-b=p$, добиваме $a=\frac{p+1}{2}$ и $b=\frac{p-1}{2}$, што значи дека броевите a и b се рационални.

I.2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

14. Пресметај ја вредноста D на изразот $a^2-c^2+b^2+2ab$, ако $a=786$, $b=389$ и $c=175$.

Решение. Имаме:

$$a^2-c^2+b^2+2ab=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c),$$

па затоа со замена за бараната вредност добиваме

$$\begin{aligned}D&=(786+389+175)(786+389-175)\\&=1350\cdot 1000\\&=1350000.\end{aligned}$$

15. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{2^{17}+2^{16}+2^{15}+...+2^2+2+1}{2^8+2^7+...+2^2+2+1}:3^3$ е природен број.

Решение. Ако

$$\frac{2^{17}+2^{16}+2^{15}+...+2^2+2+1}{2^8+2^7+...+2^2+2+1}$$

се прошири со $2-1$, добиваме

$$\frac{2^{17}+2^{16}+2^{15}+\ldots+2^2+2+1}{2^8+2^7+\ldots+2^2+2+1}:3^3=\frac{(2-1)(2^{17}+2^{16}+2^{15}+\ldots+2^2+2+1)}{(2-1)(2^8+2^7+\ldots+2^2+2+1)}:3^3$$
$$=\frac{2^{18}-1}{2^9-1}:3^3=\frac{(2^9-1)(2^9+1)}{2^9-1}:3^3$$
$$=(2^9+1):3^3=513:27=19,$$

што и требаше да се докаже.

16. Пресметај 15% од $\frac{1+\frac{11}{24}}{\frac{5}{8}-1,5}$.

Решение. Имаме

$$\frac{1+\frac{11}{24}}{\frac{5}{8}-1,5}=\frac{\frac{24+11}{24}}{\frac{5}{8}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{35}{24}}{\frac{5-12}{8}}=-\frac{\frac{35}{24}}{\frac{7}{8}}=-\frac{5}{3},$$

па затоа

$$15\%\frac{1+\frac{11}{24}}{\frac{5}{8}-1,5}=\frac{15}{100}(-\frac{5}{3})=-\frac{1}{4}.$$

17. Определи ја вредноста на изразот $a^6+3a^2b^2+b^6$ ако $a^2+b^2=1$.

Решение. Имаме

$$1=(a^2+b^2)^3=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$$
$$=a^6+3a^2b^2(a^2+b^2)+b^6$$
$$=a^6+3a^2b^2+b^6.$$

18. Ако $x+y=1$ и $x^2+y^2=2$, пресметај x^4+y^4.

Решение. Имаме $x^2+y^2=2$, па затоа $(x+y)^2-2xy=2$, од каде добиваме $xy=-\frac{1}{2}$. Сега,

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$$
$$=2^2-2\cdot(-\tfrac{1}{2})^2$$
$$=4-2\cdot\tfrac{1}{4}$$
$$=4\tfrac{1}{2}.$$

19. Нека x,y,z се ненултри реални броеви такви што $x+y+z=2025$ и

$xy+yz+zx=xyz$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}&=\frac{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)}{xyz}\\&=\frac{xy(2025-z)+yz(2025-x)+zx(2025-y)}{xyz}\\&=\frac{2025(xy+yz+zx)-3xyz}{xyz}\\&=\frac{2025xyz-3xyz}{xyz}=2022.\end{aligned}$$

20. Нека

$a=2^{2005}-2^{2004}+2^{2003}$, $b=2^{2004}-2^{2006}+2^{2006}$ и $c=3\sqrt{3}\cdot 2^{2003}$.

Докажи дека збирот на квадратите на некои два од овие броеви е еднаков на третиот број.

Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned}a&=2^{2003}(2^2-2+1)=3\cdot 2^{2003},\\b&=2^{2004}(1-2+2^2)=6\cdot 2^{2003},\\c&=3\sqrt{3}\cdot 2^{2003},\end{aligned}$$

ако земеме $A=2^{2003}$, добиваме $a^2=9A^2, b=36A^2, c^2=27A^2$. Според тоа, $a^2+c^2=b^2$.

21. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=\frac{202120212019\cdot 202120212021\cdot 202120212023}{100010001\cdot(202120212021^2-4)}.$$

Решение. Нека $x=202120212021$. Тогаш

$$\begin{aligned}A&=\frac{(x-2)x(x+2)}{100010001(x^2-4)}=\frac{x(x^2-4)}{100010001(x^2-4)}=\frac{x}{100010001}\\&=\frac{202120212021}{100010001}=\frac{2021\cdot 10^8+2021\cdot 10^4+2021}{100010001}\\&=\frac{2021\cdot(10^8+10^8+1)}{100010001}=\frac{2021\cdot 100010001}{100010001}=2021.\end{aligned}$$

22. Дваесет броја се наредени во низа. Познато е дека секој број во низата, освен првиот, е два пати поголем од бројот кој е непосредно запишан пред него. Колку пати збирот на првите десет броја е помал од збирот на последните десет броја?

Решение. Броевите се $x, 2x, 2^2x, ..., 2^9x, 2^{10}x, 2^{11}x, ..., 2^{19}x$. Збирот на првите десет броја е

$$A = x + 2x + 2^2x + ... + 2^9x,$$

а збирот на последните десет броја е

$$\begin{aligned} B &= 2^{10}x + 2^{11}x + 2^{12}x + ... + 2^{19}x \\ &= 2^{10}(x + 2x + 2^2x + ... + 2^9x) \\ &= 2^{10}A, \end{aligned}$$

па затоа збирот на првите десет броја е 2^{10} пати помал од збирот на последните десет броја на низата.

23. Пресметај ја вредноста на изразот

$$143 \cdot 91 \cdot 77 - \sqrt{143} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{77}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 143 \cdot 91 \cdot 77 - \sqrt{143} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{77} &= 13^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2 - \sqrt{13}^2 \cdot \sqrt{11}^2 \cdot \sqrt{7}^2 \\ &= (13 \cdot 11 \cdot 7)^2 - 13 \cdot 11 \cdot 7 \\ &= 1001^2 - 1001 \\ &= 1001(1001 - 1) \\ &= 1001 \cdot 1000 \\ &= 1001000. \end{aligned}$$

24. Упрости го изразот

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{24} + \sqrt{150}}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{2}.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{24} + \sqrt{150}}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{2} &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{4 \cdot 6} + \sqrt{25 \cdot 6}}{\sqrt{2 \cdot 6}} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6}}{\sqrt{2}\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 4. \end{aligned}$$

25. Меѓу кои два последователни природни броја се наоѓа вредноста на изразот $\sqrt{2019 + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{17}}$.

Решение. Имаме

$$\sqrt{2019+2+3+4}<\sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}<\sqrt{2019+3+4+5},$$
$$\sqrt{2028}<\sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}<\sqrt{2031}.$$

Сега, бидејќи $45=\sqrt{2025}<\sqrt{2028}$ и $46=\sqrt{2116}>\sqrt{2031}$, добиваме дека бараните природни броеви се 45 и 46.

26. Определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{22+2\sqrt{21}}+\sqrt{22-2\sqrt{21}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sqrt{22+2\sqrt{21}}+\sqrt{22-2\sqrt{21}} &= \sqrt{\sqrt{21}^2+2\sqrt{21}+1^2}+\sqrt{\sqrt{21}^2-2\sqrt{21}+1^2}\\ &= \sqrt{(\sqrt{21}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{21}-1)^2}\\ &= |\sqrt{21}+1|+|\sqrt{21}-1|\\ &= \sqrt{21}+1+(\sqrt{21}-1)\\ &= 2\sqrt{21},\end{aligned}$$

бидејќи $\sqrt{21}+1>0$ и $\sqrt{21}-1>0$.

27. Ако

$$\frac{1}{a+2019}+\frac{1}{b+2019}+\frac{1}{c+2019}=\frac{3}{2020},$$

пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&\frac{a+2019}{a+2019}+\frac{b+2019}{b+2019}+\frac{c+2019}{c+2019}=3,\\ &\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=3-\frac{2019}{a+2019}+\frac{2019}{b+2019}+\frac{2019}{c+2019},\\ &\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=3-2019\left(\frac{1}{a+2019}+\frac{1}{b+2019}+\frac{1}{c+2019}\right),\\ &\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=3-2019\cdot\frac{3}{2020},\\ &\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=\frac{3\cdot(2020-2019)}{2020},\\ &\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=\frac{3}{2020}.\end{aligned}$$

I.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

28. Меѓу кои последователни цели броеви се наоѓа бројот x ако важи

$$2018:(1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}})=2019?$$

Решение. Последователно добиваме

$$2018:(1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}})=2019,$$

$$2018=2019+\frac{2019}{1+\frac{1}{x}},$$

$$1+\frac{1}{x}=-2019,$$

$$\frac{1}{x}=-2020,$$

$$x=-\frac{1}{2020}.$$

Според тоа, $-1<x<0$, па бараните последователни цели броеви се -1 и 0.

29. Реши ја равенката

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x-1)-1)-1)-1=2.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x-1)-1)-1)-1=2,$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x-1)-1)-1)=3,$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x-1)-1)-1=6,$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x-1)-1)=7,$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x-1)-1=14,$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x-1)=15,$$

$$\frac{1}{2}x-1=30,$$

$$\frac{1}{2}x=31,$$

$$x=62.$$

30. При решавање на равенката $\frac{10x+6}{5}=3-1,6x$, ученикот наместо коефициентот 1,6 пред непознатата на десната страна на равенката запишал некој друг број. Така тој добил за 0,1 помала вредност на непозната x

во однос на вистинската нејзина вредност. Кој број ученикот го запишал наместо бројот 1,6?

Решение. Последователно имаме

$$\begin{aligned}
&\tfrac{10x+6}{5} = 3-1{,}6x,\\
&10x+6 = 15-8x,\\
&18x = 9,\\
&x = 0{,}5.
\end{aligned}$$

Според тоа, ученикот добил вредност $0{,}4$. Ако овој број го ставиме наместо x и наместо 1,6 запишеме непознат број a, добиваме

$$\begin{aligned}
&\tfrac{10\cdot 0{,}4+6}{5} = 3-0{,}4a,\\
&2 = 3-0{,}4a,\\
&0{,}4a = 1,\\
&a = \tfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5.
\end{aligned}$$

Значи, ученикот наместо бројот 1,6 го запишал бројот 2,5.

31. Реши ја равенката

$$\frac{2010}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 2011.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&\frac{2010}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 2011,\\
&1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2010}{2011},\\
&\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2011},\\
&1+\frac{1}{x} = -2011,\\
&\frac{1}{x} = -2012,\\
&x = -\frac{1}{2012}.
\end{aligned}$$

32. За кои вредности на реалниот параметар m равенката

$$\tfrac{3x+4m}{4} - \tfrac{3mx}{2} = m - \tfrac{x-1}{4}$$

има негативни решенија?

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $x(4-6m)=1$

од каде добиваме дека нејзиното решение е $x=\frac{1}{2(2-3m)}$, за $m\neq\frac{2}{3}$. За да $\frac{1}{2(2-3m)}<0$ потребно и доволно е да важи $2-3m<0$, односно $m>\frac{2}{3}$.

33. Определи го реалниот број a така што равенките

$$(2a-\tfrac{2}{3})x=a-\tfrac{x}{3}+4 \text{ и } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-x)=x-\tfrac{x+1}{2}$$

ќе бидат еквивалентни.

Решение. Решението на равенката $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-x)=x-\frac{x+1}{2}$ е $x=\frac{3}{4}$. Според тоа, дадените равенки ќе бидат еквивалентни ако $\frac{4}{3}(2a-\frac{2}{3})=a-\frac{1}{4}+4$. Од последната равенка добиваме $a=\frac{17}{2}$.

34. Реши ја равенката

$$\sqrt{(x-2)^2}=x+5.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$|x-2|=x+5.$$

Ако $x\geq 2$, добиваме $x-2=x+5$ и во овој случај немаме решение.
Ако $x<2$, добиваме $-x+2=x+5$, т.е. $x=-\frac{3}{2}$ и бидејќи $-\frac{3}{2}<2$ ова е решение на почетната равенка.

35. Реши ја равенката

$$||2x-4|-6|+|7-|1-y||=0.$$

Решение. Од својствата на апсолутна вредност следува дека за да биде $||2x-4|-6|+|7-|1-y||=0$ треба да е $||2x-4|-6|=$ и $|7-|1-y||=0$. Од последните две равенки добиваме $|2x-4|=6$ и $|1-y|=7$. Од првата равенка имаме $2x-4=6$ или $2x-4=-6$, па затоа $x=5$ или $x=-1$. Од втората равенка имаме $1-y=7$ или $1-y=-7$, па затоа $y=-6$ или $y=8$. Конечно, решението на равенката е

$$(x,y)\in\{(5,-6),(5,8),(-1,-6),(-1,-8)\}.$$

36. Реши ја равенката

$$|x+|2x-|3x|||=2021.$$

Решение. Ќе разгледаме два случаја:

1) $x \geq 0$ и тогаш равенката го добива видот $|x+|2x-3x||=2021$, од каде добиваме $|x+x|=2021$, па затоа $2x=2021$, т.е. $x=\frac{2021}{2}$ и ова е решение бидејќи $\frac{2021}{2}>0$.
2) $x<0$ и тогаш равенката го добива видот $|x+|2x+3x||=2021$, од каде добиваме $|x-5x|=2021$, па затоа $-4x=2021$, т.е. $x=-\frac{2021}{4}$ и ова е решение бидејќи $-\frac{2021}{4}<0$.

37. Реши ја равенката

$$|2x+21|-|x-20|=2021.$$

Решение. Бидејќи

$$|2x+21|=\begin{cases}2x+21, & x\geq -10,5\\ -2x-21, & x<10,5\end{cases} \text{ и } |x-20|=\begin{cases}x-20, & x\geq 20\\ 20-x, & x<20\end{cases}$$

разликуваме три случаи:

1) За $x \geq 20$ ја добиваме равенката $2x+21-x+20=2021$, чие решение е $x=1980$.
2) За $-10,5 \leq x<20$ ја добиваме равенката $-2x-21-x+20=2021$, чие решение е $x=-\frac{2022}{3}$. Бидејќи $-\frac{2022}{3}<-10,5$ во овој случај немаме решение на почетната равенка.
3) За $-10,5<x$ ја добиваме равенката $-2x-21-20+x=2021$ чие решение е $x=-2062$.

Конечно, решенија на дадената равенка $x=1980$ и $x=-2062$.

38. Определи го збирот на сите решенија на равенката

$$||x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}|=\sqrt{5}.$$

Решение. Имаме

$$|x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}=\sqrt{5} \text{ или } |x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}=-\sqrt{5}.$$

Во првиот случај е $|x-\sqrt{5}|=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, од каде добиваме

$$x-\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{2} \text{ или } x-\sqrt{5}=-\sqrt{5}-\sqrt{2},$$

т.е. $x=2\sqrt{5}+\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}$.

Во вториот случај е $|x-\sqrt{5}|=-\sqrt{5}+\sqrt{2}<0$, па затоа во овој случај немаме решенија на равенката.

Според тоа, равенката има две решенија и нивниот збир е

$$2\sqrt{5}+\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=2\sqrt{5}\,.$$

39. Определи ги a и b ако

$$a+b=ab=\frac{a}{b}\,.$$

Решение. Јасно, $a\neq 0$, бидејќи во спротивно добиваме $b=0$, што не е можно. Понатаму, од $ab=\frac{a}{b}$ следува $b^2=1$, од што добиваме $b=1$ или $b=-1$. За $b=1$, од $a+b=ab$ добиваме $a+1=a$, што не е можно, а за $b=-1$, добиваме $a-1=-a$, од каде наоѓаме $a=-\frac{1}{2}$.

Конечно, решението на системот равенки е $a=-\frac{1}{2}$ и $b=-1$.

40. За кои реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a^{2002}+b^8+c^6+1}{2}=a^{1001}+b^4-c^3-1\,?$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$(a^{1001}-1)^2+(b^4-1)^2+(c^3+1)^2=0\,.$$

Бидејќи збир на квадрати на реални броеви е еднаков на нула ако и само ако сите броеви се еднакви на нула, добиваме

$$a^{1001}-1=b^4-1=c^3+1=0,$$

од каде следува дека $(a,b,c)=(1,1,-1)$ или $(a,b,c)=(1,-1,-1)$.

41. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy+yz=11, \\ yz+zx=17, \\ zx+xy=10. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме равенките на системот добиваме

$$2(xy+yz+zx)=38,$$

т.е.

$$xy+yz+zx=19\,.$$

Сега, ако од последната равенка ја одземеме првата равенка на системот добиваме

$$zx=8.$$

Аналогно постапуваме со втората и третата равенка и добиваме дека даденият систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} xy = 2, \\ yz = 9, \\ zx = 8. \end{cases}$$

Ако ги помножиме равенките на последниот систем, добиваме

$$(xyz)^2 = 2 \cdot 9 \cdot 8,$$

од каде наоѓаме

$$xyz = \pm 12.$$

Сега, од $xyz = 12$ и $yz = 9$ добиваме $x = \frac{4}{3}$. Аналогно наоѓаме дека $y = \frac{3}{2}$ и $z = 6$.

На потполно ист начин од $xyz = -12$ го добиваме решението $x = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{3}{2}$ и $z = -6$.

42. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy + yz = 882, \\ yz + zx = 992, \\ zx + xy = 572. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме равенките на системот добиваме

$$2(xy + yz + zx) = 2446,$$

т.е.

$$xy + yz + zx = 1223.$$

Сега, ако од последната равенка ја одземеме првата равенка на системот добиваме

$$zx = 341.$$

Аналогно постапуваме со втората и третата равенка и добиваме дека дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} xy = 231, \\ yz = 651, \\ zx = 341. \end{cases}$$

Ако ги помножиме равенките на последниот систем, добиваме

$$(xyz)^2 = 341 \cdot 231 \cdot 651,$$

од каде наоѓаме

$$xyz = \pm 7161.$$

Сега, од $xyz = 7161$ и $yz = 651$ добиваме $x = 11$. Аналогно наоѓаме де-

ка $y=21$ и $z=31$.

На потполно ист начин од $xyz=-7161$ го добиваме решението $x=-11,\ y=-21$ и $z=-31$.

43. По напознати x,y,z,t реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3x+y+z+t=2a, \\ x+3y+z+t=4b, \\ x+y+3z+t=2b, \\ x+y+z+4t=4a. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме равенките на системот добиваме

$$6x+6y+6z+6t=6a+6b,$$

односно

$$x+y+z+t=a+b. \qquad (1)$$

Ако од првата равенка на системот ја одземеме равенката (1), добиваме $2x=a-b$, од каде наоѓаме $x=\frac{a-b}{2}$. На потполно аналоген начин наоѓаме $y=\frac{3b-a}{2}$, $z=\frac{b-a}{2}$ и $t=\frac{3a-b}{2}$.

44. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3, \end{cases}$$

каде a е реален параметар.

Решение. Имаме

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3(x^2y+xy^2),$$

па затоа првата равенка на системот е еквивалентна со равенката

$$(x+y)^3-3(x^2y+xy^2)=9a^3.$$

Сега, ако во последната равенка замениме од втората равенка на системот, последователно добиваме

$$\begin{aligned} &(x+y)^3-3\cdot 6a^3=9a^3, \\ &(x+y)^3=27a^3, \\ &x+y=3a. \end{aligned}$$

Понатаму, со замена $y=3a-x$ во втората равенка на системот последователно добиваме

$$x^2(3a-x)+x(3a-x)^2=6a^3,$$
$$x^2-3ax+2a^2=0,$$
$$(x-a)(x-2a)=0,$$
$$x_1=a,\ x_2=2a.$$

Конечно, решенијата на дадениот систем се $x_1=a$, $y_1=2a$ и $x_2=2a$, $y_2=a$.

45. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{x+y}{1-xy}+\frac{x-y}{1+xy}=5,\\ \frac{x+y}{1+xy}+\frac{x-y}{1-xy}=4.\end{cases}$$

Решение. Јасно, за да системот има решение потребно е да важи $xy\neq 1$ и $xy\neq -1$. Понатаму, ако секоја од равенките ја помножиме со $(1-xy)(1+xy)$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}2x(1+y^2)=5(1-x^2y^2),\\ 2x(1-y^2)=4(1-x^2y^2).\end{cases}$$

Понатаму, $x=0$ не е решение на системот, па затоа можеме втората равенка на системот да ја поделиме со првата и ја добиваме равенката

$$\frac{1-y^2}{1+y^2}=\frac{4}{5},$$

чии решенија се $y_1=\frac{1}{3}$ и $y_2=-\frac{1}{3}$. Сега лесно се добива дека решенија за x се $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{13}$.

Конечно, решенијата на дадениот систем се

$$(-2+\sqrt{13},\tfrac{1}{3}),(-2-\sqrt{13},\tfrac{1}{3}),(-2+\sqrt{13},-\tfrac{1}{3})\text{ и }(-2-\sqrt{13},-\tfrac{1}{3}).$$

46. Определи ги природните броеви a,b,c,d за кои важи

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{599}{121}.$$

Решение. Имаме

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{599}{121}=4+\frac{115}{121},$$

па затоа $a=4$ и

$$\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{115}{121}, \text{ т.е. } b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{121}{115}=1+\frac{6}{115}.$$

Според тоа, $b=1$ и

$$\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{6}{115}, \text{ т.е. } c+\frac{1}{d}=\frac{115}{6}=19+\frac{1}{6},$$

па затоа $c=19$ и $d=6$.

47. Реши ја неравенката

$$||x|-1|\le 20.$$

Решение. Дадената неравенка последователно е еквивалентна со нераненките

$$-20\le|x|-1\le 20,$$
$$-19\le|x|\le 21.$$

Но, $|x|\ge 0$, па оттука добиваме $0\le|x|\le 21$, односно $-21\le x\le 21$.

I.4. НЕРАВЕНСТВА

48. Даден е бројот $x=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{19}$. Подреди ги по големина броевите $x, x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$.

Решение. Важи $x=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{19}<\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{10}=1$. Сега, од $0<x<1$ следува $x^2<x$ и $x<\frac{1}{x}$. Но, $\frac{1}{x}>1$, па затоа $\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}$. Конечно, $x^2<x<\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}$.

49. Што е поголемо: $(-2)^{300}$ или $(-3)^{200}$?

Решение. Од

$$(-2)^{300}=2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}<9^{100}=(3^2)^{100}=3^{200}=(-3)^{200}$$

следува дека $(-2)^{300}<(-3)^{200}$.

50. Што е поголемо 2^{1991} или 1991^{181}?

Решение. Од

$$2^{1991}=(2^{11})^{181}=2048^{181}>1991^{181},$$

следува дека $2^{1991}>1991^{181}$. .

51. Спореди ги броевите $3^{2007}-2^{3000}$ и $2007\cdot 2^{2007}$.

Решение. Од очигледното неравенство $3^2>2^3$ последователно добиваме

$$3^{2000}>2^{3000},$$
$$3^{2007}>3^7\cdot 2^{3000},$$
$$3^{2007}-2^{3000}>3^7\cdot 2^{3000}-2^{3000},$$
$$3^{2007}-2^{3000}>(3^7-1)\cdot 2^{3000},$$
$$3^{2007}-2^{3000}>2187\cdot 2^{3000},$$
$$3^{2007}-2^{3000}>2007\cdot 2^{2007}$$

52. Спореди ги вредноста на изразот $\frac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}$ и бројот $\sqrt{\frac{79}{25}}$.

Решение. Имаме, $\frac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}=\frac{36\cdot 36\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}=\frac{12^2\cdot 3^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}=\frac{9}{4}$. Бидејќи

$$2025=81\cdot 25>16\cdot 79=1264,$$

добиваме дека $\frac{81}{16}>\frac{79}{25}$, па затоа $\frac{9}{4}>\sqrt{\frac{79}{25}}$, т.е. $\frac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}>\sqrt{\frac{79}{25}}$.

53. Спореди ги дропките

$$\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2} \text{ и } \frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}.$$

Решение. Ако за позитивните реални броеви a,b,c,d важи $ad>bc$, тогаш $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$. Земаме $a=3^{2021}+2, b=c=3^{2022}+2$ и $d=3^{2023}+2$. Тогаш

$$ad=(3^{2021}+2)(3^{2023}+2)=3^{4044}+20\cdot 3^{2021}+4,$$
$$bc=(3^{2022}+2)(3^{2022}+2)=3^{4044}+12\cdot 3^{2021}+4.$$

Сега, бидејќи $20\cdot 3^{2021}>12\cdot 3^{2021}$, добиваме дека $ad>bc$, па затоа $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, односно $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2}>\frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$.

54. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc\,. \qquad (1)$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-6abc\geq 0,$$
$$b(a^2-2ac+c^2)+a(b^2-2bc+c^2)+c(a^2-2ab+b^2)\geq 0,$$
$$b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2\geq 0.$$

Последното неравенство е очигледно точно, што значи дека е точно и неравенството (1).

55. Нека a,b,c,d се реални броеви такви што $a+d=b+c$. Докажи дека

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)\geq 0\,.$$

Решение. Ако прво ги помножиме биномите на левата страна на неравенството, а потоа искористиме дека од условот на задачата следува $a-b=c-d$, добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата:

$$2ac+2bd-2ad-2bc\geq 0,$$
$$-d(a-b)+c(a-b)\geq 0,$$
$$(a-b)(c-d)\geq 0,$$
$$(a-b)^2\geq 0.$$

Последното неравенство очигледно е точно, па затоа е точно и даденото неравенство.

56. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(a+b)}\geq\frac{3}{4}\,.$$

Решение. Последователно ги добиваме еквивалентните неравенства

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(a+b)}\geq\frac{3}{4},$$
$$4a^2(b+c)+4b^2(c+a)+4c^2(a+b)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a),$$
$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\geq 6abc.$$

Сега тврдењето следува од задача 54.

57. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\leq 2(a^3+b^3+c^3)\,.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенството

$$2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-a^2c-b^2c-b^2a-c^2a-c^2b\geq 0,$$
$$a^2(a-b)+a^2(a-c)+b^2(b-c)+b^2(b-a)+c^2(c-a)+c^2(c-b)\geq 0,$$
$$(a-b)(a^2-b^2)+(b-c)(b^2-c^2)+(c-a)(c^2-a^2)\geq 0,$$
$$(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)\geq 0.$$

Последното неравенство очигледно е точно, па затоа е точно и даденото неравенство.

58. Ако за броевите a и b важи $a+10b=1$, колкава е најголемата можна вредност на производот ab? За кои вредности на a и b се достигнува најголемата можна вредност?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} ab&=(1-10b)b=b-10b^2\\ &=-10(b^2-\tfrac{1}{10}b+\tfrac{1}{400}-\tfrac{1}{400})\\ &=-10(b-\tfrac{1}{20})^2+\tfrac{1}{40}\leq\tfrac{1}{40}. \end{aligned}$$

Значи, најголемата можна вредност на производот ab е $\frac{1}{40}$ и истата се достигнува кога $b-\frac{1}{20}=0$, т.е. $b=\frac{1}{20}$. Притоа $a=1-10\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{2}$.

59. Нека x,y,z и $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}}$ се природни броеви. Определи ја најмалата можна вредност на количникот $\frac{x+z}{y}$.

Решение. Од условот на задчата следува $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}}=k, k\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$y+x\sqrt{2}=kz+ky\sqrt{2}\text{, т.е. } \sqrt{2}(x-ky)=kz-y,$$

од каде добиваме

$$x-ky=0 \text{ и } zk-y=0.$$

Сега, $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$, па затоа $y^2=xz$, т.е. $y=\sqrt{xz}$. Понатаму,

$$\frac{x+z}{y}=\frac{x}{\sqrt{xz}}+\frac{z}{\sqrt{xz}}=\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}\geq 2\sqrt{\frac{x}{z}}\sqrt{\frac{z}{x}}=2.$$

Значи, бараната најмала вредност е еднаква на 2 и истата се достиг-

нува за $\frac{x}{z}=\frac{z}{x}$, т.е. $x=z$, од каде заради $y=\sqrt{xz}$ добиваме $x=y=z$.

60. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c важи

$$a^2+5b^2+8c^2+4\geq 4ab+4bc+8c.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^2+5b^2+8c^2+4-4ab-4bc-8c\geq 0,$$
$$a^2-4ab+4b^2+b^2-4bc+4c^2+4c^2-8c+4\geq 0,$$
$$(a-2b)^2+(b-2c)^2+(2c-2)^2\geq 0.$$

Последното неравенство очигледно важи за секои реални броеви a,b,c . Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $c=1, b=2, a=4$.

61. Ако $a,b>0$ и $a+b=1$, докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b})\geq 9.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $1=a+b\geq 2\sqrt{ab}$, па затоа $1\geq 4ab$, т.е. $\frac{1}{ab}\geq 4$. Сега, последователно добиваме

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b}) &= 1+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{ab}\\ &= 1+\tfrac{a+b}{ab}+\tfrac{1}{ab}\\ &= 1+\tfrac{2}{ab}\\ &\geq 1+2\cdot 4=9.\end{aligned}$$

62. Докажи дека за позитивните реални броеви x,y важи

$$x^4+y^3+x^2+y+1>\tfrac{9}{2}xy.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и очигледното неравенство $4\sqrt{6}>9$ следува

$$\begin{aligned}x^4+y^3+x^2+y+1 &= (x^4+1)+(y^3+y)+x^2\\ &\geq 2x^2+2y^2+x^2\\ &= 3x^2+2y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq 2\sqrt{3x^2\cdot 2y^2}\\&=2xy\sqrt{6}\\&>2xy\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}xy.\end{aligned}$$

63. Нека $a,b,c\geq 0$. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. *Прв начин*. Воведуваме смени

$$x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b.$$

Ако ги собереме овие неравенства, добиваме

$$x+y+z=2(a+b+c),\ \text{т.е. } a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z).$$

Според тоа, $a+x=\frac{1}{2}(x+y+z)$, па затоа $a=\frac{1}{2}(y+z-x)$. Аналогно се добива $b=\frac{1}{2}(x+z-y)$ и $c=\frac{1}{2}(x+y-z)$. Понатаму, ако ги искористиме овие смени и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{z+y-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\\&=\left(\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{x}{2z}\right)+\left(\frac{y}{2z}+\frac{z}{2y}\right)-\frac{3}{2}\\&\geq 2\sqrt{\frac{y}{2x}\cdot\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{z}{2x}\cdot\frac{x}{2z}}+2\sqrt{\frac{y}{2z}\cdot\frac{z}{2y}}-\frac{3}{2}\\&=1+1+1-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Втор начин. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{9}{2},\\&\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2},\\&2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9,\\&\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}.\end{aligned}$$

Јасно, последното неравенство е неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за броевите $a+b,b+c,c+a$, што значи дека е точно, па затоа е точно и почетното неравенство.

64. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\sqrt{abc}\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right)\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за позитивни реални броеви x,y имаме $\frac{x+y}{2}\le\sqrt{xy}$, што значи $\frac{2}{x+y}\le\frac{1}{\sqrt{xy}}$. Според тоа,

$$\begin{aligned}\sqrt{abc}\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right)&\le\sqrt{abc}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)\\&=\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{ca}}\\&=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

65. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи

$$a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ca})+c(c-\sqrt{ab})\ge 0\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ca})+c(c-\sqrt{ab})&\ge a\left(a-\frac{b+c}{2}\right)+b\left(b-\frac{c+a}{2}\right)+c\left(c-\frac{a+b}{2}\right)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=\tfrac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\ge 0.\end{aligned}$$

66. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека важи

$$\frac{a-1}{b+1}+\frac{b-1}{c+1}+\frac{c-1}{a+1}\ge 0\,.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}&(a+1)(b^2-1)+(b+1)(c^2-1)+(c+1)(a^2-1)\ge 0,\\&ab^2+bc^2+ca^2+a^2+b^2+c^2-a-b-c\ge 3,\\&ab^2+bc^2+ca^2+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+a+b+c\ge 6\,.\qquad(1)\end{aligned}$$

Според тоа, за да го докажеме даденото неравенство доволно е да го докажеме неравенството (1). Јасно,

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0\,,$$

а од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата имаме

$$ab^2+bc^2+ca^2+a+b+c \geq 6\sqrt[6]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2\cdot a\cdot b\cdot c}$$
$$=6\sqrt[6]{(abc)^4}=6.$$

Конечно, ако ги собереме последните две неравенства, го добиваме неравенството (1).

67. Докажи дека за должините на страните на триаголникот a,b,c важи
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\,.$$

Решение. Бидејќи a,b,c се страни на триаголник, добиваме
$$a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0.$$

Сега, ако се искористи неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}=$$
$$=\frac{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}}{2}+\frac{\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}}{2}+\frac{\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}}{2}$$
$$\leq\sqrt{\frac{\sqrt{a+b-c}^2+\sqrt{b+c-a}^2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{b+c-a}^2+\sqrt{c+a-b}^2}{2}}^2+\sqrt{\frac{\sqrt{c+a-b}^2+\sqrt{a+b-c}^2}{2}}$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b+c-a}=\sqrt{c+a-b}$, т.е. ако и само ако $a=b=c$, што значи ако и само ако триаголникот е рамностран.

68. Нека a и b се катети, а c е хипотенуза на правоаголен триаголник. Дакажи дека важи
$$(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b})\geq 3+2\sqrt{2}\,.$$

Решение. Од Питагоровата теорема и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина последователно добиваме

$$(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b})=\frac{a+c}{a}\cdot\frac{b+c}{a}=\frac{c^2+ab+c(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{c^2}{ab}+1+\frac{c(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{a^2+b^2}{ab}+1+\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$
$$\geq\frac{2ab}{ab}+1+\frac{2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{2ab}}{ab}$$
$$=3+2\sqrt{2},$$

што и требаше да се докаже.

69. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека:

$$a^9+b^9+c^9 \geq a^5b^3c+b^5c^3a+c^5a^3b\,,$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за девет броја следува

$$\tfrac{5}{9}a^9+\tfrac{3}{9}b^9+\tfrac{1}{9}c^9 \geq \sqrt[9]{(a^9)^5(b^9)^3c^9}=a^5b^3c,$$
$$\tfrac{1}{9}a^9+\tfrac{5}{9}b^9+\tfrac{3}{9}c^9 \geq \sqrt[9]{(b^9)^5(c^9)^3a^9}=b^5c^3a,$$
$$\tfrac{3}{9}a^9+\tfrac{1}{9}b^9+\tfrac{5}{9}c^9 \geq \sqrt[9]{(c^9)^5(a^9)^3b^9}=c^5a^3b.$$

Сега, ако ги собереме овие неравенства, го добиваме саканото неравенство.

70. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека:

$$a^8b^4+b^8c^4+c^8a^4 \geq a^6b^5c+b^6c^5a+c^6a^5b\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за четири броја добиваме

$$\tfrac{3}{4}a^8b^4+\tfrac{1}{4}b^8c^4 \geq a^6b^5c,$$
$$\tfrac{3}{4}b^8c^4+\tfrac{1}{4}c^8a^4 \geq b^6c^5a,$$
$$\tfrac{1}{4}a^8b^4+\tfrac{3}{4}c^8a^4 \geq c^6a^5b.$$

Сега, ако ги собереме овие неравенства, го добиваме саканото неравенство.

71. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0\,.$$

Решение. Ако помножиме со $(a+b)(b+c)(c+a)$, по средувањето добиваме дека даденото неравенсвто е еквивалентно со неравенството

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b\,.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за три броја добиваме

$$a^3b^3+a^3b^3+a^3c^3 \geq 3a^3b^2c,$$
$$b^3c^3+b^3c^3+b^3a^3 \geq 3b^3c^2a,$$
$$c^3a^3+c^3a^3+c^3b^3 \geq 3c^3a^2b.$$

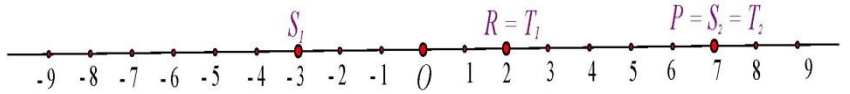
Сега, ако ги собереме овие неравенства, го добиваме саканото неравенство.

I.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

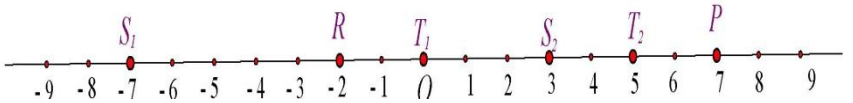
72. Во кординатен систем на права чиј почеток е точката O избрани се точки P, R и S такви што $\overline{OP} = 70\,mm$, $\overline{OR} = 0{,}2\,dm$ и $\overline{RS} = 5\,cm$, а точката T е средина на отсечката PS. Ако должината на единечната отсечка е еднаква на $1\,cm$, определи ги координатите на точките S и T.

Решение. Од $\overline{OP} = 70\,mm$ следува дека точката P може да има координати 7 или -7. Слично, точката R може да има координати 2 или -2. Понатаму, разликуваме четири случаи.

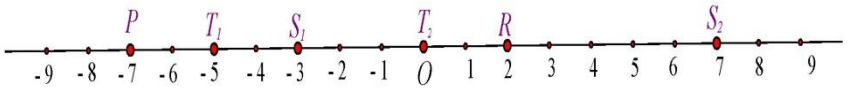
1) $P(7), R(2)$, па затоа $S_1(-3)$ или $S_2(7)$, т.е. $T_1(2)$ или $T_2(7)$.



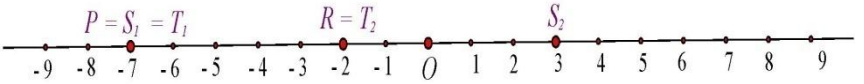
2) $P(7), R(-2)$, па затоа $S_1(-7)$ или $S_2(3)$, т.е. $T_1(0)$ или $T_2(5)$.



3) $P(-7), R(2)$, па затоа $S_1(-3)$ или $S_2(7)$, т.е. $T_1(-5)$ или $T_2(0)$.



4) $P(-7), R(-2)$, па затоа $S_1(-7)$ или $S_2(3)$, т.е. $T_1(-7)$ или $T_2(-2)$.



73. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 2021^{2022}. \qquad (1)$$

Решение. Во долната табела се прикаѓани цифрите на единиците на на 2022 степен на броевите кои завршуваат на секоја можна цифра. Притоа бидејќи само цифрата на единиците на бројот влијае на цифрата не единиците на степенот, доволно е да ги разгледаме степените

на броевите 1, 2, 3, ..., 9, 0. Имаме

Број	1^{2022}	2^{2022}	3^{2022}	4^{2022}	5^{2022}	6^{2022}	7^{2022}	8^{2022}	9^{2022}	0^{2022}
Цифра	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

Збирот $1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+...+10^{2022}$ има цифра на единици 5. Збирот на степените на првите 2020 броеви можеме да го поделиме во 202 групи, каде цифрата на единиците на збирот во секоја група е 5. Според тоа, цифрата на единиците на збирот

$$1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+...+2020^{2022}$$

е еднаква на цифрата на единиците на производот $202\cdot 5=1010$, т.е. таа е 0. Конечно, цифрата на единиците на збирот (1) е 1.

74. Цифрата на десетките на квадрат на природен број е непарна. Докажи дека цифрата на единиците на тој квадрат е еднаква на 6.

Решение. Нека разгледуваниот природен број е од видот $n=10x+y$, каде y е цифра. Тогаш $n^2=100y^2+20xy+x^2$, па затоа дека цифрата на десетките на бројот n^2 е непарна само ако цифрата на десетките на бројот x^2 е непарна. Последното е можно само ако $x=4$ или $x=6$. Во двата случаја цифрата на единиците на бројот x^2, што значи и на бројот n^2 е 6.

75. Определи ги сите природни броеви $x\geq 4$, за кои вредноста на изразот $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$ е природен број.

Решение. Нека

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=n,$$

сд каде бидејќи двете страни на равенката се ненегативни броеви со квадрирање, по средувањето, се добива еквивалентната равенка

$$\sqrt{(x-8)^2}=\frac{n^2}{2}-x,$$

односно равенката

$$|x-8|=\frac{n^2}{2}-x.$$

За $4\leq x\leq 8$ важи

$$8-x=\frac{n^2}{2}-x,$$

од каде добиваме $n=4$. Значи, за природните броеви $x=4,5,6,7,8$

вредноста на даденио израз е природниот број 4.

За $x>8$ добиваме

$$x-8=\frac{n^2}{2}-x,$$

$$n^2=4(x-4).$$

Природниот број $x-4$ мора да е точЕн квадрат, т.е. $x-4=m^2$, при што $x-4\geq 9-4=5$, па затоа $m\geq 3$. Според тоа, за природните броеви $x>8$ решението е $x=m^2+4, m\in\mathbb{N}$.

76. Определи ги сите подредени тројки (x,y,z) цели броеви за кои важат неравенствата

$$x>y>z>1 \text{ и } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1.$$

Решение. Од неравенствата $x>y>z>1$ следува $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}<1$, па затоа $\frac{3}{z}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$, односно $z<3$. Но, мора да важи $z>1$, па затоа $z=2$. Со замена во $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$ добиваме $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2}>1$, т.е. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$. Понатаму, $\frac{2}{y}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$, од каде добиваме $y<4$. Но, мора да важи $y>z=2$, па затоа $y=3$. Сега, со замена во $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$ добиваме $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$, од каде следува $x<6$. Но, мора да важи $x>y=3$, па затоа $x=4$ или $x=5$. Конечно, единствени подредени тројки кои ги задоволуваат дадените неравенства се $(4,3,2)$ и $(5,3,2)$.

77. Докажи дека $2^n>n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Задачата ќе ја решиме со математичка индукција.

Од $2^1>1$ следува дека за $n=1$ неравенството важи.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за некој $n=k$, т.е. дека $2^k>k$. Тогаш

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k\geq k+1,$$

што значи дека неравенството важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

78. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

а) $1^2+4^2+\ldots+(3n-2)^2=\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$,

б) $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x\neq 1$,

в) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$,

г) $1\cdot 2\cdot 2^n+2\cdot 3\cdot 2^{n-1}+\ldots.+(n+1)(n+2)\cdot 1=2^{n+4}-(n^2+7n+14)$.

Решение. Ќе го докажеме само равенството под в). Доказите на другите три равенства ги оставаме на читателот за вежба.

Имаме $1\cdot 1!=1=2!-1=(1+1)!-1$, т.е. равенството важи за $n=1$.

Нека претпоставиме дека равенството важи за некој $n=k$, т.е. дека

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+k\cdot k!=(k+1)!-1.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)! &= (k+1)!-1+(k+1)\cdot(k+1)!\\ &= (k+1)!(k+1+1)-1\\ &= (k+2)\cdot(k+1)!-1\\ &= (k+2)!-1,\end{aligned}$$

што значи дека равенството важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

79. Докажи дека важи:

а) $2\sqrt{n}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$, за секој $n\in\mathbb{N}$,

б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, за секој $n\in\mathbb{N}$

в) $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1-\frac{1}{\sqrt{3}})\ldots(1-\frac{1}{\sqrt{n}})<\frac{2}{n^2}$, за $n>1$.

Решение. Ќе го докажеме само неравенството под в). Доказите на другите две неравенства ги оставаме на читателот за вежба.

Имаме $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}$, па затоа $1-\frac{1}{\sqrt{2}}<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{2^2}$, т.е. неравенството важи за $n=1$.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за некој $n=k$, т.е. дека

$$(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}})(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\ldots(1-\tfrac{1}{\sqrt{k}})<\tfrac{2}{k^2}.$$

Тогаш

$$(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}})(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\ldots(1-\tfrac{1}{\sqrt{k}})(1-\tfrac{1}{\sqrt{k+1}})<\tfrac{2}{k^2}(1-\tfrac{1}{\sqrt{k+1}}),$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{2}{k^2}(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}})<\frac{2}{(k+1)^2},$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$(k+1)^2(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}})<k^2,$$

т.е. со неравенството

$$2k+1<(k+1)\sqrt{k+1},$$

кое е тривијално за $k\geq 3$, бидејќи $\sqrt{k+1}\geq 2$, а за $k=1$ и 2 се проверува непосредно. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n>1$.

II. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека производот на било кои три последователни природни броја, зголемен за вториот од тие броеви е еднаков на кубот на вториот број.

   Решение. Нека $n-1, n, n+1$, каде $n>1$ се три последователни природни броја. Тогаш

   $$(n-1)n(n+1)+n=n^3-n+n=n^3,$$

   што и требаше да се докаже.

2. Даден двоцифрен број се запишува два пати едно по друго и се добива четирицифрен број. Колку пати добиениот четирицифрен број е поголем од почетниот двоцфрен број?

   Решение. Ако $\overline{ab}$ е даденият број (a и b се цифри), тогаш добиениот четирицифрен број е $\overline{abab}$. Имаме

   $$\overline{abab}=1000a+100b+10a+b=1010a+101b=101(10a+b)=101\cdot\overline{ab},$$

   што значи дека добиениот четирицифрен број е 101 пати поголем од почетниот двоцифрен број.

3. Збирот на еден двоцифрен и еден трицифрен број е четирицифрен број. Секој од овие три броја е палиндром, т.е. исто се чита како од лево така и од десно. Определи ги овие броеви.

   Решение. Четирицифреният број почнува и завршува на цифрата 1, додека другите две цифри му се еднакви. Трицифреният број има прва и последна цифра 9. Значи, збирот има вид $\overline{aa}+\overline{9b9}=\overline{1cc1}$. Сега е очигледно дека $a=2$, па затоа $22+\overline{9b9}=\overline{1cc1}$, од каде добиваме дека $c=0$. Сега од $22+\overline{9b9}=1001$ следува $b=7$ и бараните броеви се 22, 979 и 1001.

4. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се за 10 поголеми од трикратниот збир на своите цифри.
Решение. Нека бараниот број е $10x+y$. Од условот на задачата имаме $10x+y=3x+3y+10$, односно $y=\frac{7x-10}{2}$. Но, x и y се цифри, па од последната равенка следува $x=2, y=2$ или $x=4, y=9$. Според тоа, бараните броеви се 22 и 49.

5. Замислив трицифрен број. Ако од неговите цифри ги составам сите можни двоцифрени броеви, па ги соберам, тогаш третина од добиениот збир ќе биде еднаква на првобитниот замислен трицифрен број. Кој број го замислив?
Решение. Нека цифрите на трицифрениот број се x, y и z. Лесно се покажува дека овие цифри мора да се ненултри и различни меѓу себе. Тогаш се добиваат следниве трицифрени броеви:
$10x+x, 10y+y, 10z+z, 10x+y, 10y+x, 10x+z, 10z+x, 10y+z, 10z+y$.
Нивниот збир е еднаков на $33(x+y+z)$, што значи дека бараниот трицифрен број е $11(x+y+z)$. Понатаму, збирот на цифрите мора да е поголем од 11 и помал од 24. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е бројот 198.

6. Определи го природниот број чиј квадрат е запишан со цифрите 0, 2, 3 и 5, при што секоја цифра е употребена само еднаш.
Решение. Квадрат на природен број не може да има цифра на единици 2 и 3, а не може да завршува само на една нула. Значи цифрата на единиците на квадратот е 5. Понатаму, ако се искористи дека цифрата на стотките на број од видот $(10a+5)^2=100a^2+100a+25$ е 2, добиваме дека квадратот на бараниот број е од видот $\overline{xy25}$ и како $x\neq 0$, заклучуваме дека квадратот на бараниот број е $3025=55^2$, т.е. бараниот број е 55.

7. Од сите природни трицифрени броеви определи го бројот кој поделен со збирот на своите цифри дава најголем број.
Решение. Имаме
$$100x+10y+z=k(x+y+z),$$
каде $x>0, y\geq 0, z\geq 0$. Тогаш

$$x(100-k)+y(10-k)+z(1-k)=0.$$

Бидејќи $x>0, y\geq 0, z\geq 0$, од последното равенство следува $k\leq 100$, па како го бараме најголемиот број k, добиваме дека $k=100$. Но, тогаш $90y+99z=0$, од каде добиваме $y=z=0$ и бараниот број е 900.

8. Определи го природниот број n а кој важи

$$1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)=40000.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$1+2+3+4+...+(2n-2)+(2n-1)-(2+4+...+(2n-2))=40000,$$

$$\frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2}-2(1+2+...+(n-1))=40000,$$

$$n(2n-1)-2\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}=40000,$$

$$2n^2-n-(n^2-n)=40000,$$

$$2n^2-n-n^2+n=40000,$$

$$n^2=40000,$$

$$n=\pm 200.$$

Но, n е природен број, па затоа решението на дадената равенка е $n=200$.

9. Дадени се пет различни цели броеви a,b,c,d,e такви што

$$(405-a)(405-b)(405-c)(405-d)(405-e)=12.$$

Определи го збирот $a+b+c+d+e$.

Решение. Бидејќи $12=2\cdot 2\cdot 3=(-1)\cdot(-2)\cdot 1\cdot 2\cdot 3$ единствена можност производ на пет различни цели броеви да е 12 е тоа да се броевите $-2,-1,1,2,3$, па затоа

$$(405-a)+(405-b)+(405-c)+(405-d)+(405-e)=-1-2+1+2+3,$$

од каде добиваме

$$a+b+c+d+e=5\cdot 405-3=2022.$$

10. Докажи дека не постојат природни броеви m,n,p такви што

$$m^2+n^2+p^2=mn+np+pm+50.$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$2m^2+2n^2+2p^2=2mn+2np+2pm+100,$$

односно на равенството

$$(m-n)^2+(n-p)^2+(p-m)^2=100.$$

Воведуваме ознаки $x^2=(m-n)^2$, $y^2=(n-p)^2$, $z^2=(p-m)^2$ и го добиваме равеството. Без ограничивање на општоста можеме да земеме дека $x^2\geq y^2\geq z^2$. Да ги анализираме можните случаи:

1) Ако $x^2=100$, тогаш $y^2=z^2=0$, од каде добиваме $n=p=m$, што противречи на $x^2=100$.
2) Ако $x^2=81$, тогаш $y^2+z^2=19$, па како $y^2\geq z^2$ мора да важи $y^2=16$ и добиваме $z^2=3$, што не е можно бидејќи 3 не е квадрат на природен број.
3) Ако $x^2=64$, тогаш $y^2+z^2=36$, па како $y^2\geq z^2$ мора да важи $y^2=36$ или $y^2=25$. Ако $y^2=36$, тогаш $z^2=0$, тогаш ќе важи $p=m$, па затоа $x^2=(m-n)^2=(n-p)^2=y^2$, што е противречност. Ако $y^2=25$, тогаш $z^2=11$, што не е можно бидејќи 11 не е квадрат на природен број.
4) Ако $x^2=49$, тогаш $y^2+z^2=51$, па како $y^2\geq z^2$ мора да важи $y^2=49$ или $y^2=36$. Ако $y^2=49$, тогаш $z^2=2$, што не е можно бидејќи 2 не е квадрат на природен број. Ако $y^2=36$, тогаш $z^2=15$, што не е можно бидејќи 15 не е квадрат на природен број.
5) Ако $x^2=36$, тогаш $y^2+z^2=64$, па како $y^2\geq z^2$ мора да важи $y^2=36$ и добиваме $z^2=28$, што не е можно бидејќи 28 не е квадрат на природен број.
6) Јасно, ако $x^2\leq 25$, тогаш $25\geq y^2\geq z^2$, па збирот може да биде најмногу 75.

Конечно, од претходните разгледувања следува вредењето на задачата.

Забелешка. Задачата може да се реши и со разгледување на парноста на броевите m,n,p. Притоа имаме четири можности:

а) еден од броевите е парен, а другите два се непарни,
б) два од дадените броеви се парни, а едниот е непарен,
в) сите три броја се парни,
г) сите три броја се непарни.

Во секој од овие случаи се добива противречност. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

II.2. ДЕЛИВОСТ, НЗД И НЗС

11. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се броеви еднакви на 1 или -1 и такви што
$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1 = 0.$$
Докажи дека $4 \mid n$.

Решение. Бидејќи секој од $n-$те производи на левата страна е еднаков на 1 или -1, добиваме дека бројот на позитивните производи a е еднаков на бројот на негативните производи b, т.е. $2a = 2b = n$. Од друга страна $(a_1a_2)(a_2a_3)...(a_na_1) = (a_1a_2a_3...a_n)^2 = 1$, што значи дека бројот на негативните производи b е парен. Според тоа, бројот $n = 2b$ е делив со 4.

12. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни непарни броја е делива со 8.

Решение. Нека $2n-1$ и $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$ се два последователни непарни броја. Тогаш
$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = (2n+1-2n+1)(2n+1+2n-1) = 2 \cdot 4n = 8n,$$
а $8n$ е делив со 8.

13. Докажи дека разликата на четвртите степени на два непарни броја е делива со 16.

Решение. Нека $2k+1$ и $2n+1$ се два произволни непарни броеја. Имаме
$$\begin{aligned}(2k+1)^4 - (2n+1)^4 &= ((2k+1)^2 + (2n+1)^2)((2k+1)^2 - (2n+1)^2) \\ &= (4k^2 + 4k + 1 + 4n^2 + 4n + 1)(2k+1+2n+1)(2k+1-2n-1) \\ &= 2(2k^2 + 2n^2 + 2k + 2n + 1) \cdot 2 \cdot (k+n+1) \cdot 2 \cdot (k-n) \\ &= 8(k-n)(k+n+1)(2k^2 + 2n^2 + 2k + 2n + 1).\end{aligned}$$
Но, броевите $k-n$ и $k+n$ се со иста парност, што значи дека броевите $k-n$ и $k+n+1$ се со различна парност, па затоа нивниот производ е делив со 2. Според тоа, $(2k+1)^4 - (2n+1)^4$ е делив со $8 \cdot 2 = 16$,

што и требаше да се докаже.

14. Определи го најмалиот четирицифрен природен број за кој збирот на цифрите на неговиот збир на цифри е еднаков на 9.
Решение. Бидејќи збирот на цифрите на збирот на цифрите е еднаков на 9, заклучуваме дека збирот на цифрите на бараниот број е делив со 9. Но, тоа значи дека бараниот број е делив со 9. Најмалиот четирицифрен природен број кој е делив со 9 е 1008. Збирот на цифрите на наговиот збир на цифри е 9, па затоа $n=1008$ е бараниот број.

15. Определи го збирот на сите природни двоцифрени броеви секој од кои е делив со секоја своја цифра.
Решение. Нека $\overline{xy}=10x+y$, $x\neq 0, x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Бидејќи $x|10x+y$ и $x|10x$, добиваме $x|y$, т.е. $y=kx$. Аналогно важи $10x=my$. Значи, $10x=mkx$, од каде добиваме $10=mk$. Според тоа, $k\in\{1,2,5\}$, па затоа $y=x$ или $y=2x$ или $y=5x$, каде $x,y\leq 9$. Значи, бараните двоцифрени броеви се 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 12, 24, 36, 48 и 15, а нивниот збир е еднаков на 630.

16. Докажи дека меѓу 11 природни броеви секогаш постојат два броја чија разлика е делива со 10.
Решение. Цифрата на единиците на било кој број може да прима 10 вредности, а имаме 11 броеви, па од принципот на Дирихле следува дека меѓу било кои 11 броја има најмалку два броја кои што имаат еднаква цифра на единиците. Јасно, цифрата на единиците на нивната разлика е 0, што значи дека разликата на овие два броја е делива со 10.

17. Определи ги најголемиот и најмалиот седумцифрен број кој е делив со 11 и кој е запишан со ненулти цифри.
Решение. Најголемиот седумцифрен број е 9999999, но тој не е делив со 11. Најголемиот седумцифрен број кој е делив со 11 е бројот 9999990, но тој во записот има 0. Затоа бараниот најголем седумцифрен број е $9999990-11=9999979$.
Најмалиот седумцифрен број во чиј запис нема цифра 0 е 1111111. Бидејќи неговиот остаток при делење со 11 е 1, ако му додадеме 10 го добиваме бројот $1111111+10=1111121$ кој е бараниот најмал седумцифрен број.

18. Еден двоцифрен број е делив со 3. Ако на овој број му се додаде 27, се добива број запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е $10a+b$. Од условот за деливост со 3 следува $a+b=3k$ и $1\le k\le 6$, бидејќи a и b се цифри различни од 0. Од другиот услов имаме $10a+b+27=10b+a$, па затоа $b=a+3$. Според тоа, $a<7$ и важи $2a=3k-3$, од каде добиваме $k=3$ или $k=5$. За $k=3$ имаме $a=3, b=6$ и едно решение е бројот 36, а за $k=5$ имаме $a=6, b=9$ и друго решение е бројот 69.

19. Определи го двоцифрениот број кој поделен со својата цифра на единиците дава количник еднаков на цифрата на единиците и остаток еднаков на цифрата на десетките.

Решение. Нека бараниот број е $10x+y$. Од условот на задачата имаме $10x+y=y^2+x$, односно $9x=y(y-1)$. Бидејќи два последователни броја не може да се деливи со 3, а x е цифра добиваме дека единствено решение на последната равенка е $x=8, y=9$, па бараниот број е 89.

20. Определи ги сите природни броеви деливи со 8 чиј збир на цифри е помал од 10, а производ на цифри е еднаков на 12.

Решение. Имаме $12=2\cdot 2\cdot 3=4\cdot 3=2\cdot 6$. Од последните равенства следува дека цифрите на бараните броеви може да се комбинации на некои од цифрите 1, 2, 3, 4 и 6. Единствени двоцифрени броеви кои имаат производ на цифри 12 се 26, 34, 43 и 62 и тие не се деливи со 8. Според тоа, бараните броеви мора да се најмалку трицифрени.

Нека бараниот број е трицифрен. Неговиот двоцифрен завршеток мора да е делив со 4, а производот на цифрите мора да е 12. Според тоа, двоцифрениот завршеток е некој од броевите 12, 16 или 32, па затоа единствени трицифрени броеви со саканите својства се 216 и 232.

Ако бројот има повеќе од три цифри, тогаш неговиот трицифрен завршеток мора да е делив со 8, а производот на цифрите мора да е еднаков на 12. Трицифрени броеви кои се деливи со 8 и се запишани со некои од допустливите цифри, при што производот на цифрите е помал или еднаков на 12 се 112, 312, 216 и 232. Сега, водејќи сметка збирот на цифрите да е помал од 10, а производот на цифрите да е еднаков на 12, на овие броеви од лево ќе му допишуваме некоја од

цифрите 1, 2 или 3. Според тоа,

- завршетокот 112 ги генерира следниве броеви со саканото својство: 23112 и 32112,
- завршетокот 312 ги генерира следниве броеви со саканото својство 2312, 12312 и 21312,
- завршетокот 232 ги генерира следниве броеви со саканото својство 1232 и 11232.

Конечно, бараните броеви се: 216, 232, 23112, 32112, 2312, 12312, 21312, 1232 и 11232

21. Дали постои природен број кој е точен квадрат и кој во декаден запис се запишува со 2022 единици и неколку нули?

Решение. Збирот на цифрите на број кој во декаден запис се запишува со 2022 единици и неколку нули е 2022 и тој е делив со 3. Значи, бројот е делив со 3, но не е делив со 9, па затоа не е точен квадрат на природен број. Конечно, не постои природен број со саканите својства.

22. Докажи дека не постојат природни броеви m и n такви што збирот на цифрите на бројот $m(m+3n)$ е еднаков на 2022.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат природни броеви такви што збирот на цифрите на бројот $m(m+3n)$ е 2022. Тоа значи дека бројот $m(m+3n)$ е делив со 3, но не е делив со 9. Но, броевите m и $m+3n$ при делење со 3 даваат еднакви остатоци (нивната разлика е делива со 3), па како нивниот производ е делив со 3, заклучуваме дека и двата се деливи со 3. Последното значи дека производот $m(m+3n)$ е делив со 9, што е противречност.

23. Докажи дека постои број кој е делив со 2023 и чии први 10 цифри во декадниот запис се 1234567890.

Решение. Да ги разгледаме броевите $a_1, a_2, ..., a_{2023}$ такви што за секој $i = 1, 2, ..., 2023$ бројот a_i е запишан така што i пати се повторува групата цифри 1234567890. Ако некој од овие броеви е делив со 2023, тогаш тврдењето е докажано. Ако не е, тогаш меѓу овие броеви постојат два броја кои при делење со 2023 даваат еднаков остаток. Јасно, разликата на овие два броја е делива со 2023, а нејзиниот декаден запис започнува со 1234567890. Со тоа тврдењето е докажано.

24. Ако m е природен број, а n е непарен природен број, докажи дека $m(m+2)+n(n+2)$ не може да е квадрат на природен број.

Решение. За секој природен број k остатокот при делењето на бројот k^2 со бројот 4 е 0 или 1. Навистина, ако $k=2p$, тогаш $4 \mid 4p^2=(2p)^2$, а ако $k=2p+1$, тогаш неговиот квадрат е $k^2=4p(p+1)+1$, што значи дека дава остаток 1 при делење со 4.

Затоа доволно е да докажеме дека за непарен природен број n бројот $m(m+2)+n(n+2)$ при делење со 4 дава остаток 2 или 3.

Броевите n и $n+2$ се два последователни непарни броја, па затоа тие при делење со 4 даваат остатоци 1 и 3, во некој редослед. Тоа значи дека производот $n(n+2)$ при делење со 4 дава остаток 3. Сега, имаме два случаја.

1) Ако m е непарен број, тогаш како шо видовме производот $m(m+2)$ дава остаток 3 при делење со 4. Тоа значи дека збирот $m(m+2)+n(n+2)$ при делење со 4 дава остаток 2.
2) Ако m е парен број, тогаш производот $m(m+2)$ е делив со 4. Тоа значи дека збирот $m(m+2)+n(n+2)$ при делење со 4 дава остаток 3.

25. Нека x и y се природни броеви такви што $xy=2009^{2010}$. Докажи дека збирот $x+y$ не е делив со 2008.

Решение. Јасно, x и y се непарни броеви, па затоа $(x+1)(y+1)$ е делив со 4. Според тоа, $(xy+1)+(x+y)$ е делив со 4. Но, $xy+1$ при делење со 4 дава остаток 2, па затоа мора и $x+y$ при делење со 4 да дава остаток 2. Последното значи дека $x+y$ не е делив со 4, што значи дека не е делив ниту со 2008.

26. Нека m и n се природни броеви такви што $mn=2021^{2020}$. Докажи дека $m+n$ не е делив со бројот 2020.

Решение. Јасно, m и n се непарни броеви, па затоа $(m+1)(n+1)$ е делив со 4. Според тоа, $mn+1+(m+n)$ е делив со 4. Понатаму,

$$2021^{2020}+1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4),$$
$$mn+1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4),$$

$$2021 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4),$$
$$2021^{2020} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4),$$

па затоа $m+n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, што значи дека $m+n$ не е делив со 4 и затоа не е делив со 2020.

27. На бројот 1972 од десно допиши му четири цифри така што добиениот број ќе биде делив со 7, 5 и 72.

Решение. Бидејќи 7, 5 и 72 се заемно прости броеви, добиениот осумцифрен број мора да биде делив со $7 \cdot 5 \cdot 72 = 1920$. Понатаму,

$$19720000 = 10270 \cdot 1920 + 1600,$$

па затоа со додавање на бројот $1920 - 1600 = 320$ ќе го добиеме бројот 19720320 кој е делив со 1920. Понатаму, со последователни додавања на 1920 ги добиваме сите осумцифрени броеви кои се помали од 19730000 и кои се деливи со 1920. Тоа се броевите 19720320, 19722240, 19724160, 19726080, 19728000 и 19729920.

28. Дропката $\frac{100^n+10^n}{100^n+4\cdot 10^n}, n \in \mathbb{N}$ сведи ја на облик $\frac{p}{q}$, каде p и q се заемно прости броеви.

Решение. Имаме

$$\frac{100^n+10^n}{100^n+4\cdot 10^n} = \frac{10^n(10^n+1)}{10^n(10^n+4)} = \frac{10^n+1}{10^n+4}.$$

Ако $d \mid 10^n+1$ и $d \mid 10^n+4$, тогаш $d \mid (10^n+4-10^n-1) = 3$, па затоа $d = 1$ или $d = 3$. Збирот на цифрите на броевите 10^n+1 и 10^n+4 е 2 и 5, соодветно, па затоа тие не се деливи со 3. Конечно, бараното сведување е $\frac{p}{q} = \frac{10^n+1}{10^n+4}$.

29. Определи го остатокот при делењето на бројот $25 \cdot 3^{2021}$ со бројот $4 \cdot 3^{2020}$.

Решение. Бидејќи

$$25 \cdot 3^{2021} = 75 \cdot 3^{2020} = 72 \cdot 3^{2020} + 3 \cdot 3^{2020} = 18 \cdot 4 \cdot 3^{2020} + 3 \cdot 3^{2020},$$

добиваме дека остатокот при делењето на бројот $25 \cdot 3^{2021}$ со бројот $4 \cdot 3^{2020}$ е еднаков на $3 \cdot 3^{2020} = 3^{2021}$.

30. Ако a и b се цели броеви такви што $a-b$ е делив со 4, тогаш $(3a+5b)^2$ е делив со 16. Докажи!

Решение. Ако $a-b$ е делив со 4, тогаш постои $k\in\mathbb{Z}$ таков што $a=b+4k$. Затоа

$$(3a+5b)^2=(3(b+4k)+5b)^2=16\cdot(2b+3k)^2,$$

што значи дека $16\,|\,(3a+5b)^2$.

31. Низата цифри се состои од цифрите на редоследно запишаните први 222 природни броја. Во таа низа прво ги прецртуваме си сите цифри кои се наоѓаат на непарните места. Потоа повторно ги прецртуваме цифрите кои се наоѓаат на новите непарни места. Оваа постапка ја повторуваме се додека не остане само една цифра. Која е таа цифра?

Решение. Во низата имаме $9\cdot1+90\cdot2+123\cdot3=558$ цифри.

По првото прецртување ќе останат цифрите кои на почетокот биле на второто, четвртото, шестото, осмото, ..., т.е. на парните места. По второто прецртување ќе останат цифрите кои на почетокот биле на четвртото, осмото, дванаесеттото, ... место. Според тоа, ќе останат оние цифри чиј почетен реден број е делив со $4=2^2$. По третото прецртување ќе останат цифрите чиј почетен реден број е делив со $8=2^3$. По четвртото прецртување ќе останат цифрите ќиј почетен реден број е делив со $16=2^4$ итн., по $k-$тото прецртување ќе останат цифрите чиј почетен реден број е делив со 2^k.

За да определиме на кое место се наоѓала цифрата која ќе остане последна треба да го определиме најголемиот број k за кој $2^k<558$. Тоа е за $k=9$ и притоа $2^9=512$. Според тоа, последна ќе остане цифрата која на почетокот има реден број 512. Имаме,

$$512-(9+180)=323,$$

па затоа последна ќе остане 323-тата цифра на трицифрените броеви. Но, $323=3\cdot107+2$, што значи дека последна ќе остане втората цифра од 108-от трицифрен број, односно од бројот $99+108=207$, а тоа е цифрата 0.

32. Го прашале продавачот на јаболка колку јаболка има во корпата. Тој одговорил: „Ако ги бројам по две, или по три, или по четири, или по пет, или по шест, секогаш ми останува едно јаболко. Ако ги бројам по

седум, не ми останува ниту едно јаболко.“
Колку јаболка биле во корпата? Определи го најмалиот број јаболка кој ги задоволува наведените услови.
Решение. Најмалиот заеднички содржател на броевите 2, 3, 4, 5 и 6 е бројот 60. Значи, бараниот број е од видот $60k+1$ и е делив со 7. Најмал од сите броеви кои ги задоволуваат дадените услови се добива за $k=5$ и тоа е бројот $60\cdot 5+1=301=7\cdot 43$.

33. Над северниот пол се наоѓаат три земјини сателити. Првиот ја обиколува Земјата за $90\,\text{min}$, вториот за $105\,\text{min}$ и третиот за $2\,h$. Колку пати првиот сателит ќе ја обиколи Земјата до моментот кога прв пат сите три сателити повторно ќе бидат над северниот пол?
Решение. Најмалиот заеднички содржател на броевите 90, 105 и 120 е 2520. Значи, сите три сателити прв пат над северниот пол ќе се најдат по $2520\,\text{min}$. За тоа време првиот сателит Земјата ќе ја обиколи $2520:90=28$ пати.

34. Збирот на два броја е 168, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Кои се тие броеви?
Решение. Бараните броеви се $x=24m, y=24n$, каде m и n се заемно прости природни броеви и $x+y=168$, т.е. $m+n=7$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $m<n$, па затоа имаме три решенија на последната равенка: $m=1,n=6; m=2,n=5, m=3,n=4$. Соодветно бараните броеви се 24 и 144, 28 и 120, 72 и 96.

35. Нека a и b се последователни цели броеви и нека n е природен број. Докажи дека $\text{NZD}(an+b,bn+a)$ е непарен број.
Решение. Од броевите a и b едниот е парен, а другиот е непарен, на пример, a е парен, а b е непарен. Јасно, за секој природен број n бројот an е парен, па затоа $bn+a$ е непарен. Но, непарен број има само непарни делители, па затоа $\text{NZD}(an+b,bn+a)$ е непарен број.

36. Определи го бројот на тројките последователни трицифрени природни броеви чиј производ е делив со бројот 120.
Решение. Имаме $120=3\cdot 5\cdot 8$, па еден број е делив со 120 ако и само ако е делив со 3, 5 и 8. Меѓу три последователни природни броја точно еден е делив со 3, па затоа нивниот производ е делив со 3.

Нека првиот од трите последователни броја m е парен. Тогаш и третиот број $m+2$ е парен, па како производот на два последователни парни броја е делив со 8, заклучуваме дека во овој случај производот на трите последователни природни броја е делив со 8. Деливоста со бројот 5 е исполнета ако било кој од трите броја е делив со 5. Тоа е можно ако и само ако првиот или третиот (парен) број завршува на 0, односно ако вториот број завршува на 5. Во бараните тројки првиот број може да е од видот $\overline{ab0}$, третиот број може да е од видот $\overline{cd0}$ и третиот број може да е од видот $\overline{ef5}$. Според тоа, во бараните тројки првиот број може да е од видот $\overline{ab0}$, каде $a,b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ и $a\neq 0$, па такви броеви има $9\cdot 10=90$. Аналогно за третиот број кој е од видот $\overline{cd0}$ имаме 90 можности, но во првата тројка 98, 99, 100 се појавуваат двоцифрени броеви, па затоа имаме 89 можности. Вториот број во тројката може да е од видот $\overline{af5}$ и такви броеви имаме 90.

Нека првиот број m е непарен. Бидејќи третиот број $m+2$ е непарен, мора вториот број $m+1$ да е делив со 8. Бидејќи комбинираме деливост со 5 и деливост со 8, доволно е да ги разгледаме првите 40 можности. Средниот број $m+1$ може да биде 104, 112, 120, 128 или 136, но или тој или неговиот следбеник или претходник мора да е делив со 5. Тоа се случава во три случаи: (103, 104, 105), (119, 120, 121) и (135,136,137). Трицифрени броеви има 900, па затоа од $900=40\cdot 22+20$ следува дека барани броеви има $22\cdot 3=66$ и уште во последните 20 броеви тоа е бројот 984.

Конечно, вкупниот број тројки кои го задоволуваат условот на задачата е $90+89+90+67=336$.

37. Нека $A=n^3+6n^2+8n$.

а) Докажи дека A е делив со 3 за секој природен број n.

б) Определи ги сите природни броеви n за кои A е делив со 96.

Решение. а) Имаме

$$A=n^3+6n^2+8n=n(n^2+6n+8)=n(n^2+2n+4n+8)$$
$$=n(n(n+2)+4(n+2))=n(n+2)(n+4).$$

Броевите $n,n+2,n+4$ даваат различни остатоци при делење со 3, што значи дека барем еден од нив е делив со 3. Но, тоа значи дека нивниот производ е делив со 3, па затоа A е делив со 3 за секој природен број

n.

б) Имаме $96=3\cdot 32$, па како 3 и 32 се заемно прости, заклучуваме дека A е делив со 96 ако и само ако е делив со 3 и 32. Понатаму, во делот под а) докажавме дека $3|A$ за секој природен број n, па затоа треба да определиме за кои природни броеви n бројот A е делив со 32.

Јасно, ако n е непарен број, тогаш $A=n(n+2)(n+4)$ е производ на три непарни броја и не е делив со 32. Значи, n мора да е парен број. Од три последователни парни броја барем еден е делив со 4.

Ако n е делив со 4, т.е. $n=4k, k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$A=4k(4k+2)(4k+4)=32k(2k+1)(k+1),$$

па $32|A$. Случајот кога $n+4$ е делив со 4 се разгледува аналогно.

Ако $n+2$ е делив со 4, т.е. $n+2=4k, k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$A=(4k-2)\cdot 4k\cdot(4k+2)=16k(2k-1)(2k+1),$$

па затоа $32|A$ ако и само ако k е парен број, т.е. $k=2m, m\in\mathbb{N}$. Значи, во овој случај $32|A$ ако и само ако $n=8m-2, m\in\mathbb{N}$.

Конечно, $32|A$ ако и само ако $n=4k, k\in\mathbb{N}$ или $n=8m-2, m\in\mathbb{N}$.

38. Нека d е природен број различен од 2, 5 и 13. Докажи дека од множеството $\{2,5,13,d\}$ може да се изберат два различни броја a и b такви што $ab-1$ не е квадрат на природен број.

Решение. Доволно е да докажеме дека еден од броевите $2d-1$, $5d-1$ и $13d-1$ не е квадрат на природен број. Нега го претпоставиме спротивното, односно дека постојат $x,y,z\in\mathbb{N}$ такви што $2d-1=x^2$, $5d-1=y^2$ и $13d-1=z^2$. Тогаш x мора да е непарен број и важи $2d=x^2+1$, што значи дека и d е непарен број. Но, тоа значи дека y и z се парни, т.е. $y=2a$ и $z=2b$, за некои $a,b\in\mathbb{N}$. Сега, од $z^2-y^2=8d$ следува $b^2-a^2=2d$, т.е. $(b-a)(b+a)=2d$. Од последното равенство следува дека $2|b-a$ или $2|b+a$, што значи дека броевите a и b се со иста парност. Но, тоа значи дека $4|b^2-a^2=2d$, а тоа противречи на фактот дека бројот d е непарен. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

39. Нека природниот број $n+1$ е делив со 24. Докажи дека збирот на сите

делители на бројот n исто така е делива со 24.

Решение. Дадениот број n при делење со 3 дава остаток 2, па затоа тој не е точен квадрат, бидејќи точните квадрати при делење со 3 даваат остаток 0 или 1. Бидејќи само точен квадрат има непарен број делители, заклучуваме дека бројот на делителите на бројот n е парен. Да ги поделиме сите делители на бројот n на парови $(d,\frac{n}{d})$. Бројот n не е делив ниту со 2, ниту со 3, па затоа ниту еден негов делител d не е делив ниту со 2, ниту со 3, т.е. $\text{NZD}(d,24)=1$.

За да го докажеме тврдењето на задачата доволно е да докажеме дека за секој делител d на n важи $24 \mid d+\frac{n}{d}$. Имаме

$$d+\frac{n}{d}=\frac{d^2+n}{d}=\frac{d^2-1+n+1}{d}.$$

Бидејќи $\text{NZD}(d,24)=1$, доволно е да докажеме $24 \mid (n+1)+(d^2-1)$. Но, $24 \mid n+1$, па затоа доволно е да докажеме дека $24 \mid d^2-1$. Од $2 \nmid d$ следува дека $(d-1)(d+1)$ е производ на два последователни парни броја, што значи дека е делив со 8. Од $3 \nmid d$, следува дека d^2 дава остаток 1 при делење со 3, што значи дека $3 \mid d^2-1$. Конечно, од $3 \mid d^2-1$ и $8 \mid d^2-1$ следува $24 \mid d^2-1$.

II.3. ПРОСТИ БРОЕВИ

40. Докажи дека збирот на било кои пет последователни природни броја не може да е прост број.

Решение. Ако n е најмалиот од петте природни броја, тогаш нивниот збир е $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5(n+2)$ и како $n+2>1$ за секој $n \in \mathbb{N}$ заклучуваме дека $5(n+2)$ е сложен број, што и требаше да се докаже.

41. Производот на два двоцифрени броеви е број кој е запишан само со цифрата 4. Кои се тие броеви?

Решение. Производот е помал од $100 \cdot 100=10000$ и е поголем од $10 \cdot 10=100$. Значи, производот може да биде 444 или 4444. Со разло-

жување на прости множители се добива $4444=2\cdot 2\cdot 11\cdot 101=44\cdot 101$ и $444=2\cdot 2\cdot 3\cdot =37=12\cdot 37$. Јасно, во првиот случај не добиваме решение, а во вториот случај добиваме решение и бараните броеви се 12 и 37.

42. Докажи дека $2020\cdot 2024-21$ е сложен број.
Решение. Имаме

$$\begin{aligned}2020\cdot 2024-21&=(2022-2)(2022+2)-21\\&=2022^2-2^2-21\\&=2022^2-25\\&=2022^2-5^2\\&=(2022-5)(2022+5)\\&=2017\cdot 2027,\end{aligned}$$

што значи дека $2020\cdot 2024-21$ е сложен број.

43. Докажи дека за секој $a>1$ број од видот a^4+4 е сложен број.
Решение. Имаме

$$\begin{aligned}a^4+4&=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2\\&=(a^2+2-2a)(a^2+2+2a)\\&=((a-1)^2+1)((a+1)^2+1).\end{aligned}$$

Бидејќи за секој $a>1$ важи $(a-1)^2+1>1$ и $(a+1)^2+1>1$, од горното равенство следува дека за секој $a>1$број од видот a^4+4 е сложен број

44. Определи ги сите прости трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 252.
Решение. Имаме $252=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$, па затоа бараните броеви може да се запишани со цифрите 4, 7, 9 или 6, 6, 7. Единствени вакви прости броеви се 479 и 947.

45. Докажи дека не постојат непарни природни броеви a и b такви што $a+b$ и ab се точни квадрати на некои природни броеви
Решение. Нека претпоставиме дека постојат непарни природни броеви броеви a и b такви што $a+b=m^2$ и $ab=n^2$ за некои природни

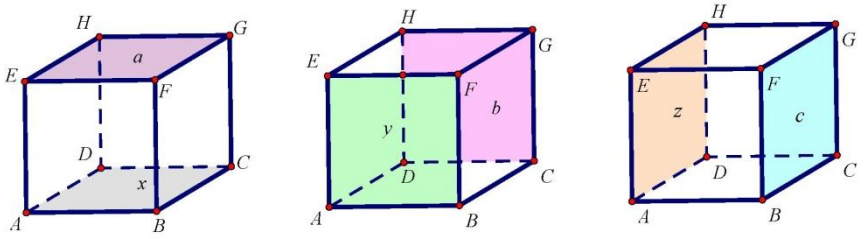
броеви m и n. Јасно, $a+b$ е парен, а ab е непарен број. Понатаму, ако $a=2x+1, b=2y+1$, тогаш бидејќи $a+b$ е парен имаме $m=2t$, а бидејќи ab е непарен имаме $n=2t+1$. Сега,

$$a+b+ab=m^2+n^2,$$
$$2x+1+2y+1+(2x+1)(2y+1)=(2t)^2+(2s+1)^2,$$
$$4x+4y+4xy+2=4t^2+4s^2+4s,$$
$$2(x+y+xy)+1=2(t^2+s^2+s),$$

што не е можно бидејќи левата страна на последното равенсвто е непарен, а десната страна е парен број.

46. На секој ѕид на коцката е запишан по еден природен број, а потоа на секое теме му е придружен производот на броевите запишани на трите ѕида кои го определуваат тоа теме. Збирот на сите осум броеви придружени на темињата е 455. Определи го збирот на сите броеви запишани на ѕидовите на коцката.

Решение. Нека темињата на коцката ги означиме со A,B,C,D,E,F,G,H (види ги цртежите долу). Нека x е бројот запишан на долниот, a на горниот, y на предниот, b на задниот, z на левиот и c на десниот ѕид на коцката (види гиу цртежите).



Тогаш на темињата A,B,C,D,E,F,G,H соодветно се придружени броевите $xyz, xyc, xbc, xzb, yza, yac, abc, zab$. Значи,

$$xyz+xyc+xbc+xzb+yza+yac+abc+zab=455,$$
$$x(yz+yc+bc+zb)+a(yz+yc+bc+zb)=455,$$
$$(x+a)(yz+yc+bc+zb)=455,$$
$$(x+a)(y(z+c)+b(z+c))=455,$$
$$(x+a)(y+b)(z+c)=455.$$

Но, $455=5\cdot 7\cdot 13$, па затоа

$$x+y+z+a+b+c=(x+a)+(y+b)+(z+c)=5+7+13=25.$$

47. На секој ѕид на коцка запишан е еден природен број. Потоа во секое теме на коцката запишан е производот на трите броја запишани на ѕидовите на кои тоа теме е заедничко. Збирот на така добиените осум броја е 175. Определи го збирот на броевите запишани на ѕидовите на коцката.

Решение. Нека a,b,c,d,e,f се броевите запишани на ѕидовите на коцката, така што a и b се на спротивни ѕидови, c и d се на спротивни ѕидови и e и f се на спротивни ѕидови. Тогаш во темињата се запишани броевите $ace,\ acf,\ ade,\ adf,\ bce,\ bcf,\ bde,\ bdf$. Бидејќи

$$ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf=(a+b)(c+d)(e+f)$$

и $175=5\cdot5\cdot7$ е единствен начин бројот 175 да се запише како производ на три броја поголеми од 1, следува дека

$$a+b+c+d+e+f=(a+b)+(c+d)+(e+f)=5+5+7=17.$$

48. Определи ги сите вредности на целиот број m за кој бројот $\frac{m^2+2016}{|m|+2}$ е цел број.

Решение. Имаме $\frac{m^2+2016}{|m|+2}=\frac{m^2-4+2020}{|m|+2}=|m|-2+\frac{2020}{|m|+2}$. Јасно, бројот $\frac{m^2+2016}{|m|+2}$ е цел ако и само ако $|m|+2\,|\,2020$. Од $2020=1\cdot2^2\cdot5\cdot101$ следува дека негови делители се 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101,202, 404, 505, 1010 и 2020. Но, $|m|+2$ не може да е еднаков на 1. Понатаму, ако $|m|+2=2$ мора да е $m=0$, а во сите преостанати случаи имаме по две можности за m. Според тоа, вакви броеви иам дваесет и еден и тие се: 0, 2, –2, 3, –3, 8, –8,18, –18, 99, –99, 200, –200, 402, –402, 503, –503, 1008, –1008, 2018, –2018.

49. Определи ги сите прости броеви p и q за кои бројот p^2+q^2+1 е точен квадрат.

Решение. Нека $p=2$. Тогаш имаме $n^2=5+q^2$, од каде добиваме $(n-q)(n+q)=5$, односно $n-q=1, n+q=5$. Според тоа, $n=3, q=2$. Нека претпоставиме дека $p>2$ и $q>2$. За квадратот на непарен број добиваме $(2k+1)^2=4k(k+1)+1$, т.е. тој при делење со 4 дава остаток 1. Во равенството $p^2+q^2+1=n^2$ сите броеви се квадрати на непарни

броеви, па затоа на левата страна при делење со 4 добиваме остаток 3, а на десната страна при делење со 4 добиваме остаток 1, што не е можно. Конечно, единствено решение на задачата е $p=q=2$.

50. Определи ги сите цели броеви n такви што бројот n^3-2n^2+2n-4 е прост.

Решение. Имаме, $n^3-2n^2+2n-4=(n^2+2)(n-2)$, па затоа овој број е прост ако $n-2=1$ и n^2+2 е прост број. Од $n-2=1$ следува $n=3$, па како $n^2+2=11$ е прост број заклучуваме дека единствено решение на задачата е $n=3$.

51. Определи ги сите тројки прости броеви (a,b,c) за кои важи неравенството

$$abc<ab+bc+ca.$$

Решение. Нека претпоставиме дека $a\le b\le c$. Ако $a\ge 3$, тогаш ќе важи $ab+bc+ca\le 3bc\le abc$, што не е можно. Значи, $a=2$ и даденото неравенство го добива видот $2bc<2b+bc+2c$, т.е. $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}$. Сега, ако $b\ge 5$, тогаш $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$. Според тоа, $b=2$ или $b=3$. Ако, $b=2$, тогаш $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}$, па c може да е било кој прост број. Ако $b=3$, тогаш $6c<6+5c$, па затоа $c=3$ или $c=5$.

Претходно претпоставивме дека $a\le b\le c$, а како редоследот може да биде произволен добиваме дека бараните тројки се:

(2, 2, *p*), (2, *p*, 2), (*p*, 2, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 3), (3, 3, 2),
(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2).

52. Дали може да се определат цифри a и b ($a\neq 0$) такви што дванаесетцифрениот број $\overline{abbaabbaabba}$ ќе биде точен квадрат на природен број?

Решение. Имаме $\overline{abbaabbaabba}=\overline{abba}\cdot 100010001$. Бројот 100010001 е делив со 3, 7, 13 и 37, но не е делив со $3^2, 7^2, 13^2$ и 37^2. Затоа за да $\overline{abbaabbaabba}$ е точен квадрат на природен број треба бројот $\overline{abba}$ да е делив со 3, 7, 13 и 37. Но, овие броеви се прости, што значи дека се заемно прости, па затоа $\overline{abba}$ треба да е делив со $3\cdot 7\cdot 13\cdot 37=10101$.

Но, $\overline{abba}$ е четирицифрен, а 10101 е петцифрен број, па затоа последното не е можно, што значи дека не може да се определат цифри a и b $(a \neq 0)$ такви што дванаесетцифрениот број $\overline{abbaabbaabba}$ ќе биде точен квадрат на природен број.

II.4. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

53. Фибоначи за 30 исти сребреници купил 30 птици. За секои три сојки платил еден сребреник, за секои два канаринци платил еден сребреник и за секој гулаб платил по два сребреници. Колку птици од секој вид купил Фибоначи?

Решение. Нека Фибоначи купил x сојки, y канаринци и z гулаби. Од условот на здачата имаме

$$x+y+z=30 \text{ и } \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+2z=30.$$

Ако првата равенка ја помножиме со 2, а втората со 6 добиваме еквивалентен систем

$$2x+2y+2z=60 \text{ и } 2x+3y+12z=180.$$

Од втората равенка ја одземаме првата и добиваме $y+10z=120$. Според тоа, $10 \mid y$. Можни решенија се $y=10$ и $y=20$. За $y=10$ се добива $z=11$ и $x=9$, а за $y=20$ се добива $z=10$ и $x=0$, што не е можно. Значи, Фибоначи купил 9 сојки, 10 канаринци и 11 гулаби.

54. Во која година од дваесеттиот век е роден човек кој во 1969 година имал толку години колку што е збирот на цифрите на годината во која е роден?

Решение. Нека човекот е роден во $\overline{19xy}=1900+10x+y$ година. Од условот на задачата следува равенката $69-(10x+y)=1+9+x+y$, која е еквивалентна со равенката $x=5+\frac{4-2y}{11}$. Но, x и y се цифри, па затоа $11 \mid 4-2y$ и тоа е можно ако и само ако $y=2$. Конечно, човекот е роден во 1952 година.

55. Производот на два природни броја е 15 пати поголем од нивниот збир. Определи ја разликата на поголемиот и помалиот број?

Решение. Нека броевите се m и n и нека важи $m>n$. Од условот на задачата имаме

$$mn=15(m+n),$$
$$mn-15m-15n-225=225,$$
$$(m-15)(n-15)=225.$$

Бидејќи $225=3^2\cdot 5^2$, а 2125 е делив со $n-15$ и $n<m$, можни се следниве случаи:

$$n-15=1, m-15=225,$$
$$n-15=3, m-15=75,$$
$$n-15=5, m-15=45,$$
$$n-15=9, m-15-25.$$

Според тоа, можни вредности на разликата $m-n$ се: 224, 72, 40 и 16.

56. Најди позитивна вистинска дропка чија вредност ќе се зголеми 3 пати ако нејзиниот броител го степенуваме на трет степен, а на именителот му додадеме 3.

Решение. Ако бараната дропка е $\frac{x}{y}$, тогаш од условот на задачата следува равенката $\frac{x^3}{y+2}=\frac{3x}{y}$, од каде добиваме $x^2=3+\frac{9}{y}$. Според тоа, $y|9$, па затоа $y\in\{1,3,9\}$. Со непосредна проверка се добива дека квадрат на природен број се добива само за $y=9$ и притоа $x=2$. Значи, бараната дропка е $\frac{2}{9}$.

57. Дали постојат природни броеви x,y,z такви што $4^x+9^y=11^z$?

Решение. За секој природен број x бројот од видот 4^x завршува на цифрата 4 или 6. Слично броевите од видот 9^y завршуваат на цифрата 1 ли 9, а броевите од видот 11^z завршуваат на цифрата 1. Според тоа, за секои природни броеви x и y збирот 4^x+9^y може да завршува на некоја од цифрите 3, 5 или 7, што значи дека не може да е еднаков на 11^z, каде $z\in\mathbb{N}$.

58. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2019x^4+2020y^4=2021^{2021}.$$

Решение. Цифрата на единиците на четврт степен на природен број може да биде 0, 1, 5 или 6, што значи дека цифрата на единиците на бројот $2019x^4$ може да биде 0, 9, 5 или 4, а на бројот $2020y^4$ цифрата на единиците е 0. Според тоа, цифрата на единиците на збирот $2019x^4+202y^4$ е 0, 9, 5 или 4. Но, цифрата на единиците на бројот 2021^{2021} е 1, па затоа дадената равенка нема решение во множеството природни броеви.

59. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ такви што бројот $\sqrt{\overline{abc}+\sqrt{c}}$ е природен број.

Решение. Ако $\sqrt{\overline{abc}+\sqrt{c}}=n,\ n\in\mathbb{N}$, тогаш $\sqrt{c}=n^2-\overline{abc}$, од што следува дека c мора да е точен квадрат, т.е. $c\in\{0,1,4,9\}$. Бидејќи $n^2=\sqrt{c}+\overline{abc}$, добиваме дека c не може да е 1 или 9, бидејќи во тој случај n^2 ќе завршува на 2, што не е можно.

Ако $c=0$, тогаш $n^2=\overline{ab0}$. Бројот $\overline{ab0}$ е делив со 10, па како е квадрат на природен број, тој треба да е делив со 100. Според тоа, решенија на задачата се броевите 100, 400 и 900.

Ако $c=4$, тогаш $\overline{ab4}+2=n^2$. Последното значи дека n е двоцифрен број кој е помал од 30 и кој завршува на една од цифрите 4 или 6. Конечно, добиваме уште четири решенија и тоа

$$14^2-2=194, 16^2-2=254, 24^2-2=574 \text{ и } 26^2-2=674.$$

60. Определи ги сите трицифрени броеви кои се пет пати поголеми од производот на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Имаме

$$\overline{abc}=5abc,$$
$$100a+10b+c=5abc.$$

Од последната равенка следува $5|c$ и како $c\neq 0$, добиваме $c=5$. Со замена во последната равенка добиваме

$$20a+2b+1=5ab,$$

па затоа $5|(2b+1)$, од каде следува $2b+1=5$ или $2b+1=15$, односно $b=2$ или $b=7$. Ако $b=2$, тогаш $20a+5=10a$ и во овој случај немаме решение, а за $b=7$ добиваме $20a+15=35a$, т.е. $a=1$. Коне.но,

единствено решение на задачата е бројот 175.

61. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$y^4 + x = xy + 8.$$

Решение. Јасно, $y \neq 1$, па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$y^4 - 8 = x(y-1),$$
$$x = \frac{y^4-8}{y-1},$$
$$x = y^3 + y^2 + y + 1 - \frac{7}{y-1}.$$

Од условот $x \in \mathbb{Z}$, следува $y-1 \mid 7$, па затоа $y-1 \in \{-7,7,-1,1\}$, односно $y \in \{-6,8,0,2\}$. Конечно, решенијата се

$$(x,y) \in \{(-184,-6),(8,0),(8,2),(584,8)\}.$$

62. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$3(m^2+n^2) - 7(m+n) = -4.$$

Решение. Ако дадената равенка ја помножиме со 12 и се ослободиме од заградите, последователно добиваме

$$36m^2 - 84m + 36n^2 - 84n = -48,$$
$$(6m-7)^2 + (6n-7)^2 = 50.$$

Бројот 50 како збир на два квадрати може да се запише на три начини $1+49 = 25+25 = 49+1$. Во првиот случај $1+49=50$ добиваме

$$6m-7=1 \text{ или } 6m-7=-1 \text{ или } 6n-7=7 \text{ или } 6n-7=-7.$$

Како единствено целобројно решение добиваме $(m,n)=(1,0)$. Аналогно во третиот случај добиваме $(m,n)=(0,1)$. Во вториот случај добиваме

$$6m-7=5 \text{ или } 6m-7=-5 \text{ или } 6n-7=5 \text{ или } 6n-7=-5.$$

Како единствено целобројно решение добиваме $(m,n)=(2,2)$.

63. а) Определи ги остатоците од делењето на бројот $n^5, n \in \mathbb{N}$ со 11.

б) Докажи дека равенката $x^5 + y^5 + z^5 = 2022^{2022}$ нема решенија во множеството природни броеви.

Решение. а) При делењето на бројот n со бројот 11 можни остатоци

се $-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$. Затоа при делењето на бројот n^5 со 11 можни остатоци се $-1,0,1$ (Провери!).

б) Бидејќи остатоците при делење на петти степен на природен број со 11 се еднакви на $-1,0,1$, добиваме дека можни остатоци при делење на збирот $x^5+y^5+z^5$ со 11 се $-3,-2,-1,0,1,2,3$. Последното значи дека остатоците не може да бидат 4, 5, 6 и 7. Но, $2022^{2022}\equiv 4(\mathrm{mod}11)$, па затоа дадената равенка нема решение во множеството природни броеви.

64. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^4+y^{2022}=2x^2.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x^4-2x^2+1+y^{2022}=1,$$
$$(x^2-1)^2+y^{2022}=1.$$

Од последната равенка следува дека

$$(x^2-1)^2=1 \text{ и } y^{2022}=0,$$

или

$$(x^2-1)^2=0 \text{ и } y^{2022}=1.$$

Според тоа, единствени целобројни реше-нија на дадената равенка се:

$$(x,y)\in\{(0,0),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}.$$

65. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(a+6)(b+5)=3ab.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$ab+5a+6b+30-3ab=0$$
$$2ab-5a=6b+30$$
$$a(2b-5)=6b+30,$$
$$a=\frac{6b+30}{2b-5},$$
$$a=3+\frac{45}{2b-5}.$$

Сега, од $a\in\mathbb{N}$ следува $\frac{45}{2b-5}\in\mathbb{N}$, т.е. $2b-5\in\{1,3,5,9,15,45\}$. Според

тоа, $2b \in \{6,8,10,14,20,50\}$, па затоа $b \in \{3,4,5,7,10,25\}$. Сега со замена во $a = 3 + \frac{45}{2b-5}$ ги добиваме решенијата (a,b) на дадената равенка, т.е. добиваме $(a,b) \in \{(48,3),(18,4),(12,5),(8,7),(6,10),(4,25)\}$.

Забелешка. Задачата може да се реши и ако дадената равенка ја запишеме во еквивалентниот облик $(a-3)(2b-5) = 45$ и земеме предвид дека $45 = 1 \cdot 45 = 3 \cdot 15 = 5 \cdot 9 = 9 \cdot 5 = 15 \cdot 3 = 45 \cdot 1$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

66. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2).$$

Решение. Нека претпоставиме дека задачата има решение. Нека (a,b,c,d) е она решение за кое збирот $x^2 + y^2$ е најмал. Според тоа, $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$. Значи, $3 \mid (a^2 + b^2)$, па како квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1, заклучуваме дека $3 \mid a$ и $3 \mid b$. Нека, $a = 3a'$ и $b = 3b'$. Според тоа,

$$9(a'^2 + b'^2) = a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2),$$

т.е.

$$c^2 + d^2 = 3(a'^2 + b'^2).$$

Значи, постои ново решение (c,d,a',b') такво што $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дадеената равенка нема решение во множеството природни броеви.

67. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy + 3y - 5x = 18.$$

Решение. Дадена равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+3)(y-5) = 3.$$

Сега, од $3 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3)$ следува

а) $x+3 = 3, y-5 = 1$, т.е. $x = 0, y = 6$,

б) $x+3 = 1, y-5 = 3$, т.е. $x = -2, y = 8$,

в) $x+3 = -1, y-5 = -3$, т.е. $x = -4, y = 2$,

г) $x+3 = -3, y-5 = -1$, т.е. $x = -6, y = 4$.

68. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^4 + y^2 + 2y = 1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^4 + (y+1)^2 = 2.$$

Збирот на два целобројни квадрати е еднаков на 2 ако и само ако двата се еднакви на 1, па затоа решенијата на горната равенка се:

$$(x, y) \in \{(1,0), (1,-2), (-1,0), (-1,-2)\}.$$

69. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^2 + qr = 1996^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$qr = (1996-)(1996 + p).$$

Ќе разгледаме три случаи.

1) Ако $p = 3$, тогаш од $qr = 1993 \cdot 1999$, добиваме $q = 1993$ и $r = 1999$, или $q = 1999$ и $r = 1993$.

2) Ако $p = 3k + 1$, тогаш $1996 - p$ е делив со 3, што значи дека qr е делив со 3, па затоа мора еден од броевите q и r да е еднаков на 3. За $q = 3$, добиваме

$$3r = (1996 + p)(1996 - p), \text{ т.е. } r = (1996 + p)\frac{1996 - p}{3}.$$

Сега, бидејќи r е прост број, мора да е $1996 - p = 3$, т.е. $p = 1993$, па затоа $r = 3989$. Аналогно се добива дека за $r = 3$ важи $p = 1993$ и $q = 3989$.

3) Ако $p = 3k + 2$, тогаш $1996 + p$ е делив со 3, па повторно мора да е $q = 3$ или $r = 3$. Сега, ако земеме $q = 3$, тогаш равенката го добива видот

$$r = (1996 - p)\frac{1996 + p}{3},$$

од каде следува дека r е сложен број. Значи, во овој случај равенката нема решенија, а исто важи и за $r = 3$.

70. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$m^3 + 6m^2 + 5m = 8n^3 + 36n^2 + 40n + 8.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$m(m+1)(m+5) = (2n+1)(2n+2)(2n+6) - 4.$$

Бидејќи

$$m+5\equiv m+2(\mathrm{mod}3) \text{ и } 2n+6\equiv 2n(\mathrm{mod}3),$$

добиваме дека

$$m(m+1)(m+5)\equiv 0(\mathrm{mod}3) \text{ и } (2n+1)(2n+2)(2n+6)\equiv 0(\mathrm{mod}3).$$

Но, $4\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, па затоа дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

71. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

Решение. Јасно, тројката (0,0,0) е решение на дадената равенка. Ќе докажеме дека оваа равенка нема други решенија.

Нека x,y,z е едано решение на дадената равенка. Бидејќи $2xyz$ е парен број, добиваме дека $x^2+y^2+z^2$ е парен број, па затоа барем еден од нив е парен. Но, тоа значи дека $2xyz$ е делив со 4, па затоа $x^2+y^2+z^2$ е делив со 4. Понатаму, квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, па како $x^2+y^2+z^2$ е делив со 4, заклучуваме дека секој од броевите x^2,y^2,z^2 при делење со 4 дава остаток 0, т.е. x,y,z се парни броеви. Нека $x=2x', y=2y', z=2z'$. Сега, ако замениме во почетната равенка, добиваме

$$x'^2+y'^2+z'^2=2x'y'z',$$

па повторувајќи ја постапката наоѓаме $x'=2x'', y'=2y'', z'=2z''$ и затоа важи

$$x''^2+y''^2+z''^2=2x''y''z''.$$

Јасно, продолжувајќи ја постапката добиваме дека x,y,z се деливи со секој степен на бројот 2, а тоа е можно ако и само ако $x=y=z=0$.

72. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2(x^2+y^2)=5(xy+1).$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned}&2x^2-4xy-xy-2y^2=5,\\&2x(x-2y)-y(x-2y)=5,\\&(x-2y)(2x-y)=5.\end{aligned}$$

Сега, бидејќи $5=1\cdot 5=5\cdot 1=(-1)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-1)$, добиваме четири системи равенки чии решенија се: $(3,1),(-1,-3),(-3,-1),(1,3)$.

II.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

73. Определи го остатокот при делењето на бројот $1+2+2^2+...+2^{2021}$ со бројот 9.

Решение. Имаме

$$1+2+2^2+...+2^{2021}=(1+2+2^2+...+2^{2021})(2-1)=2^{2022}-1.$$

Имаме, $2^6=9\cdot 7+1$, што значи дека $2^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$. Според тоа,

$$2^{2022}=2^{6\cdot 337}=(2^6)^{337}\equiv 1^{337}=1(\mathrm{mod}\,9),$$

па затоа $2^{2022}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$, т.е. бараниот остаток е 0.

74. Определи ги последните две цифри на бројот 7^{7^7}.

Решение. Бидејќи $7^4=2401\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$ и како $7^7\equiv(-1)^7\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, добиваме

$$7^{7^7}=7^{4k+3}\equiv 7^3\equiv 43(\mathrm{mod}\,100).$$

75. Определи ги сите природни броеви n за кои може некои броеви од множеството $\{1,2,...,n\}$ да се зголемат за 1, а сите останати да се намалат за 1, така што нивниот производ ќе остане непроменет.

Решение. Лесно се гледа дека тоа е можно за сите парни броеви. Имено, за $n=2k$ ако ги поделиме броевите во парови последователни природни броеви $(1,2),(3,4),...,(2k-1,2k)$ и помалиот го зголемиме за 1, а поголемиот го намалиме за 1, ги добиваме истите броеви, па затоа производот ќе остане непроменет.

За $n=3$ не е можно на ниту еден начин од броевите 1, 2, 3 да се добие комбинација чиј производ ќе биде 6.

За $k=5$ од броевите 1, 2, 3, 4, 5 со трансформацијата $1+1,2-1,3-1,$ $4+1,5+1$ ќе ги добиеме броевите 2, 1, 2, 5, 6 чиј производ е 120.

За било кој друг непарен број поголем од 5, првите пет броеви ќе ги

промениме како во случајот $k=5$, а преостанатите $n-5$ броеви ќе ги поделиме на парови последователни природни броеви кај кои помалиот ќе го зголемиме за 1, а поголемиот ќе го намалиме за 1, со што добиваме броеви чиј производ е еднаков на производот на почетните броеви.

76. Нека должините на страните на правоагониот триаголник се природни броеви. Докажи дека должината на барем една страна на триаголникот број делив со 5.

Решение. Секој природен број може да се запише во еден од следниве облици: $5k, 5k\pm1, 5k\pm2$. Притоа важи

$$(5k)^2 = 5\cdot 5k^2,$$
$$(5k\pm1)^2 = 5\cdot(5k^2\pm 2k)+1,$$
$$(5k\pm2)^2 = 5\cdot(5k^2\pm 4k)+4.$$

Според тоа, квадрат на природен број при делење со 5 дава остаток 0, 1 или 4.

Нека претпоставиме дека должините на катетите a и b не се деливи со 5. Сега, од Питагоровата теорема следува дека c^2 при делење со 5 може да даде остаоци 2, 3 или 0. Но, квадрат на природен број при делење со 5 не дава остаток 2 и 3, па следува дека c^2 е делив со 5. Сега, 5 е прост број, па од $5|c^2$ следува $5|c$.

77. Докажи дека плоштината на секој правоаголен триаголник чии должини на страни се природни броеви е природен број делив со 6.

Решение. Нека a и b се должините на катетите на триаголникот.

Ќе докажеме дека должината на барем една катета е делива со 3.

Нека претпоставиме дека должините на двете катети не се деливи со 3. Квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Бидејќи и двете катети не се деливи со 3, заклучуваме дека нивните квадрати при делење со 3 даваат остаток 1. Но, тоа значи дека квадратот на хипотенузата при делење со 3 два остаток 2, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето.

Слично заклучуваме дека барем едната катета мора да е парен број. Имено, ако двете катети се непарни, тогаш збирот на нивните квадрати при делење со 4 дава остаток 2, т.е. квадратот на хипотенузата при делење со 4 дава остаток 2, што противречи на фактот дека квадрат на

природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека a е парен број. Оттука следува дека b и c имаат иста парност. Нека претпоставиме дека b и c се непарни. Тогаш од

$$a^2 = c^2 - b^2 = (2k+1)^2 - (2m+1)^2 = 4(k(k+1) - m(m+1))$$

следува дека a^2 е делив со 8, па затоа a е делив со 4. Ако претпоставиме дека b и c се парни, тогаш $(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 = (\frac{c}{2})^2$. Но, видовме дека тогаш еден од броевите $\frac{a}{2}$ или $\frac{b}{2}$ е парен, што значи дека еден од броевите a или b е делив со 4.

Со тоа го докажавме тврдењето на задачата.

78. Колку има подредени парови (m,n) природни броеви за кои важи

$$mn + 2m - 2n = 2020.$$

Решение. *Прв начин*. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned} &m(n+2) - 2(n+2) + 4 = 2020, \\ &(n+2)(m-2) + 4 = 2020, \\ &(m-2)(n+2) = 2016. \end{aligned}$$

Значи, бројот $n+2$ е делител на бројот 2016. Имаме $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, што значи дека бројот 2016 има

$$\tau(2016) = (5+1)(2+1)(1+1) = 36$$

делители. Делители на бројот 2016 кои не го задоволуваат условоs на задачата се 1 и 2, бидејќи не постои природен број n за кој $n+2=1$ или $n+2=2$, а во преостанатите случаи $n+2$ е природен број. Според тоа, имаме 34 можности за бројот n и за секоја можност имаме по една можност за бројот m, бидејќи дадената равенка е еквивалентна со равенката $m = 2 + \frac{2016}{n+2}$.

Конечно, постојат 34 подредени парови (m,n) природни броеви за кои важи $mn + 2m - 2n = 2020$.

Втор начин. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned} &m(n+2) = 2n + 2020, \\ &m = \tfrac{2n+2020}{n+2}, \end{aligned}$$

$$m=2+\frac{2016}{n+2}.$$

Според тоа, m е природен број ако и само ако $n+2$ е делител на 2016. Имаме $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$, што значи дека бројот 2016 има

$$\tau(2016)=(5+1)(2+1)(1+1)=36$$

делители. Делители на бројот 2016 кои не го задоволуваат условоs на задачата се 1 и 2, бидејќи не постои природен број n за кој $n+2=1$ или $n+2=2$, а во преостанатите случаи $n+2$ е природен број. Според тоа, имаме 34 можности за бројот n и за секоја можност имаме по една можност за бројот m.

Конечно, постојат 34 подредени парови (m,n) природни броеви за кои важи $mn+2m-2n=2020$.

79. Колку различни делители има бројот 144?

Решение. Имаме $144=2^4\cdot 3^2$. Ако било кој делител на бројот 144 го разложиме на прости множители, тогаш тој мора да се состои од степени на броевите 2 и 3. За степените на бројот 2 имаме 5 можност (0, 1, 2, 3 и 4), а за степените на бројот 3 имаме 3 можности (0, 1 и 2). Според тоа, вкупниот број делители на бројот 144 е еднаков на $5\cdot 3=15$.

80. Колку различни делители има бројот 2023^{2023}?

Решение. Имаме $2023^{2023}=(7\cdot 17^2)^{2023}=7^{2023}\cdot 17^{4046}$, па затоа бројот 2023^{2023} има $(2023+1)(4046+1)=8191128$ делители.

III. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Разликата на квадратите на два последователни непарни броја е 48. Кои се тие броеви?
   Решение. Последователните непарни броеви се разликуваат за 2, па ја добиваме равенката $(x+2)^2 - x^2 = 48$, чие решение е $x = 11$. Според тоа, бараните броеви се 11 и 13.

2. Бројот a е 92% од бројот b. Ако бројот b го зголемиме за 770, тогаш тој ќе биде поголем од a за 9% од својата нова вредност. Определи ги броевите a и b.
   Решение. Од првиот услов имаме $a = 0{,}92b$, а од вториот имаме $a = 0{,}91(b+700)$. Ако го замениме a од првата во втората равенка добиваме $0{,}92b = 0{,}91(b+700)$, од каде наоѓаме $b = 63700$. Конечно, $a = 0{,}92 \cdot 63700 = 58604$.

3. Кој број треба да се додаде на именителот и да се одземе од броителот на дропката $\frac{537}{463}$ за да се добие дропката $\frac{1}{9}$?
   Решение. Нека x е бараниот број. Имаме, $\frac{537-x}{463+x} = \frac{1}{9}$, од каде добиваме $9 \cdot (537 - x) = 463 + x$. Решението на последната равенка е $x = 437$.

4. Постојат два трицифени броја со следново својство: ако на поголемиот број од десно му се допише помалиот број, ќе се добие шестцифрен број за 499500 поголем од бројот кој би се добил кога на помалиот од десно ќе му се допише поголемиот број, а ако помалиот шестцифрен број се подели со поголемиот трицифрен број се добива количник 201. Кои се тие броеви?
   Решение. Нека x и y се бараните броеви. Од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} 1000y + x = 49950 + 1000x + y, \\ 1000x + y = 201y \end{cases}$$

кој е еквивалентне со системот равенки

$$\begin{cases} y - x = 500, \\ 5x = y. \end{cases}$$

Решението на последниот систем равенки е $x = 125, y = 625.$

5. Некој трицифрен број се зголемува за 27 ако цифрите на единиците и десетките ги заменат местата, а истиот број се намалува за 450 цифрите на стотките и десетките ги заменат местата. Што ќе се случи со овој број ако цифирте на стотките и едиците ги заменат местата?

Решение. Нека трицифрениот број е $\overline{abc}$. Од условот на задачата имаме

$$\begin{aligned} &\overline{acb} = \overline{abc} + 27, \\ &100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 27, \\ &9c = 9b + 27, \\ &c = b + 3, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\overline{abc} = \overline{bac} + 450, \\ &100a + 10b + c = 100b + 10a + c + 450, \\ &90a = 90b + 450, \\ &a = b + 5. \end{aligned}$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} \overline{abc} - \overline{cba} &= 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) \\ &= 99a - 99c \\ &= 99(a - c) \\ &= 99(b + 5 - b - 3) \\ &= 99 \cdot 2 \\ &= 198. \end{aligned}$$

Значи, $\overline{abc} = \overline{cba} + 198$, па затоа кога цифрите на единиците и стотките ќе ги заменат местата бројот ќе се намали за 198.

6. Ако некој број се подели со друг број, се добива количник 2 и остаток 5. Ако збирот на ови броеви се подели со нивната разлиа се добива количник 2 и остаток 7. Определи ги овие броеви.

Решение. Со x да го означиме делителот. Тогаш деленикот е еднаков на $2x+5$. Збирот на овие броеви е $3x+5$, а нивната разлика е $x+5$. Затоа важи $3x+5=2(x+5)+7$, од каде добиваме $x=12$. Сега, $2x+5=29$, што значи дека бараните броеви се 12 и 29.

7. Односот на збирот, разликата и производот на два природни броја е $5:1:18$. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се x и y. Имаме

$$(x+y):(x-y):(xy)=5:1:18,$$

од каде добиваме $x+y=5k, x-y=k, xy=18k$. Од првите две равенки добиваме $x=3k, y=2k$, па ако замениме во третата равенка наоѓаме $6k^2=18k$, од каде следува $k=3$.

Конечно, бараните броеви се $x=3\cdot 3=9$ и $y=2\cdot 3=6$.

8. Дадена е низа од пет броја. Аритметичката средни на првите три броја е еднаква на 19, а аритметичката средина на сите пет броја е еднаква на 20. Определи ги последните два броја ако нивниот производ е еднаков на 456.

Решение. Нека a,b,c,d,e се дадените броеви. Од $\frac{a+b+c}{3}=19$ следува $a+b+c=57$, а од $\frac{a+b+c+d+e}{5}=20$ следува $a+b+c+d+e=100$. Според тоа, $d+e=100-57$, т.е. $d+e=43$. Понатаму, $de=456$ и како $e=43-d$, добиваме $d(43-d)=456$, од каде $d^3-43d+456=0$, т.е. $(d-24)(d-19)=0$, односно $d-24=0$ или $d-19=0$. Според тоа, $d=24$ и $e=43-24=19$, или $d=19$ и $e=43-19=24$. Значи, последните два броја се 19 и 24.

9. Аритметичката средина на некои 50 последователни парни природни броеви е еднаква на аритметичката средина на некои 41 последователни непарни природни броеви. Определи ги овие броеви ако разликата на квадратот на најголемиот парен број и квадратот на средниот по големина непарен број е еднаква на 7595.

Решение. Нека x е првиот во низата од 50 последователни парни броеви. Тогаш педесеттиот број во оваа низа е $x+98$. Артиметичката средина на овие броеви е $\frac{x+x+2+x+4+...+x+98}{50}=\frac{50x+50\cdot 49}{50}=x+49$. Нека y е првиот во низата од 41 последователни непарни броеви. Тогаш чети-

риаесет и првиот број е $y=80$, па аритметичката средина на овие броеви е $\frac{y+y+2+y+4+...+y+80}{41}=\frac{41y+41\cdot 40}{41}=y+40$. Бидејќи аритметичките средини се еднакви, добиваме $x+49=y+40$, т.е. $x+9=y$. Најголемиот парен број е $x+98$, а средниот по големина непарен број е $y+40$, па затоа

$$(x+98)^2-(y+40)^2=7595,$$
$$(x+98)^2-(x+49)^2=7595,$$
$$(x+98+x+49)(x+98-x-49)=7595,$$
$$49(2x+147)=595,$$
$$x=4.$$

Понатаму, $y=x+9=13$, па затоа бараните броеви се: 4, 6, 8, ...,102, односно 13, 15, 17, ..., 93.

10. Збирот на три дропки е еднаков на $\frac{83}{72}$, при што нивните броители се однесуваат како $5:7:1$. Именителот на третата дропка се однесува спрема именителот на првата дропка како $1:4$, а именителот на втората дропка се однесува спрема именителот на третата дропка како $3:2$. Определи ги овие дропки, ако тие се скратени до крај?

Решение. Нека бараните дропки се $\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}$. Од условот на задачата имаме $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{83}{72}$, $x:y:z=5:7:1$, $c:a=1:4$ и $b:c=3:2$. Според тоа, $x=5k, y=5k, z=x$, $a=4c$ и $b=\frac{3}{2}c$, па затоа

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{83}{72},$$
$$\frac{5k}{4c}+\frac{14k}{3c}+\frac{k}{c}=\frac{83}{72},$$
$$\frac{15k+56k+12k}{12c}=\frac{83}{72},$$
$$\frac{83k}{12c}=\frac{83}{72}.$$

Дропките се скратени до крај, па затоа важи $83k=83$ и $12c=72$, т.е. $k=1$ и $c=6$. Конечно, $x=5, y=7, z=1, c=6, a=24, b=9$ и бараните дропки се $\frac{5}{24},\frac{7}{9},\frac{1}{6}$.

11. Андреј замислил еден реален број. Производот на неговиот квадрат и

квадратот на неговата трикратна вредност е еднаков на 36. Збирот на замисленият број и неговата апсолутна вредност е еднаков на 0. Кој број го замислил Андреј?

Решение. Од $x^2 \cdot (3x)^2 = 36$ добиваме $x^4 = 4$, па затоа $x^2 = 2$. Бидејќи $x + |x| = 0$, заклучуваме дека $x < 0$, па од $x^2 = 2$ следува $x = -\sqrt{2}$. Значи, Андреј го замислил бројот $-\sqrt{2}$.

III.2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

12. По неколку работни дена, при изградбата на еден пат, менаџерот превзел чекори за побрзо завршување на изградбата, при што секои од предвидените 3 дена работа се завршувале за 2 дена. Ако целата работа е завршена за 70 наместо за 90 дена, колку дена се работело пред менаџерот да ја реорганизира работата?

Решение. Благодарение на реорганизацијата на работата, изградбата траела 20 дена помалку. Бидејќи со секој од овие 20 дена е скратена на два дена работата која требало да се реализира за три дена, заклучуваме дека наместо 60 дена се работело 40 дена. Според тоа, пред менаџерот да ја реорганизира работата се работело $90 - 60 = 30$ дена, а потоа се работело упте 40 дена.

13. Еден тракторист може парцелата планирана за сеидба да ја изора за 20 дена. Друг тракторист истата парцела може да ја изор за 30. Ако на првите двајца трактористи им се придружи трет тракторист и сите тројца работат заедно, тогаш парцелата ќе биде изорана за 7 дена. Колку дена му се потребни на третиот тракторист да ја изора парцела?

Решение. Нека на третиот трактоприст му се потребни x дена за да ја изора парцелата. Првиот тракторист за 1 ден изорува $\frac{1}{20}$ од парцелата, вториот изорува $\frac{1}{30}$ од парцелата, третиот изорува $\frac{1}{x}$ од парцелата и сите тројца заедно изоруваат $\frac{1}{7}$ од парцелата. Затоа, $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{7}$, од каде добиваме $x = \frac{84}{5}$ дена.

14. За да ја окосат ливадата покрај куќата на нивниот татко на Дарко и

Хорват им требало 36 минути, на Хорват и Веселин им требале 45 минути, а на Веселин и Дарко им требале 60 минути. Се договориле дека секој од нив ќе окоси третина од ливадата. Колку време ќе работи Дарко, колку Хорват и колку Веселин?

Решение. Со d, h и v да го означиме делот од ливадата кој во една минута го окосува Дарко, Хорват и Веселин. Тогаш

$$d+h=\frac{1}{36},\ h+v=\frac{1}{45},\ v+d=\frac{1}{60}.$$

Ако ги собереме горните равенства добиваме

$$d+h+v=\frac{1}{30}.$$

Според тоа,

$$d=\frac{1}{30}-\frac{1}{45}=\frac{1}{90},$$
$$h=\frac{1}{30}-\frac{1}{60}=\frac{1}{60},$$
$$v=\frac{1}{30}-\frac{1}{36}=\frac{1}{180}.$$

Значи, за да ја окоси целата ливада на Дарко му се потребни 90, на Хорват 60 и на Веселин 180 минути. Според тоа, Дарко ќе коси 30, Хорват ќе коси 20 и Веселин ќе коси 60 минути.

15. Пабло купил, две свеќи со различни должини и дебелини. Подолгата свеќа целосно ќе изгори за 3,5 часа, а пократката за 5 часа. Пабло свеќите ги запалил истовремено и забележал дека по 2 часа горење тие имаат иста должина. За колку проценти на почетокот подолгата свеќа била подолга од пократката свеќа?

Решение. Нека подолгата свеќа има должина a, а пократката има должина b. За еден час од подолгата свеќа ќе изгори $a:3{,}5=\frac{2}{7}a$ од нејзината должина, а за еден час ќе изгори $b:5=\frac{b}{5}$ од должината на пократката свеќа. Според тоа, по 2 часа од должината на првата свеќа преостанува $\frac{3}{7}a$, а од должината на втората свеќа преостанува $\frac{3}{5}b$. Затоа важи $\frac{3}{7}a=\frac{3}{5}b$, односно $a=\frac{7}{5}b=1{,}4b$. Конечно, првата свеќа е 40% подолга од втората свеќа.

16. Ивана и Марија добиле порачка да направат 72 честитки. Секоја од нив изработила по 36 честитки, а секоја од нив своите честитки ги изработувала за еднакво време. Ивана изработувала 6 честитки за исто

време за кое Марија изработувала 5 честитки. Ивана своите 36 честитки ги изработила за 1 час и 48 минути пократко време од времето кое Марија го потрошила за изработка на своите 36 честитки. Колку честитки за 1 час прави Марија, а колку Ивана?

Решение. *Прв начин*. Додека Ивана прави 6 честитки, Марија прави 5 честитки. Тоа значи дека, додека Ивана прави 36 честитики, Марија прави 30 честитки. Според тоа, за преостанатите 6 честитки на Марија и се потребни 1 час и 48 минути, односно 108 минути. Значи, на Марија за изработка на една честитка и требаат $108:6=18$ минути, па за 1 час таа ќе направи $\frac{60}{18}=3\frac{1}{3}$ честитки. За изработка на 5 честитки на Марија и се потребни $5\cdot 18=90$ минути и за ова време Ивана прави 6 честитики. Според тоа, за изработка на една честитка на Ивана и требаат $90:6=15$ минути, па таа за 1 час ќе направи $60:15=4$ честитки.

Втор начин. Нека Ивана прави една честитка за x минути. Значи, таа 6 честитки прави за $6x$ минути. За истото тоа време Марија прави 5 честитки, што значи дека за една честитка и се потребни $\frac{6}{5}x$ минути. На Марија за изработка на сите честитки и треба 1 час и 48 минути повеќе време, па затоа

$$36x+108=36\cdot\frac{6}{5}x.$$

Решението на последната равенка е $x=15$. Значи, Ивана за изработка на една честитка и требаат 15 минути, а на Марија и требаат $\frac{6}{5}\cdot 15=18$ минути.Конечно, Ивана за 1 час изработува $60:15=4$ честитки, а Марија за 1 час изработува $\frac{60}{18}=3\frac{1}{3}$ честитки.

17. Пабло излегол од дома неколку минути по 18 часот. Во моментот кога излегувал стрелките на часовникот зафаќале агол од 110°. Тој се вратил неколку минути пред 19 часот и во моментот кога влегол дома стрелките на часовникот повторно зафаќале агол од 110°. Колку минути Пабло бил отсутен од дома, при претпоставка дека часовникот работи точно?

Решение. Минутната (големата) стрелка за една минута опишува лак од $360^\circ:60=6^\circ$, а часовната (малата) стрелка заедна минута опишува лак од $360^\circ:(12\cdot 60)=0{,}5^\circ$. Ако со x ги означиме минутите од 18 часот до моментот кога Пабло излегол од дома тогаш големата стречка

опишала $(6x)^\circ$, а малата $(0,5x)^\circ$, па затоа важи

$$110^\circ = 180^\circ - (6x)^\circ + (0,5x)^\circ,$$

од каде добиваме $x = 12\frac{8}{11}\min$. Ако со y ги означиме минутите од 18 часот до доаѓањето на Пабло дома тогаш големата стречка опишала $(6y)^\circ$, а малата $(0,5y)^\circ$. Затоа важи

$$110^\circ = (6y)^\circ - 180^\circ - (0,5)^\circ,$$

од каде добиваме $y = 52\frac{8}{11}\min$. Конечно, Пабло од дома бил отсутен $52\frac{8}{11} - 12\frac{8}{11} = 40\min$.

III.3. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

18. Пет работници сработиле една работа, за што добиле 105000 денари. Парите ги поделиле така што првиот и вториот добиле $\frac{2}{5}$ од сума која ја добиле останатите тројца. Првите двајца својот дел го поделиле во однос 2:3, а другите тројца во однос 3:4:5. Колку пари добил секој работни?

Решение. Ако делот кој го добиле третиот, четвртиот и петтиот работник го означиме со x, тогаш $x + \frac{2}{5}x = 105000$, од каде добиваме $x = 75000$ денари. Овој однос го делат тројца работници во однос 3:4:5. Затоа, без ограничување на општоста можеме да земеме дека третиот, четвртиот и петтиот работник добиле $3k, 4k$ и $5k$ денари. Според тоа, $3k + 4k + 5k = 75000$, т.е. $k = 6250$ денари. Според тоа, третиот, четвртиот и петтиот работник добиле 18750 денари, 25000 денари и 31250 денари.

На ист начин ја делиме сумата од 30000 денари на првите двајца работници и добиваме дека едниот добил 12000 денари, а другиот добил 18000 денари.

19. Цената на една стока е намалена за 4%. За колку проценти треба да се зголеми новата цена за да се добие почетната цена на стоката?

Решение. Нека претпоставиме дека цената на стоката е $100a$ денари. По намалувањето од 4% цената на стокатата е еднаква на $96a$ денари.

Зголемувањето од $4a$ денари, изразено во проценти од намалената цена ќе биде $\frac{4a}{96a}\cdot 100 = 4\frac{1}{6}\%$.

20. Цените на еден вид патики во две продавници биле еднакви. Во едната продавница цената е покачена за 8%, а во другата е намалена за 8%. Разликата на новодобиените цени е еднаква на 1200 денари. Определи ја првобитната цена на патиките.
Решение. Со x да ја означиме првобитната цена на патиките. Тогаш во едната продавница цената на патиките е $(1+\frac{8}{100})x = 1,08x$, а во другата е $(1-\frac{8}{100})x = 0,92x$. Според тоа, $1,08x - 0,92x = 1200$, односно $0,16x = 1200$, од каде добиваме $x = 7500$ денари.

21. Второто издание на една книга, по нејзината преработка, се продава по цена која е за 20% повисока од цената на првото издание. Цената на третото издание е намалена за 20% во однос на цената на второто издание. Определи дали книгата е поевтина во првото или третото издание и за колку проценти била поевтина.
Решение. Нека c е цената на првото издаие на книгата. Тогаш цената на второто издание е еднаква на $c(1+\frac{20}{100}) = 1,2c$, а цената на третото издание е еднаква на $1,2c(1-\frac{20}{100}) = 0,96c$, што е 96% од цената на првото издание. Според тоа, третото издание е поевтино за 4% од првото издание на книгата.

22. Киро и Рампо купуваат исти тетратки. На Киро му недостасуваа 60 денари за да купи 4 тетратки, а на Рампо му недостасуваат 60 денари за да купи 5 тетратки. Ако се здружат, тогаш ќе им недостасуваат 60 денари за да купат 6 тетратки. Колку чини една тетратка?
Решение. Кога купуваат одделно на Киро и Рампо заедно им недостасуваат $60+60=120$ денари за да купат $4+5=9$ тетратки. Од друга страна, кога купуваат заедно им недостасуваат 60 денари за да купат 6 тетратки. Значи, $9-6=3$ тетратки чинат $120-60=60$ денари. Конечно, една тетратка чини $60:3=20$ денари.

23. Шеснаесет работници за 5 дена завршуваат $\frac{4}{9}$ од некоја работа. Колку работници треба уште да се ангажираат за да преостанатиот дел од

работата, работејќи со исто темпо, се заврши за 4 дена?

Решение. *Прв начин*. Шеснаесет работници за еден ден завршуваат $\frac{4}{45}$ од работата. За да работниците за 4 дена завршат $\frac{5}{9}$ од работата, тие дневно треба да сработат по $\frac{5}{36}$ од работата. Ако со x го означиме бројот на работниците кои се потребни работата да се доврши за 4 дена, тогаш важи $16:x=\frac{4}{45}:\frac{5}{36}$, од каде добиваме $x=25$. Значи, потребно е да се ангажираат уште $25-16=9$ работници.

Втор начин. Шеснаесет работници за еден ден завршуваат $\frac{4}{45}$ од работата. Еден работник дневно завршува $\frac{1}{180}$ од работата. Останува за 4 дена да се завршат $\frac{5}{9}$ од работата, па секој ден треба да се сработат по $\frac{5}{36}$ од работата. За тоа се потребни $\frac{5}{36}:\frac{1}{180}=25$ работници. Според тоа, треба да се ангажираат уште $25-16=9$ работници.

24. Цената на еден мопед е еднаква на 201900 денари. Прво цената на мопедот е зголемена за 10%, а потоа е намалена за 30%. Определи ја цената на мопедот по двете промени. Дали конечната цена е поголема или помала од почетната и за колку проценти?

Решение. Нека цената на мопедот е $c=201900$ денари. По зголемувањето цената на мопедот ќе биде $c\ =110\%c=1,1c$, а по намалувањето ќе биде $c_2=70\%c_1=0,7c_1=0,7\cdot 1,1c=0,77c=77\%c$. Според тоа, конечната цена ќе биде за $100\%-77\%=23\%$ пониска од почетната и таа ќе изнесува $c_2=0,77\cdot 201900=155463$ денари и за 46463 пониска од почетната цена на мопедот.

25. За да ги намали трошоците за греење Марко одлучил да ја промени фасадата на куќата. За таа цел му се одобрени средства од Фондот за заштита на животната средина и енергетска ефикасност во висина од 60% од вкупните трошоци. Вкупниот трошок за новата фасада е 1200000 денари. Со новата фасада трошоците за греење ќе се намалат за 35%. Ако просечната годишна цена на греењето на куќата изнесувале 168000 денари, за колку години ќе се исплати оваа инвестиција на Марко?

Решение. За правење на новата фасада Марко треба да инвестира 40% сопствени средства од цената на фасадата, т.е. $0,4\cdot 1200000=480000$

денари. Просечната годишна заштеда за греењето на куќата изнесува 35% од 168000 денари, односно $0,35 \cdot 168000 = 58800$ денари.

Инвестицијата ќе се исплати за во $n-$тата година за која важи $58800n > 480000$, односно $n > \frac{480000}{58800} = 8\frac{8}{49}$. Според тоа, инвестицијата ќе се исплати по 9 години.

26. Г-нот Јакопетрески во петокот стигнал во градот Иди-види и порачал такси. Таксистот му објаснил дека поаѓањето се наплатува 100 денари и за секој изминат километар се доплаќа по 25 денари. Во саботата г-н Јакопетрески ја користел истата такси компанија, но тој ден заради годишнината од формирањето на компанијата сите цени биле намалени за 20%. Тој ден г-н Јакопетрески се возел $5\,km$ повеќе и платил исто колку претходниот ден. Колку километри се возел г-н Јакопетрески во петокот и колку платил за едно возење?

Решение. Нека г-н Јакопетрески во петокот поминал x километри. За тој ден тој платил $100 + 25x$ денари. Во саботата г-н Јакопетрески поминал $x+5$ километри, па требало да плати $100 + 25(x+5)$ денари. Но, тој платил $0,8(100 + 25(x+5)) = 80 + 20(x+5)$ денари и тоа е истата сума како и во петокот. Значи, $100 + 25x = 80 + 20(x+5)$, од каде добиваме $5x = 80$, односно $x = 16\,km$. Значи, во петокот г-н Јакопетрески се возел $16\,km$ и за тоа платил $100 + 25 \cdot 16 = 500$ денари.

27. Во книжара стигнала кутија моливи за кои се планирало сите да се продадат по иста цена. Една четвртина од вкупниот број моливи е продадена по 5% повисока цена од планираната. Половина од моливите се продадени по 10% пониска цена од планираната. За колку проценти повисока цена трба да се продадат преостанатите моливи за да се оствари планираната заработувачка при пристигнувањето на моливите?

Решение. Со x да ја означиме планираната зарабоувачка, а со y бараниот процент на зголемување. Тогаш

$$105\% \cdot \tfrac{1}{4}x + 90\% \cdot \tfrac{1}{2}x + (100+y)\% \cdot \tfrac{1}{4}x = x,$$

$$\tfrac{105}{400}x + \tfrac{90}{200}x + \tfrac{100+y}{400}x = x,$$

$$(\tfrac{105}{400} + \tfrac{90}{200} + \tfrac{100+y}{400})x = x,$$

$$\frac{105}{400}+\frac{90}{200}+\frac{100+y}{400}=1,$$
$$385+y=400,$$
$$y=15.$$

Значи, преостанатите моливи треба да се продаваат по цена повисока за 15%.

28. Филип купил патики по цена од 4550 денари. Патиките го платил со 23 банкноти од по 50 денари, 100 денари и 500 денари. Бројот на банкнотите од 50 денари е најмал. По колку банкноти од секој вид дал Филип за да ги плати патиките?

Решение. Ако имаме 5 или помалку банкноти од по 500 денари, тогаш со преостанатите два вида банкноти од по 50 и 100 денари треба да се плати сума која е поголема или еднаква на 2050 денари, за што ни се потребни најмалку 21 банкнота ($20\cdot 100+1\cdot 50=2050$). Но тогаш бројот на банкнотите ќе биде поголем или еднаков на $21+5>23$, што не е можно. Ако имаме 8 или повеќе банкноти од по 500 денари, тогаш со преостанатите банкноти треба да се плати сума од 550 денари, за што ни се потребни најмногу 11 банкноти ($11\cdot 50=550$), што не е можно, бидејќи $8+11<23$. Значи, Филип дал 6 или 7 банкноти од по 500 днари.

Нека со x го означиме бројот на банкнотите од по 100 денари, а со y бројот на банкнотите од по 50 денари. Ако Филип дал 7 банкноти од по 500 денари, тогаш $100x+50y=1050$ и $x+y=16$, од каде добиваме $x=5$ и $y=11$, што не е можно бидејќи треба да важи $y<x$. Ако Филип дал 6 банкноти од по 500 денари, тогаш $100x+50y=1550$ и $x+y=17$, од каде добиваме $x=14$ и $y=3$. Конечно, за да гио плати патиките Филип дал 6 банкноти од по 500 денари, 14 банкноти од по 100 денари и 3 банкноти од по 50 денари.

29. За излет на група ученици е изнајмен авобус по цена од 28800 денари. Во последен момент тројца ученици го откажале одењето на излетот. Заради тоа цената на превозот на секој ученик се зголемила за 40 денари. Колку ученици требало да одат на излет?

Решение. Нека n е бројот на учениците кои требало да одат на излетот и $x>0$ е цената на излетот по ученик. Тогаш од условот на задачата следуга

$$nx = 28800 \text{ и } (n-3)(x+40) = 28800.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} nx &= (n-3)(x+40), \\ 3x &= 40n - 120, \\ x &= \tfrac{40n-120}{3}. \end{aligned}$$

Заменуваме во $nx = 28800$ и добиваме

$$\begin{aligned} & n \cdot \tfrac{40n-120}{3} = 28800, \\ & n^2 - 3n - 2160 = 0, \\ & n^2 - 2 \cdot \tfrac{3}{2} n + \tfrac{9}{4} - \tfrac{8649}{4} = 0 \\ & (n - \tfrac{3}{2})^2 - (\tfrac{93}{2})^2 = 0, \\ & (n - \tfrac{3}{2} - \tfrac{93}{2})(n - \tfrac{3}{2} + \tfrac{93}{2}) = 0, \\ & (n-48)(n+45) = 0. \end{aligned}$$

Но, $n \in \mathbb{N}$, па решение на почетната задача е само $n = 48$. Значи, на излетотот требало да одат 48 ученици.

30. Тројца пријатели заштедиле определена сума пари. Ако првиот има пет пати помалку, вториот два пати помалку, а третиот два и пол пати помалку од својата заштеда, тогаш заедно ќе имаат 160 евра.
Ако првиот има два пати помалку, вториот четири пати помалку и третиот три пати помалку од својата заштеда, тогаш заедно ќе имаат 240 евра.
Колку пари заштедиле тројцата пријатели заедно?
Решение. Со x, y, z да ја означиме сумата која ја заштедил првиот, вториот и третиот пријател, соодветно. Од условот на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2{,}5} = 160, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 240, \end{cases}$$

кој е еквивалентен со системот равенки

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 1600, \\ 6x + 3y + 4z = 2880. \end{cases}$$

Ако ги собереме равенките на последниот систем добиваме

$$8x + 8y + 8z = 4480,$$

т.е.

$$x+y+z=560.$$

Според тоа, тројцата пријатели заедно заштедиле 560 евра.

31. На сезонското намалување Пабло купил чевли, пантолони и кошула. За чевлите ги потрошил половина од парите кои ги понел и уште 10 евра. За пантолоните потрошил половина од парите кои му преостанале и уште 20 евра, а за кошулата ги потрошил половина од парите кои му преостанале и уште 30 евра, со што ги потрошил сите пари. Колку пари имал Пабло на почетокот?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи Пабло за кошулата платил половина од парите кои му останале по купувањето на пантолоните и уште 30 евра, по што немал пари, тој кошулата ја платил $30+30=60$ евра. Понатаму, $60+20=80$ евра е половина од парите кои Пабло ги имал откако ги купил чевлите, па затоа по купувањето на чевлите имал $2\cdot 80=160$ евра и за пантолоните платил $80+20=100$ евра. Сега, $160+10=170$ евра се половина од парите кои Пабло ги имал на почетокот, што значи дека тој на почетокот имал $2\cdot 170=340$ евра и за чевлите платил $170+10=180$ евра.

Втор начин. Нека Пабло на почетокот имал x евра. Чевлите ги платил $\frac{1}{2}x+10$ евра, по што му преостанале $\frac{1}{2}x-10$ евра. Панталоните ги платил $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-10)+20=\frac{1}{4}x+15$ евра, по што му преостанале $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-10)-20=\frac{1}{4}x-25$ евра. Конечно, за кошулата тој платил $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}x-25)=30=\frac{1}{8}x+\frac{35}{2}$ евра. Затоа

$$\frac{1}{2}x+10+\frac{1}{4}x+15+\frac{1}{8}x+\frac{35}{2}=x,$$

од каде добиваме $x=340$ евра. Значи, Пабло на почетокот имал 340 евра, чевлите ги платил 180 евра, панталоните 100 евра и кошулата 60 евра.

32. Софија и Марина собираат монети од 2 и 5 денари, секоја во својата касичка. По еден месец ги отвориле касичките и ги пребројале монетите. Заедно имале 280 монети по 2 денари. Во касичката на Софија 60% од сите монети биле од по 2 денари, а во касичката ма Марина имало двапати повеќе монети од 2 денари отколку од 5 денари. Во двете касички вкупно имало 1360 денари. Колку пари имало во ка-

сичката на Софија, а колку во касичката на Марина?

Решение. Нека има a монети од 2 денари во касата на Софија, b монети од 5 денари во касата на Софија, c монети од 2 денари во касата на Марина и d монети од 5 денари во касата на Марина. Важи

$$\begin{cases} a+c=280, \\ 0,6(a+b)=a, \\ c=2d, \\ 2(a+c)+5(b+d)=1360. \end{cases}$$

Сега, $c=280-a, b=\frac{2}{3}a, d=140-\frac{a}{2}$, па ако замениме во последната равенка на системот добиваме

$$2\cdot 280+5(\tfrac{2}{3}a+140-\tfrac{1}{2}a)=1360,$$

од каде наоѓаме $a=120$. Сега, $c=160$, $b=80$ и $d=80$. Значи, Софија има $2a+5b=640$ денари и Марина има $2c+5d=720$ денари.

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

33. Земјоделецот Киро земјиштето за сеидбата го подготвил за три дена. Првиот ден подготвил $\frac{3}{10}$ од земјиштето, вториот ден подготвил $\frac{3}{5}$ од преостанатото земјиште и третиот ден го подготвил преостанатото земјиште. Колкава е плоштината на тоа земјиште, ако третиот ден се обработени 11,2 хектари помалку од вториот ден? Колку земјиште Киро обработувал секој ден?

Решение. Нека x е плоштината на земјштето. Првиот ден се обработени $\frac{3}{10}x$, вториот ден се обработени $\frac{3}{5}(x-\frac{3}{10}x)=\frac{21}{50}x$ и третиот ден се обработени $x-\frac{3}{10}x-\frac{21}{50}x=\frac{14}{50}x$. Затоа $\frac{21}{50}x-\frac{14}{50}x=11,2$, односно $x=\frac{50\cdot 11,2}{7}=80\,ha$. Значи, првиот ден се обработени $\frac{3}{10}\cdot 80=24\,ha$, вториот ден се обработени $\frac{21}{50}\cdot 80=33,6\,ha$ и третиот ден се обработени $80-(24+33,6)=22,4\,ha$.

34. Фармерите Киро и Рампо минатата година ожнеале 300 тони пченица, а оваа година тие ожнеале $\frac{1}{3}$ пченица повеќе одколку минатата годи-

на. По колку пченица лани ожнеал секој фармер, ако годинава Киро ожнеал два пати повеќе од лани, а Рампо ожнеал за петтина повеќе од лани?

Решение. Нека лани Киро ожнеал x тони пченица. Тогаш Рампо ожнеал $300-x$ тони пченица. Оваа година фармерите заедно ожнеале $300+\frac{1}{3}\cdot 300=400$ тони пченица, при што Киро ожнеал $2x$, а Рампо ожнеал $(1+\frac{1}{5})(300-x)=\frac{6}{5}(300-x)$ тони пченица. Значи,

$$2x+\frac{6}{5}(300-x)=400,$$

од каде добиваме $x=50$. Според тоа, лани Киро ожнеал 50 тони, а Рампо ожнеал 250 тони пченица.

35. Орачот Марко од една парцела изорал 5 хектари и уште $\frac{3}{8}$ од парцелата, по што му преостанале дас изора $\frac{2}{5}$ од парцелата и уште 8 хекари. Колку хектари имала парцелата? Колку хектари изорал Марко, а колку му останале да изора?

Решение. Нека површината на парцелата е x хектари. Од условот на задачата следува

$$5+\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}x+8=x.$$

Решението на последната равенка е $x=\frac{520}{9}\,ha=57\frac{7}{9}\,ha$. Марко изорал $5+\frac{3}{8}\cdot\frac{520}{9}=26\frac{2}{3}\,ha$, а му преостанале да изора $57\frac{7}{9}-26\frac{2}{3}=31\frac{1}{9}\,ha$.

36. Во три сада има вода. Ако половина од водата во првиот сад ја претуриме во вториот сад, потоа третина од така добиеното количество од вториот сад го претуриме во третиот сад, и на крајот, четвртина од водата во третиот сад ја претуриме во првиот сад, во секој сад ќе има по 6 литри вода. Колку вода имало на почетокот во секој сад?

Решение. *Прв начин*. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Податоците се дадени во следнава табела.

	Прв сад	Втор сад	Трет сад
На крајот	6	6	6
По второ претурање	4	6	8
По прво претурање	4	9	5
На почетокот	8	5	5

Втор начин. Нека на почетокот во првиот, вториот и третиот сад имало x, y и z вода, соодветно. По првото прелевање во првите два сада имало по $\frac{x}{2}, y+\frac{x}{2}$ литри вода. По второто прелевање во вториот сад имало $\frac{2}{3}(y+\frac{x}{2})$, што според условот на задачата значи $\frac{2}{3}(y+\frac{x}{2})=6$, од каде следува $2y+x=18$. Но, $x+y+z=18$, па затоа $y=z$. Значи, во третиот сад прво имало $y+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})$ литри вода, а потоа $\frac{3}{4}(y+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2}))=6$, од каде добиваме $8y+x=48$. Од равенките $2y+x=18$ и $8y+x=48$ добиваме $x=8$ и $y=z=5$. Значи, во првиот сад имало 8 литри вода, а во другите два по 5 литри вода.

37. Патот меѓу местата A и B е долг $55\,km$. Андреј тргнал од местото A во местото B со брзина од $5\,km/h$. Два часа подоцна од B кон A тргнал Пабло со брзина од $4\,km/h$. По колку часа че се сретнат Андреј и Пабло, сметајќи од поаѓањето на Андреј? На кое растојание од A ќе се сретнат Андреј и Пабло?
Решение. Нека до моментот на средбата Андреј се движел t часови, а Пабло $t-2$ часови. До средбата Андреј и Пабло заедно поминале $55\,km$, па затоа $5t+4(t-2)=55$, од каде добиваме $t=7\,h$. До средбата дошло на $5\cdot 7=35\,km$ од местото A.

38. Воз се движи со брзина од $60\,km/h$ од местото A во местото B. Заради затворен сигнал на пругата возот морал да застане и тука се задржал 3 минути. Потоа продолжил да се движи со брзина $75\,km/h$ и во местото B стигнал точно според редот на возењето. Колку километри пред местото B се наоѓа споменатиот сигнал?
Решение. Нека оддалеченоста на сигналот од местото B е $x\,km$. Ако возот не стоел на сигналот во местото B ќе стигнел за $\frac{x}{60}$ часови. По задржувањето од $3\min=\frac{1}{20}\,h$, возот норал да го надополни изгубеното време и затоа возел со брзина од $75\,km/h$, при што возел $\frac{x}{75}$ часови. Според тоа, $\frac{x}{60}=\frac{x}{75}+\frac{1}{20}$, од каде добиваме $x=15\,km$.

39. Моторциклист тргнал од местото A во местото B, каде требало да

стигне во определено време. Ако вози со брзина од $35\,km/h$ ќе задоцни 2 часа, а ако вози со брзина од $50\,km/h$ ќе стигне 1 час порано. Определи ја должината на патот меѓу местата A и B.

Решение. Да го означиме со t часови времето за кое моторциклистот треба да стигне во местото B, а со s должината на патот меѓу местата A и B. Тогаш имаме $s=35(t+2)$ и $s=50(t-1)$. Според тоа, $35(t+2)=50(t-1)$, од каде добиваме $t=8\,h$. Конечно, должината на патот меѓу местата A и B е $s=35\cdot(8+2)=350\,km$.

40. Одејќи од дома кон фудбалскиот стадион Горјан откако првиот час поминал $3\,km$, заклучил дека ако продолжи со истата брзина на стадионот ќе стаса $30\,\min$ по почетокот ма натпреварот. Затоа преостанатиот дел од патот го поминал со брзина од $4\,km/h$ и на стадионот стигнал $40\,\min$ пред почетокот на натпреварот. Определи ја должината на патот од домот на Горјан до фудбалскиот стадион.

Решение. Со t да го означиме времето кое на Горјан му е потребно да стигне до стадионот по поминати $3\,km$. Бидејќи $30\,\min=\frac{1}{2}\,h$ и $40\,\min=\frac{2}{3}\,h$, од дадените услови следува равенката $3(t+\frac{1}{2})=4(t-\frac{2}{3})$. Решението на последната равенка е $t=\frac{25}{6}\,h$. Конечно, патот од домот на Горјан до фудбалскиот стадион е долг $3+3(\frac{25}{6}+\frac{1}{2})=17\,km$.

41. За да го помине патот меѓу местата A и B мотоциклистот Филип возел определено време. Една четвртина од тоа време тој возел со брзина од $45\,km/h$, а преостанатото време со брзина од $75\,km/h$. Определи ја просечната (средната) брзина со која Филип го помиал патот од A до B.

Решение. Ако t е вкупното потрошено време, тогаш првиот дел од патот на кој Филип возел со брзина од $45\,km/h$ е еднаков на $\frac{45t}{4}\,km$. Вториот дел од патот е долг $\frac{75\cdot 3t}{4}=\frac{225t}{4}\,km$. Значи, патот од A до B е долг $\frac{45t}{4}+\frac{225t}{4}=\frac{270}{4}t\,km$. Конечно, просечната брзина со која Филип возел во t часови е еднаква на $\frac{270}{4}t:t=\frac{270}{4}=67{,}5\,km/h$.

42. По еден автомобил, кој тргнал од местото A, тргнал друг автомобил и го стигнал по 2,5 часа возење. Продолжувајќи го возењето во истата насока, побрзиот автомобил по 1,5 часа бил $24\,km$ пред поспориот автомобил. Определи ги средните брзини на овие автомобили?
Решение. Нека брзината на првиот автомобил е $x\,km/h$, а на вториот е $y\,km/h$. Од првиот услов следува равенката $3x=2,5y$, а од вториот услов следува равенката $1,5x+24=1,5y$. Решението на овој систем равенки е $x=80,\ y=96$.

43. На аеродром се наоѓа подвижна лента со должина $500\,m$ која се движи со брзина $4\,km/h$. Дамјан и Вера истовремено зачекориле на лентата. Вера продолжила да оди со брзина од $6\,km/h$ во однос на лентата, додека Дамјан останал да стои на лентата. Колку метри Вера била пред Дамјан во моментот кога се симнала од лентата?
Решение. Вера се движела со брзина од $v=10\,km/h$ во однос на подлогата, а Дамјан се движел со брзина од $v'=4\,km/h$ во однос на подлогата. Вера $500\,m$ поминала за време $t=\frac{s}{v}=\frac{0,5}{10}=\frac{1}{20}\,h$. За тоа време Дамјан поминал $s'=v't=4\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{5}\,km=200\,m$. Според тоа, кога се симнала од лентата Вера била $500-200=300\,m$ пред Дамјан.

44. Марко е член на велосипедски клуб и секој ден вози велосипед до соседниот град кој е оддалечен $40\,km$. Во саботата до тој град и назад Марко се возел 3 часа и 12 минути. Во неделата, заради работи на патот, Марко на одење возел 12 минути подолго отколку дента пред тоа. Од истата причин, на враќање тој возел по заобиколен пат и, возејќи со просечната брзина од саботата, тој поминал $15\,km$ повеќе. За колку проценти неговата просечна брзина се намалила во неделата во однос на просечната брзина во саботата?
Решение. Секој ден Марко минува $40+40=80\,km$. Во саботата ова растојание го поминал за $3\frac{12}{60}=3\frac{1}{5}\,h$, т.е. за $3,2\,h$. Неговата просечна брзина била $80:3,2=25\,km/h$. Во неделата, возејќи кон градот, тој возел $40\,km$ за $1,6+0,2=1,8\,h$, а на враќање поминал $40+15=55\,km$, за што му требале $55:25=2,2\,h$. Според тоа, Марко во неделата

поминал $40+55=95\,km$ за $1{,}8+2{,}2=4\,h$. Значи, во неделата имал просечна брзина $95:4=23{,}75\,km/h$. Според тоа, просечната брзина се намалила за $1{,}25\,km/h$ и тоа е $1{,}25:25=5\%$.

45. Морска вода содржи 5% сол. Колку литри дестилирана вода треба да се измеша со 40 литри морска вода за да се добие раствор со 1% сол?
Решение. Ако количеството на растворот е 5 пати поголемо, со исто количество сол кое го содржи дадениот петпроцентен раствор, тогаш новиот раствор ќе содржи 5 пати помалку проценти сол, т.е. ќе содржи 1% сол. За да добиеме 5 пати поголемо количество раствор, без да се менува количеството сол во него, треба да дотуриме 160 литри чиста вода.

46. Пред една седмица во 100 тони штотуку ископан камен јаглен имало 2% вода. До денес овој јаглен во себе впил определено количество вода, па сега тој содржи 12,5% вода. Определи ја сега масата на јагленот (заедно со водата).
Решение. Во 100 тони штотуку ископан јаглен има 98% сув јаглен, што е 98 тони. По впивање на водата овие 98 тони сочинуваат 87,5% од вкупната маса на јагленот. Според тоа, новата сега масата на јагленот е еднаква на $98:0{,}875=112$ тони.

47. Камен јаглен во јама содржи 2% вода, а по неколку дена надвор од јамата тој содржи 6% вода. За колку тони во тој момент се зголемила масата на јагленот, ако од јамата се извадени $1000\,t$ јаглен?
Решение. Масата на јаглен од $1000\,t$ во јамата, без вода, е еднаква на $980\,t$. Оваа маса е еднаква на 94% од масата на јаглен кој содржи 6% вода. Затоа, по неколкуте дена масата на јагленот кој содржи 6% вода ќе биде еднаква на $980\cdot\frac{100}{94}=1042\frac{26}{47}\,t$. Според тоа, масата на јагленот се зголемила за $42\frac{26}{47}\,t$.

48. Во $1000\,kg$ свежи јагоди има 99% вода. Во текот на транспортот, заради несоодветни услови, испарило извесно количество од водата и новата маса на јагодите е $500\,kg$. Колкав процент вода сега содржат јагодите?

Решение. Пред транспортот на јагодите тие содржеле $\frac{1000}{100}=10\,kg$ сува материја. Истата сува материја ја содржат и по транспортот, па затоа сега сувата материја е $\frac{10}{500}\cdot 100=2\%$

49. Влажноста на свежа штотуку окосена трева е 60%, а на сеното е 20%. Колку сено ќе се добие од $1t$ свежа трева?
Решение. Во $1t$ свежа трева има $600\,kg$ вода и $400\,kg$ сува материја. Истите овие $400\,kg$ сува материја изнесуваат 80% од сеното. Затоа вкупното количество сено добиено од $1t$ свежа трева е еднакво на $400\cdot\frac{100}{80}=500\,kg$.

50. Штотуку соборено стебло тежело $2,25t$ и содржело 64% вода. По една седмица ова стебло содржело 46% вода. За колку се намалила масата на стеблото за оваа седмица?
Решение. Ако стеблото не содржи вода, тогаш неговата маса ќе биде $2,25\cdot 0,36=0,81t$. Оваа маса по една седмица е еднаква на 54% од вкупната маса на стеблото, па затоа сега масата на стеблото е еднаква на $0,81:0,54=1,5t$. Конечно, по една седмица масата на стеблото се намалила за $2,25-1,5=0,75t$.

51. Во еден сад има $420\,g$ дваесетпроцентен раствор на сол во вода. По определено време, заради испарување, количеството раствор се намалило на $300\,g$. Колкав е сега процентот на солта во водата?
Решение. Во $420\,g$ дваесетпроцентен раствор на сол во вода има $420\cdot\frac{20}{100}=84\,g$ сол. По испарувањето количеството сол не се променило, па затоа сега во растворот има $\frac{84}{300}\cdot 100=28\%$ сол.

52. Колку литри вода треба да се измешаат со 120 литри 10% раствор на алкохол, за да се добие 4% раствор на алкохол?
Решение. Бидејќи во растворот има 10% алкохол, количеството алкохол во него е $\frac{120}{100}\cdot 10=12\,l$. Овие $12\,l$ алкохол во новиот раствор треба да бидат 4%. Според тоа, вкупното количество на новиот раствор ќе биде $\frac{12}{4}\cdot 100=300\,l$. Значи, количеството вода кое треба да го

додадеме е $300-120=180\,l$.

53. Во садот A има два пати повеќе течност отколку во садот B. Притоа во садот A има хомогена мешавина од 90% вода и 10% алкохол, а во садот B има хомогена мешавина од 72% вода и 28% алкохол. Ако од садот A прелееме 40% од течноста во садот B, колку проценти алкохол ќе има во течноста во садот B?

Решение. Ако во садот B количеството течност е x, тогаш во садот A тоа е $2x$. Тоа значи дека од садот A во садот B прелеваме $0,4\cdot 2x=0,8x$ течност во која има $0,9\cdot 0,8x=0,72x$ вода и $0,08x$ алкохол. Значи, по прелевањето во садот B ќе има $0,72x+0,72x=1,44x$ вода и $0,08x+0,28x=0,36x$ алкохол, а вкупната течност ќе биде $1,8x$. Конечно, по прелевањето во садот B ќе има $\frac{0,36x}{1,8x}\cdot 100\%=20\%$ алкохол.

54. Една легура на цинк и сребро, со маса $3,5\,kg$, содржи 76% сребро. Кога оваа легура ја стопиле со друга легура на цинк и сребро, добиена е нова (трета) легура, со маса $10,5\,kg$, која содржи 84% сребро. Определи го процентот на среброто во втората легура.

Решение. Во првата легура имало $3,5\cdot 0,76=2,66\,kg$ сребро. Во третата легура имало $10,5\cdot 0,85=8,12\,kg$ сребро. Масата на втората легура е еднаква на $10,5-3,5=7\,kg$ и таа содржи $8,12-2,66=6,16\,kg$ сребро. Значи, во втората легура имало $\frac{6,16}{7}\cdot 100=88\%$ сребро.

55. Имаме две смеси од злато и сребро. Во првата смеса количествата на овие метали са однесуваат како 2:3, а во втората како 3:7. Колку треба да се земе од секоја смеса за да се добие $8\,kg$ нова смеса во која односот на златото и среброто ќе биде 5:11?

Решение. Нека x и y се количествата на двете смеси со чие мешање се добиени $8\,kg$ нова смеса. Значи, $x+y=8$. Во првата смеса има $\frac{2}{5}x\,kg$ злато, во втората има $\frac{3}{10}y\,kg$ злато и во третата треба да има $\frac{5}{16}\cdot 8=2,5\,kg$ злато. Значи, $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y=2,5$. Од добиениот систем равенки следува $x=1\,kg$ и $y=7\,kg$. Според тоа, треба да се земе $1\,kg$ од

првата и $7\,kg$ од втората смеса.

56. Почва за цвеќе содржи 12% вода. Дафина сака да засади цвеќе, за кое е потребна влажност од 28%. Колку вода треба Дафина да налее во $5\,kg$ купена почва за да успешно го засади цвеќето?

Решение. Во $5\,kg$ купена земја има 88% сува материја, односно $5\cdot 0,88=4,4\,kg$. Масата на сувата материја ќе остане иста и по долевањето на водата. Бидејќи почвата треба да е со влажност 28%, сувата маса ќе биде 72% од целата маса. Затоа, ако во почвата се долее $x\,kg$ (литри) вода, тогаш $4,4=0,72\cdot(5+x)$, од каде добиваме

$$4,4=3,6+0,72x,$$
$$0,72x=0,8$$
$$x=\frac{10}{9},$$

што значи дека Дафина треба да налее $\frac{10}{9}\approx 1,11l$ вода.

57. Во некоја продавница има три вреќи со ориз од различни класи. Во првата вреќа оризот е од прва класа, во втората вреќа од втора класа и во третата вреќа од трета класа. Во оризот од прва класа има 0,6% скршени зрна ориз, во оризот од втора класа има 1,5% скршени зрна и во оризот од трета класа има 8% скршени зрна. Продавачот од секоја вреќа со ориз зел определено количество, при што од вреќата со ориз од втора класа зел двојно повеќе ориз отколку што зел од вреќата со ориз од прва класа, а од вреќата со ориз од трета класа зел $0,8\,kg$ повеќе отколку што зел од вреќата со ориз од прва класа, па така добил мешавина која содржела 3,3% скршени зрна. Колку килограми ориз зел продавачот од вреќата со ориз од прва класа?

Решение. Нека x е бројот на килограми од прва класа кои ги зел продавачот. Тогаш тој зел $2x\,kg$ ориз од втора класа и $x+0,8\,kg$ ориз од третата класа. Притоа количеството скршени зрна од првата, втората и трета вреќа соодветно е $0,006x\,kg$, $0,015\cdot 2x\,kg$ и $0,08(x+0,8)\,kg$, а во мешавината е $0,33(x+2x+x+0,8)\,kg$. Затоа важи

$$0,006x+003x+0,08(x+0,8)=0,033(4x+0,8),$$

од каде добиваме $x=2,35\,kg$. Според тоа, од вреќата со ориз од прва класа продавачот зел $2,35\,kg$ ориз.

58. Фросина сака да направи $400\,ml$ свој сок во кој ќе има 75% чист со од јаболка. На располагање има сокови со 85% учество и 60% учество на чист сок од јаболка. Како Фросина ќе го направи својот сок?

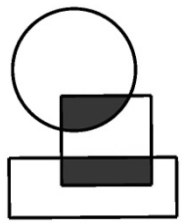
Решение. Ако Фросина земе $x\,ml$ сок со 85% учество на чист сок од јаболка, тогаш таа ќе земе $400-x\,ml$ сок со учество од 60% чест сок од јаболка. Така, ја добиваме равенката

$$0{,}85x+0{,}60(400-x)=0{,}75\cdot 400,$$

чие решение е $x=240$. Значи, Фросина треба да земе $240\,ml$ сок со учество 85% чист сок од јаболка и $400-240=160\,ml$ сок со учество 60% чист сок од јаболка.

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧАИ

59. На цртежот десно е осенчена е $\frac{1}{8}$ од кругот и $\frac{1}{4}$ од правоаголникот. Плоштината на квадратот е еднаква на половина од збирот на плоштините на кругот и правоаголникот. Ако се знае дека е осенчено 40% од квадратот, определи го односот на збирот на плоштините на кругот и квадратот спрема плоштината на правоаголникот.



Решение. Нека p е плоштината на правоаголникот, k е плоштината на квадратот и x е плоштината на кругот. Од условот на задачата имаме

$$\tfrac{1}{8}x+\tfrac{1}{4}p=40\%k,$$
$$k=\tfrac{x+p}{2}.$$

Од првата равенка следува $5x+10p=16k$, па ако замениме од втората добиваме $5x+10p=16\cdot\frac{x+p}{2}$, т.е. $x=\frac{2}{3}p$. Сега, лесно наоѓаме $k=\frac{5}{6}p$, па затоа

$$(x+k):p=(\tfrac{2}{3}p+\tfrac{5}{6}p):9=3:2.$$

60. Андреј за три дена прочитал една интересна книга. Првиот ден про-

читал $\frac{1}{5}$ од целата книга и уште 16 страници, вториот ден прочитал 30% од остатокот и уште 20 страници и последниот ден прочитал 0,75 од новиот остаток и последните 30 страници.

Решение. Јасно, последните 30 страници се $\frac{1}{4}$ од остатокот по вториот ден, што значи дека третиот ден Андреј прочитал $4\cdot 30=120$ страници. Понатаму, $120+20=140$ страници се 70% од остатокот по првиот ден, што значи дека по првиот ден на Андреј за читање му останале $\frac{140}{70}\cdot 100=200$ страници. Јасно, $200+16=216$ страници се $\frac{4}{5}$ од бројот на страниците на целата книга, што значи дека целата книга имала $\frac{5}{4}\cdot 216=270$ страници.

61. Во фабрика за намештај има два вида машини, нови и стари. Четири нови мажини, како и пет стари машини може да произведат 480 еден вид столици на ден. Колку столици од истиот вид заедно ќе произведат девет нови и единаесет стари машини за еден ден?

Решение. Една нова машина за еден ден ќе произведе $480:4=120$ столици од дадениот вид, па затоа 9 нови машини за еден ден ќе произведат $9\cdot 120=1080$ столици. Понатаму, една стара машина за еден ден ќе произведе $480:5=96$ столици, па затоа 11 стари машини за еден ден ќе произведат $11\cdot 96=1056$ столици.

Конечно, 9 нови и 11 стари машини за еден ден ќе произведат $1080+1056=2136$ столици.

62. Реализирана е анкета во која учествувале 420 семејства. Констатирано е дека 95% од семејствата имаат телевисор, а 80% од семејствата имаат комјутер. Секое семејство има барем еден од наведените апарати. Колку семејства имаат само по еден од наведените апарати?

Решение. Од условот на задачата следува дека $\frac{95}{100}\cdot 420=399$ семејства имаат телевизор, а $\frac{80}{100}\cdot 420=336$ семејства имаат комјутер. Понатаму, $399+336-420=315$ семејства ги имаат и двата апарати. Според тоа, $336-315=21$ семејство има комјутер, но не и телевизор, а $399-315=84$ семејства имаат телевизор, но не и компјутер. Конечно, $21+84=105$ семејства имаат само еден од наведените апарати.

63. На еден тест требало да се одговори на 20 прашања. За секој точен

одговор се добивале по 4 бода, а за секој неточен одговор или неодговорено прашање се губеле по 3 бода. Рампо на крајот освоил 38 бода. Колку прашања точно одговорил Рампо?

Решение. Ако со x го означиме бројот на прашањата на кои Рампо дал точен одговор, тогаш неодговорените и неточно одговорените прашања се $20-x$. Сега, од условот на задачата следува равенката $4x-3(20-x)=38$, од каде добиваме $x=14$, т.е. Рампо точно одговорил на 14 прашања.

64. Во едно одделение 50% од учениците не се занимаваат со ниту еден спорт, $\frac{1}{5}$ од учениците тренираат кошарка и преостанатите 9 ученици тренираат пливање. Колку ученици има во ова одделение?

Решение. Нека x е бројот на учениците во оделението. Од условот на задачата следува дека со ниту еден спорт не се занимаваат $50\%x=\frac{1}{2}x$ ученици, $\frac{1}{5}x$ ученици тренираат кошарка и 9 ученици тренираат пливање. Затоа

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{5}x+9=x,\\
&x-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{5}9,\\
&\tfrac{3}{10}x=9,\\
&x=30.
\end{aligned}$$

Значи, во оделението имало 30 ученици.

65. Еден шаховски клуб има определен број членови. Еден ден решиле да направат мала забава за сите членови на клубот. Меѓутоа некои од членовите заради други обврски не дошле на забавата. Познато е дека бројот на отсутните е еднаков на $\frac{1}{6}$ од бројот на присутните на забавата и ако уште еден член замине од забавата, тогаш бројот на отсутните ќе биде еднаков на $\frac{1}{5}$ од бројот на присутните. Колку членови има овој клуб?

Решение. Нека бројот на отсутните членови од забавата е x. Тогаш на забавата присуствуваат $6x$ членови. Кога уште еден член на клубот ја напушта забавата, ќе имаме $x+1$ отсутни, а бројот на присутните ќе биде $6x-1$. Но, бидејќи тогаш бројот на присутните е пет пати поголем имаме дека на забавата ќе бидат присутни $6x+5$ луѓе. Затоа

$6x-1=5x+5$, од каде добиваме $x=6$. Конечно, вкупниот број членови на клубот е $x+6x=7x=7\cdot 6=42$.

66. Во салон за намештај се продаваат работни маси со една, две и три фиоки. На сите маси вкупно има 25 фиоки, а маси со една фиока има колку маси со 2 и 3 фиоки заедно. По колку маси може да има од секој вид?

Решение. Нека има x маси со една фиока и y маси со две фиоки. Значи, имаме $x-y$ маси со три фиоки. Затоа важи

$$x+2y+3(x-y)=25,$$

од каде добиваме $y=4x-25, x,y\in\mathbb{N}$.

Јасно, мора да е $y=4x-25>0$ и $x-y=x-(4x-25)>0$, од каде добиваме $x=7$ или $x=8$. За $x=7$ имаме $y=3$ и $x-y=4$, што значи дека имаме 7 маси со една фока, 3 маси со 2 фиоки и 4 маси со 3 фиоки. За $x=8$ имаме $y=7$ и $x-y=1$, што значи дека имаме 8 маси со една фиока, 7 маси со 2 фиоки и 1 маса со 3 фиоки.

67. Во една компанија работат работници од пет земји: Австријци, Белгијци, Кипарци, Данци и Естонци. Австријците се за 1 помалку од $\frac{1}{3}$ Естонците и за 3 помалку од половината од бројот на Белгијците. Естонците и Данците заедно се за 3 повеќе од Кипарците и Белгијците. Кипарците и Естонците заедно се за 1 помалку од половината од бројот на работниците во компанијата, а Кипарците и Белгијците заедно се $\frac{7}{10}$ од вкупниот број работници во компанијата, Колку работници работатво компанијата од секоја од петте земји?

Решение. Нека со a,b,c,d,e соодветно го означиме бројот на Австријците, Белгијците, Кипарците, Данците, Естонците кои работат во компанијата. Од условите на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a=\frac{e}{3}-1, \\ a=\frac{b}{2}-3, \\ e+d=c+b+3, \\ c+e=\frac{a+b+c+d+e}{2}-1, \\ c+b=\frac{7(a+b+c+d+e)}{16}. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е

$$a=7, b=20, c=15, d=14, e=24,$$

што значи дека во компанијата работат 7 Австријци, 20 Белгијци, 15 Кипарци, 14 Данци и 24 Естонци.

68. На еден остров живеат само зелени и сини жаби. Оваа година, во однос на минатата, бројот на сините жаби се зголемил за 60%, а бројот на зелените жаби се намалил за 60%. Новонастанатиот однос на бројот на сините и бројот на зелените жаби останал ист како и односот во минатата година но во обратен редослед (број на зелени спрема број на сини жаби). За колку проценти се променил вкупниот број жаби оваа година во однос на минатата година?

Решение. Нека $s:z$ е односот на бројот на сините и бројот на зелените жаби минатата година. Оваа година имаме $s'=1,6s$ сини и $z'=0,6z$ зелени жаби. Бидејќи односот на сините и зелените жаби оваа година е ист како и минатата, но во обратен редослед имаме $\frac{1,6s}{0,4z}=\frac{z}{s}$, од каде добиваме $4s^2=z^2$, односно $z=4s$ (бројот на жабите не може да е негативен број). Конечно, односот на вкупниот број жаби оваа и минатата година е

$$\frac{1,6s+0,4z}{s+z}=\frac{1,6s+0,4\cdot 2s}{s+2s}=\frac{2,4s}{3s}=\frac{8}{10}=80\%.$$

Значи, оваа во однос наината година вкупниот број жаби се намалил за 20%.

IV. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека во секое друштво бројот на луѓето кои се познаваат со непарен број луѓе од друштвото е парен.
   Решение. Нека во друштвото вкупниот број познанства го означиме со n.
   За $n=1$ се познаваат само двајца луѓе, па тврдењето е точно.
   Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој n.
   Ќе докажеме дека тврдењето важи за $n+1$. Последното значи дека во друштвото се запознале двајца кои до тогаш не се познавале. Можно е пред тоа еден од овие двајца да познавал парен, а другиот непарен број луѓе, двајцата да познавале непарен број луѓе или двајцата да познавале парен број луѓе. Јасно, ниту во еден од овие случаи со новото запознавање парноста не се нарушува, па значи тврдењето важи и за $n+1$.

2. Дали природните броеви од 1 до 15 може да се поделат во две множества A и B така што во множеството A се два броја, а во множеството се преостанатите тринаесет броја и збирот на броевите од множеството B е еднаков на производот на броевите од множеството A?
   Решение. Нека x и y, $x<y$ се броевите од множеството A. Тогаш збирот на броевите од множеството B е еднаков на $120-x-y$. Равенката $xy=120-x-y$ е еквивалентна на равенката
   $$(x+1)(y+1)=121,$$
   од каде добиваме $x+1=1$ и $y+1=121$, или $x+1=11$ и $y+1=11$. Во првиот случај имаме $x=0<1$ и $y=120>15$, а во вториот случај имаме $x=y=10$, па затоа заклучуваме дека природните броеви од 1 до 15 не можеме да ги поделиме на саканиот начин.

3. Дали може броевите $3,3^2,3^3,...,3^{n-1},3^n$ да се поделат во три групи (не

задолжително со еднаков број елементи) така што производот на елементите во секоја група е еднаков,ако:

а) $n=2022$, б) $n=2023$?

Решение. Производот на сите n броеви е

$$3\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot 3^{n-1}\cdot 3^n=3^{1+2+3+\ldots+n}=3^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Ако броевите може да се распоредат во три групи со еднакви производи, на пример A, тогаш мора да е $A^3=3^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Последното значи дека $3\mid\frac{n(n+1)}{2}$. Бидејќи $\frac{2023\cdot 2024}{2}=2023\cdot 1012$ не е делив со 3, заклучуваме дека за $n=2023$ бараната поделба не е можна.

За $n=2022$, броевите 1, 2, 3, ..., 2022 можеме да ги поделиме на подмножества од по шест последователни броеви

$$\{1,2,3,4,5,6\},\ \{7,8,9,10,11,12\},\ \ldots,\ \{2017,2018,2019,2020,2021,2022\}.$$

Во секое од овие подмножества збирот на првиот и шестиот, вториот и петтиот, третиот и четвртиот запишан број е еднаков. Значи, ако во секоја група ставиме по еден пар од запишаните броеви, ја добиваме бараната поделба.

4. Во училишната кошаркарска лига учествуваат 10 екипи и секоја екипа игра со секоја екипа точно по еден натпревар. Докажи дека во секој момент на натпреварувањето постојат две екипи кои имаат одиграно еднаков број натпревари.

Решение. Нека претпоставиме дека во некој момент не постојат две екипи со еднаков број одиграни натпревари. Бидејќи имаме 10 екипи, а секоја екипа има 10 можности за бројот на одиграни натпревари (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), добиваме дека во тој момент бројот на одиграни натпревари на сите екипи е еднаков на

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Но, во секој момент бројот на сите одиграни натпревари на сите екипи мора да биде парен (секој натпревар се брои по два пати, и тоа по еднаш за секоја од двете екипи). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

5. Квадратен под со должина на страна $10\,m$ е поделен на 100 единечни квадратни полиња, т.е. на 100 квадратни полиња со должина на страна $1\,m$. На почетокот биле поплочени 9 од единечните полиња. Плочкарот Марко тврди дека може да го поплочи целиот под така што

секое следно единечно поле кое ќе го поплочува ќе биде соседно на најмалку две веќе поплочени единечни полиња. Дали Марко е во право?

Решение. Лесно се гледа дека со секое ново единечно поле кое Марко ќе го поплочи, не се зголемува периметарот на поплочената фигура (или збирот на периметрите на неколку дисјунктни поплочени фигури). Периметарот на почетокот бил помал или еднаков на $36\,m$, а на крајот треба да биде $40\,m$, колку што е периметарот на целиот под. Според тоа, Марко не може да го поплочи подот со саканиот редослед на поплочување.

6. Три точки A,B,C се сместени во координатен систем во рамнина. Нивните апсциси се $2,-3,0$, а ординатите се $-3,2,5$, не задолжително во овој редослед. Определи ги координатите на овие точки ако е познато дека:
   - ниту една точка не е во третиот квадрант,
   - точката A не припаѓа на координатна оска,
   - ординатата на точката B е еднаква на збирот на ординатите на другите две точки,
   - апсцисата на точката C е еднаква на ординатата на точката B

   Решение. Задачата ќе ја решиме користејќи табела. Во табелата редоследно го внесуваме знаците $+$ и $-$, кои произлегуваат од тврдењата:
   1) Ниту една точка не е во III квадрант, што значи дека не е можна комбинација негативна апсциса и негативна ордината, црвено поле.
   2) Точката A не припаѓа на кординатна оска, зелено поле.
   3) Ордината на точката B е еднаква на збирот на ординатите на другите две точки. Единствена таква можност е $2=5+(-3)$, сини полиња.
   4) Апсцисата на точката C е еднаква на ординатата на точката B, што значи дека таа е еднаква на 2, жолти полиња.
   5) Сега за апсцисата на точката A имаме една можност и тоа е -3, па затоа апсцисата на точката B мора да е 0, портокалови полиња.
   6) Според тоа, точката B има координати $B(0,2)$, пиперови полиња.
   7) Координатите на точките A и C се $A(-3,5)$ и $C(2,-3)$, лилјакова боја.

		Апсциса			Ордината		
		2	–3	0	2	–3	5
	A	–	+	–	–	–	+
	B	–	–	+	+	–	–
	C	+	–	–	–	+	–
Ордината	2	–	–	+			
	–3	+	–	–			
	5	–	+	–			

7. Природните броеви од 1 до $2n$ се запишани во низа во произволен редослед, а потоа под секој од нив е запишан редниот број во таа низа. Секој член од ницата е собран со својот реден број. Докажи дека меѓу добиените збирови постојат два чија разлика е делива со $2n$.

Решение. Нека се добиени збировите $s_1, s_2, ..., s_{2n}$ и нека претпоставиме дека при делење со бројот $2n$ сите даваат различни остатоци. Тие остатоци се $0,1,2,...,2n-1$ и нивниот збир е $S = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$. Од друга страна имаме $T = s_1 + s_2 + ... + s_{2n} = 2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n(2n+1)$. Разликата на секој од броевите $s_1, s_2, ..., s_{2n}$ и неговиот остаток при делење со $2n$ е делива со $2n$, па затоа разликата $T - S = n(2n+3)$ е делива со $2n$, што не е можно бидејќи бројот $2n+3$ не е делив со 2. Според тоа, не е можно сите остатоци при делење на $s_1, s_2, ..., s_{2n}$ со $2n$ да се различни, туку постојат барем два збира со еднакви остатоци. Јасно, разликата на тие два збира е делива со $2n$.

8. Имаме $2k+1$ картичка нумерирани со броевите од 1 до $2k+1$. Колку најмногу картички може да се изберат така што ниту еден од броевите запишан на извлечените картички не е еднаков на збирот на други два броја запишани на извлечените картички?

Решение. Лесно се заблежува дека саканото својство го имаат броевите $k+1, k+2, ..., 2k+1$, а тоа се $k+1$ картичка. Нека претпоставиме дека може да се изберат $k+r, r>1$ картички кои го задоволуваат условот на задачата. Нека n е најголемиот број запишан на избраните картички. Да ги разгледаме разликите меѓу бројот n и преостанатите броеви запишани на избраните картички. Имаме $k+r-1$ разлика и тие мора да се запишани на преостанатите $2k+1-(k+r) = k-r+1$

картичка. Според тоа, мора да важи $k-r+1\geq k+r-1$, од каде добиваме $r\leq 1$, што е противречност.

9. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 се случајно распоредени на кружница. За секој таков распоред ги определуваме сите осум збирови на по четири последователни броеви и најголемиот од нив да го означиме со m. Која е најмалата можна вредност на бројот m?

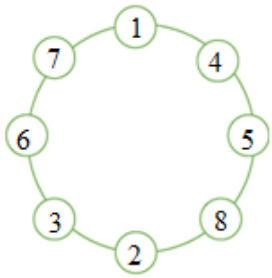
Решение. Секој од броевите Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 се јавува како собирок во четири од осумте збирови кои ги наоѓаме, па затоа збирот на сите осум добиени збирови е еднаков на

$$4\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=4\cdot 36=144.$$

Ако претпоставиме дека $m=18$, тогаш од $8\cdot 18=144$ следува дека сите споменати осум збирови мора да се еднакви на 18. Меѓутоа, ако a,b,c,d,e се некои пет последователни броеви распоредени на кружницата, тогаш од $a\neq e$ следува

$$a+b+c+d\neq b+c+d+e,$$

па затоа не може m да е 18, односно важи $m>18$. Ќе определиме распоред за кој збирот на некои четири последователни броеви е еднаков на 19. За таа цел да ги сместиме броевите 7 и 8 да не се во ист збир, а исто и броеви 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, како на цртежот десно. За овој распоред бараните осум збирови се:



$$1+4+5+8=18,\ \ 4+5+8+2=19,\ \ 5+8+2+3=18,\ \ 8+2+3+6=19,$$
$$2+3+6+7=18,\ \ 3+6+7+1=17,\ \ 6+7+1+4=18,\ \ 7+1+4+5=17.$$

10. На секоја планета во еден галактички систем седи по еден астроном и ја набљудува најблиската планета. Растојанијата меѓу планетите се меѓусебно различни. Ако бројот на планетите е непарен, докажи дека има планета која никој не ја набљудува.

Решение. Ако една иста планета ја набљудуваат два астрономи, тогаш постои планета која никој не ја набљудува.

Нека во системот има $2k+1$ планети. Со A и B да ги означиме планетите меѓу кои растојанието е најкратко. Тогаш астрономот од планетата A ја набљудува планетата B, и астрономот од планетата B ја набљудува планетата A. Ако некој астроном кој не е од планетите A

и B ја набљудува планетата A или B, тогаш според горното тврдење постои планета која никој не ја набљудува. Ако ниту еден астроном кој не е од планетите A и B не набљудува ниту една од овие две планети, тогаш може да ги отстраниме овие две планети и да ги разгледаме преостанатите $2k-1$ планета. Постапката ја повторуваме како со $2k+1$ планета. Бараме најкратко растојание и отстрануваме парови планети. Бидејќи има непарен број планети во некој момент ќе имаме две планети некоја од кои ја набљудува еден од преостанатите астрономи. Имено, во спротивно по k отстранувања ќе имаме една планета која никој не ја набљудува, а астрономот кој е на неа набљудува некоја од преостанатите планети, што е противречност.

11. Во една држава меѓу секои два града постои едносмерна авионска линија. Докажи дека постои град од кој во секој друг град може да се стигне со најмногу едно преседнување.

Решение. Нека A е градот од кој поаѓаат најмногу едносмерни авионски линии и нека тој тој број е k. Нека овие линии го поврзуваат градот A со градовите $C_1, C_2, ..., C_k$. Ќе докажеме дека A е токму градот кој се бара во задачата. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои град B во кој од A не може да се стигне со најмногу едно преседнување. Бидејќи меѓу A и B постои едносмерна линија, таа мора да е од B кон A, бидејќи во спротивно од A во B може да се стигне без преседнување. Слично од B имаме едносмерна линија кон секој од градовите $C_1, C_2, ..., C_k$, бидејќи во спротивно од A во B може да се стигне со едно преседнување. Значи, од градот B излегуваат $k+1$ едносмерни авионски линии, што е противречност, бидејќи A е градот од кој излегуваат најмногу авионски линии, а $k<k+1$. Според тоа, од A во B може да се стигне со најмногу едно преседнување, со што тврдењето е докажано.

12. Во секое од три училишта има по n ученици. Секој ученик познава најмалку $n+1$ ученик од преостанатите две училишта. Докажи дека постојат три ученика, по еден од секое училиште, кои меѓусебно се познаваат.

Решение. Нека претпоставиме дека не постојат три ученика, по еден од секое училиште, кои меѓусебно се познаваат. Училиштата да ги означиме со A, B и C. Да го избереме оној ученик кој познава најмногу ученици од некое друго училиште. Без ограничување на оп-

штоста можеме да земеме дека тоа е ученикот M од училиштето A и нека тој познава k ученици (максимален број) од училиштето B. Тогаш тој познава најмалку $n+1-k$ ученици од училиштето C. Да земеме еден од учениците од училиштето C, нека тоа е N, кој M го познава. Тогаш тој од училиптето B може да познава најмногу $n-k$ ученици, бидејќи во спротивно ќе постојат три ученика, по еден од секое училиште, кои меѓусебно се познаваат. Тогаш N од училиштето B мора да познава најмалку $n+1-(n-k)=k+1$ ученик од училиштето A, што е противречност бидејќи еден ученик може да познава најмногу k ученици од друго училипте. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

13. Седум гусари поделиле определено количество златници. Делеле така што секој земал онолку златници колку што е збирот на цифрите на бројот на златниците пред тој да земе. Сеој зел точно два пати и на крајот не останал ниту еден златник. Сите добиле еднаков број златници, освен капетанот кој добил најмногу.

а) Колку златници биле?

б) Колку златници добил капетанот, а колку секој од преостанатите гусари?

в) Кој по ред на земање бил капетанот?

Решение. Збирот на цифрите на природен број при делење со 9 дава ист остаток како и самиот број при делење со 9. Според тоа, ако од некој број го одземеме збирот на неговите цифри, добиваме број кој е делив со 9. Шест гусари добиле еднаков број златници и тој број е делив со 9. Единствен природен број кој е делив со 9 и е еднаков на збирот на своите цифри е бројот 9. Значи, последниот гусар ги зел последните 9 златници. Сега лесно можеме да ги најдеме броевите од кои секој гусар зеа толку златници колку што е збирот на цифрите на бројот на златниците.

Реден број на гусарот	7	6	5	4	3	2	1
Број на златници во вториот круг на земање	9	18	27	36	45	54	63
Број на златници земен во вториот круг	9	9	9	9	9	9	9
Број на златници во првиот круг на земање	72	81	99	108	117	126	135
Број на златници земен во првиот круг	9	9	18	9	9	9	9

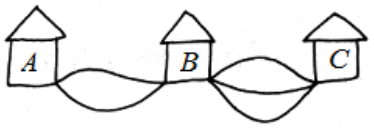
На петтиот гусар во првиот круг не можело даму останат 90 златници, бидејќи збирот на цифирите на трицифрен број е најмногу 27, а броевите од 91 до $90+27=117$ деливи со девет (99, 108, 117) намалени за збирот на своите цифри ги даваат броевите $99-18=81$,

$108-9=99$ и $117-9=108$. Според тоа,
а) вкупно биле 135 златници,
б) капетанот добил 27 златници,
в) капетанот бил петти по ред на земање.

IV.2. ПРЕБРОЈУВАЊА

14. На Пелистер има три планинарски дома A,B,C. Од A до B водат 2 патеки, а од B до C водат 3 патеки, но не постои директна патека A до C. На колку различни начини може да се стигне од домот A до домот C.

Решение. За да стигнеме од A до B имаме 2 можности. Понатаму, за секоја од овие две можности за да стигнеме од B до C имаме 3 можности. Според тоа, од A до C може да се стигне на точно $2\cdot 3=6$ различни начини.



15. Една држава има четири града A,B,C и D. Од градот A во градот B има 3 директни патишта. Од градот B во градот C има 2 директни патишта, а од градото C во градот D има 5 директни патишта. Градовите A и C, а исто така и градовите B и D не се поврзани со директни патишта. Од градот A до градот D има уште еден директен пат. На колку начини може да се стигне од градот A до градот D?

Решение. Имаме, $A\xrightarrow{3}B\xrightarrow{2}C\xrightarrow{5}D$ и $A\xrightarrow{1}D$, па затоа од A во D може да се стигне на $3\cdot 2\cdot 5+1=31$ различни начини.

16. Во одделението на Филип има 24 ученици. На колку начини може да се избере претседател, заменик и благајник?

Решение. Претседателот може да се избере на 24, потоа заменикот на 23 и благајникот на 22 начини. Според тоа, бројот на можните избори е $24\cdot 23\cdot 22$.

17. Колку трицифрени броеви може да добијат ако три пати фрламе хомогена коцка за играње на чии страни се запишани броевите од 1 до 6

и секогаш од лево кон десно го запишеме бројот кој ќе падне на горната страна?

Решение. При секое фрлање на коцката за бројот кој треба да го запишеме имаме шест можности. Според тоа, бараниот број броеви е еднаков на $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

18. Колку различни комбинации треба да се пополнат за да сме сигурни дека на спортска прогноза ќе имаме 13 погодоци (на ливчето имаме 13 парови, а за секој пар имаме три можни типувања: 0, 1 и 2).

Решение. Треба да направиме 13 избори и за секој избор имаме по 3 можности. Според тоа, бројот на комбинациите кои треба да се пополнат за да сме сигурни дека ќе имаме 13 погодоци е еднаков на $3^{13} = 1594323$.

19. Определи го бројот на десетцифрените броеви секој од кои е запишан со различни цифри.

Решение. На првото место од лево можеме да ја поставиме било која ненулта цифра, што значи имаме 9 можности, на второто место било која од преостанатите 9 цифри, на третото место било која од преостанатите 8 цифри, на чртвртото место било која од преостанатите 7 цифри итн. Конечно, бараните броеви ги има

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3265920.$$

20. Определи го бројот на природните четирицифрени броеви такви што гледано од десно на лево цифрите запишани на непарните места се непарни, а цифрите запишани на парните места се парни.

Решение. За цифрата на единиците и цифрата на стотките имаме по 5 можности (1,3,5,7 и 9). Понатаму, за цифрата на десетките имаме 5 можности (0, 2, 4, 6 и 8), а за цифрата на илјадитите имаме 4 можности (2, 4, 6 и 8). Значи, бројот на бараните броеви е $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

21. На колку начини можеме да избереме три броја од 1 до 40 така што нивниот збир ќе биде парен?

Решение. За да збирот на три броја е парен треба или сите да се парни или два да се непарни и 1 да е парен. Бидејќи од 1 до 40 имаме 20 парни и 20 непарни броеви, во првиот случај имаме $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ начини на избор, а во вториот случај имаме $20 \cdot \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 3800$ начини на избор.

Конечно, постојат $1140+3800=4940$ избори кои го задоволуваат условот на задачата.

22. За една година ќе велиме дека е среќна ако цифрите со кои таа е запишана се различни последователни цифри. На пример, последната срена година била 2013.
а) Која е првата следна среќна година?
б) Колку среќни години има во третиот милениум?
Решение. а) Првата следна среќна година е 2031.
б) Во записот на среќна година во третиот милениум можни се следниве избори на цифри: 0, 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4 или 2, 3, 4, 5. Притоа цифрата 2 сегогаш е цифра на илјадитите. Понатаму, за секој избор постојат 6 можности за редослед на втората, третата и четвртата цифра. Значи, во третиот милениум имаме $3\cdot 6=18$ среќни години.

23. Колку има петцифрени природни броеви во чиј запис се појавува барем една парна и барем една непарна цифра?
Решение. За да го определиме бараниот број, доволно е од вкупниот број петцифрени броеви да ги одземеме оние кои се запишани само со парни или само со непарни цифри. Имаме вкупно $9\cdot 10^4=90000$ петцифрени броеви. Петцифрени броеви кои се запишанисамо со непарни цифри има $5^5=3125$, а петцифрени броеви кои се запишани само со парни цифри има $4\cdot 5^4=2500$. Конечно, имаме
$$90000-2500-3125=84375$$
петцифрени броеви во чиј запис има барем една парна и барем една непарна цифра.

24. Од множеството $\{2,3,4,5\}$ се избираат три различни броја a,b,c. На колку начини може да се изберат овие броеви така што бројот $a^{(b^c)}$ да биде делив со 8?

Решение. За да бројот $a^{(b^c)}$ е делив со 8 потребно и доволно е да биде $a=2$ или $a=4$. Во двата случаја броевите b и c од преостанатите три броеја од множеството $\{2,3,4,5\}$ може да се изберат на $2\cdot 3=6$ начини. Значи, вкупниот број барани избори е еднаков на $6+6=12$.

25. Колку има трицифрени броеви кои се запишани со различни цифри и

се деливи со 5?

Решение. Цифрата на единиците мора да е 0 или 5, т.е. за неа имаме 2 можности. Цифрата на стотките не може да биде 0. Сега,

- ако цифрата на единиците е 5, тогаш за цифрата на стотките имаме 8 можности и за цифрата на десетките имаме 8 можности, т.е. во овој случај имаме $8\cdot 8=64$ трицифрени броеви,
- ако цифрата на единиците е 0, тогаш за цифрата на стотките имаме 9 можности, а за цифрата на десетките имаме 8 можности, т.е. во овој случај имаме $9\cdot 8=72$.

Конечно, имаме $64+72=136$ трицифрени броеви со саканото својство.

26. Колку има четирицифрени броеви кои се запишани со меѓусебно различни цифри од множеството $\{0,1,2,3,4,5\}$ и се деливи со 5?

Решение. За да еден број е делив со 5, потребно и доволно е цифрата на единиците да е 0 или 5.

Ако цифрата на единиците е 0, тогаш цифрата на илјадитите може да се избере на 5 начини, цифрата на стотките може да се избере на 4 начини и цифрата на десетките може да се избере на 3 начини, па затоа во овој случај имаме $5\cdot 4\cdot 3=60$ броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

Ако цифрата на единиците е 5, тогаш цифрата на илјадитите можеме да ја избереме на 4 начини (нулата не може да е цифра на илјадитите), потоа цифрата на стотките можеме да ја избереме на 4 начини (сега и 0 учествува во изборот) и цифрата на десетките можеме да ја избереме на 3 начини, па затоа во овој случај имаме $4\cdot 4\cdot 3=48$ броеви кои го задоволуваат ѕловот на задачата.

Според тоа, бројот на бараните броеви е $60+48=108$.

27. На колку начини од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ може да се изберат три броја така што нивниот збир ќе биде делив со 3?

Решение. Збирот на три броја е делив со 3 во еден од следниве два случаја:

1) сите три броја даваат ист остаток при делење со 3,
2) трите броја даваат остатоци 0, 1, 2 при делење со 3 (потполн систем остатоци по модул 3).

Од дадените броеви три броја даваат ист остаток при делење со 3 само во случаите $\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\}$, што значи дека во случајот 1)

имаме 3 можности.

За добивање потполн систем остатоци по модул 3 имаме $3^3 = 27$ можности и тоа првиот, вториот, третиот број да е избран од множеството $\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6,9\}$, соодветно.

Конечно, од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ три броја чиј збир е делив со 3 може да се изберат на $3+27=30$ начини.

28. Колку има шестцифрени природни броеви деливи со 5, кои се запишуваат само со цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (цифрите не се повторуваат), при што цифрите 1 и 2 не може да се една до друга?

Решение. Последната цифра на сите барани броеви мора да биде 5. Цифрите 1, 2, 3, 4 и 6 на првите 5 места може да се распоредат на $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ начини. Случајот кога цифрите 1 и 2 се една до друга се сведува на случај кога четири цифри треба да се распоредат на четири места, а такви можности има $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$, при што цифрите 1 и 2 во секоја од овие можности може да се распоредат на два начина, па значи имаме $2\cdot 24=48$ неповолни распореди. Конечно, бројот на бараните распореди е $120-48=72$.

29. Да ги разгледаме сите шестцифрени броеви кои може да се запишат со цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, така што секоја цифра е употребена точно еднаш. Колку од овие броеви се поголеми од бројот 345612, а колку се помали од овој број?

Решение. Нека $\overline{abcdef}$ е број таков што $a,b,c,d,e,f \in \{1,2,3,4,5,6\}$ и a,b,c,d,e,f се меѓусебно различни цифри. Вакви броеви вкупно има $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$. Од овие 720 броја поголеми од бројот 345612 се броевите:

- $\overline{4bcdef}$, $\overline{5bcdef}$, $\overline{6bcdef}$ и нив ги има $3\cdot(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=360$,
- $\overline{35cdef}$, $\overline{36cdef}$ и нив ги има $2\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=48$,
- $\overline{346def}$ и нив ги има $3\cdot 2\cdot 1=6$, и
- 345621 и тоа е еден број.

Според тоа, меѓу разгледуваните броеви поголеми од бројот 345612 се $360+48+6+1=415$ броја, а помали се $720-415-1=304$ броја.

30. За еден природен број велиме дека е палиндром ако исто се чита од лево на десно и од десно на лево.

а) Колку има петцифрени палиндроми кои се деливи со 5?

б) Колку има петцифрени палиндроми кои се деливи со 3?

Решение. а) За да бројот е палиндром и истовремено делив со 5 цифрата на единиците мора да е 5 (првата цифра од лево на десно не оже да е 0, па и цифрата на единиците не може да е 0). Цифрата на десетките можеме да ја избереме на 10 начини, а исто така и цифрата на стотките, а додека цифрата на илјадитите е еднаква на цифрата на десетките (бројот е палиндром). Значи, постојат $10\cdot 10=100$ петцифрени палиндроми кои се деливи со 5.

б) Од исти причини како во делот на задачата под а) цифрата на единиците не смее да е 0, па затоа цифрата на единиците може да ја избереме на 9 начини, а цифрата на десетките можеме да ја избереме на 10 начини. Досега имаме $9\cdot 10=90$ начини на избори на цифрите на единиците и десетките, а цифрите на илјадитите и десетилјадитите се определени со овие избори бидејќи бројот е палиндром.

Сега цифрата на стотките треба да ја избереме така што бројот ќе биде делив со 3.

За можните 90 избори на првите 90 цифри, т.е. за броевите од 10 до 99 важи дека точно триесет се деливи со 3, точно 30 при делење со 3 даваат остаток 1 и точно 30 при делење со 3 даваат остаток 2. Тоа значи дека:

1) во 30 случаи збирот на сите четири избрани цифри при делење со 3 дава остаток 0,
2) во 30 случаи збирот на сите четири избрани цифри при делење со 3 дава остаток 2 и
3) во 30 случаи збирот на сите четири избрани цифри при делење со 3 дава остаток 1.

За да во случајот 1) збирот биде делив со 3 треба цифрата на стотките да е 0, 3, 6 или 9, па во овој случај имаме $4\cdot 30=120$ броеви деливи со 3.

За да во случајот 2) збирот биде делив со 3 треба цифрата на стотките да е 1, 4 или 7, па во овој случај имаме $3\cdot 30=90$ броеви деливи со 3.

За да во случајот 3) збирот биде делив со 3 треба цифрата на стотките да е 2, 5 или 8, па во овој случај имаме $3\cdot 30=90$ броеви деливи со 3.

Конечно, вкупно имаме $120+90+90=300$ петцифрени палиндроми деливи со 3.

31. Колку има петцифрени броеви кои се запишани со различни цифри, а

збирот на цифрите на десетките и единиците им е еднаков на 5?

Решение. Нека $\overline{abcde}$ е петцифрен број кој ги задоволува условите на задачата.

Цифрите d и e можеме да ги избереме на 6 начини и тоа: 5 и 0; 0 и 5; 4 и 1; 1 и 4; 3 и 2; 2 и 3; соодветно.

Во случаите $\overline{abc05}$ и $\overline{abc50}$ цифрата a можеме да ја избереме на 8 начини, цифрата b на 7 начини и цифрата c на 6 начини, па имаме $2\cdot 8\cdot 7\cdot 6=672$ броеви од саканиот вид.

Во случаите $\overline{abc14}$ и $\overline{abc41}$ цифрата a можеме да ја избереме на 7 начини, цифрата b на 7 начини и цифрата c на 6 начини, па имаме $2\cdot 7\cdot 7\cdot 6=588$ броеви од саканиот вид.

Во случаите $\overline{abc23}$ и $\overline{abc32}$ цифрата a можеме да ја избереме на 7 начини, цифрата b на 7 начини и цифрата c на 6 начини, па имаме $2\cdot 7\cdot 7\cdot 6=588$ броеви од саканиот вид.

Конечно, вкупниот број броеви со саканото својство е

$$672+588+588=1848.$$

32. На колку начини од множеството $\{1,2,3,...,30\}$ може да се изберат два броја така што:

а) разликата на избраните броеви ќе биде делива со бројот 5,

б) збирот на избраните броеви ќе биде делив со 5.

Решение. Нека за $i=0,1,2,3,4$ со A_i го означиме множеството броеви кои при делење со 5 даваат остаток i. Имаме:

$$A_0=\{5,10,15,20,25,30\},$$
$$A_1=\{1,6,11,16,21,26\},$$
$$A_2=\{2,7,12,17,22,27\},$$
$$A_3=\{3,8,13,18,23,28\},$$
$$A_4=\{4,9,14,19,24,29\}.$$

Во секое од овие множества има по 6 броја.

а) Бидејќи разликата на два броја е делива со бројот 5 ако и само ако двата броја при делење со бројот 5 даваат ист остаток, двата броја треба да ги избереме од исто множество. Имаме 5 множества и од секое можеме да направиме по $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ избори, па затоа вкупниот број избори е еднаков на $5\cdot 15=75$.

б) Бидејќи збирот на два броја е делив со 5 ако и само ако:

- двата се делив со 5 и во овој случај тие треба да се изберат од множеството A_0, па имаме $\frac{6\cdot5}{2}=15$ избори,
- броевите даваат остатоци 1 и 4 и во овој случај треба по еден број да избереме од множествата A_1 и A_4, па имаме $6\cdot6=36$ избори,
- броевите даваат остатоци 2 и 3 и во овој случај треба по еден број да избереме од множествата A_2 и A_3, па имаме $6\cdot6=36$ избори

Конечно, од даденото множество два броја чиј збир е делив со 5 можеме да избереме на $15+36+36=87$ начини.

33. Определи го бројот на природните броеви кои се помали или еднакви на 10000, кои се запишани со различни цифри и се деливи со бројот 5.
Решение. Еден број е делив со 5 ако цифрата на единиците му е 0 или 5. Ќе ги пребројме едноцифрените, двоцифрените, трицифрени, четирицифрените и петцифрените броеви со бараното својство.
а) Ако $1\le b\le 9$, тогаш само бројот 5 ги задоволува условите на задачата, па затоа имаме 1 едноцифрен број со саканото својство.
б) Ако $10\le b\le 99$, тогаш $b=\overline{x0}$ или $b=\overline{x5}$. Ако x е двоцифрен број, тогаш $x\neq 0$, а бидејќи цифрите мора да се различни, двоцифрени броеви од видот $\overline{x0}$ има 9, а двоцифрените броеви од видот $\overline{x5}$ ги има 8. Според тоа, имаме 17 двоцифрени броеви со саканото својство.
в) Ако $100\le b\le 999$, тогаш $b=\overline{xy0}$ или $b=\overline{xy5}$. За трицифрените броеви од видот $\overline{xy0}$ цифрата на десеткие може да се избере на 9 начини, па цифрата на стотките на 8 начини, што значи дека во овој случај имаме $9\cdot8=72$ броја со саканото својство. За трицифрените броеви од видот $\overline{xy5}$ цифрата на стотките може да ја избереме на 8 начини, а потоа и цифрата на десетките можеме да ја избереме на 8 начини, што значи дека имаме $8\cdot8=64$ од саканиот вид. Значи, имаме $72+64=136$ трицифрени броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.
г) Ако $1000\le b\le 9999$, тогаш $b=\overline{xyz0}$ или $b=\overline{xyz5}$. Аналогно како погоре добиваме дека броеви од видот $\overline{xyz0}$ кои ги задоволуваат условите на задачата се $9\cdot8\cdot7=504$, а броеви од видот $\overline{xyz5}$ кои ги задоволуваат условите на здачата се $8\cdot8\cdot7=448$. Според тоа, имаме $504+448=952$ четирицифрени броеви кои ги задоволуваат условите

на задачата.

д) Единствен петцифрен број е 10000 и тој не ги задоволува условите на здачата.

Конечно, имаме $1+17+136+952=1106$ броеви со саканото својство.

34. Коцка за играње фрламе три пати. Колку пати производот на паднатите броеви ќе биде делив со 10.

Решение. *Прв начин*. Нека по фрлањето на коцката три пати, резултатот е прикажан со подредената тројка (a,b,c). Бидејќи производот на паднатите броеви е помал од $6\cdot 6\cdot 6=216$ заклучуваме дека производот abc е содржател на бројот 10, т.е. производот е од облик $10k, k\in\{1,2,...,21\}$. Содржателите 70, 110, 130, 140, 170, 190 и 210 не може да се добијат бидејќи на страните на коцката не постојат броевите 7, 11, 13, 17 и 19. Содржателите 160 и 200 не може да се добијат со три фрлања на коцката бидејќи едниот е делив со 32 и 5, а другиот е делив со 25 и 8. Според тоа, бараните производи може да бидат: 10, 20, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120, 150 и 180.

Понатаму, ако броевите на коцката се различни, тогаш имаме 6 можности, т.е. 6 различни подредени тројки, а ако два броја на коцката се еднакви, тогаш имаме 3 можности,т.е. 3подредени тројки. Трите броја на коцката не може да се еднакви, а производот да е содржател на бројот 10. Сите можности се прикажани во долната табела.

Производ	Различни броеви на коцките	Можности	Два броја на коските се еднакви	Можности
10	1, 2, 5	6		
20	1, 4, 5	6	2, 2, 5	3
30	1, 5, 6	6		
	2, 3, 5	6		
40	2, 4, 5	6		
50			2, 5, 5	3
60	2, 5, 6	6		
	3, 4, 5	6		
80			4, 4, 5	3
90	3, 5, 6	6		
100			4, 5, 5	3
120	4, 5, 6	6		

150			5, 5, 6	3
180			5, 6, 6	3
Вкупно		54		18

Конечно, при последователно фрлање на коцка три пати производот на паднатте броеви е делив со 10 во $54+18=72$ случаи.

Втор начин. Производот abc е делив со 10 ако и само ако еден од добиените броев е еднаков на 5 и барем еден од преостанатите два броја е парен. Бројот на можностите ќе го добиеме со собирање на можностите за добивање на:

а) една петка и два парни броја,

б) една петка, еден парен и еден непарен број кој не е делив со 5,

в) еден парен број и 2 петки.

Под а) за секој парен број имаме по 3 можности, па како 5 може да е било кој од броевите a,b,c во овој случај имаме $3\cdot 3 =27$ можности.

Под б) парниот број го добиваме на 3 начини, а непарниот на 2 начина, а бројот на распоредите (пермутациите) за секој од добиените случаи е 6, па затоа во овој случај имаме $3\cdot 2\cdot 6=36$ можности.

Под в) парниот број е еден од броевите 2, 4 или 6 (тоа се 3 можности), па како овој број може да биде било кој од броевите a,b,c во овој случај имаме $3\cdot 3=9$ можности.

Конечно, при последователно фрлање на коцка три пати производот на паднатте броеви е делив со 10 во $27+36+9=72$ случаи.

35. Определи го бројот на деветцифрените броеви запишани со девет различни цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 такви што секој трицифрен број кој го формираат три последователни цифри на тој број е делив со 3.

Решение. Цифрите 1, 4 и 7 даваат остаток 1 при делење со 3. Цифрите 2, 5 и 8 даваат остаток 2 при делење со 3. Цифрите 3, 6 и 9 се деливи со 3. Трицифрен број е делив со 3 ако и само ако неговите цифри

- сите даваат ист остаток при делење со 3,
- сите даваат различни остатоци при делење со 3.

Ако на бараниот број, на пример, првите три цифри даваат ист остаток при делење со 3, тогаш и четвртата цифра треба да дава ист истаток при делење со3, што не е можно. Затоа остатоците кои цифрите на бараниот број ги даваат при делење со 3 формираа низа

$$a,b,c,a,b,c,a,b,c$$

при што a,b,c се различни елементи на множеството $\{0,1,2\}$. Понатаму, од остатоците 0, 1 и 2 можеме да формираме низа abc на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини. Цифрите кои даваат остаток a на трите места може да се разместат на $3\cdot 2\cdot 1=6$, цифрите кои даваат остаток b на трите места може да се разместa на $3\cdot 2\cdot 1=6$ и цифрите кои даваат остаток c на трите места може да се разместa на $3\cdot 2\cdot 1=6$.

Конечно, имаме $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6=1296$ броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

36. Определи го бројот на целобројни парови (a,b) такви што

$$|a|+|b|<2019.$$

Решение. Прво ќе определиме колку парови природни броеви (a,b) го задоволуваат даденото неравенство.

Ако $a=1$, тогаш b може да биде 1, 2, 3, ..., 2017.

Ако $a=2$, тогаш b може да биде 1, 2, 3, ..., 2016.

.....

Ако $a=2017$, тогаш b може да биде само 1.

Според тоа, подредени парови прирдони броеви (a,b) кои го задоволуваат даденото неравенство има

$$1+2+3+...+2017=\frac{2017\cdot 2018}{2}.$$

Седа ќе види колку има подредени парови (a,b) кои го задоволуваат даденото неравенсвство, каде a и b се ненулти цели броеви. Од $|a|+|b|<2019$ следува дека за секој пар природни броеви (a,b), кои го задоволуваат даденото неравенство и паровите $(a,-b)$, $(-a,b)$ и $(-a,-b)$ го задоволуваат даденото неравенство. Според тоа, подредени парови цели броеви (a,b), каде a и b се ненулти цели броеви и кои го задоволуваат даденото неравенство има

$$4\cdot\frac{2017\cdot 2018}{2}=2\cdot 2017\cdot 2018.$$

Останува да ги пребројиме паровите во кои барем еден од броевите a и b е нула. Ако $a=0$, тогаш неравенството го добива обликот $|b|<2019$, т.е. $-2019<b<2019$ и имаме $2\cdot 2018+1$ цели броеви ки го задоволуваат даденото неравенство. Аналогно за $b=0$ имаме $2\cdot 2018+1$ цели броеви a кои го задоволуваат даденото неравенство. Но, притоа парот $(0,0)$ е броен два пати, па затоа паровите во кои

барен еден од броевите броевите a и b е еднаков на 0 се вкупно

$$2\cdot(2\cdot 2018+1)-1=4\cdot 2018+1.$$

Конечно имаме

$$2\cdot 2017\cdot 2018+4\cdot 2018+1=814685$$

парови цели броеви (a,b) кои го задоволуваат даденото неравенство.

37. На колку различни начини во 3×3 табела може да се запишат броеви така што во секој ред и секоја колона производот на запишаните броеви е еднаков на 50?

Решение. Имаме $50=2\cdot 5^2$.

Секој број во табелата можеме да го запишеме како 1 или како производ на прости множители на бројот 50. Прво во секое поле на табелата да го запишеме бројот 1, а потоа некои од тие броеви да ги помножиме со делители на бројот 50 поголеми од 1. Во таков запис, множителот 2 мора да биде запишан во точно едно поле во секој ред и секоја колона и тоа можеме да го направиме на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини.

Понатаму, во секој таков запис, множителот 5 мора да биде запишан точно два пати во секој ред и точно два пати во секоја колона.Можни се три случаи:

1) Во секој ред и во секоја колона множителот $5^2=25$ ќе биде запишан точно еднаш и такви можности има $3\cdot 2\cdot 1=6$.
2) Во секој ред и во секоја колона множителот 5 ќе биде запишан два пати и такви можности има $3\cdot 2\cdot 1=6$.
3) Во едно поле е запишан бројот 25, а во четирите полиња во редовите и колоните во кои не е запишан бројот 25, го запишуваме бројот 5. Такви распореди има 9.

Според тоа, за запишување на множителот 5 имаме $6+6+9=21$ можност.

Конечно, вкупниот број различни можности за запишување на броеви во табелата кои го задоволуваат условот на задачата е $6\cdot 21=126$.

38. Во кутија се наоѓаат 100 топчиња означени со броевите од 1 до 100. Избираме една топче и потоа топчето го враќаме во кутија, па повторно избираме едно топче. На колку начиии можеме топчињата да ги избереме така што производот на броевите кои се на нив запишани е делив со 9.

Решение. Треба да ги пребројиме подредените парови кај кои првиот

член е еднаков на бројот запишан на првото избрано топче, а вториот член е еднаков на бројот запишан на второто избрано топче, при што производот е делив со 9.

Производот на броевите запишани на топчињата е делив со 9, ако барем еден број е делив со 9 или ако двата се деливи со 3.

Подредени парови кај кои првиот член е делив со 9, а вториот член е било кој број има $11\cdot 100=1100$. Подредени парови кај кои вториот член е делив со 9, а првиот член е било кој број има $100\cdot 11=1100$. Подредени парови кај кои и првиот и вториот член се деливи со 9 има $11\cdot 11=121$ и тие погоре се двапати броени. Значи, подредени парови кај кои барем еден од членовите е делив со 9 има

$$1100+1100-121=2079.$$

Од 1 до 100 имаме $33-11=22$ броеви кои се деливи со 3, но не се деливи со 9. Според тоа, имаме $22\cdot 22=484$ подредени парови од броеви кои и двата се деливи со 3, но ниту еден не е делив со 9.

Конечно, имаме вкупно $2079+484=2563$ подредени парови кај кои производот на првиот и вториот член е делив со 9 и тоа е решение на почетната задача.

39. Колку има природни броеви n кои се помали од 2020 и такви што збирот на цифрите на бројот n и збирот на цифрите на бројот $n+1$ се непарни броеви?

Решение. Нека $n=\overline{abcd}$ е број со саканото својство и нека x е збирот на цифрите на бројот n, а y е збирот на цифрите на бројот $n+1$. Тогаш $x=a+b+c+d$.

Ако $d\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, тогаш $n+1=\overline{abc(d+1)}$ и $y=x+1$. Според тоа, бројот y е следбеник на бројот x, па затоа тие се со различна парност, што противречи на условот на задачата. Значи, $d=9$. Според тоа, ги бараме сите броеви од видот $n=\overline{abc9}$ кои се помали 2020 со својство да се x и y непарни броеви. Бидејќи $x=a+b+c+9$, а 9 е непарен број, мора да е $a+b+c$ парен број.

Нека $c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Тогаш $n+1=\overline{ab(c+1)0}$, па $y=a+b+c+1$ и тој е непарен ако $a+b+c$ е парен. Затоа ги бараме сите броеви од видот $n=\overline{abc9}$ помали од 2020, такви што важи: $a+b+c$ е парен и $a\in\{0,1,2\}, b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

1) Ако $a=0$, тогаш $b+c$ е парен. Можни се два случаја и тоа: b и c

да се парни, т.е. $b\in\{0,2,4,6,8\}$ и $c\in\{0,2,4,6,8\}$, или b и c да се непарни, т.е. $b\in\{1,3,5,7,9\}$ и $c\in\{1,3,5,7\}$. Во првиот случај имаме $5\cdot 5=25$ можности, а во вториот случај имаме $5\cdot 4=20$ можности.

2) Ако $a=1$, тогаш $b+c$ е непарен. Можни се два случаја и тоа: b е парен и c е непарен, т.е. $b\in\{0,2,4,6,8\}$ и $c\in\{1,3,5,7\}$, или b е непарен и c е парен, т.е. $b\in\{1,3,5,7,9\}$ и $c\in\{0,2,4,6,8\}$. Во првиот случај имаме $5\cdot 4=20$ можности, а во вториот случај имаме $5\cdot 5=25$.

3) Ако $a=2$, тогаш $b=0$ и $c\in\{0,1\}$, бидејќи $d=9$ и според условот $n=\overline{abc9}<2020$. Бидејќи $a+b+c$ мора да е парен, добиваме $c=0$, па во овој случај имаме само една можност, бројот 2009.

Според тоа, за $c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ имаме $45+45+1=91$ броеви со саканото својство.

Нека $c=9$. Ако $c=9$ и $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, тогаш $n=\overline{ab99}$, па е $x=a+b+18$ непарен ако $a+b$ е непарен. Но, во тој случај добиваме $n+1=\overline{a(b+1)00}$, па е $y=a+b+1$ парен, па не е задоволен условот на задачата. Според тоа, ако $c=9$, тогаш и $b=9$, па бројот е од видот $n=\overline{a999}$. Сега $x=a+27$ е непарен број, од каде бидејќи $n<2020$ добиваме $a=0$ и тоа е решение на задачата, бидејќи во тој случај $n+1=1000$ и $y=1$.

Според тоа, за $c=9$ имаме само 1 број со саканото својство, т.е. бројот 999.

Конечно, заклучуваме дека постојат $91+1=92$ природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

40. Монета се фрла 5 пати. Колку различни случаи може да се добијат на овој начин?

Решение. При секое фрлање на монетата имаме по две можности (писмо или грб). Бидејќи имаме 5 фрлања, бројот на различните случаи е $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5$

41. Од 10 различни цветови треба да се направи букет во кој се наоѓаат најмалку два цвета. На колку начини тоа може да се направи?

Решение. Прво ќе определиме на колку различни начини може да се изберат 0, 1, 2, 3, ..., 9 или сите 10 цветови. Ако еден цвет е избран, да

го означиме со 1, а ако не е избран да го означиме со 0. Значи, за секој цвет имаме по 2 можност, па како изборот на еден цвет не зависи од изборот на друг цвет, за вкупниот број избори добиваме

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{10\text{ пати}} = 2^{10}.$$

Од овој број треба да ги одземеме оние избори во кои нема цветови и во кои има само еден цвет, а тоа се 1 и 10 избори, соодветно. Според тоа, може да се направат $2^{10}-1-10=2^{10}-11$ избори во кои има најмалку два цвета.

42. Во кино отишле три момчиња и две девојчиња и купиле 5 карти така што ќе седат во ист ред еден до друг. На колку начини децата може да седнат на петте седишта така што девојчињата ќе седат едно до друго? Замената на местата на седење на било кои две лица се смета за нов распоред на седење.

Решение. Ако двете девојчиња кои седат едно до друго ги сметаме за едно лице, тогаш проблмот се сведува на распоредување на 4 лица на 4 места. Ова може да се направи на $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ начини. Но, двете девојчиња може да се распоредат на два начина така што ќе седат една до друга, па затоа вкупниот број на распореди е еднаков на $24\cdot 2=48$.

43. На полица треба да се распоредат девет различни книги означени со броевите од 1 до 9. На колку начини тоа може да се направи така што:
а) книгите 1 и 2 ќе бидат една до друга,
б) книгите 1 и 2 нема да бидат една до друга.

Решение. а) Книгите 1 и 2 ќе ги разгледуваме како една книга (1,2). Тогаш преостанатите седум книги и книгата (1,2) може да се распоредат на $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=8!$ начини. Бидејќи книгите 1 и 2 може да се распоредат на два начини, вкупниот број распореди во кои книгите 1 и 2 ќе бидат една до друга е еднаков на $2\cdot 8!$.

б) Сите 9 книги може да се распоредат на $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=9!$ начини. Ако од овој број се одземе бројот на распоредите кога книгите 1 и 2 се соседни, се добива бројот на распоредите кога книгите и 2 не се соседни и тој е еднаков на $9!-2\cdot 8!=9\cdot 8!-2\cdot 8!=7\cdot 8!$.

44. На колку начини може n лица да се распоредат во ред така да лицата A и B не се едно до друго?

Решение. Ако лицата A и B се едно до друго, тогаш имаме две мож-

ности AB и BA. Нив да ги набљудуваме како една целина. Вкупниот број распореди кога овие две лица ќе бидат во редица едно до друго е $2(n-1)!$. Сега, бидејќи n лица може во редица да се распоредат на $n!$ начини, бараниот број распореди е $n!-2(n-1)!$.

45. На колку начини можеме од 8 луѓе да избереме шест, но така што ако го избереме A, мора да го избереме и B?
Решение. Ако го избереме A, тогаш мора да го избереме и B, па затоа другите 4 луѓе ги бираме од преостанатите 6 и тоа можеме да го направиме на $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15$ начини. Понатаму, ако не го избереме A тогаш 6 луѓе бираме од преостанатите 7, што е исто кога 1 човек бираме од 7 луѓе и тоа можеме да го направиме на 7 начини. Конечно, вкупниот број барани избори е еднаков на $15+7=22$.

46. Треба во низа да распоредиме 10 топчиња од кои 4 се црвени, 3 се сини и 3 се зелени. На колку начини тоа може да се направи?
Решение. Различни топчиња може во низа да се распоредат на 10! Начини. Но, некои топчиња се исти па бројот на распоредите е помал. Да земеме некој произволен распоред и да ги набљудуваме црвените топчиња. Тие се 4 и ако меѓусебно во овој распоред ги менуваат местата, распоредот не се менува. Тоа значи, дека од гледна точка на црвените топчиња сме пресметале 4! повеќе распореди. Слично за сините имаме повеќе 3! распореди и за зелените имаме 3! повеќе распореди. Конечно, бројот на бараните распореди е еднаков на $\frac{10!}{4!\cdot3!\cdot3!}$.

47. Колку различни низи од 10 букви (зборови) може да се добијат со разместување на буквите на зборот МАТЕМАТИКА?
Решение. Аналогно како во претходната задача бројот $10!$ треба да го поделиме со броевите $2!, 2!$ и $3!$, бидејќи буквите М, Т и А се повторуваат 2, 2 и 3 пати соодветно. Значи, може да се добијат вкупно $\frac{10!}{3!\cdot2!\cdot2!}$ зборови.

48. На шаховски турнир учествуваат 18 шахисти и секој игра со секого. Докажи дека до осмото коло може да се најдат тројца шахисти меѓу кои не постојат двајца кои меѓу себе одиграле партија шах?
Решение. Да земеме еден шахист A. До осмото коло тој сигурно не

играл против 9 други шахисти. Да претпоставиме дека овие 9 шахисти со кои шахистот A не играл до осмото коло ги изиграле сите партии меѓу себе. Тоа значи дека тие до осмото коло изиграле $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ партии. Но, во едно коло 9 шахисти може меѓу себе да изиграат најмногу 4 партии, па затоа во првите осум кола тие најмногу можеле да изиграат $8\cdot 4=32$ партии, што противречи дека изиграле 36 партии. Конечно од добиената противречност следува меѓу овие 9 шахисти постојат двајца кои меѓу себе не играле. Јасно, овие двајца шахисти заедно со шахистот A се тројца шахисти кои не играле меѓу себе и задачата е решена.

49. На еден шаховски турнир учествувале n шахисти меѓу кои имало само мајстори и велемајстори. Секоја победа носи еден поен, партија која завршува реми (без победник) на секој играч му носи по половина поен и за пораз не се добиваат поени. По завршувањето на турнирот се покажало дека секој учесник половина од своите поени ги освоил играјќи против мајстори. Докажи дека n е точен квадрат.

Решение. Нека на турнирот учествувале m мајстори и v велемајстори. Мајсторите меѓу себе изиграле $\frac{m(m-1)}{2}$ партии и освоиле толку поени колку што изиграле партии. Исто толку поени освоиле и играјќи против велемајсторите. Слично, велемајсторите играјќи меѓу себе освоиле $\frac{v(v-1)}{2}$ поени и исто толку поени освоиле играјќи против мајсторите. Според тоа, бројот на поените кои мајсторите и велемајсторите ги освоиле во меѓусебните партии е еднаков на $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{v(v-1)}{2}$ и како тие меѓу себе изиграле mv партии, кои вкупно носат mv поени, добиваме дека

$$\frac{m(m-1)}{2}+\frac{v(v-1)}{2}=mv,$$

од каде следува дека $m+v=(m-v)^2$. Но, $m+v=n$, па затоа

$$n=(m-v)^2,$$

што и требаше да се докаже.

50. Во некое одделение има 22 ученици, при што бројот на девојчињата е за 20% поголем од бројот на момчињата. Учениците меѓу себе избираат три претставници за натпревар, со услов дека не смее сите три

натпреварувачи да се од ист пол. На колку различни начини може учениците да ја изберат екипата?

Решение. Нека во одделението има x момчиња. Бројот на девојчињата е за 20% поголем, па затоа има $x+\frac{20}{100}x=1,2x$ девојчиња. Значи, $x+1,2x=22$, од каде добиваме $x=10$. Значи, во одделението има 10 момчиња и 12 девојчиња.

Според условот на задачата екипата може да се состои:

1) од 2 девојчиња и 1 момче, или
2) 1 девојче и 2 момчиња.

Две девојчиња може да се изберат на $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ начини, а едно момче на 10 начини, па затоа во случајот 1) имаме $10\cdot 66=660$ можности.

Две момчиња може да се изберат на $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ начини, а едно девојче на 12 начини, па затоа во случајот 1) имаме $12\cdot 45=540$ можности.

Конечно, екипата може да се избере на $660+540=1200$ начини.

51. Паралелните прави a и b се разминуваат со правата c. Точките A,B,C редоследно припаѓаат на правите a,b,c. Колку најмногу рамнини определуваат овие три прави и три точки?

Решение. Правиате a,b,c и точките A,B,C определуваат најмногу 6 рамнини: $\alpha_1(a,b),\alpha_2(a,C),\alpha_3(b,C),\alpha_4(A,c),\alpha_5(B,c),\alpha_6(A,B,C)$.

52. Во рамнината се дадени 8 точки, меѓу кои има точно четири тројки колинеарни точки. Колку прави определуваат овие точки?

Решение. Ако немаше ниту една тројка колинеарни точки, тогаш со дадените 8 точки се определени $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ прави. Овој број треба да се намали за $4\cdot 2=8$ бидејќи секоја од четирите тројки колинеарни точки определува една, а не три прави. Според тоа, бараниот број прави е $28-8=20$.

53. Во просторот се дадени n точки, такви што никои три не се колинеарни и никои четири не се компланарни. Колку

а) прави,
б) триаголници,
в) кружници,
г) рамнини

се определени со овие точки.

Решение. а) Секоја права е определена со две точки, па како немаме три колинеарни точки, бројот на правите определени со дадените n точки е $\frac{n(n-1)}{2}$.

б) Секој триаголник е определен со точно три неколинеарни точки, па како меѓу дадените точки немаме три колинеарни точки, бројот на триаголниците определени со дадените n точки е $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}$.

б) Секоја кружница е определена со точно три неколинеарни точки, па како меѓу дадените точки немаме три колинеарни точки и немаме четири компланарни точки, бројот на кружниците определени со дадените n точки е $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}$.

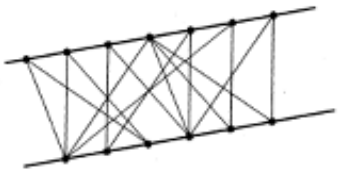
г) Секој рамнина е определен со точно три неколинеарни точки, па како меѓу дадените точки немаме три колинеарни точки и немаме четири компланарни точки, бројот на рамнините определени со дадените n точки е $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}$.

54. Дадени се две паралелни прави p и r. На правата p се дадени 7 точки, а на правата r се дадени 6 точки. Определи го бројот на:

а) отсечките такви што едната крајна точка е на правата p, а другата крајна точка е на правата q,

б) триаголниците чии темиња се дадените точки.

Решение. а) За избор на крајната точка која припаѓа на правата p имаме 7 можности, а за избор на крајната точка точка која припаѓа на правата r имаме 6 можности. Според тоа, бараниот број отсечки е енаков на $6\cdot 7=42$.



б) Јасно, секој триаголник или има две темиња на правата p и едно теме на правата r, или има две темиња на правата r и едно теме на правата p. Во првиот случај двете темиња на правата p може да се изберат на $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ начин и едното теме на правата r може да се избере на 6 начини, па затоа во овој случај имаме $21\cdot 6=126$ триаголници. Во вториот случај двете темиња на правата r може да се избе-

рат на $\frac{6\cdot5}{2}=15$ начини и едното теме на правата p може да се избере на 7 начини, па затоа во овој случај имаме $15\cdot7=105$ триаголници. Конечно, бараниот број триаголници е $126+105=231$.

55. На секоја страна на квадрат се избрани по 10 точки такви што ниту една од нив не е теме на квадратот. Колку триаголници постојат чии темиња се некои од дадените точки?

Решение. Од дадените 40 точки, три точки можеме да избереме на $\frac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2}$ начини. Сега за да го определиме бројот на триаголниците треба да ги одземеме случаите кога имаме три колинеарни точки. Тоа се случаите кога сите три точки припаѓаат на една страна на квадратот, а нив ги има $4\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2}$. Според тоа, со дадените точки се определени $\frac{40\cdot39\cdot38-4\cdot10\cdot9\cdot8}{3\cdot2}$ триаголници.

56. Дадени се 10 црвени и 18 зелени точки такви што никои три од нив не се колинеарни. Колку различни триаголници се определени со овие точки, така што темињата на ниту еден триаголник не се еднобојни?

Решение. Јасно во секој триаголник имаме едно зелено и едно црвено теме. Нека првото теме е црвено, а второто теме е зелено. Тогаш првото теме можеме да го избереме на 10 начини, второто теме можеме да го избереме на 18 начини, а за избор на третото теме ни преостануваат 9 црвени и 17 зелени темиња, односно имаме $9+17$ можности. Оттука следува дека бројот на триаголниците кои го задоволуваат условот на задачата е $\frac{10\cdot18\cdot(9+17)}{2}$.

57. На секоја страна на правоаголникот $ABCD$ се означени по 5 точки кои не се темиња на правоаголникот. Колку четириаголници има чии темиња се некои од означените 20 точки?

Решение. Можни се следниве случаи:

а) Сите четири темиња на четириаголникот припаѓаат на различни страни на правоаголникот $ABCD$. Тоа значи дека секое теме може да се избере на 5 начини, па во овој случај имаме $5\cdot5\cdot5\cdot5=5^4=625$ четириаголници.

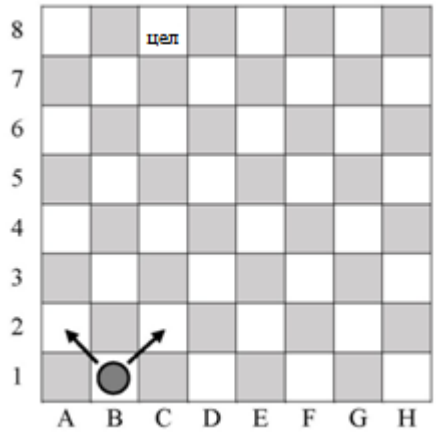
б) Две од четирите темиња на четириаголникот припаѓаат на една, а две на друга страна на правоаголникот $ABCD$. Тогаш страните на кои

припаѓаат темињата можеме да ги избереме на $\frac{4\cdot3}{2}=6$ начини, а две темиња на една фиксирана страна можеме да избереме на $\frac{5\cdot4}{2}=10$ начини. Затоа во овој случај имаме $6\cdot10^2=600$ четириаголници.

в) Две темиња на четириаголникот припаѓаат на една, едно на друго и едно на трета страна на правоаголникот $ABCD$. Страната на правоаголникот $ABCD$ на која има две темиња можеме да ја избереме на 4 начини, а двете страни на кои е по едно теме можеме да ги избереме на $\frac{3\cdot2}{2}=3$ начини. Понатаму, двете темиња на една страна можеме да ги избереме на $\frac{5\cdot4}{2}=10$ начини, а по едно теме на секоја од другите две страни можеме да избереме на 5 начини. Затоа во овој случај имаме $4\cdot3\cdot10\cdot5^2=3000$ правоаголници.

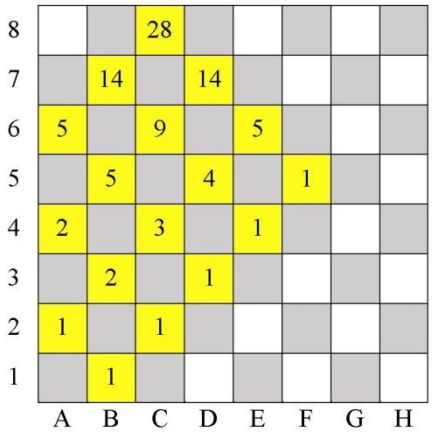
Конечно, имаме $625+600+3000=4225$ четириаголници чии темиња се некои од означените 20 точки.

58. На полето $B1$ на шаховската табла се наоѓа жетон. Жетонот може да се движи за едно поле дијагонално и тоа горе лево и горе десно, но не смее да излезе од таблата (види цртеж десно).



На колку начини жетонот може да дојде до полето $C8$?

Решение. На долниот цртеж со жолта боја се обоени полињата по кои жетонот може да се движи одејќи од полето $B1$ кон полето $C8$.



Бројот запишан во секое жолто поле означува на колку начини тргнувајќи од полето $B1$ жетонот може да стигне до тоа поле. Броевите се добиени на следниов начин:

- во полето $B1$ е запишан

бројот 1,

- понатаму жетонот во некое поле може да стигне само од полињата кои се во редот непосредно лево и десно под него, па затоа бројот во тоа поле се добива како збир на броевите кои се запишани во полињата во редот непосредно лево и десно под него.

Имајќи го предвид претходниот алгоритам, бројот на патиштата по кои жетонот на опишаниот начин од полето $B1$ може да стигне во полето $C8$ е 28.

59. Правилна шестстрана призма има основен раб со должина $1\,cm$ и визина со должина $2\,cm$. Определи го бројот на триаголниците чии темиња се воедно и темиња на дадената призма, а сите страни се со различна должина.

Решение. Нека A е произволно теме на призмата. Лесно се пресметува дека преостанатите темиња на призмата од темето A се оддалечени $1,1,\sqrt{3},\sqrt{3},2,2,\sqrt{5},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{7},2\sqrt{2}\ cm$. Според тоа, секое теме на призмата е теме при врвот на точно четири рамнокраки и теме на еден рамностран триаголник со должина на страна $\sqrt{3}\,cm$. Бројот на триаголниците кои имаат барем две еднакви страни (рамнокраки и рамностранi) е $12\cdot 4+4=52$, па затоа бројот на разностраните триаголници е еднаков на $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}-52=168$.

IV.3. ИНВАРИЈАНТИ

60. На масата имаме 100 чаши, од кои 95 се поставени правилно, а 5 се поставени превртено. Во еден потез е дозволено истовремено да се свртат било кои две чаши. Дали може, со повторување на оваа постапка, да се постигне сите чаши да бидат правилно поставени?

Решение. Ако завртиме било кои две чаши, тогаш парноста на правилно поставените чаши не се менува. Навистина, ако звртиме две правилно поставени чаши, тогаш бројот на правилно поставените чаши се намалува за 2, ако завртиме две превртено поставени чаши, тогаш бројот на правилно поставените чаши ќе се зголеми за 2, а ако завртиме 1 правилно и 1 превртено поставена чаша, тогаш бројот на

правилно поставените чаши не се менува.
На почетокот имаме 95 правилно поставени чаши, а треба да имаме 100 правилно поставени чаши, заклучуваме дека тоа не е можно, бидејќи 95 е непарен, а 100 е парен број, но парноста на правилно поставените чаши не се менува.

61. Горјан од подредената тројка реални броеви (a,b,c) може да ја формира подредената тројка $(2a-b,2b-c,2c-a)$. Дали може од тројката $(1,7,9)$ со конечен број примени на дозволената трансформација да ја добие тројката:
а) $(3,7,11)$, б) $(3,6,8)$.
Решение. Имаме $(2a-b)+(2b-c)+(2c-a)=a+b+c$, што значи дека со дозволената трансформација не се менува збирот на трите броја. Но, $1+7+9=17\neq 21=3+7+11$, па затоа од тројката $(1,7,9)$ не може да се добие тројката $(3,7,11)$.
Во вториот случај имаме $1+7+9=3+6+8$, па затоа инваријантноста на збирот не може да биде критериум. Меѓутоа, ако броевите a,b,c се непарни, тогаш и броевите $2a-b,2b-c,2c-a$ се непарни, а во нашиот случај тројката непарни броеви $(1,7,9)$ треба да се трансформира во тројката $(3,6,8)$ во која два од броевите се парни, па затоа и во овој случај не може да се добие саканата тројка.

62. На еден остров живеат 8 сини, 10 црвени и 12 зелени камелеони. Кога ќе се сретнат два камелеони со различна боја, тие својата боја ја менуваат во третата боја. Дали може да се случи, по определен број средби, сите камелеони да се истобојни?
Решение. Броевите 8, 10 и 12 на сини, црвени и зелени камелеони формираат потполн систем остатоци по модул 3. По секоја средба, бројот на сините, црвените и зелените камелеони повторно ќе формираат потполн систем остатоци по модул 3 (бројот камелеони од една боја се зголемува за 2, а бројот од другите две бои се намалува за по 1), па затоа не е можно по определен број средби сите камелеони да бидат истобојни.

63. Филип на таблата ги запишал броевите $1,2,3,4,...,2n$, каде n е непарен број. Потоа почнал да избира по два броја a и b, кои ги бришел и

на нивно место го запишувал бројот $|a-b|$, се додека на таблата не останал само еден број. Дали овој број е парен или непарен?

Решение. Збирот на броевите кои се запишани на таблата е еднаков на $\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$. Бројот n е непарен, па затоа збирот на сите броеви е непарен. Кога ги бришиме броевите a и b, а на нивно место го запишуваме бројот $|a-b|$, тогаш збирот се намалува за $a+b-|a-b|$. Без ограничување нна општоста можеме да земеме дека $a>b$, што значи дека збирот на броевите запишани на таблата се намалува за $a+b-(a-b)=2b$, а тоа е парен број. Конечно, по секој чекор на таблата збирот на запишаните броеви е непарен, па значи и последниот број кој Филип го запишал на таблата е непарен број.

64. Во правоаголен координатен систем е зададена координатна мрежа како множество од сите точки (i,j), каде $i,j\in\mathbb{N}$ и по овие точки скокаат болви. Болвите скокаат според така што од точката (a,b) болвата може да скокне во една од следниве точки $(a+b,b)$, $(a,b+a)$, $(a-b,b)$,ако $a>b$ или $(a,b-a)$, ако $b>a$.

Болвата A на почетокот се наоѓа во точката $(6,3)$, болвата B во точката $(20,15)$, болвата C во точката $(45,18)$ и болвата D во точката $(9,15)$. За секој пар болви определи дали во текот на своите скокови може да скокнат во иста точка.

Решение. Бидејќи

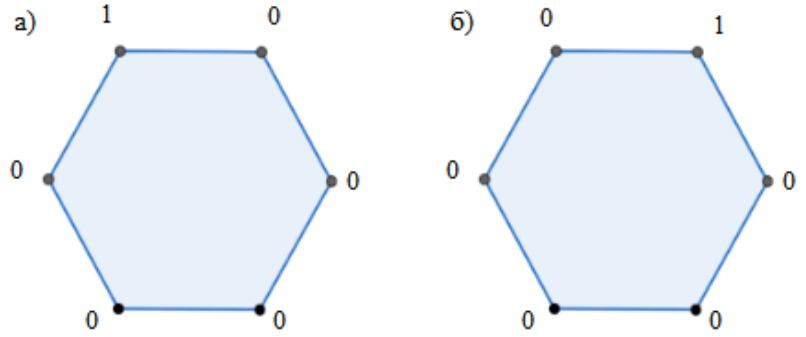
$$\text{NZD}(a,b)=\text{NZD}(a+b,b)=\text{NZD}(a,b+a)=\text{NZD}(a-b,b)=\text{NZD}(a,b-a),$$

јасно е дека ако една болва скокне од позицијата (a_1,b_1) во позицијата (a_2,b_2) мора да важи $\text{NZD}(a_1,b_1)=\text{NZD}(a_2,b_2)$. Јасно, ако болвата по повеќе скокови од позицијата (a_1,b_1) во позицијата (a_n,b_n) мора да важи $\text{NZD}(a_1,b_1)=\text{NZD}(a_n,b_n)$.

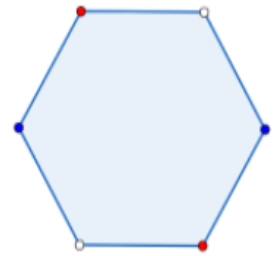
Имаме, $\text{NZD}(6,3)=3$, $\text{NZD}(20,15)=5$, $\text{NZD}(45,18)=9$, $\text{NZD}(9,15)=3$, па затоа паровите A и B, A и C, B и C, B и D, C и D не може во текот на своите скокови може да скокнат во иста точка. За да докажеме дека болвите A и D може во текот на своите скокови да скокнат во иста точка доволно е да определиме низа скокови која води од $(6,3)$ во $(9,15)$. Имаме $(6,3)\to(3,3)\to(3,6)\to(9,6)\to(9,15)$.

65. Волшебникот од приказната „Мачорот во чизми“ има вештина глувците да ги претвора во лавови и обратно. На вечера повикал 1 лав и 5 глувци и ги седнал околу тркалезна маса. Но волшебникот својата вештина одеднаш може да ја примени само на три соседни гости, па потоа повторно да ја примени на три соседни гости итн. Дали може волшебникот, со последователно повторување на оваа операција, да постигне околу масата повторно да има 1 лав и 5 глувци, но така што лавот ќе седи одма до место на кое на почетокот седел лав?

Решение. Прашањето може да го преформулираме вака: во секое од шесте темиња на шестаголник е запишан бројот 0 или 1. Потоа, во секој чекор, ја менуваме постојната состојба (од 0 во 1 или од 1 во 0) во три соседни темиња. Дали може, со низа вакви постапки, да се постигне да од состојбата а) се премине во состојбата б).



Темињата на шестаголникот да ги обоиме како на цртежот десно. Со A да го означиме збирот на броевите во црвените, со B збирот на броевите во белите и со C збирот на броевите во сините темиња. На почетокот $A=1,\ B=0$ и $C=0$. Понатаму, при секоја трансформација броевите A,B и C се менуваат за 1, што значи дека ја менуваат својата парност, па затоа мора парноста на броевите B и C да е иста, а целта е $A=0, B=1$ и $C=0$, т.е. броевите B и C да се со различна парност. Значи, не е можно да се реализира саканата цел.



66. Нака $\overline{abcd}$ е произволен четирицифрен број. Ги дефинираме следниве трансформации:
    - ако некои две соседни цифри на бројот се различни од нула, тогаш двете може да се намалат за 1,

- ако некои две соседни цифри на бројот се помали од 9, тогаш двете може да се зголемат за 1.

Дали со опишаните трансформации бројот 2621 може да се трансформира во бројот:

а) 2128, б) 2016.

Решение. Прво да забележиме дека со наведените трансформации збирот $(a+c)-(b+d)$ не се менува, т.е. овој збир е инваријанта. За бројот 2621 разгледуваниот збир е $2+2-(6+1)=-3$.

а) Бидејќи за бројот 2128 важи $2+2-(1+8)=-5\neq-3$ истиот со наведените трансформации не може да се добие од бројот 2621.

б) Имаме $2+1-(0+6)=-3$, па затоа можно е овој број со наведените трансформации да се добие од бројот 2621. За таа цел треба да конструираме низа броеви кои се добиваат со наведените трансформации и со која низа се добива бараниот број. Една таква низа е:

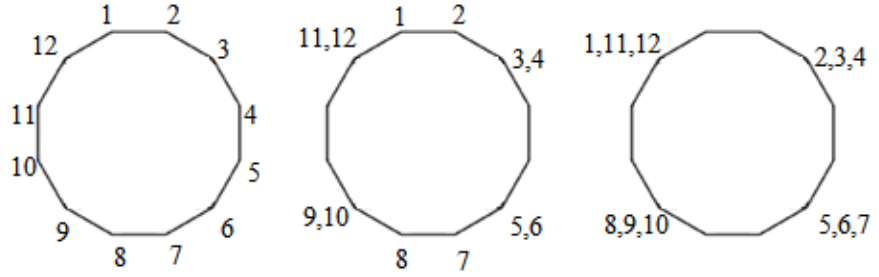
2621,2632, 2643, 2654, 2665, 2676, 2566, 2456, 2346, 2236, 2126, 2016.

67. Во секое теме на дванесетаголник се наоаѓа по еден жетон. Во секој чекор произволно избираме два жетони и секој го преместуваме на негово соседно теме, така што едниот оди на соседното теме во насоката на движење на стрелката на часовникот, а другиот на соседното теме во спротивната насока. Дали може, со последователно повторување на вакви операции, по определен број чекори, да се постигне жетоните да се групирани:

а) во четири темиња, во секое по три жетони,

б) во три темиња, во секое по четири жетони.

Решение. а) Можно е! Една конструкција е дадена на долните цртежи.



б) На секое теме на дванаесетаголникот да му придружиме природен број од 1 до 12 како на горниот цртеж лево. Со C да го означиме збирот на сите броеви. На почетокот збирот на сите броеви придружени на темињата во кои имаме жетони е еднаков на

$$C=1+2+3+...+12=78.$$

При секоја трансформација збирот C (секој број придружен на теме во кое има жетони го собираме онолку пати колку што е бројот на жетоните во тоа теме) останува ист или се менува за 12, што значи дека во ниту еден чекор не е делив со 4. Но, ако имаме три темиња во кои има по четири жетони, тогаш збирот на броевите придружени на темињата во кои има жетони е еднаков на $4(k+m+n+p)$, за некои по парови различни $k,m,n,p\in\{1,2,...,12\}$, што значи дека е делив со 4. Затоа не можеме на саканиот начин да ги групираме жетоните.

IV.4. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

68. Докажи дека од произволни 2023 броеви може да се изберат два броја чија разлика е делива со 2022.
Решение. При делење со бројот 2022 имаме 2022 можни остатоци. Затоа, од принципот на Дирихле следува дека меѓу дадените 2023 броеви постојат најмалку два броја кои при делење со 2022 даваат иста остаток. Јасно, разликата на овие два броја е делива со 2022.

69. Дадени се пет различни природни броја. Докажи дека меѓу нив постојат три броја чиј збир е делив со 3.
Решение. Ако меѓу дадените броеви постојат три броја кои при делење со 3 даваат три различни остатоци, тогаш нивниот збир е делив со 3 и задачата е решена. Ако не постојат такви три броја, тогаш секој од петте броеви при делење со 3 ќе дава еден од можните два остатоци. Сега, имаме пет броја и два можни остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека постојат три броја кои при делење со 3 даваат ист остаток. Јасно, нивниот збир е делив со 3.

70. Дадени се единаесет различни природни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат шест броја чиј збир е делив со 6.
Решение. Да избереме пет од дадените единаесет броеви. Според претходната задача, од нив може да избереме три броја чиј збир е делив со 3. Сега, ни пресотануваат $11-3=8$ броја. Да земеме пет од овие осум броја. Повторно според претходната задача, од нив можеме да избереме три броја чиј збир е делив со 3. Сега, ни преостануваат

$8-3=5$ броја, од кои според претходната задача можеме да избереме три броја чиј збир е делив со 3.

Имаме, три групи од по три броја такви што збирот на броевите во секоја група е делив со 3. Од принципот на Дирихле следува дека збирот на броевите во две од овие групи е со иста парност, па ако ги собереме броеви од овие две групи, добиваме дека меѓу дадените 11 броеви постојат шест чиј збир е делив со 6.

71. Определи го најмалиот природен број n таков што да меѓу било кои n цели броеви може да се изберат 18 броја чиј збир е делив со 18.

Решение. Меѓу 17 нули и 17 единици не можат да се изберат 18 броја чиј збир е делив со 18. Значи, бараниот број е поголем од 34.

Ќе докажеме дека меѓу 35 произволни броеви може да се изберат 18 чиј збир е делив со 18. Според претходната задача од произволни 11 броеви може да се изберат 6 чиј збир a_1 е делив со 6. Сега ни преостануваат $35-6=29$ броја. Ако од овие 29 броја земеме 11 броеви, тогаш постојат 6 броја чиј збир a_2 е делив со 6. По овој избор ни преостануваат $29-6=23$ броја, од кои земаме 11 броја и од нив избираме 6 броја чиј збир a_3 е делив со 6. Сега, ни преостануваат $23-6=17$ броја, од кои земеме 11 броја и до нив избираме 6 броја чиј збир a_4 е делив со 6. Конечно, ни преостануваат $17-6=11$ броја кои содржат шест броја чиј збир a_5 е делив со 6.

Броевите $k_i=\frac{a_i}{6}, i=1,2,3,4,5$ се природни. Овие пет броја содржат три броја чиј нзбир е делив со 3. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се броевите k_1,k_2,k_3, т.е. $k_1+k_2+k_3=3m$, $m\in\mathbb{N}$. Конечно, $a_1+a_2+a_3=6k_1+6k_2+6k_3=18m$, што значи дека унијата на трите шесторки броеви чии збирови се a_1,a_2,a_3 се бараните 18 броеви чиј збир е делив со 18.

72. Дадена е низата четирицифрени броеви 0006, 0036, 0216, 7776, 6656, ..., кои се последните четири цифри од броевите $6^1,6^2,6^3,6^4,\ldots$. Докажи дека почнувајќи од некој член оваа низа е периодична.

Решение. Цифрата на единиците на секој степен на бројот 6 е 6, па затоа постојат само 10^3 можности за четирицифрените завршетоци на степените на бројот 6. Но бројот на степените е поголем од 10^3, па

затоа постојат два степени кај кои последните четири цифри се еднакви. Нека се тоа степените 6^k и 6^{k+m}, каде $k,m\in\mathbb{N}$. Нивната разлика е делива со 10^4, т.е. $6^{k+m}-6^k=10^4n$. Но, тогаш за секој $p\in\mathbb{N}$ важи $6^{k+m+p}-6^{k+p}=6^p(6^{k+m}-6^k)=6^p10^4n$, што значи дека последните четири цифри на 6^{k+m+p} и 6^{k+p} се еднакви, т.е. почнувајќи од некој член разгледуваната низа е периодична.

73. Дванаесет пријатели одлучиле n вечери да излезат на заедничка вечера. Во секое од тие n излегувања пријателите се распоредуваат така што седат околу m маси, околу секоја маса еднаков број пријатели. Дали постои распоред на седења таков што секој од нив седи барем еднаш околу иста маса со секој од преостанатите 11 пријатели, ако:
а) $n=5, m=4$,
б) $n=4, m=3$
в) $n=3, m=2$.

Решение. Меѓу 12 пријатели има $\frac{12\cdot11}{2}=66$ парови пријателства.

а) Околу секоја од 4-те маси седат 3 пријатели, што значи дека на една маса може да се реализираат 3 заеднички седења. Бидејќи имаме 4 маси и 5 различни вечери, не е можно да се реализираат повеќе од $3\cdot4\cdot5=60$ заеднички седења, па затоа не е можно да се реализираат 66 заеднички седења.

б) Околу секоја 3-те маси седат 4 пријатели, па затоа може да се реализираат 6 заеднички седења, а на вкупно 3 маси има 18 заеднички седења. Следната вечер не може да се реализираат толку нови заеднички седења. Имено, да разгледаме 4 пријатели кои претходната вечер седеле околу иста маса. Имаме 3 маси, па од принципот на Дирихле следува дека барем двајца од нив седеле околу иста маса. Бидејќи имаме 3 маси, имаме и 3 пара такви пријатели кои следната вечер мораа да бидат околу иста маса. Тоа значи дека следната вечер може да има најмногу $18-3=15$ заеднички седења. Конечно, во четирите вечери може да има најмногу $18+15+15+15=63$ заеднички седења, па затоа не може да се реализираат 66 пријателски седења.

в) Да ги означиме пријателите со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12. Следниве распореди:
Прва вечера:
Прва маса: 1, 2, 3, 4, 5, 6, *Втора маса*: 7, 8, 9, 10, 11, 12,

Втора вечера:
Прва маса: 1, 2, 3, 7, 8, 9, *Втора маса*: 4, 5, 6, 10, 11, 12,
Трета вечера:
Прва маса: 1, 2, 3, 10, 11, 12, *Втора маса*: 4, 5, 6, 7, 8, 9,
Ги задоволуваат условите на задачата. Имено, пријателите ги поделивме во четири групи: (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) и (10,11,12). Секоја од четирите групи оставарила заедничко седење со различна група во трите вечери, па затоа овој распоред ги задоволува условите на задачата.

74. Секоја од 9 прави го дели квадратот на два четириаголници чии плоштини се однесуваат како 2:3. Докажи дека барем 3 од овие 9 прави минуваат низ иста точка.

Решение. Да ги зразгледаме двете средни линии кои квадратот го делат на четири помали меѓусебно складни квадрати. Секоја од дадените прави го дели квадратот на два правоаголни трапези чии висини се еднакви на страната на квадратот. Средни линии на овие два трапези се отсечки чија унија е еднаква на една од средните линии на квадратот. Бидејќи плоштината на трапезот е еднаква на производот на средната линија и висината, а плоштините на двата трапеза на кои квадратот е поделен со било која од дадените прави се однесуваат како 2:3, добиваме дека секоја од дадените прави дели една од средните линии на квадратот во однос 2:3. Постојат вкупно 4 точки кои средните линии на квадратот ги делат во однос 2:3, па како имаме 9 прави, од принципот на Дирихле следува дека барем три од овие прави минуваат низ иста точка.

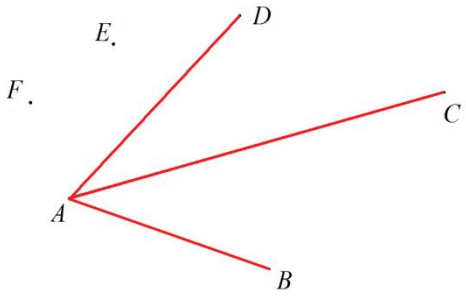
75. Секоја од 13 прави го дели квадратот на два четириаголници чии плоштини се однесуваат како 3:5. Докажи дека барем 4 од овие 13 прави минуваат низ иста точка.

Решение. Да ги зразгледаме двете средни линии кои квадратот го делат на четири помали меѓусебно складни квадрати. Секоја од дадените прави го дели квадратот на два правоаголни трапези чии висини се еднакви на страната на квадратот. Средни линии на овие два трапези се отсечки чија унија е еднаква на една од средните линии на квадратот. Бидејќи плоштината на трапезот е еднаква на производот на средната линија и висината, а плоштините на двата трапеза на кои квадратот е поделен со било која од дадените прави се однесуваат

како 3:5, добиваме дека секоја од дадените прави дели една од средните линии на квадратот во однос 3:5. Постојат вкупно 4 точки кои средните линии на квадратот ги делат во однос 3:5, па како имаме 13 прави, од принципот на Дирихле следува дека барем четири од овие прави минуваат низ иста точка.

76. Сите дијагонали и страни на шестаголник се обоени во две бои црвена и сина. Докажи дека меѓу страните и дијагоналите на шестаголникот постојат три истобојни кои се страни на триаголник.

Решение. Нека A е произволно теме на шестаголникот. Тоа е крајна точка за 5 отсечки кои се обоени во сина или црвена боја. Бидејќи $5=2\cdot 2+1$, од принципот на Дирихле следува дека постои боја таква што барем три од овие пет отсечки се обоени во таа боја, на пример црвена боја. Да ги означиме вторите крајни точки на овие отсечки со B,C и D. Сега, ако една од отсечките BC,CD или DB е црвена, тогаш имаме еднобоен триаголник со темиња во темињата на шестаголникот, а ако сите три отсечки се сини, тогаш триаголникот BCD е бараниот еднобоен триаголник.



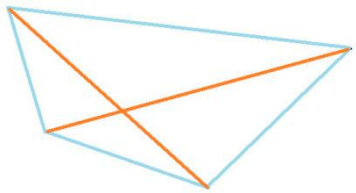
77. Докажи дека во множество од шест луѓе може да се најдат тројца кои меѓу себе не се познаваат или пак секој од нив ги познава преостанатите двајца.

Решение. Нека шесте луѓе се наоѓаат во темињата на шестаголник, при што ако се познаваат тогаш отсечката која ги поврзува е сина, а ако не се познаваат тогаш таа е црвена. Значи, имаме конвексен шестаголник чии страни и дијагонали се обоени во две бои. Според задача 77 меѓу страните и дијагоналите на шестаголникот постојат три истобојни кои се страни на триаголник. Тоа значи, дека меѓу шесте луѓе постојат тројца кои меѓу себе не се познаваат или пак секој од нив ги познава преостанатите двајца.

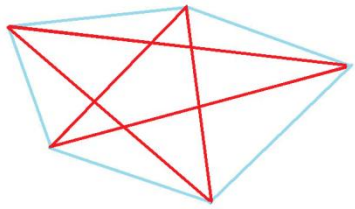
78. Даден е природен број n и конвексен $n-$аголник. Секоја страна и дијагонала на многуаголникот е обоена во црвена или сина боја.

Определи го најмалиот природен број n таков што за секое такво боење постои триаголник со темиња во темињата на многуаголникот чии страни се еднобојни.

Решение. За $n=4$, страните да ги обоиме во една, на пример, сина боја, а дијагоналеите во другата – црвена боја, цртеж десно. Тогаш очигледно не постои еднобоен триаголник чии темиња се во темињата на четириаголникот.



За $n=5$, страните да ги обоиме во една, на пример, сина боја, а дијагоналите во другата – црвена боја, цртеж десно. Тогаш очигледно не постои триаголник еднобоен триаголник чии темиња се во темињата на четириаголникот.



Значи, за бараниот број важи $n>5$. Сега, од задача 77 следува дека при произволно боење на конвескен шестаголник постои еднобоен триаголник чии темиња се во темињата на шестаголникот.

79. Сите страни и дијагонали на седумнаесетаголник се обоени во една од три бои: сина, црвена и зелена. Докажи дека меѓу страните и дијагоналите на седумнаесетаголникот постојат три истобојни кои се страни на триаголник

Решение. Да земеме произволно теме од седумнаесетаголникот. Бидејќи тоа е поврзано со 16 други темиња и страните и дијагоналите се обоени во три бои, од принципот на Дирихле следува дека постојат шест истобојни отсечки кои излегуваат од ова теме. Ако било кои две од овие шест темиња меѓу себе се поврзани со истата боја, тогаш задачата е решена. Ако овие шест темиња се поврзани со отсечки кои се обоени во другите две бои, тогаш од задачата 77 следува дека меѓу страните и дијагоналите на овој шестаголник постојат три истобојни кои се страни на триаголник.

80. Во рамнината се дадени 25 точки, такви што меѓу секои три од дадените точки постојат две точки кои се на растојание помало од 1. Докажи дека постои кружница со радиус 1 во чија внатрешност се наоѓаат најмалку 13 од дадените точки.

Решение. Нека A е произволна од дадените точки и k_1 е кружница со

центар во A и радиус 1. Ако сите точки се наоѓаат во k_1, тогаш тврдењето е докажано. Во спротивно постои точка B која не е во k_1, т.е. таква што растојанието меѓу A и B не е помало од 1. Нека k_2 е кружница со центар во B и радиус 1. Секоја од пресотанатите 23 точки се наоѓа или во кружницата со центар A или во кружницата со центар B. Навистина, ако постои точка C која не е во ниту една од овие две кружници, тогаш постојат три точки A,B,C такви што меѓу нив нема две кои се на растојание помало од 1. Сега, од принципот на Дирихле следува дека во една од двете кружници има најмалку 12 од овие 23 точки, па затоа во оваа кружница се содржат 13 од дадените 25 точки.

81. Определи го најмалиот природен број n таков што за секое множество од n точки со целобројни координати, од кои никои три не лежат на една права, постои триаголник со темиња од тоа множество за кои и средините на неговите страни се точки со целобројни координати.

Решение. Ако се дадени точки $A(a,b)$ и $C(c,d)$, тогаш средината на отсечката AB е точката

$$P(\tfrac{a+c}{2},\tfrac{b+d}{2}). \qquad (1)$$

Сите точки соцелобројни координати да ги поделиме во четири множества:

S_1 - множеството точки чии апсциси и ординати даваат остаток 1 при делење со 2,

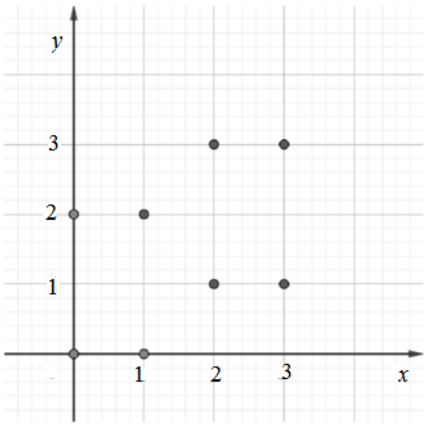
S_2 - множеството точки чии апсциси и ординати се деливи со 2,

S_3 - множеството точки чии апсциси даваат остаток 1 при делење со 2, а ординати се деливи со 2,

S_4 - множеството точки чии апсциси се делив со 2, а ординати даваат остаток 1 при делење со 2.

Од принципот на Дирихле следува дека помеѓу 9 точки, секогаш постојат три точки кои припаѓаат на едно од горните четири множества. Овие три точки се темиња на триаголник (никои три од деветте точки не лежат на иста права) и за овие три точки важи дека средината на секоја отсечка е со целобројни координати. Навистина, за овие три точки важи дека збирот на апсцисите и ординатите е парен број, па од (1) следува дека средината на отсечката чии крајни точки се е точка со целобројни координати.

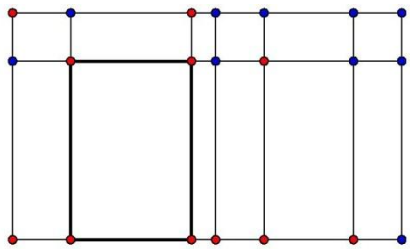
Ако имаме множество од 8 точки, такви што по две точки се од секое од множествата S_1, S_2, S_3 и S_4, на пример множеството точки (0,0), (0,2), (1,0), (1,2), (2,1), (2,3), (3,1) и (3,3), тогаш меѓу било кои три избрани точки најмалку две се од различни множества S_1, S_2, S_3 и S_4, а како збирот на апсцисите или збирот на ординатите на точки од различните множества не е парен број, од (1) следува дека апсцисата или ординатата на некоја средина не е цел број, (види цртеж).



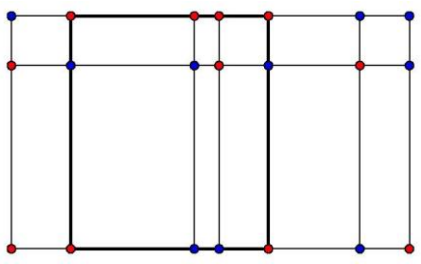
82. Три меѓусебно паралелни прави се сечат со седум на нив нормални прави во 21 точка. Пресечните точки се наоѓаат во три реда и седум колони. Некои од точките се обоени црвено, а некои сино. Докажи дека постојат четири истобојни точки кои се тремиња на правоаголник.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека има повеќе црвени од сини точки. Оа значи дека меѓу дадените 21 точка има најмалку 11 црвни. Можни се два случаја.

1) Постои колона со 3 црвени точки. Тогаш преостанатите 8 црвени точки се распоредени во 6 колони, па од принципот на Дирихле следува дека постои најмалку една колона во која има две црвени точки. Тие две црвени точки, заедно со црвените точки на соодветните места од колоната која има 3 црвени точки се темиња на правоаголник (цртеж десно).



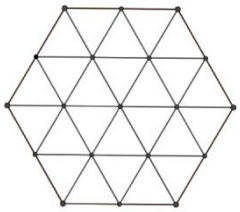
2) Не постои колона со 3 црвени точки. Тоа значи дека 11 црвени точки се наоѓаат во 7 колони со најмногу две црвени точки во колона. Последното значи дека имаме најмалку 4 колони со по две црвени точ-



ки. Во секоја од овие 4 колони црвените точки може да заземат 3 различни положби (прв и втор ред, втор и тре ред, трет и прв ред). Затоа имаме две колони во кои црвените точки се исто распоредени, што значи дека тие се темиња на правоаголник (цртеж горе десно).

83. Во внатрешноста на правилен шестаголник со страна $2\,cm$ се дадени 193 точки, меѓу кои не постојат три колинерани, а кои се обоени со 4 бои. Докажи дека постојат три истобојни точки кои се темиња на триаголник со плоштина не поголема од $\frac{\sqrt{3}}{4}\,cm^2$.

Решение. Бидејќи $193=4\cdot 48+1$ од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 49 истобојни точки.



Да го поделиме шестаголникот на 6 рамностран триаголници, а потоа секој рамностран триаголник да го поделиме на 4 помали рамностран триаголници (цртеж десно). Знали вкупно имаме 24 триаголници. Бидејќи $49=2\cdot 24+1$ повторно од принципот на Дирихле следува дека во некој од овие 24 дела има 3 истобојни точки. Но, плоштината на триаголникот во кој се овие истобојни точки е еднаква на $\frac{\sqrt{3}}{4}\,cm^2$ (рамностран триаголник со страна $1\,cm$), а според условот на задачата меѓу дадените точки не постојат три колинеарни точки добивме дека постојат три истобојни точки кои се темиња на триаголник со плоштина не поголема од $\frac{\sqrt{3}}{4}\,cm^2$.

84. Во квадрат со страна $31\,cm$ на произволен начин се распоредени 2022 точки. Докажи дека меѓу дадените точки постојат најмалку две точки кои се на растојание помало од $1\,cm$.

Решение. Квадратот ќе го поделиме на $44^2=1936$ складни квадрати со страна $\frac{31}{44}\,cm$. Растојанието меѓу секои две точки во делбените квадрати ќе биде помало или еднакво на $\frac{31}{44}\sqrt{2}<1$. Сега, бидејќи $2022>1936$, од принципот на Дирихле следува дека меѓу делбените квадрати постои квадрат кој содржи најмалку две од избраните 2022 точки, со што тврдењето е докажано.

85. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со сина боја. Докажи дека вака испрсканата рамнина содржи две истобојни точки кои се на растојание $1cm$.

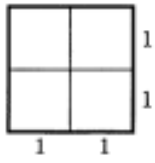
Решение. Нека ABC е произволен рамностран триаголник во рамнината со должина на страна $1cm$. Имаме три точки A,B,C кои се обоени во две бои, па од принципот на Дирихле следува дека имаме две истобојни точки. Јасно, тоа се баранатите точки кои се на растојание $1cm$.

86. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со сина боја. Докажи дека во вака испрсканата рамнина постои правоаголен триаголник чија хипотенуза е со должина $2023cm$ и чии темиња се истобојни.

Решение. Аналогно како во претходната задача се докажува дека постои отсечка AB со должина $2023cm$ чии крајни точки се истобојни. Над оваа отсечка како над дијаметар конструираме кружница.
Ако било која точка C различна од точките A и B е со иста боја како и овие две точки, тогаш ABC е бараниот триаголник и задачата е решена.
Ако ниту една точка од кружницата различна од A и B не е со иста боја како овие две точки, тогаш повлекуваме дијаметар CD различен од AB и земаме точка E различна од точките A и B. Јасно, триаголникот CDE е бараниот триаголник и задачата е решена.

87. Во внатрешноста на квадрат со страна 2 произволно се распоредени пет точки. Докажи дека постои барем еден пар точки растојанието меѓу кои е помало од $\sqrt{2}$.

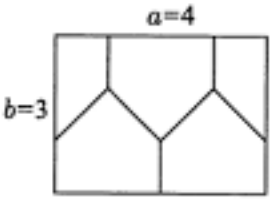
Решение. Дадениот квадрат да го поделиме на четири единечни квадрати (цртеж десно). Тогаш од принципот на Дирихле следува дека во еден од единичните квадрати постојат барем две точки кои не се наоѓаат на границата на големиот квадрат. Јасно, растојанието меѓу овие две точки е помало од дијагоналата на единичниот квадрат, т.е. е помало од $\sqrt{2}$.



88. Во правоаголник со страни $a=4$ и $b=3$ се распоредени 6 точки. Докажи меѓу овие шест точки постојат две точки кои се на растојание

помало или еднаков на $\sqrt{5}$.

Решение. Дадениот правоаголник да го поделиме на на три петаголници со должини на страни $1,2,1,\sqrt{2},\sqrt{2}$ и два четириаголници со должини на страни $2,1,1,\sqrt{2}$ (цртеж десно). Од Питагоровата теорема следува дека растојанието меѓу секои две точки во делбените многуаголници е помало или еднакво на $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Бидејќи имаме шест точки, а пет делбени многуаголници, од Принципот на Дирихле следува дека постојат две точки кои припаѓаат во еден од делбените многуаголници. Јасно, растојанието меѓу овие две точки е помало или еднаков на $\sqrt{5}$.



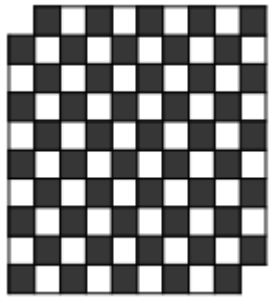
89. Даден е круг со дијаметар $d=3$ и во него неколку помали кругови. Збирот на дијаметрите на сите кругови е еднаков на 25. Докажи дека за секоја права која припаѓа на рамнината на круговите постои права паралелна на неа која сече најмалку 9 од малите кругови.

Решение. Нека p е произволна права во рамнината на круговите. Нека q е права која е нормална на правата p. Сите кругови нормално да ги проектираме на правата q. Јасно, секој круг се проектира во отсечка чија должина е еднаква на должината на дијаметарот на кругот и сите отсечки се наоѓаат на отсечка со должина 3 (дијаметарот на големиот круг). Бидејќи $25>8\cdot 3$, од принципот на Дирихле следува дека постои точка, да ја означиме со A, која е покриена со најмалку 9 проекции. Тогаш бараната права е правата која минува низ точката A и е нормална на правата q. Јасно, оваа права е паралелна со почетната права p

IV.5. БОЕЊА И ПОКРИВАЊА

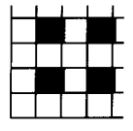
90. Дали може табла со димензии 10×10 од која се отстранети две дијагонални полиња да се покрие со домино плочки, т.е. со плочки 2×1.

Решение. Таблата да ја обоиме шаховски како на цртежот десно. При ова боење имаме 50 црни и 48 бели полиња. Секоја домино плочка било да е вертикално, било да е хоризонтално поставена, покрива едно црно и едно бело поле. Но, бројот на црните полиња е за 2 поголем од бројот на белите полиња, па затоа бараното покривање не е можно.

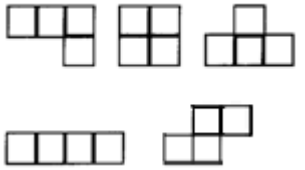


91. Подот на една сала е покриен со плочки 4×1 и 2×2. Една плочка е скршена, а на располагање имаме само една плочка од спротивниот вид. Докажи дека подот не може повторно да се покрие со прераспоредување на плочките кои ги имаме.

Решение. Секоја плочка покрива по четири полиња со димензиии 1×1. Подот да го поделиме на полиња со димензии 1×1. Од долното лево теме на подот да го обоиме секој втор ред црно бело, со тоа што второто обоено поле е црно (цртеж десно). Сега плочките 2×2 секогаш покриваат по 1 црно поле, а плочките 4×1 покриваат или 2 или 0 црни полиња. Според тоа, со замена на една плочка од спротивниот вид и прераспоредување на плочките не е можно повторно да се покрие подот.



92. Пабло има сет од пет тетрамина во кои има барем по едно тетрамино од секој вид (цртеж десно). Дали, користејќи ги сите тетрамина, Пабло може да направи правоаголник?



Решение. Секое тетрамино има 4 квадратчиња, што значи дека правоаголникот ќе има 20 квадратчиња. Да ги обоиме полињата на правоаголникот како кај шаховската табла. Тогаш ќе имаме 10 црни и 10 бели полиња. $T-$тетраминото покрива 1 или 3 црни полиња, а секое друго тетрамино покрива по 2 црни полиња. Значи, третаминаата покриваат или 9 или 11 црни квадратчиња, па затоа, користејќи ги сите тетрамина, Пабло не може да состави правоаголник

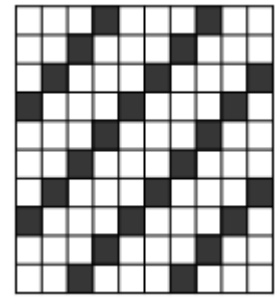
93. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со $T-$тетрамина (цртеж десно).

Решение. Ако таблата ја обоиме шаховски, тогаш секое $T-$тетра-

мино покрива или 3 црни и 1 бело поле или 3 бели и 1 црно поле (цртеж десно). Бидејќи при даденото боење таблата со димензии 10×10 има еднаков број црни и бели полиња, за истата да ја покриеме треба имаме еднаков број тетрамина кои покриваат 3 црни како и оние кои покриваат 1 црно поле. Тоа значи дека вкупниот број полиња треба да е делив со $2\cdot4=8$. Но, бројот $10\cdot10=100$ не е делив со 8, па затоа бараното покривање не е можно.

94. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со тетрамина 1×4?

Решение. Таблата да ја обоиме како на цртежот долу десно. При вакво боење секое тетрамино 1×4, било да е вертикално било да е хоризонтално покрива точно едно црно поле. Таблата има 100 полиња, па затоа за нејзино покривање ни се потребни 25 тетрамина 1×4 со кои треба да покриеме 25 црни полиња. Но, ние имаме само 24 црни полиња, па затоа бараното покривање не е можно.



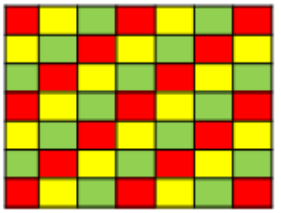
95. Квадратна табла со димензии 8×8 е шаховски обоена. Во еден потез се избира еден ред или една колона и во секое од осумте полиња во избраниот ред или колона се менува бојата од бела во црна и обратно. Дали може со конечна низа вакви потези да се постигне точно едно поле на таблата да е црно?

Решение. Во секој потез бојата ја менуваме на точно 8 полиња. Ако k од тие полиња се црни, тогаш $8-k$ од тие полиња се бели. Со C да го означиме вкупниот број црни полиња пред некој потез. По тој потез вкупниот број црни полиња ќе биде $C-k+(8-k)=C+8-2k$. Според тоа, парноста на вкупниот број црни полиња секогаш ќе биде иста, т.е. таа ќе биде инваријанта. Бидејќи на почетокот вкупниот број црни полиња е 32, што значи дека е парен број, не е можно по конечен број потези бројот на црните полиња да е 1.

96. Имаме по желба голема квадратна табла на која во квадрат со димензии 3×3 се поставени 9 жетони, по еден во секое поле. Во секој чекор можеме со еден жетон да скокнеме во хоризонтален или вертикален смер преку едно зафатено поле на слободно поле и притоа жетонот кој

го прескокнуваме го отстрануваме. Дали на овој начин на таблата може да остане само еден жетон?

Решение. Полињата на таблата да ги обоиме во три бои како на цртежот десно, т.е. дијагоналите редоследно ги боиме во црвена, жолта и зелена боја (треба да се има предвид дека табла е голема по желба).



Со $c, z, ž$ да го означиме соодветно бројот на жетоните кои се наоѓаат на полињата со црвена, зелена и жолта боја, соодветно. Јасно, на почетокот $c=3$, $z=3, ž=3$ (цртеж десно). При секој скок со жетонот, еден од броевите $c, z, ž$ се зголемува за 1, а другите два се намалуваат за 1, што значи дека по секој чекор парноста на сите три броја е иста. Сакаме да имаме состојба 1, 0, 0, а тоа не е можно бидејќи еден од броевите е непарен, а другите два се парни.

97. На шаховски обоена табла со димензии 12×12 на белите полиња од првите шест колони се поставени жетони. Во еден потез избран жетон го поместуваме по дијагонала за две полиња, а прескокнатиот жетон го отстрануваме од таблата. Дали е можно на крајот на таблата да остане само еден жетон?

Решение. Да ја обоиме со црвена, сина и зелена боја по ред секоја трета колона на таблата. На почетокот на црвените, сините и зелените колони се наоѓаат по 12 жетони. Со секој потез на едната од трите групи жетони се додава по еден жетон, а на другите две групи се одзема по еден жетон. Според тоа, со секој потез се менува парноста на сите три групи жетони, што значи дека по секој потез во секоја група бројот на жетоните е со иста парност. Но, на крајот бројот на жетоните во групите треба да биде 0, 0 и 1, во некој распоред, што не е можно брдејќи броевите 0 и 1 се со различна парност.

98. Во полињата на табла со димензии $n\times n$ редоследно се запишани броевите од 1 до n^2. Во еден потез се избираат два соседни броја и од двата броја го одземаме помалиот и добиените резултати ги запишуваме соодветно на местата на избраните броеви. Дали може со конечно многу пати повторување на оваа постапка на таблата да бидат запишани само нули? (Ако двата избрани броја се еднакви, тогаш бројот го одземаме од двата избрани броја и добиваме нули.)

Решение. Нека n е непарен број. Таблата да ја обоиме шаховски, т.е. полињата со непарни броеви да се црни, а другите да се бели. Збирот на броевите од црните полиња е

$$1+3+...+n^2=(\frac{n^2+1}{2})^2,$$

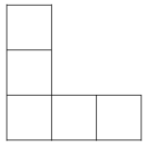
а збирот на броевите на белите полиња е еднаков на

$$2+4+...(n^2-1)=\frac{n^2(n^2+1)}{2}-(\frac{n^2+1}{2})^2.$$

Лесно се гледа дека збирот на броевите на црните полиња е поголем од збирот на броевите на белите полиња. Бидејќи со секој потез од двата збира се одзема ист број, не е можно на крајот да се постигне двата збира да се еднакви на нула, односно на таблата да се запишани само нули.

Нека n е парен број. Во секој ред да ги поделиме броевите на парови: првиот и вториот, третиот и четвртиот, ..., $(n-1)-$виот и $n-$тиот, а потоа во секој пар да го одземеме помалиот број. Сега, во секоја втора колона се запишани единици, а во преостанатите колони се запишани нули. Во секоја колона да ги поделиме броевите на парови: првиот и вториот, третиот и четвртиот, ..., $(n-1)-$виот и $n-$тиот, а потоа во секој пар да го одземеме помалиот број, т.е. бројот 1. Така, добивме табла во чии полиња сите запишани броеви се нули.

99. Секое поле на табла со димензии 10×10 е обоено во една од n бои. На таблата поставуваме фигура од видот прикажан на цртежот десно, која се состои од пет полиња 1×1, така што фигурата секогаш покрива точно 5 полиња од таблата. Определи го најмалиот природен број n за кој постои боење такво што, како и да се постави фигурата на таблата, таа покрива полиња обоени во различни бои.



Решение. Фигурата која ја поставуваме на таблата да ја наречеме $L-$плочка. На табла со димензии 10×10 постои 3×3 квадрат кој од работ на таблата е оддалечен барем за еден ред и барем за една колона. Во таков 3×3 квадрат било кои две полиња може да се покријат со $L-$плочка. Ако $n\le8$, тогаш во таков 3×3 квадрат постојат две полиња кои се обоени со иста боја, па постои и положба на $L-$плочката при што се покриени две полиња со иста боја.

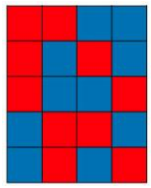
Нека $n=9$ и да ја обоиме таблата како на цртежот десно, при што различните броеви означуваат различни бои, а истите броеви означуваат иста боја. Во вакво боење било кој 3×3 е обоен во 9 различни бои, па како и да се постави $L-$плочката таа може да покрива најмногу едно поле од било која од деветте бои.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

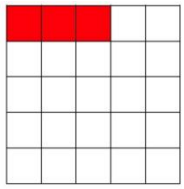
Според тоа, бараниот број е $n=9$.

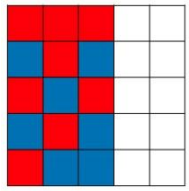
100. Определи го најголемиот природен број n за кој секое поле на правоаголна табла $5\times n$ може да се обои во една од две бои така што за секој иабор на два реда и две колони четирите единечни пресечни полиња не се обоени со иста боја.

Решение. Нека $n=4$. Ако таблата ја обоиме како на цртежот десно, тогаш лесно се проверува дека не можеме да избереме два реда и две колони такви што сите четири единечни пресечни полиња се обоени во иста боја.



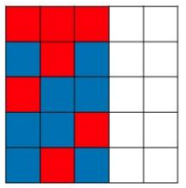
Ќе докажеме дека за секое боење на 5×5 табла може да се најдат два реда и две колони такви што четирите единелни пресечни полиња се обоени во иста боја. Да го разгледаме првиот ред. Според принципот на Дирихле најмалку три од полињата во тој ред се обоени со иста боја, да кажеме црвена. Да земеме три колони кои во првиот ред имаат црвени полиња. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа се првите три колони (цртеж десно). Ако во некој од преостанатите редови на овие колони има две црвени полиња, тогаш имаме два реда и две колони такви што четирите пресечни единечни полиња се црвени, т.е. еднобојни (на пример, цртеж десно).





Да претпоставиме дека во секој од преостанатите четири реда на тие

три колони има најмногу по едно црвено поле. Но, тогаш во секој ред има по две сини полиња. Во секој ред двете сини полиња во дадените три полиња може да се распоредат на 3 начини (прво и второ, второ и трето, прво и трето поле). Значи, имаме четири реда и три можни распореди, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два реда со ист распоред, што значи дека најдовме два реда и две колони во чии пресеци единичните полиња се еднобојни (на пример, цртеж десно).



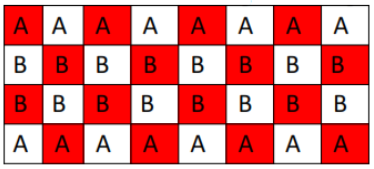
Конечно, од претходните разгледувања следува дека $n=4$ е најголемиот број кој го задоволува условот на задачата.

101. а) Нека m и n се непарни природни броеви. Докажи дека шаховската фигура скокач (скокајќи според шаховското правило) не може да го обиколи секое поле на таблата со димензии $m\times n$ точно еднаш и да се врати на почетното поле.

б) Дали може скокачот да го обиколи секое поле на табла 4×8 точно еднаш и да се врати на почетното поле?

Решение. а) Таблата да ја обоиме на шаховски начин. При секој скок на скокачот тој оди на поле со спротивна боја, т.е. за да дојде до поле со иста боја, односно да се врати на почетното поле скокачот мора да направи парен број потези. Но, таблата има mn полиња, т.е. бројот на скоковите кога скокачот го обиколува секое поле на таблата точно еднаш и се враќа на почетното поле мора да е непарен, што е противречност.

б) Полињата на таблата да ги обоиме шаховски и да ги означиме со буквите A и B како на цртежот десно. При секој скок на скокачот тој оди на поле со спротивна боја и од поле означено со буквата A може да скокне само на поле означено со буквата B, и на поле означено со буквата A може да дојде само од поле означено со буквата B. Но, на таблата имаме еднаков број полиња означени со буквите A и B, па за да скокачот помине точно еднаш по сите полиња и се врати на почетното поле мора постојано да скока од поле означено со буквата A на поле означено со буквата B и обратно. Според тоа, ако скокачот тргне, на пример, од бело поле од секторот A тој мора да оди на црвено поле од секторот B, па на бело поле од

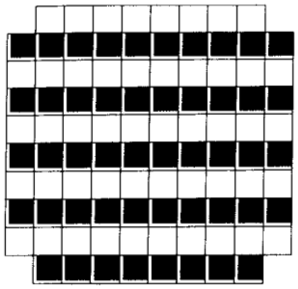


секторот A и така наизменично, што значи дека во никој случај не може да дојде на црвено поле на секторот A. Според тоа, одговорот на поставеното прашање е негативен.

102. Имаме табла со димензии $n\times n$ со отстранети аголни квадратчиња. Определи ги потребен услов така што таблата може да се покрие со L тетрамина (цртеж десно).

Решение. Нека претпоставиме дека таблата може да се покрие со L тетрамина. Таблата има n^2-4 квадратчиња, па како секое L тетрамино има 4 квадратчиња, добиваме дека мора да е $4\mid n^2$, т.е. n да е парен број. Но, тоа не е доволно, бидејќи на пример за $n=4$ добиената табла не може дасе покрие со 3 тетрамина од типот L.

Нека е дадена табла која можеме да ја покриеме со L тетрамина. Јасно, таа има парен број редици и колони. Таблата да ја обоиме така што секој втор ред го боиме со црна боја (за $n=10$ види цртеж десно). Тогаш секое L тетрамино покрива или 3 бели и 1 црно поле, или 3 црни и 1 бело поле. Но, таблата има еднаков број црни и бели полиња, па затоа во нејзиното покривање учествуваат еднаков број L тетрамина кои покриваат по 3 црни и по 1 црно поле, што значи дека учествуваат парен број L тетрамина. Затоа бројот на полињата на таблата е делив со 8, т.е. $8\mid n^2-4$, од каде следува дека бараниот потребен услов е $n=4k+2, k\in\mathbb{N}$.



Забелешка. Може да се докаже дека условот $n=4k+2, k\in\mathbb{N}$ е и доволен, за што треба да се даде конструкција со која се реализира покривањето на таблата.

IV.6. КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЈА

103. Дали може да се распоредат 10 точки на 5 отсечки така што на секоја отсечка има по 4 точки?

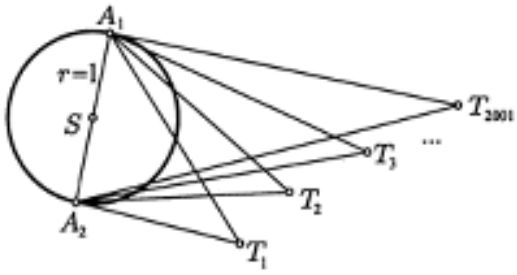
Решение. Да! Нацртај конвексен петаголник и повлечи ги неговите дијагонали.

104. Докажи дека во секој конвексен единаесетаголник постојат најмалку две дијагонали кои зафаќаат агол помал од 5°.

Решение. Многуаголникот е конвексен, што значи дека секои две дијагонали зафаќаат некој агол. Да ги транслатираме дијагоналите така што тие ќе се сечат во една точка. Бидејќи единаесетаголникот има $\frac{11\cdot(11-3)}{2}=44$ дијагонали, тие полниот агол, т.е. аголот од 360° го делат на 88 делови. Ако меѓу овие делови не постои агол помал од 5°, тогаш збирот на добиените делбени агли ќе биде поголем или еднаков на $88\cdot 5^\circ = 440^\circ > 360^\circ$, што е противречност.

105. Дадени се 201 точка. Докажи дека на било која кружница со радиус $r=1$ постои точка A таква што збирот на растојанијата од неа до дадените точки е поголем или еднаков на 2001.

Решение. Да го разгледаме дониот цртеж.



Од неравенството на триаголник следува неравенството

$$\overline{T_1A_1}+\overline{T_1A_2}\geq\overline{A_1A_2}=2r=2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако точката T_1 е на отсечката A_1A_2. Аналогни неравенства важат за секоја точка T_i, $i=2,3,...,n$. Ако ги собереме овие неравенства добиваме дека

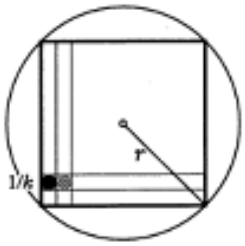
$$(\overline{T_1A_1}+\overline{T_2A_1}+...+\overline{T_{2001}A_1})+(\overline{T_1A_2}+\overline{T_2A_2}+...+\overline{T_{2001}A_2})\geq 4002.$$

Вредноста на изразот во една од заградите мора да е поголема или еднаква на 2001, бидејќи во спротивнои нивниот збир би бил помал од 4002. Значи, точката A_1 или точката A_2 е бараната точка.

106. Дали во круг со дијаметар $2r=\sqrt{2}$ може да се сместат определен број кругови кои немаат заеднички точки, така што збирот на нивните

радиуси да е 2023?

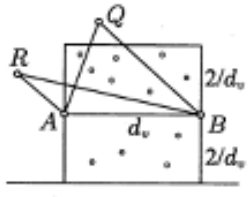
Решение. Да го разгледаме цртежот десно. Во кружницата да впишеме квадрат кој го делиме на k^2 мали квадратчиња. Во секое квадратче да впишеме кружница, која определува круг. Според Питагоровата теорема, должината на страната на големиот квадрат е еднаква на 1, што значи дека радиусите на малите кружници се еднакви на $r'=\frac{1}{2k}$. Но, нашите кругови се допираат, па затоа на секој од нив ќе го оставиме центарот, а радиусот ќе го преполовиме. Според тоа, ќе разгледуваме мали кругови со радиуси $r''=\frac{1}{4k}$.



Сега имаме k^2 мали кругови со радиуси $r''=\frac{1}{4k}$, па затоа збирот на нивните радиуси ќе биде $S=\frac{1}{4k}\cdot k^2=\frac{k}{4}$. Според тоа, за да збирот на радиусите на малите кругови е еднаков на 2023 потребно и доволно е k да земеме да е $\frac{k}{4}=2023$, т.е. $k=8092$.

107. Дадени се 3000 точки такви што секои три точки формираат триаголник чија плоштина е помала од 1. Докажи дека сите точки може да се сместат во правоаголник со плоштина 4.

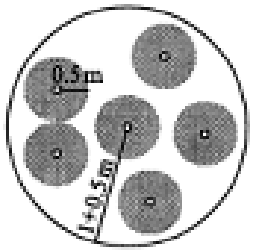
Решение. Да го разгледаме цртежот десно, на кој точките A и B се две точки кои меѓу дадените точки се на најголемо растојание една од друга. Растојанието меѓу точките A и B да го означиме со d_v. Од двете страни на отсечката AB конструираме правоаголник чија втора страна е со должина $\frac{2}{d_v}$. За секоја точка R која лежи надвор од лентата која ја формираат нормалите на отсечката AB важи $\overline{AR}>\overline{AB}$ или $\overline{BR}>\overline{AB}$, па како $\overline{AB}=d_v$ е најголемото растојание меѓу дадените точки заклучуваме дека овие точки не припаѓаат на даденото множество точки. За секоја точка Q која лежи надвор од траката која ја формираат правите паралелни на AB (на растојание помало или еднакво на $\frac{2}{d_v}$) важи $P_{\triangle ABQ}>1$, па затоа овие точки не припаѓаат на



даденото множество точки. Конечно, од претходните разгледувања следува дека сите даени точки се наоѓаат во пресеко на разгледуваните две траки, а тоа е правоаголник со плоштина $d_v \cdot \frac{4}{d_v} = 4$.

108. Во рамнината се дадени 7000 точки такви што растојанието меѓу секои две од нив е помало од 1. Ако n е најмалото растојание меѓу дадените точки, докажи дека $m < \frac{2}{\sqrt{7000}-1}$.

Решение. Сите дадени точки се наоѓаат во кружница со радиус $r = 1$. Бидејќи m е најмалото растојание меѓу дадените точки, околу секоја од нив можеме да опишеме круг со радиус $r' = \frac{m}{2}$. Понатаму, сите овие кругови може да се сместат во круг со радиус $r'' = 1 + \frac{m}{2}$ (цртеж десно). Јасно, збирот на плоштините на малите кругови е помал или еднаков на плоштината на големиот круг, па затоа важи



$$7000 r'^2 \pi < r''^2 \pi,$$

од каде добиваме

$$7000 (\tfrac{m}{2})^2 \pi < (1 + \tfrac{m}{2})^2 \pi.$$

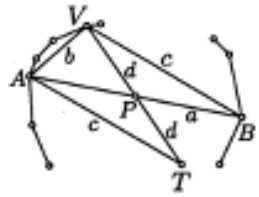
Последното неравенство редоследно е еквивалентно со неравенствата

$$7000 (\tfrac{m}{2})^2 < (1 + \tfrac{m}{2})^2,$$
$$\tfrac{m}{2}\sqrt{7000} < 1 + \tfrac{m}{2},$$
$$m(\sqrt{7000} - 1) < 2,$$
$$m < \frac{2}{\sqrt{7000}-1},$$

што и требаше да се докаже.

109. Докажи дека во круг со радиус $r = \frac{1}{4}$ може да се смести многуаголник со периметар 1.

Решение. Нека е даден многуаголник со периметар 1 таков што постојат темиња A и B кои периметарот го делат на два еднакви дела. Средината на отсечката AB да ја поврземе со отсечка со било кое теме V на разгледуваниот



многуаголник. Нека $\overline{PV}=d$. Да ја продолжиме отсечката VP преку точката P до точка T. Од $\triangle ATV$ следува $2d<b+c$ (неравенство на триаголник). Бидејќи збирот $b+c$ е помал или еднаков на половина од периметарот на дадениот многуаголник, заклучуваме дека

$$2d<b+c\le\frac{1}{2},$$

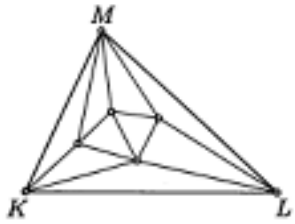
од каде добиваме $d<\frac{1}{4}$. Понатаму,

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\frac{\overline{AB}}{2}<\frac{b+c}{2}\le\frac{1}{4},$$

па затоа во кругот со центар во точката P и радиус $\frac{1}{4}$ може да се смести многуаголник со периметар 1.

110. Во рамнината се дадени 1014 точки меѓу кои нема три колинеарни и такви што постојат три точки, да кажеме K,L,M кои формираат триаголник во чија внатрешност се преостанатите 1011 точки. Определи го бројот на триаголниците кои се во внатре во триаголникот и кои немаат заеднички внатрешни точки.

Решение. Збирот на внатрешните агли на малите триаголници, при услов да немаат заеднички внатрешни точки, е константен, без разлика каков е распоредот на преостанатите 1011 точки внатре во триаголникот KLM. Имено, околу секоја внатрешна точка збирот на настанатите агли е 360°, а збирот на аглите во точките K,L,M е еднаков на 180°. Според тоа, Збирот на аглите на сите триаголници е еднаков на $1011\cdot360^\circ+180^\circ$. Сега, ако при поделбата се добиени n триаголници, бидејќи нзбирот на внатрешните агли на секој триаголник е еднаков на 180°, добиваме



$$180^\circ n=1011\cdot360^\circ+180^\circ,$$

т.е.

$$n=1011\cdot2+1=2023.$$

111. Даден е квадрат со страна 2 и во него се распоредени 2022 точки такви што никои три од овие точки и темињата на квадратот не се колинеарни. Квадратот е поделен на триаголници чии темиња се сите дадени точки и сите темиња на квадратот. Страните на делбените

триаголници меѓу себе не се сечат. Докажи дека постои триаголник чија плоштина е помала од $\frac{1}{1011}$.

Решение. Аналогно како во претходната задача добиваме дека квадратот е поделен на

$$\frac{2022\cdot 360^\circ+360^\circ}{180^\circ}=4045$$

триаголници. Нека претпоставиме дека плоштината на секој делбен триаголник е поголема или еднаква на $\frac{1}{1011}$. Тогаш за плоштината на квадратот добиваме дека е поголема или еднаква на

$$4045\cdot\frac{1}{1001}=4\frac{1}{1011}>4,$$

што е противречност.

IV. ГЕОМЕТРИЈА

IV.1. ТРИАГОЛНИК

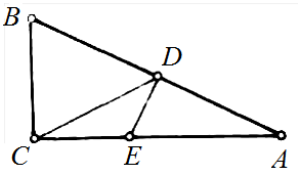
1. Должините на страните на еден триаголник се:
$a=2^{2020}-2^{2019}$, $b=2^{2018}+2^{2017}$ и $c=2^{2019}+2^{2017}$.
Докажи дека овој триаголник е правоаголен.
Решение. Имаме
$$a=2^{2020}-2^{2019}=2^{2017}(2^3-2^2)=4\cdot 2^{2017},$$
$$b=2^{2018}+2^{2017}=2^{2017}(2+1)=3\cdot 2^{2017} \text{ и}$$
$$c=2^{2019}+2^{2017}=2^{2017}(2^2+1)=5\cdot 2^{2017}.$$
Според тоа,
$$a^2+b^2=(4\cdot 2^{2017})^2+(3\cdot 2^{2017})^2=(4^2+3^2)\cdot(2^{2017})^2$$
$$=25\cdot(2^{2017})^2=5^2\cdot(2^{2017})^2=(5\cdot 2^{2017})^2=c^2,$$
па од обратната Питагорова теорема следува дека даденият триаголник е правоаголен.

2. Во триаголник со периметар $210\,cm$ должините на страните се однесуваат како $3:5:7$. Определи ги должините на страните на овој триаголник. Дали триаголникот е правоаголен?
Решение. Од $a:b:c=3:5:7$ следува дека постои реален број k таков што $a=3k, b=5k$ и $c=7k$. Според тоа, $3k+5k+7k=210$, од каде добиваме $k=14$. Значи, должините на страните на триаголникот се $a=42\,cm, b=70\,cm$ и $c=98\,cm$.
Имаме, $a^2+b^2=34k^2\neq 49k^2=c^2$, па затоа овој триаголник не е правоаголен.

3. Во правоаголен триаголник должината на тежишната линија која соодветствува на хипотенузата е $20\,cm$. Од средината на хипотенузата повлечена е нормала на хипотенузата до пресекот со катетата.

Должината на оваа нормала е еднаква на $15\,cm$. Определи ги должините на катетите на триаголникот.

Решение. Нека D е средината на хипотенузата AB во правоаголниот триаголник ABC и E е пресекот на дадената нормала со катетата AC (цртеж десно).



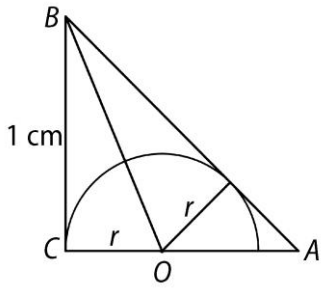
Точката D е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC, па затоа $\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{BD}=20\,cm$. Според тоа,

$$\overline{AE}=\sqrt{20^2+15^2}=\sqrt{625}=25\,cm.$$

Понатаму, правоаголните триаголници ABC и AED имаат заеднички остар агол, па затоа се слични. Оттука следува $\overline{AE}:\overline{AD}=\overline{AB}:\overline{AC}$, т.е. $25:20=40:\overline{AC}$, па затоа $\overline{AC}=32\,cm$. Потоа од $\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{AB}:\overline{BC}$, добиваме $\overline{BC}=24\,cm$.

4. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC со должини на катети $\overline{AC}=\overline{BC}=1\,cm$ впишана е полукружница k со центар O на катетата AC. Полукружницата k минува низ темето C и ја допира хипотенузата AC. Определи го радиусот r на полукружницата k.

Решение. Јасно, хипотенузата на триаголникот е $\overline{AB}=\sqrt{2}\,cm$. Имаме,



$$P_{\triangle AOB}=\frac{\overline{AB}\cdot r}{2}=\frac{r\sqrt{2}}{2},$$

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\ \text{ и }\ P_{\triangle OCB}=\frac{r}{2}.$$

Сега, заменуваме во

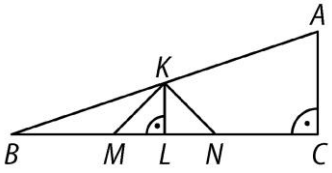
$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AOB}+P_{\triangle OCB}$$

и добиваме $\frac{1}{2}=\frac{r}{2}+\frac{r\sqrt{2}}{2}$, од каде наоѓаме

$$r=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\,cm.$$

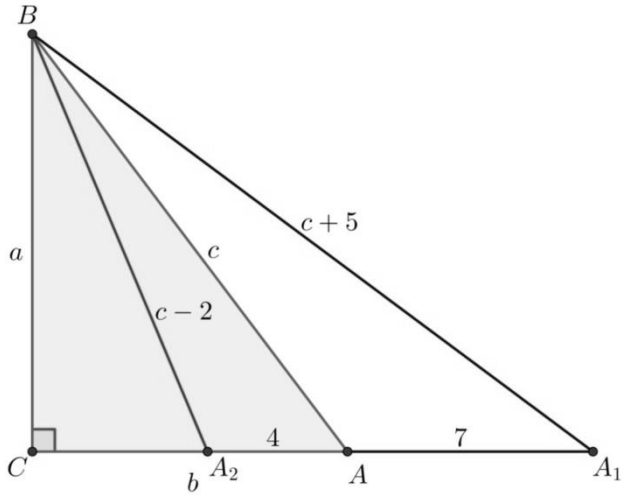
5. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C, $\overline{BC}=3\overline{AC}$. Нека M и N се точки на катетата BC такви што $\overline{BM}=\overline{MN}=\overline{NC}$ и K е средина на хипотенузата AB. Определи го $\measuredangle MKN$.

Решение. Нека L е средина на отсечката BC. Тогаш отсечката KL е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $KL \perp BC$ и $\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{ML} = \overline{LN}$. Според тоа, триаголниците LMK и LNK се рамнокраки правоаголни, па затоа $\measuredangle MKL = \measuredangle NKL = 45^\circ$ и $\measuredangle MKN = 90^\circ$.



6. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Ако должината на едната катета се зголеми за $7\,cm$, а другата остане иста, тогаш хипотенузата на новиот триагоник ќе биде $5\,cm$ подолга од хипотенузата на почетниот триаголник. Ако должината на истата катета во почетниот триаголник се намали за $4\,cm$, а другата катета остане иста, тогаш новата хипотенуза ќе биде за $2\,cm$ пократка од хипотенузата на почетниот триаголник. Определи ја плоштината на почетниот триаголник ABC.

Решение. Нека a,b,c се стандардните ознаки за страните на правоаголниот триаголник ABC, види цртеж. Од условот на задачата со примена на Питагоровата теорема ги добиваме равенките



$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

$$a^2 + (b+7)^2 = (c+5)^2, \tag{2}$$

$$a^2 + (b-4)^2 = (c-2)^2. \tag{3}$$

Ако од (1) ја одземеме (2), па од (1) ја одземеме (3), соодветно, по

средувањето ги добиваме равенките

$$7b-5c=-12, \quad (4)$$

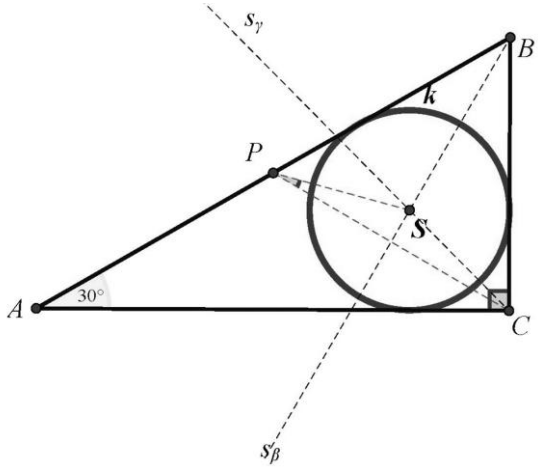
$$-2b+c=-3. \quad (5)$$

Сега, од системот равенки (4) и (5) добиваме $b=9\,cm$ и $c=15\,cm$. Според тоа, $a=\sqrt{15^2-9^2}=12\,cm$.

Конечно, плоштината на триаголникот ABC е $P=\frac{ab}{2}=54\,cm^2$.

7. Едниот остар агол на правоаголниот триаголник ABC е еднаков на 30°. Ако P е средината на хипотенузата AB, а S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC, определи го $\measuredangle SPC$.

Решение. Од условот на здачата следува $\measuredangle ACB=90^\circ$, $\measuredangle BAC=30^\circ$, $\measuredangle CBA=60^\circ$ и $\measuredangle ACS=\measuredangle SCB=45^\circ$, види цртеж.



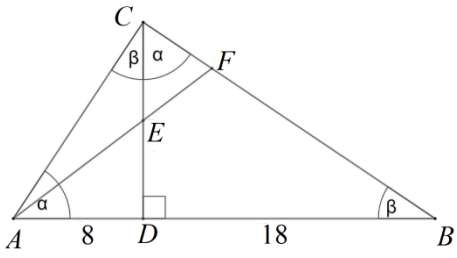
Точката P е средина на хипотенузата AB, што значи дека таа е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC, па затоа $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$. Значи, триаголникот PCA е рамнокрак, па затоа важи $\measuredangle ACP=\measuredangle PAC=30^\circ$. Понатаму, $\measuredangle BPC$ е надворешен за триаголникот ACP, од каде следува $\measuredangle BPC=60^\circ$ и како $\overline{PB}=\overline{PC}$, добиваме дека триаголникот BPC е рамностран.

Правата BS е симетрала на $\measuredangle CBP$ на рамностраниот триаголник BPC, па затоа $BS\perp PC$, што значи дека BS е симетрала на страната PC на триаголникот CPB. Последното значи дека $\overline{SP}=\overline{SC}$, т.е. триаголникот SPC е рамнокрак. Според тоа,

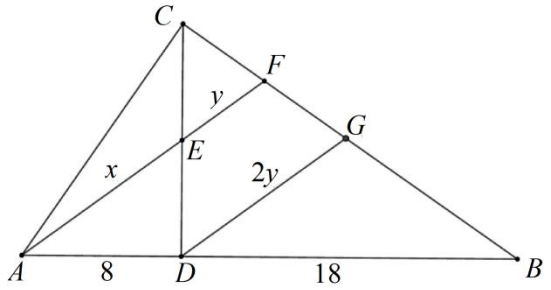
$$\measuredangle SPC = \measuredangle SCP = \measuredangle PCB - \measuredangle SB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

8. Во правоаголниот триаголник ABC висината CD над хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела така што $\overline{AD}=8$ и $\overline{DB}=18$. Нека E е средина на висината CD. Правата AE ја сече катетата BC во точката F. Определи ја должината на отсечката EF.

Решение. Триаголниците ABC, DBC и ADC се правоаголни и имаат по еден еднаков остар агол, па затоа се слични. Да ја означиме со h висината повлечена кон хипотенузата. Тогаш $h+18=8:h$, т.е. $h=12$. Но, E е средина на висината, па затоа $\overline{DE}=6$.



Да означиме $\overline{AE}=x$. Од Питагоровата теорема следува $x^2=8^2+6^2$, па затоа $x=10$. Да означиме $\overline{EF}=y$ и низ D да повлечеме права паралелна на правата AF, која страната BC ја сече во точката G. Триаголниците CEF и CDG се слични, па затоа од $\overline{DC}=2\overline{EC}$ следува $\overline{DG}=2\overline{EF}=2y$. Понатаму, $AF \| DG$, па затоа и триаголниците ABF и DBG се слични, од каде следува



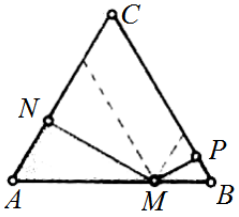
$$2y:(x+y)=18:(8+18),$$
$$2y:(10+y)=18:26,$$
$$52y=180+18y,$$
$$y=\frac{90}{17}.$$

Конечно, $\overline{EF}=\frac{90}{17}$.

9. Од точката M која ја дели страната AB на рамностраниот триаголник ABC на делови од $6\,cm$ и $2\,cm$ се повлечени нормали на другите две страни на триаголникот. Определи го растојанието на темето C

до овие нормали.

Решение. Нека се N и P подножјата на нормалите повлечени од точката M соодветно на страните AC и BC (цртеж десно). Триаголниците AMN и MBP имаат внатрешни агли еднакви на $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$, па затоа тие се половини од соодветните рамностранитриаголници со должини на страни $6\,cm$ и $2\,cm$. Понатаму, AN и BP се половинки од овие страни, па затоа $\overline{AN}=3\,cm$ и $\overline{BP}=1\,cm$, од каде добиваме дека $\overline{CN}=5\,cm$ и $\overline{CP}=7\,cm$.

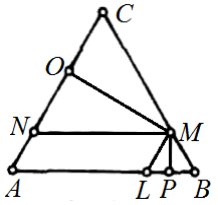


10. Точката M ја дели страната BC на рамностраниот триаголник ABC во однос 1:3.

а) Пресметај ги должините на нормалите повлечени од точката M кон страните AB и AC на триаголникот ABC.

б) Пресметај ги односите во кои овие нормали ги делат страните AB и AC.

Решение. Имаме $\overline{BM}:\overline{MC}=1:3$, па затоа важи $\overline{BM}=\frac{a}{4}$ и $\overline{MC}=\frac{2a}{4}$ (цртеж десно). Земаме $MN\parallel AB$, $LM\parallel AC$, $MP\perp AB$ и $MO\perp AC$.



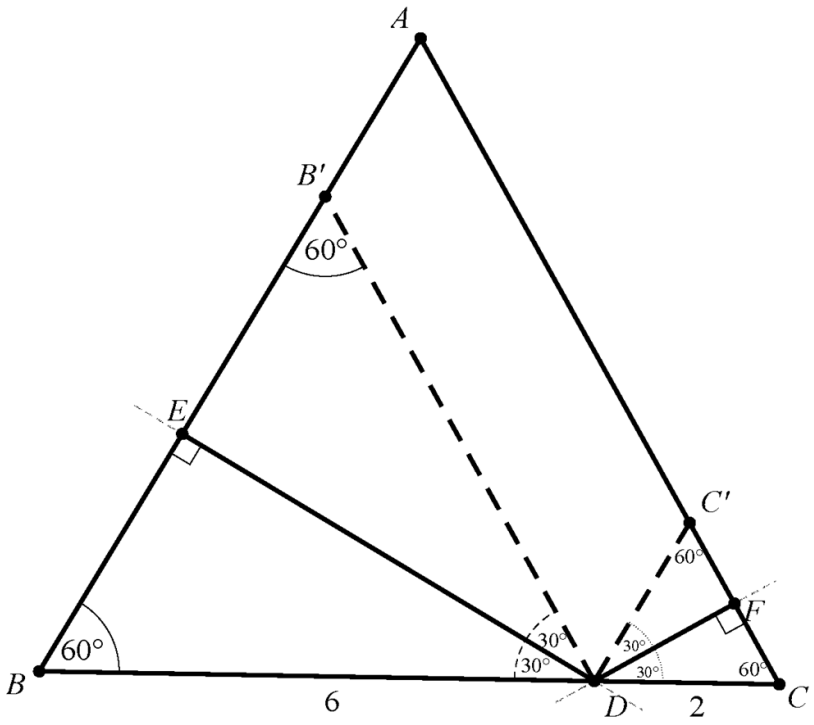
а) MP е висина на рамностраниот триаголник BML, па затоа $\overline{MP}=\frac{\overline{BM}\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{8}$. MO е висина на рамностраниот триаголник CMN, па затоа $\overline{MO}=\frac{\overline{MC}\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

б) Точката P е средина на $\overline{BL}=\frac{a}{4}$, па затоа $\overline{BP}=\frac{a}{8}$. Според тоа, $\overline{AP}:\overline{PB}=7:1$. Аналогно се добива дека $\overline{AO}:\overline{OC}=5:3$.

11. Даден е рамностран триаголник ABC со страна $8\,cm$ и точка D на страната BC таква што $\overline{DC}=2\,cm$. Од точката D се повлечени нормали DE и DF соодветно на страните AB и AC. Определи ги должините на отсечките BE и CF.

Решение. Имаме $\overline{DC}=2\,cm$ и $\overline{BC}=6\,cm$. Понатаму, $\measuredangle DFC=90^\circ$ и $\measuredangle ADB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Сега, ако C' е точката симетрична на темето

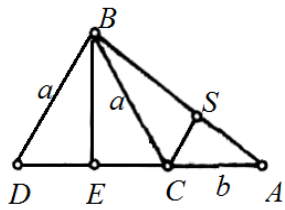
C во однос на точката F, тогаш триаголникот DCC' е рамностран (види цртеж). Според тоа, $\overline{CC'}=\overline{DC}=2\,cm$, од каде добиваме дека $\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{CC'}=1\,cm$.



Аналогно се докажува дека $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=3\,cm$.

12. Должините на две страни на еден триаголник се a и b, а аголот меѓу нив е еднаков на 120°. Определи ги плоштината на овој триаголник и должината на симетралата повлечена во дадениот агол.

Решение. Нека CS е симетралата во аголот од 120° на триаголникот ABC (цртеж десно). Ја продолжуваме страната AC на дадениот триаголник преку темето C за отсечка $\overline{CD}=\overline{BC}=a$. Бидејќи $\measuredangle BCD=60^\circ$, заклучуваме дека триаголникот BCD рамностран. Сега, од $\measuredangle BDC=\measuredangle SCA$ следува дека триаголниците ABD и ASC се слични (имаат заеднички агол во темето A). Затоа $\overline{SC}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{AD}$, т.е. $\overline{SC}:a=b:(a+b)$, од



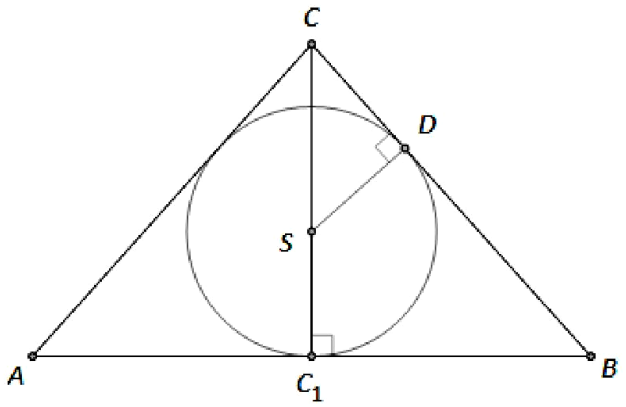
каде добиваме $\overline{SC}=\frac{ab}{a+b}$.

Висината BE на триаголникот ABC повлечена од темето B е еднаква на висината на рамностраниот триаголник BDC, т.е. $\overline{BE}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Според тоа, плоштината на триаголникот ABC е $P=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BE}}{2}=\frac{ab\sqrt{3}}{2}$.

13. Должините на основата и кракот на рамнокрак триаголник се однесуваат како $4:3$. Должината на висината повлечена кон основата е $20\,cm$. Определи ја должината на радиусот на впишаната кружница во овој триаголник.

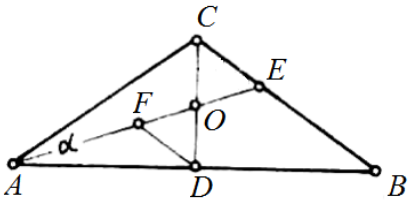
Решение. Нека a е должината на основата, b должината на кракот и r должината на радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, C_1 е подножјето на висината повлечена кон основата AB и D е допирната точка на кракот BC и впишаната кружница (види цртеж). Триаголниците CC_1B и CDS се правоаголни и имаат еден заеднички остар агол, па затоа тие се слични. Според тоа, $\overline{C_1B}:\overline{BC}=\overline{SD}:\overline{SC}$.



Понатаму, $\overline{C_1B}=\frac{a}{2},\overline{SC}=20-r$, па затоа $\frac{a}{2}:b=r:(20-r)$ и како $a:b=4:3$, добиваме $2:3=r:(20-r)$, од каде наоѓаме $r=8\,cm$.

14. Даден е рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 108°. Докажи дека висината која соодветствува на основата на овој триаголник е еднаква на половина од должината на симетралата на аголот при основата, сметајќи ја должината на симетралата на аголот од темето до пресекот со спротивната страна.

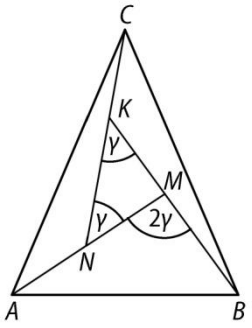
Решение. Нека аголот при темето C е еднаков на 108° (цртеж десно). Висината во C воедно е и симетрала на аголот во темето C и симетрала на страната AB.



Нека AE е симетралата на аголот $\alpha = 36^\circ$ и нека O е пресечната точка на отсечките AE и CD. Имаме $\measuredangle AEC = 180^\circ - 18^\circ - 108^\circ = 54^\circ$, па како $\measuredangle OCE = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = 54^\circ$, заклучуваме дека триаголникот OCE е рамнокрак и дека $\overline{OC} = \overline{OE}$. Конструирама отсечка $DF \parallel BC$. Аглите на триаголникот OFD се еднакви на соодветните агли на триаголникот OCE, па затоа тој е рамнокрак. Според тоа, $\overline{OD} = \overline{OF}$, па затоа $\overline{CD} = \overline{EF}$. Но, во триаголникот ABE отсечката DF е средна линија, па затоа $\overline{AE} = 2\overline{EF}$, од каде следува $\overline{AE} = 2\overline{CD}$, што и требаше да се докаже.

15. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC} = \overline{BC})$ е дадена точка M таква што $\measuredangle AMB = 2\measuredangle ACB$. На отсечката AM е избрана точка N таква што $\measuredangle CNM = \measuredangle ACB$. Докажи дека $\overline{CN} = \overline{BM} + \overline{MN}$.

Решение. Нека K е пресечната точка на правата BM и отсечката CN (цртеж десно). Тогаш $\measuredangle KNM + \measuredangle NKM = \measuredangle NMB$, па $\triangle KMN$ е рамнокрак. Затоа $\overline{MN} = \overline{MK}$ и $\measuredangle CKB = \measuredangle CNA$ (надворешни агли на рамнокрак триаголник). Ако означиме $\measuredangle BCK = x$, тогаш



$$\measuredangle CAN = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - (\gamma - x) = x,$$

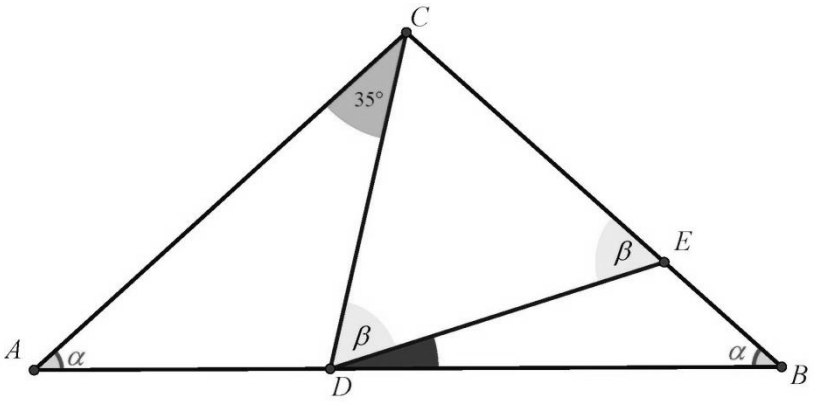
па затоа $\measuredangle BCK = \measuredangle CAN$. Од еднаквоста на два пара агли на триаголниците BCK и CAN следува еднаквоста и на третиот пар, па овие триаголници се складни (АСА). Конечно, од оваа складност следува

$$\overline{CN} = \overline{BK} = \overline{BM} + \overline{MK} = \overline{BM} + \overline{MN}.$$

16. Даден е тапоаголен рамнокрак триаголник ABC основа AB. На основата AB е дадена точка D таква што $\measuredangle ACD = 35^\circ$, а на кракот

BC е дадена точка E таква што $\overline{CE}=\overline{CD}$. Определи го $\measuredangle BDE$.

Решение. Јасно, аголот при врвот е тап агол, па затоа $\measuredangle ACB>35^\circ$.



Понатаму, $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=\alpha$. Триаголникот CDE исто така е рамнокрак, бидејќи $\overline{CE}=\overline{CD}$. Затоа $\measuredangle EDC=\measuredangle DEC=\beta$. Сега,

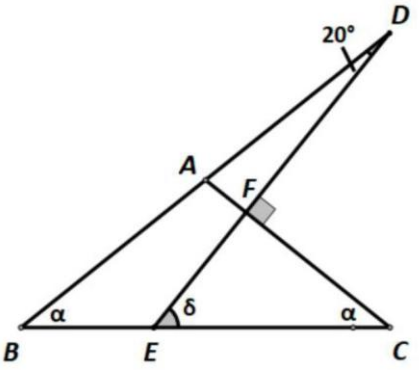
$$\beta=\measuredangle BDE+\alpha \text{ и } \beta+\measuredangle BDE=\alpha+35^\circ.$$

Ако од првата равенка замениме за β во втората равенка добиваме

$$\measuredangle BDE+\alpha+\measuredangle BDE=\alpha+35^\circ, \text{ т.е. } 2\measuredangle BDE=35^\circ,$$

па затоа $\measuredangle BDE=17^\circ 30'$.

17. На цртежот десно е даден рамнокрак триаголник ABC со основа BC и $AC\perp ED$. Определи го аголот δ.

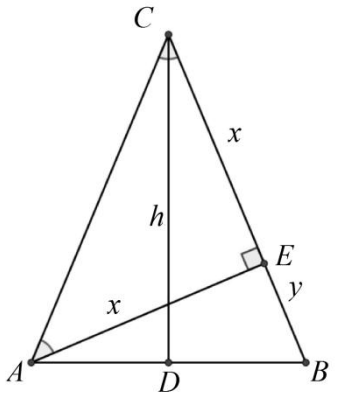


Решение. Триаголникот ECF е правоаголен, па затоа точно е равенството $\alpha+\delta=90^\circ$. Понатаму, δ е надворешен агол за триаголникот BED, па затоа важи $\delta=\alpha+20^\circ$. Конечно, од последните две равенства следува $2\alpha+20^\circ=90^\circ$, па затоа $\alpha=35^\circ$, односно $\delta=55^\circ$.

18. Висината на основата AB на рамнокрак триаголник ABC има должина $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, а аголот при врвот C е еднаков на 45°. Определи ја

должината на висината на кракот на овој триаголник.

Решение. Со D да го означиме подножјето на висината повлечена од врвот C, а со E подножјето на висината повлечена од темето A (цртеж десно). Тогаш $h=\overline{CD}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Триаголникот AEC е правоаголен и како $\measuredangle ACE=45^\circ$, добиваме $\measuredangle CAE=45^\circ$. Според тоа, триаголникот AEC е рамнокрак правоаголен, па затоа $\overline{CE}=\overline{AE}=x$. Сега, од Питагоровата теорема следува



$$\overline{AC}=\sqrt{x^2+x^2}=x\sqrt{2}.$$

Нека $\overline{BE}=y$. Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа $x+y=x\sqrt{2}$, т.е. $y=x(\sqrt{2}-1)$. Триаголникот ABE е правоаголен, па затоа $\overline{AB}^2=x^2+y^2$. Од друга страна

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+x^2(\sqrt{2}-1)^2\\&=x^2+x^2(2-2\sqrt{2}+1)\\&=x^2+x^2(3-2\sqrt{2})\\&=x^2(4-2\sqrt{2}),\end{aligned}$$

па затоа

$$\overline{AB}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2(4-2\sqrt{2})}=x\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Плоштината на триаголникот ABC е $P=\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}=\frac{\overline{BC}\cdot x}{2}$, па затоа

$$\begin{aligned}&\overline{AB}\cdot h=\overline{BC}\cdot x,\\&x\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}=x\sqrt{2}\cdot x,\\&x=\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}},\\&x=\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

19. Даден е триаголник во кој едниот негов агол е за 20% помал од другиот, а за $33\frac{1}{3}\%$ поголем од третиот. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Аглите на триаголникот да ги означиме со α,β,γ. Според условот на заадачата имаме $\alpha=\frac{4}{5}\beta$ и $\alpha=\frac{4}{3}\gamma$, односно $\beta=\frac{5}{4}\alpha$ и $\gamma=\frac{3}{4}\alpha$. Но збирот на внатрешните агли на триаголник е еднаков на 180°, па затоа $\alpha+\frac{3}{4}\alpha+\frac{5}{4}\alpha=180^\circ$, од каде следува $\alpha=60^\circ$. Значи, $\beta=\frac{5}{4}\cdot 60^\circ=75^\circ$ и $\gamma=\frac{3}{4}\cdot 60^\circ=45^\circ$.

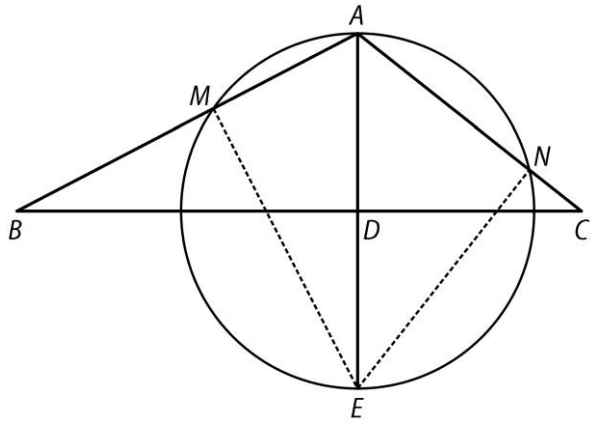
20. Точките A,B и C ја делат кружницата на три лаци чии должини се однесуваат како $3:4:5$. Определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC.

Решение. Нека α,β и γ се внатрешните агли на триаголникот ABC. Од условот на задачата следува $\alpha:\beta:\gamma=3:4:5$, па затоа $\alpha=3t,\beta=4t$ и $\gamma=5t$, за некој t. Но, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, па затоа $3t+4t+5t=180^\circ$, од каде добиваме $t=15^\circ$. Конечно, $\alpha=45^\circ,\beta=60^\circ$ и $\gamma=75^\circ$.

21. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето A. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A. Кружница $k(D,\overline{AD})$ по втор пат ги сече правите AB и AC во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{AB}\cdot\overline{AM}=\overline{AC}\cdot\overline{AN}$.

Решение. Нека E е втората пресечна точка на k со правата AD (AE е дијаметар на k). Правоаголните триаголници ABD и AEM се слични (заеднички остар агол во темето A), па затоа $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AM}}$, односно

$$\overline{AB}\cdot\overline{AM}=\overline{AD}\cdot\overline{AE}. \qquad (1)$$



На потополно ист начи, од сличноста на триаголниците ACD и AEN следува

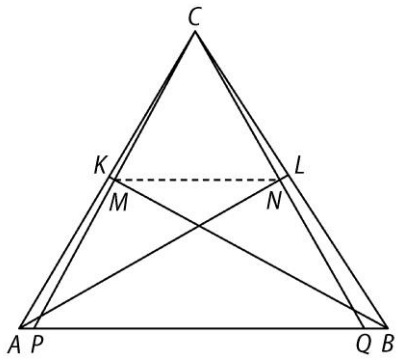
$$\overline{AC}\cdot\overline{AN}=\overline{AD}\cdot\overline{AE}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува равенството $\overline{AB}\cdot\overline{AM}=\overline{AC}\cdot\overline{AN}$.

22. Даден е триаголник $ABC:\overline{AB}=125\,cm,\ \overline{AC}=117\,cm,\ \overline{BC}=120\,cm$. Симетралата на внатрешниот агол во темето A ја сече страната BC во точката L, а симетралата на внатрешниот агол во темето B ја сече AC во точката K. Нека M и N се подножјата на нормалите повлечени од темето C на BK и AL, соодветно. Определи ја должината на отсечката MN.

Решение. Нека полуправите CM и CN ја сечат основата AB во точките P и Q, соодветно. Триаголниците CPB и CQA се рамнокраки, бидејќи $\overline{CP}=\overline{PB}$ и $\overline{CQ}=\overline{QA}$. Затоа важи

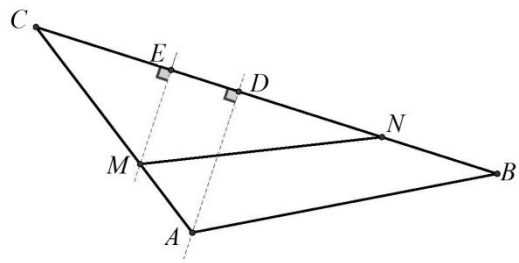
$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\overline{BP}+\overline{AQ}-\overline{AB}\\&=\overline{BC}+\overline{AC}-\overline{AB}=112\,cm.\end{aligned}$$



Точките M и N се средини на отсечките CP и CQ, соодветно, па затоа MN е средна линија на триаголникот PQC,т.е. $\overline{MN}=56\,cm$.

23. Даден е триаголник ABC. На страните AC и BC на $\triangle ABC$ се означени точки M и N такви што $\overline{AM}:\overline{MC}=1:m$ и $\overline{BN}:\overline{NC}=1:n$. Определи ги природните броеви m и n за кои важи $P_{\triangle ABC}:P_{\triangle MNC}=2:1$.

Решение. Нека AD и ME се соодветно висините на $\triangle ABC$ и $\triangle MNC$ (види цртеж). Триаголниците ADC и MEC се правоаголни и имаат заеднички оста агол, па затоа се слични, т.е. $\overline{AC}:\overline{MC}=\overline{AD}:\overline{ME}$.Но според условот на здачата $\overline{AM}:\overline{MC}=1:m$, па лесно се добива дека $\overline{AD}:\overline{ME}=(1+m):m$. Понатаму, $\overline{BN}:\overline{NC}=1:n$,



од каде лесно се добива дека $\overline{BC}:\overline{NC}=(1+n):n$.

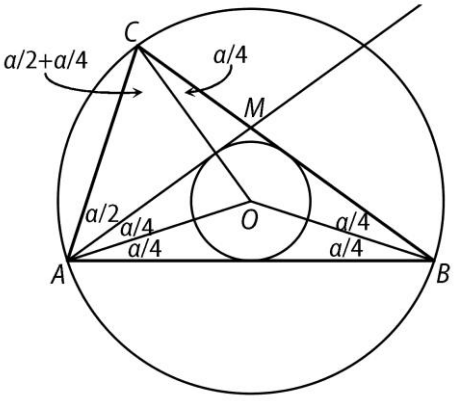
Имаме $P_{\triangle ABC}:P_{\triangle MNC}=2:1$, па затоа $\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2}:\frac{\overline{NC}\cdot\overline{ME}}{2}=2:1$, од каде добиваме $\frac{\overline{BC}}{\overline{NC}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{ME}}=2$. Затоа важи

$$\frac{n+1}{n}\cdot\frac{m+1}{m}=2,$$
$$mn-m-n=1,$$
$$(m-1)(n-1)=2.$$

Но, m и n се природни броеви, па решенија на последната равенка се $(m,n)=(2,3)$ и $(m,n)=(3,2)$.

24. Нека M е пресекот на симетралата на внатрешниот агол во темето A и страната BC на триаголникот ABC. Ако центарот на впишаната кружница на триаголникот ABM е истовремено и центар на опишаната кружница на триаголникот ABC, определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Нека α,β,γ се аглите и O е центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC. Бидејќи AM е симетрала на аголот α важи $\sphericalangle CAM=\sphericalangle MAB=\frac{\alpha}{2}$. Понатаму, OA е симетрала на $\sphericalangle MAB$ и затоа $\sphericalangle MAO=\sphericalangle OAB=\frac{\alpha}{4}$. Отсечките OA,OB,OC се радиуси на опишаната кружница на триаголникот ABC, па затоа триаголниците OAB,OBC,OCA се рамнокраки. Оттука добиваме дека



$$\sphericalangle OCA=\sphericalangle OAC=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4} \text{ и } \sphericalangle OAB=\sphericalangle OBA=\sphericalangle OBC=\sphericalangle OCB=\frac{\alpha}{4}.$$

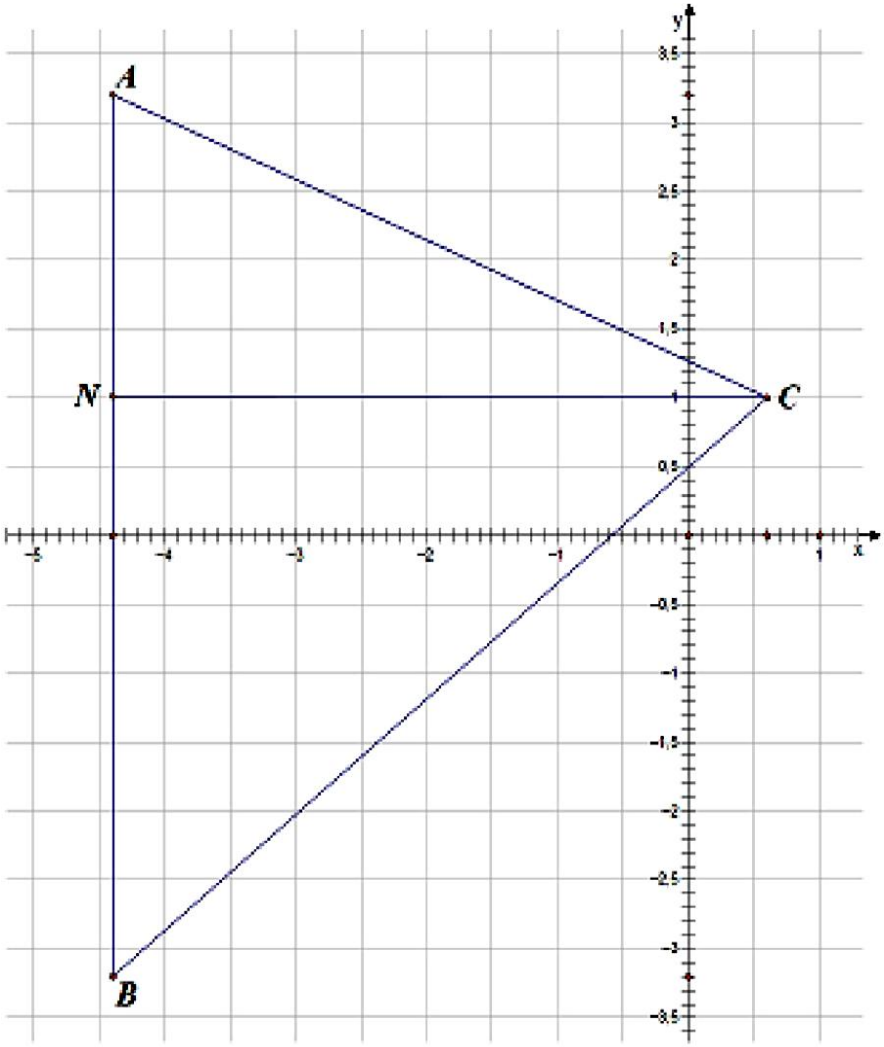
Според тоа, $\beta=\frac{\alpha}{2}$ и $\gamma=\alpha$, па затоа со замена во $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ добиваме дека $\alpha=72^\circ,\beta=36^\circ,\gamma=72^\circ$.

25. Во координатен систем е даден триаголник ABC чии темиња се

$A(-4,4;3,2), C(0,6;1)$ и темето B е осносиметрична слика на темето A во однос на апсцисната оска. Определи ја плоштината на ово триаголник.

Решение. На цртежот во координатен систем е нацртан триаголникот ABC, при што координатите на темето B кое е осносиметрично со темето A во однос на апсцисната оска се $B=(-4,4;-3,2)$. Нека N е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB. Тогаш $\overline{AB}=3,2-(-3,2)=6,4$ и $\overline{CN}=0,6-(-4,4)=5$, па затоа

$$P_{\triangle ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CN}}{2}=\frac{6,4\cdot 5}{2}=16.$$



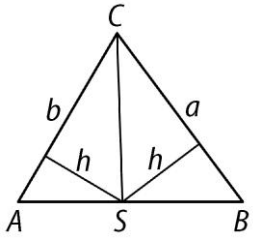
26. Даден е триаголник ABC, $\overline{AB}=14\,cm$, $\overline{BC}=15\,cm$ и $\overline{CA}=13\,cm$.

а) Определи ја плоштината на овој триаголник.

б) Нека S е точка на страната AB која е еднакво оддалечена од страните AC и BC. Определи го растојанието од S до страните AC и BC.

Решение. а) За полупериметарот на триаголникот ABC добиваме $s=\frac{14+15+13}{2}=21\,cm$. Сега, со примена на Хероновата формула добиваме

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{21\cdot(21-14)\cdot(21-15)\cdot(21-13)}\\&=84\,cm^2.\end{aligned}$$



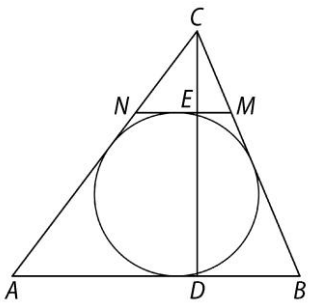
б) Со h да го означиме растојанието од точката S до страните AC и BC. Тогаш

$$84=P_{ABC}=P_{ASC}+P_{BSC}=\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=14h,\ \text{т.е. } h=6\,cm.$$

27. Во триаголник ABC е впишана кружница. Тангентата на оваа кружница паралелна со страната AB ги сече страните BC и AC во точките M и N. Определи ја должината на отсечката MN ако должините на страните на триаголникот ABC се $\overline{AB}=14\,cm$, $\overline{BC}=13\,cm$ и $\overline{CA}=15\,cm$.

Решение. Користејќи ја Хероновата формула за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}\\&=84\,cm^2.\end{aligned}$$



Сега, за висината CD која соодветствува на страната AB добиваме $\overline{CD}=\frac{2P}{AB}=12\,cm$. Со r да го означиме радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Имаме $P=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2}r$, па затоа $84=\frac{13+14+15}{2}r$, од каде добиваме $r=4\,cm$. Според тоа, за висината CE на триаголникот MNC добиваме $\overline{CE}=\overline{CD}-\overline{ED}=\overline{CD}-2r=4\,cm$. Конечно, три-

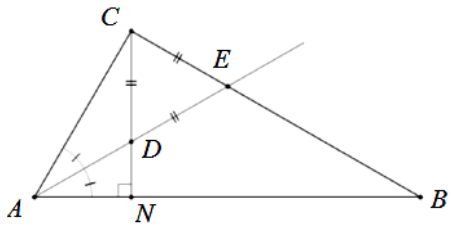
аголниците ABC и NMC се слични, па затоа $\overline{AB}:\overline{NM}=\overline{CD}:\overline{CE}$, од каде добиваме $\overline{NM}=\frac{14}{3}\,cm$.

28. Даден е триаголник ABC. Нека N е подножјето на висината повлечена од темето C. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече висината CN во точката D, а страната BC ја сече во точката E. Триаголникот DEC е рамностран триагоник со плоштина $4\sqrt{3}\,cm^2$. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Нека должината на страната на рамностраниот триаголник DEC е x. Тогаш неговата плоштина е

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3},$$

од каде добиваме $x=4\,cm$.



Триаголникот DEC е рамностран, па затоа важи

$$\measuredangle CDE=\measuredangle DEC=\measuredangle ECD=60^\circ,$$

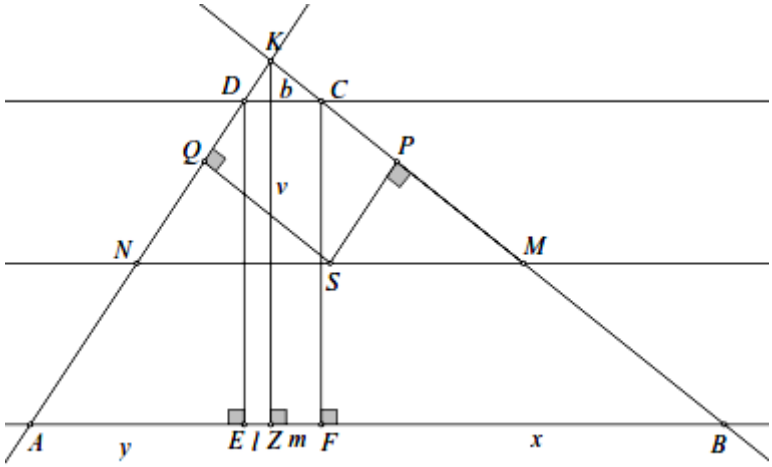
од што следува $\measuredangle CBN=30^\circ$. Понатаму, $\measuredangle EDC$ и $\measuredangle ADN$ се накрсни, па затоа важи $\measuredangle CDE=\measuredangle ADN=60^\circ$. Според тоа, $\measuredangle NAD=30^\circ$, што значи $\measuredangle NAC=60^\circ$. Но, тоа значи дека $\measuredangle ACN=30^\circ$,т.е.триаголникот ACD е рамнокрак и е составен од две половини на рамностран триаголник со должина на страна $\overline{CD}=x$. Понатаму, за триаголникот ABE имаме $\measuredangle EBA=\measuredangle BAE=30^\circ$, па затоа тој е рамнокрак и е составен од две половини на рамностран триаголник со должина на страна $\overline{AE}=2x$. Конечно, за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$\begin{aligned}P&=P_{ABE}+P_{ECD}+P_{CAD}\\&=\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4}+\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\\&=\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}\,cm^2.\end{aligned}$$

29. Нека ABK е триаголник со остри агли во темињата A и B. На страната KA се избрани точки D и N, а на страната KB точки C и M такви што правите DC, NM, AB се паралелни. Правите AB и DC се од правата NM оддалечени $4\,cm$. Средината на отсечката NM е од

правата AK оддалечена $4\,cm$, а од правата BK е оддалечена $3\,cm$. Ако плоштината на четириаголникот $ABCD$ е еднаква на $80\,cm^2$, определи ја плоштината на триаголникот ABK.

Решение. Нека Q и P се подножјата на нормалите повлечени од точката S на правите AK и BK, соодветно, види цртеж. Тогаш $\overline{SP}=3\,cm$ и $\overline{SQ}=4\,cm$. Бидејќи $AB\|CD$, четириаголникот $ABCD$ е трапез со основи AB и CD. Плоштината на овој трапез е $P=\frac{a+b}{2}v$, каде $v=4+4=8\,cm$, па затоа $80=8\cdot\frac{a+b}{2}$, т.е. $a+b=20$. Значи, $s=\frac{a+b}{2}=10\,cm$.



a

Правоаголните триаголници SMP и AQN имаат хипотенуза $\frac{s}{2}=4\,cm$. Сега, од Питагоровата теорема следува $\overline{MP}=4\,cm$ и $\overline{NQ}=3\,cm$. Нека E и F се подножјата на висините на трапезот повлечени од темињата D и C, соодветно, а Z е подножјето на висината на триаголникот ABK повлечена од темето K. Да означиме $\overline{EZ}=l,\overline{ZF}=m,$ $\overline{AE}=y$ и $\overline{FB}=x$. За правоаголните триаголници SMP и BCF важи $\measuredangle PMS=\measuredangle CBF$ (агли на трансферзала), па затоа тие се слични. Од оваа сличност следува

$$\overline{SP}:\overline{MP}=\overline{CF}:\overline{BF},$$

односно $3:4=8:x$, па затоа $x=\frac{32}{3}$. На ист начин од триаголниците NQS и AED следува дека

$$\overline{SQ}:\overline{QN}=\overline{DE}:\overline{AE},$$

односно $4:3=8:y$, па затоа $y=6$. Бидејќи четириаголникот $CDEF$ има заемнонормални соседни страни, тој е правоаголник, што значи $\overline{EF}=\overline{CD}$, па затоа $x+y=a-b$. Сега со решавање на системот

$$a+b=20 \text{ и } a-b=\frac{32}{3}+6,$$

добиваме $a=\frac{55}{3}cm$ и $b=\frac{5}{3}cm$.

Триаголниците AZK и CFB се слични, па затоа

$$v:8=(6+l):6,$$

од каде добиваме $v=8+\frac{4}{3}l$. Триаголниците ZBK и FBC се слични, па затоа

$$v:8=(m+\frac{32}{3}):\frac{32}{3},$$

од каде добиваме $v=\frac{3}{4}m+8$. Сега, бидејќи

$$m+l=a-x-y, \text{ т.е. } m+l=\frac{5}{3},$$

го добиваме системот

$$8+\frac{4}{3}l=\frac{3}{4}m+8,\ m+l=\frac{5}{3}$$

чие решение е $l=\frac{3}{5}, v=\frac{44}{5}$.

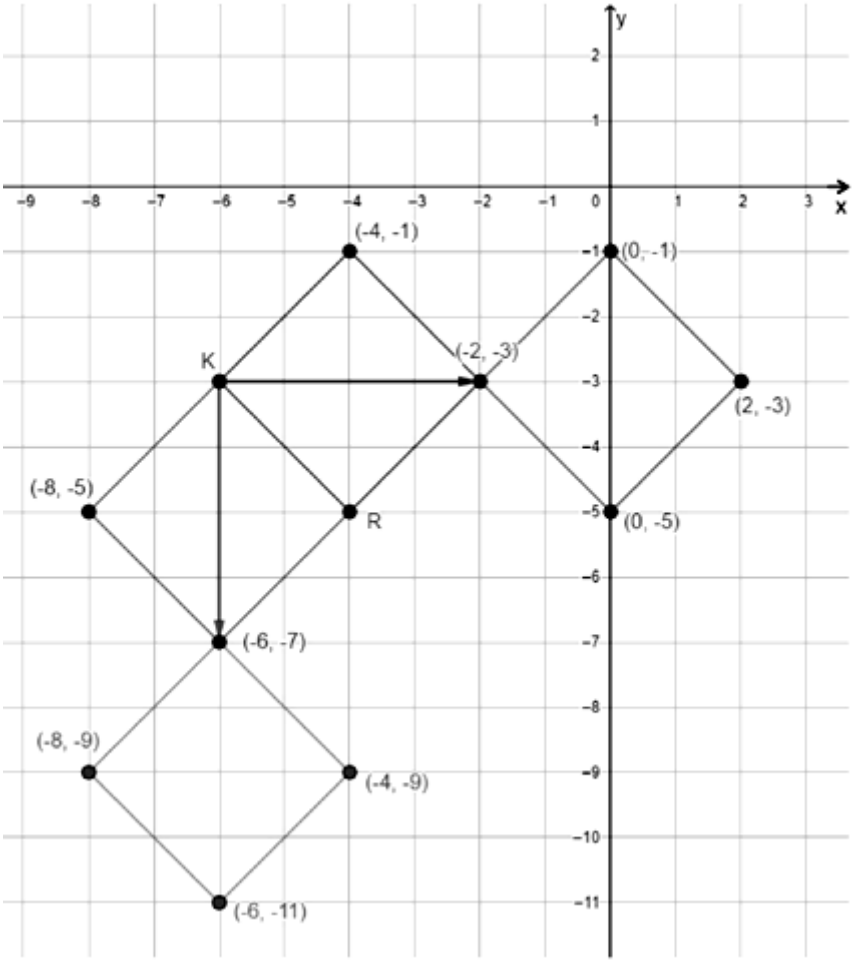
Конечно, за плоштината на триаголникот ABK имаме

$$P=\frac{av}{2}=\frac{\frac{55}{3}.\frac{44}{5}}{2}=\frac{242}{3}cm^2.$$

V.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

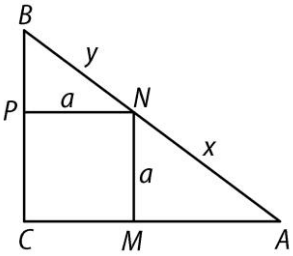
30. Точките $K(-6,-3)$ и $R(-4,-5)$ се соседни темиња на квадрат. Определи ги координатите на другите две темиња, а потоа транслатирај го така добиениот квадрат за векторот на дијагоналата на квадратот чија почетна точка е K. На секоја добиена точка определи ги координатите.

Решение. Јасно, постојат два квадрати за кои точките K и R се соседни темиња. Координатите на нивните темиња се наоѓаат едноставно, ако се земе предвид дека KR е дијагонала на 2×2 квадрат во координатната мрежа. Така координатите на другите две темиња на првиот квадрат се $(-4,-1)$ и $(-2,-3)$, а координатите на другите две темиња на вториот квадрат се $(-8,-5)$ и $(-6,-7)$, види цртеж.



На горниот цртеж се прикажани квадратите кои се добиваат со саканите транслации.

31. Во правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AC}=4\,cm$ и $\overline{BC}=3\,cm$ е впишан квадрат чии две страни лежат на катетите, а едно теме на хипотенузата. Определи ги должините на отсечките на кои темето на квадратот ја дели хипотенузата.

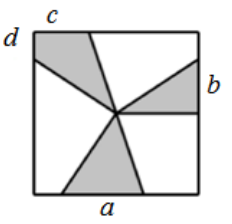


Решение. Јасно, $\overline{AB}=5\,cm$. Од сличноста на триаголниците NMA и BCA, односно BPN и BCA, цртеж десно, добиваме

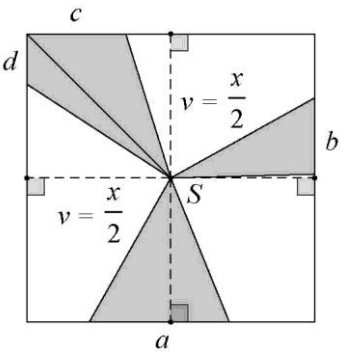
$$\frac{x}{a}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{5}{3} \text{ и } \frac{y}{a}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{5}{4},$$

па затоа $x=\frac{5}{3}a$ и $y=\frac{5}{4}a$. Но, $x+y=5$, па затоа $\frac{5}{3}a+\frac{5}{4}a=5$, т.е. $a=\frac{12}{7}\,cm$. Конечно, $x=\frac{5}{3}a=\frac{20}{7}$, $y=\frac{5}{4}a=\frac{15}{7}$.

32. Во квадрат се осенчени три дела како на цртежот десно. Заедничката точка на три осенчени дела е еднакво оддалечена од сите страни на квадратот, а вкупната плоштина на осенчените делови е еднаква на третина од плоштината на квадратот. Колкав дел од периметарот на квадратот е збирот $a+b+c+d$?



Решение. Нека S е заедничката точка на осенчените делови. Осенчениот четириаголник да го поделиме на два триаголника (цртеж десно). Сега, ако страната на квадратот е x, тогаш висината на секој од четирите триаголници е еднаква на $\frac{x}{2}$, па затоа за плоштината на осенчениот дел од квадратот добиваме

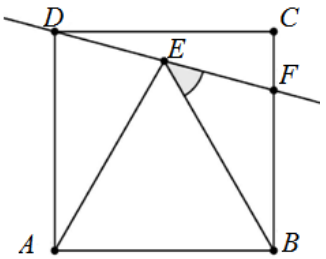


$$\frac{1}{2}a\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}b\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}c\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}d\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{3}x^2,$$

од каде наоѓаме $a+b+c+d=\frac{4x}{3}$, односно $a+b+c+d=\frac{L}{3}$, каде со L е означен периметарот на квадратот.

33. Даден е квадрат $ABCD$. Над страната AB е конструиран рамностран триаголник ABE така што точката E е во внатрешноста на квадратот. Правата DE ја сече страната BC во точката F. Определи го $\sphericalangle BEF$.

Решение. Од $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{AE}$ следува дека $\triangle AED$ е рамнокрак. Според тоа,



$$\sphericalangle DEA=\sphericalangle ADE.$$

Понатаму,

$$\sphericalangle EAD=\sphericalangle BAD-\sphericalangle BAE$$
$$=90^\circ-60^\circ=30^\circ.$$

Сега, од $\triangle AED$ следува

$$\sphericalangle DEA=(180^\circ-30^\circ):2=75^\circ.$$

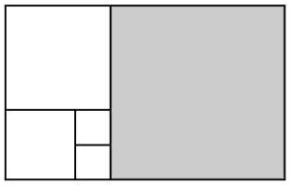
Точките D,E,F се колинеарни, па затоа

$$\sphericalangle DEA+\sphericalangle AEB+\sphericalangle BEF=180^\circ,$$
$$\sphericalangle BEF=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ.$$

34. За колку проценти ќе се промени плоштината на правоаголникот ако едната негова страна се намали за 10%, а другата негова страна се зголеми за 10%.

Решение. Ако a и b се должините на страните на правоаголникот, тогаш неговата плоштина е $P=ab$. Должините на страните на новиот правоаголник се $0,9a$ и $1,1b$, па затоа неговата плоштина ќе биде $P=0,9a\cdot 1,1b=0,99ab$. Според тоа, плоштината ќе се намали за $ab-0,99ab=0,01ab$, што значи дека ќе се намали за $\frac{0,01ab}{ab}\cdot 100=1\%$.

35. Правоаголник е поделен на пет квадрати како на цртежот десно. Определи го процентот на површината на делот од правоаголникот правоаголникот кој е осенчен.



Решение. Ако страните на квадратите, од најголемиот до најмалиот, редоследно ги означиме со a,b,c и d, добиваме $a=b+c, b=c+d$ и $c=2d$, па затоа односот на плоштината на осенчениот квадрат и правоаголникот е

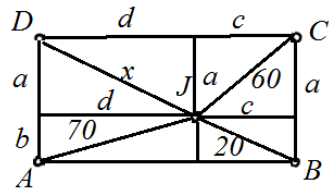
$$\frac{a^2}{a(a+b)}=\frac{a}{a+b}=\frac{b+c}{2b+c}=\frac{2c+d}{3c+2d}=\frac{5d}{8d}=\frac{5}{8}=0,625.$$

Според тоа, плоштината на квадратот е $62,5\%$ од плоштината на

правоаголникот.

36. Во градина во форма на правоаголник $ABCD$ расте јаболкница која од темето A е оддалечена $7o\,m$, од темето B е оддалечена $20\,m$ и од темето C е оддалечена $60\,m$. Колку метри јаболкницата е оддалечена од темето D.

Решение. Нека јаболкницата е во точката J. Од Питагоровата теорема следува



$$x^2=a^2+d^2,\quad a^2=3600-c^2,$$
$$d^2=4900-b^2, c^2=400-b^2.$$

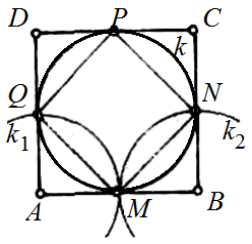
Според тоа,

$$x^2=a^2+d^2=3600-c^2+4900-b^2=3600-400+b^2+4900-b^2=8100$$

од каде добиваме $x=90\,m$. Значи, јаболкницата од темето D е оддалечена $90m$.

37. Во квадрат $ABCD$ со страна a е впишана кружница k им околу темињата A и B се опишани кружници k_1 и k_2 со радиуси $r=\frac{a}{2}$. Пресметај ја плоштината на делот од квадратот кој е во внатрешноста на кружницата k и е надвор од кружниците k_1 и k_2.

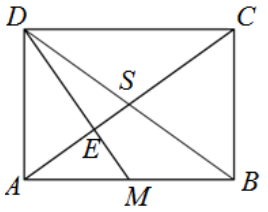
Решение. Кружницата k ги допира страните на квадратот во точките M,N,P,Q, кои се средини на неговите страни (цртеж десно). Бараната плоштина е еднаква на плоштината на квадратот $MNPQ$. Навистина, кружните отсечоци од k над отсечките NP и PQ се складни со кружните отсечоци од k_1 и k_2 на отсечките MN и MQ, а останатиот дел од плоштината е заеднички дел на квадратот $MNPQ$ и дадената криволиниска површина. Од триаголникот AMQ имаме $\overline{MQ}^2=\overline{AM}^2+\overline{AQ}^2$, па затоа $\overline{MQ}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и бараната плоштина е $P=\frac{a^2}{2}$.



38. Во правоаголникот $ABCD$ точката M е средина на отсечката AB, а

точката E е пресек на дијагоналата AC и отсечката DM. Ако $\overline{AB}=\sqrt{2}\,cm$ и $\overline{BC}=1\,cm$, докажи дека $\measuredangle CED$ е прав.

Решение. Од Питагоровата теорема следува $\overline{AC}=\sqrt{3}\,cm$, $\overline{DM}=\frac{\sqrt{6}}{2}\,cm$. Со S да го означиме пресекот на дијагоналите. Тогаш DM и AS се тежишни линии на триаголникот ABD, па затоа важи



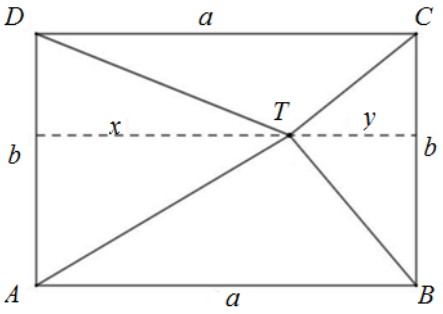
$$\overline{DE}=\tfrac{2}{3}\overline{DM}=\frac{\sqrt{6}}{3}\,cm,$$

$$\overline{AE}=\tfrac{2}{3}\overline{AS}=\tfrac{2}{3}\overline{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,cm.$$

Сега $\overline{AE}^2+\overline{ED}^2=\frac{6}{9}+\frac{3}{9}=1=\overline{AD}^2$, па од обратната Питагорова теорема следува дека $\measuredangle CED=\measuredangle AED=90^\circ$.

39. Во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е дадена точка T. Отсечките кои ја поврзуваат точката T со темињата на правоаголникот го делат правоаголникот на четири триаголници. Плоштините на три од овие триаголници се $15\,cm^2, 54\,cm^2, 75\,cm^2$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Плоштините на триаголниците ATD, ABT, BCT, CDT да ги означиме со P_1, P_2, P_3, P_4, соодветно. Нека висините повлечени од темето T во триаголниците ATD и BCT се со должини x и y, соодветно, цртеж десно. Тогаш важи $a=x+y$ и



$$P_1=\tfrac{bx}{2}, P_3=\tfrac{by}{2},$$

од каде добиваме

$$P_1+P_3=\tfrac{bx}{2}+\tfrac{by}{2}=\tfrac{b(x+y)}{2}=\tfrac{ab}{2}=\tfrac{1}{2}P_{ABCD}.$$

Понатаму,

$$P_2+P_4=P_{ABCD}-(P_1+P_3)=P_{ABCD}-\tfrac{1}{2}P_{ABCD}=\tfrac{1}{2}P_{ABCD}.$$

Ако Q ја означиме непознатата плоштина на еден од триаголниците,

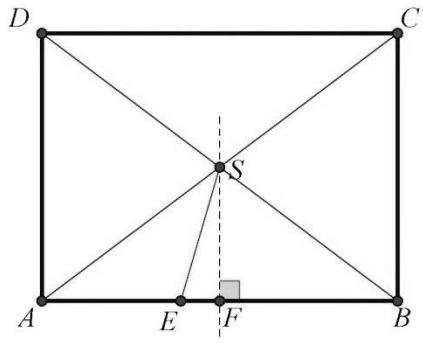
тогаш од претходните разгледувања следува дека е можен еден од следниве случаи:

1) $15+54=75+Q$, но тоа не е можно бидејќи $75>15+54$,
2) $15+75=54+Q$, па затоа $Q=36\,cm^2$ и плоштината на правоаголникот е $15+75+54+36=180\,cm^2$.
3) $54+75=15+Q$, па затоа $Q=114\,cm^2$ и плоштината на правоаголникот е $15+75+54+114=258\,cm^2$.

40. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $\overline{AB}=16\,cm$ и $\overline{BC}=12\,cm$. Дијагоналите на правоаголникот се сечат во точката S. На страната AB на правоаголникот $ABCD$ е земена точка E која е еднакво оддалечена од точките A и S. Определи ја плоштината на триаголникот AES.

Решение. Нека F е средината на страната AB. Од Питагоровата теорема, применета на $\triangle EFS$ следува

$$\overline{ES}^2=\overline{EF}^2+\overline{FS}^2. \qquad (1)$$



Понатаму, $\overline{FS}=\frac{1}{2}\overline{BC}=6\,cm$.

Ако означиме $\overline{AE}=\overline{ES}=x$, добиваме

$$\overline{EF}=\overline{AF}-\overline{AE}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}-\overline{AE}=8-x,$$

па ако замениме во (1) добиваме $x^2=(8-x)^2+6^2$, од каде наоѓаме $x=\frac{25}{4}=6,25\,cm$. Значи, $\overline{AE}=6,25\,cm$. Според тоа, плоштината на триаголникот AES е

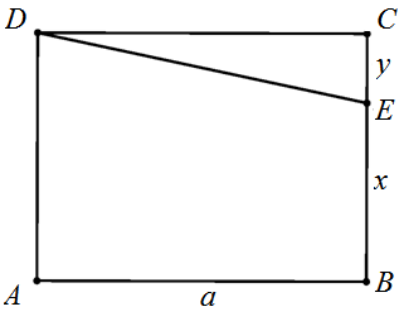
$$P=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{FS}}{2}=\frac{6,25\cdot 6}{2}=18,75\,cm^2.$$

41. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка E на страната BC. Отсечката DE го дели правоаголникот $ABCD$ на два дела чии плоштини се однесуваат како $6:1$. Определи го односот на должините на отсечките CE и BE.

Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{DC}=a, \overline{BE}=x, \overline{EC}=y$ (види цртеж). Тогаш ва-

жи $\overline{AD}=x+y$ и затоа $P_{DABE}=\frac{x+(x+y)}{2}a$ и $P_{ECD}=\frac{y}{2}a$. Понатаму,

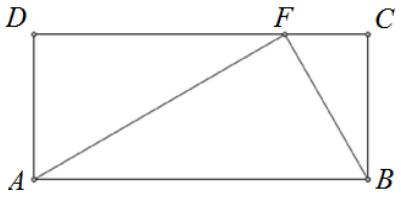
$$P_{DABE}:P_{ECD}=6:1,$$
$$\frac{x+(x+y)}{2}a:\frac{y}{2}a=6:1,$$
$$2x+y=6y,$$
$$2x=5y,$$
$$x:y=5:2.$$



Конечно, $\overline{BE}:\overline{EC}=5:2$.

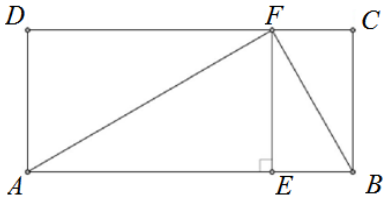
42. На цртежот десно се прикажани правоаголник $ABCD$ и триаголник ABF. Определи ја плоштината на триаголникот ABF ако важи

$\measuredangle AFD=\measuredangle FBC$,
$\overline{DF}=6\,cm$ и
$\overline{CF}=2\,cm$.



Решение. Јасно,

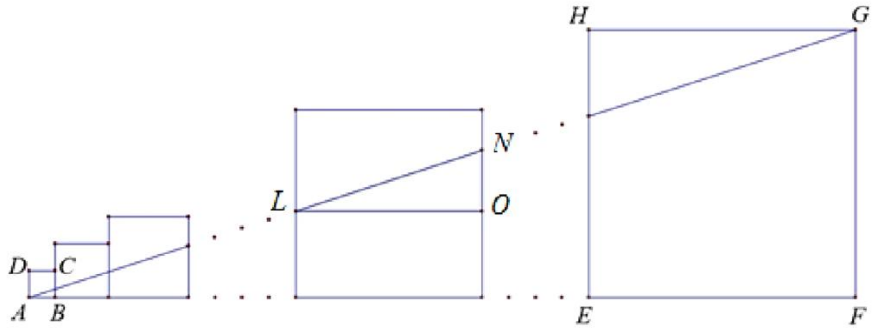
$$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DF}+\overline{FC}=8\,cm.$$



Нека E е подножјето на висината повлечена од темето F на страната AB и нека $\overline{AD}=x$ (види цртеж). Триаголниците AFD и FBC се правоаголни и важи $\measuredangle AFD=\measuredangle FBC$, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $6:x=x:2$, од каде добиваме $x=2\sqrt{3}\,cm$. Според тоа, $\overline{EF}=2\sqrt{3}\,cm$, па затоа плоштината на триаголникот ABF е $P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{EF}}{2}=\frac{8\cdot 2\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}\,cm^2$.

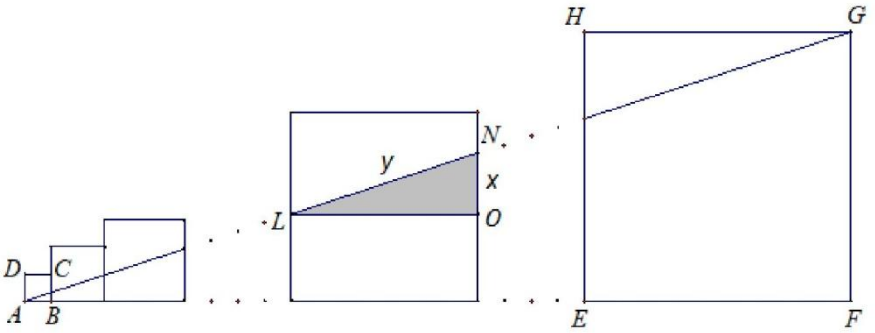
43. Дадени се $2n+1, n\in\mathbb{N}$ квадрати, така што должината на страната на квадратот $ABCD$ е $1cm$, а должината на страната на секој следен квадрат е за $1cm$ поголема од должината на претходниот квадрат (види цртеж). Отсечката AG ги сече сите квадрати. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголниот триаголник LON во средниот по големина квадрат, каде отсечката LN е пресекот на отсечката AG

и средниот квадрат.



Решение. Имаме $2n+1$ квадрати, па затоа средниот квадрат е $(n+1)-$виот по ред. Значи, триаголникот LON е во $(n+1)-$от квадрат и затоа $\overline{LO}=n+1$. Важи

$$\overline{FG}=2n+1 \text{ и } \overline{AF}=1+2+...+(2n+1)=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(n+1)(2n+1).$$



Нека $\overline{ON}=x, \overline{LN}=y$, види цртеж. Триаголниците LON и AFG се слични, па затоа

$$\overline{ON}:\overline{LO}=\overline{FG}:\overline{AF}, \text{ т.е. } \frac{x}{n+1}=\frac{2n+1}{(n+1)(2n+1)},$$

од каде добиваме $x=1cm$. Понатаму, триаголникот LON е правоаголен, па затоа

$$y^2=(n+1)^2+x^2, \text{ т.е. } y=\sqrt{n^2+2n+2}.$$

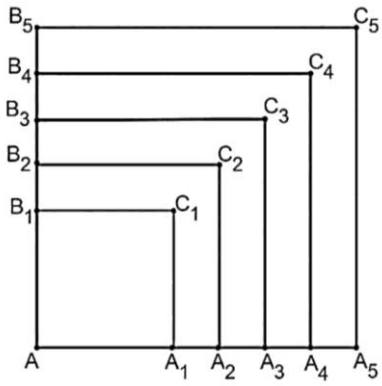
Конечно, плоштината на триаголникот LON е

$$P=\frac{\overline{LO}\cdot\overline{ON}}{2}=\frac{n+1}{2},$$

а периметарот е

$$L=n+2+\sqrt{n^2+2n+2}.$$

44. Марко нацртал квадрат $AA_1C_1B_1$ и многуаголници $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$, $A_2A_3C_3B_3B_2C_2$, $A_3A_4C_4B_4B_3C_3$, $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$, на кои соседните страни се заемно нормални и при што важи $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_4A_5}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}=\overline{B_4B_5}$, (цртеж десно). Ако плоштината на многуаголникот $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$ е еднаква на $80\,cm^2$, а плоштината на многуаголникот $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ е еднаква на $104\,cm^2$, определи ја плоштината на квадратот $AA_1C_1B_1$.



Решение. Должината на страната на квадратот да ја означиме со x, а продолжението на страната да го означиме со y. Плоштината на многуаголникот $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$ е $(x+y)^2-x^2=80$, а плоштината на многуаголникот $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ е $(x+4y)^2-(x+3y)^2=104$. Од овие две равенки го добиваме системот

$$\begin{cases} 2xy+y^2=80, \\ 2xy+7y^2=104. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, добиваме $6y^2=24$, од каде наоѓаме $y=2\,cm$. Понатаму, $2\cdot 2x+2^2=80$, од каде наоѓаме $x=19\,cm$. Конечно, плоштината на квадратот $AA_1C_1B_1$ е

$$P=x^2=361\,cm^2.$$

45. Даден е ромб чија една дијагонала е $90\,cm$, а плоштината му е $5400\,cm^2$. Определи го радиусот на впишаната кружница во ромбот.

Решение. Нека страната на ромбот е a, а дијагоналите се $d'=90\,cm$ и d''. Имаме $P=\frac{d'd''}{2}$, од каде следува $5400=\frac{90d''}{2}$, т.е. $d''=120\,cm$. Понатаму, $a=\sqrt{(\frac{d'}{2})^2+(\frac{d''}{2})^2}=75\,cm$, а за висината на ромбот добиваме $h=\frac{P}{a}=72\,cm$. Конечно, радиусот на впишаната кружница во

овој ромб е $r=\frac{h}{2}=36\,cm$.

46. Должините на дијагоналите на ромбот се разликуваат за $14\,cm$. Ако подолгата дијагонала ја продолжиме за $2\,cm$, а пократката за $8\,cm$, плоштината на ромбот ќе се зголеми за $144\,cm^2$. Определи ги должините на дијагоналите на почетниот ромб.

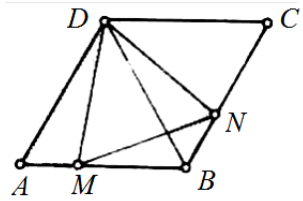
Решение. Нека d' е пократката дијагонала на почетниот ромб. Тогаш должината на подолгата дијагонала е $d'+14$, а неговата плоштина е $\frac{d'(d'+14)}{2}$. Понатаму, дијагоналите на новиот ромб се $d'+8$ и $d'+16$, па затоа неговата плоштина е $\frac{(d'+8)(d'+16)}{2}$. Сега од условот на задачата наоѓаме $\frac{(d'+8)(d'+16)}{2}=\frac{d'(d'+14)}{2}+144$, од каде последователно добиваме

$$d'^2+16d'+8d'+128=d'^2+14d'+288,$$
$$10d'=160,$$
$$d'=16\,cm.$$

Значи, дијагоналите на почетниот ромб се $d'=16\,cm$ и $d'+14=30\,cm$.

47. Даден е ромб $ABCD$ со остар агол 60°. Права MN отсекува на страните AB и BC отсечки MB и NB чиј збир е еднаков на страната на ромбот. Докажи дека триаголникот MDN е рамностран.

Решение. Триаголниците ABD и BDC се рамностран, па затоа $\overline{AD}=\overline{BD}$. Понатаму, за триаголниците ADM и BDN важи $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{AM}=\overline{BN}$ и $\measuredangle A=\measuredangle B=60^\circ$ и затоа тие се складни. Значи, $\overline{DM}=\overline{DN}$ и $\measuredangle ADM=\measuredangle BDN$. Понатаму,



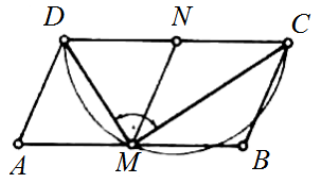
$$\measuredangle MDN=\measuredangle MDB+\measuredangle BDN=\measuredangle MDB+\measuredangle ADM=\measuredangle ADB=60^\circ.$$

Според тоа, триаголникот MDN е рамнокрак со агол агол при врвот еднаков на 60°, па затоа тој е рамностран.

48. Во паралелограмот $ABCD$ страната AB е два пати подолга од страната BC. Нека точката M е средината на страната AB. Докажи дека

отсечката CM е нормална на отсечката DM.

Решение. Нека N е средина на страната CD. Тогаш $\overline{MN}=\overline{CN}$, па кружницата чиј дијаметар е CD ја содржи точката M. Сега $\measuredangle DMC=90^\circ$ како периферискиагол на дијаметарот, што значи дека $CM\perp DM$.



49. Даден е паралелограм $ABCD$ во кој пресекот на дијагоналите е точката S. Периметарот на $\triangle CDS$ е за $5,6\,cm$ помал од периметарот на $\triangle BCS$. Симеталата на $\measuredangle BAD$ ја сече страната BC во точка M таква што $\overline{BM}:\overline{MC}=7:4$. Определи ги должините на страните на паралелограмот $ABCD$.

Решение. Нека $\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b$. Дијагоналите на паралелограмот се половат, па можеме да означиме $\overline{SB}=\overline{SD}=x$ и $\overline{SA}=\overline{SC}=y$.

Бидејќи периметарот на $\triangle CDS$ е за $5,6\,cm$ помал од перметарот на $\triangle BCS$, добиваме

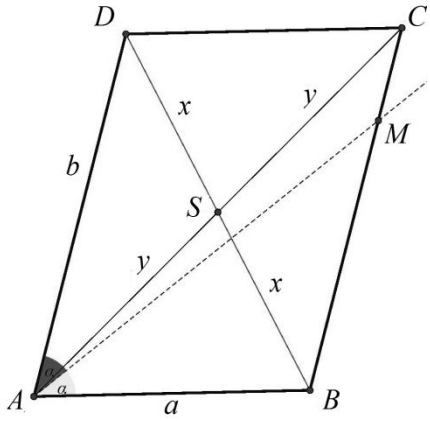
$$x+y+b=x+y+a+5,6,$$

т.е. $b=a+5,6$.

Од $\overline{BM}:\overline{MC}=7:4$ следува дека $\overline{BM}=7k,\ \overline{MC}=4k$, па затоа

$$b=\overline{BM}+\overline{MC}=11k.$$

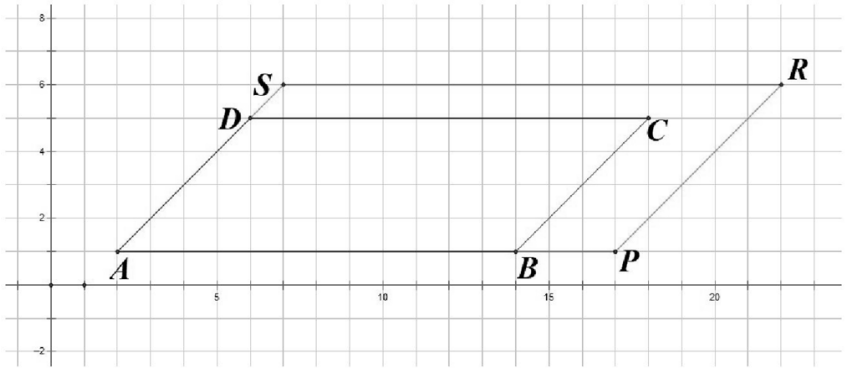
Ако означиме $\measuredangle BAD=2\alpha$, тогаш $\measuredangle BAM=\alpha$. Соседните агли во паралелограмот се суплементни, па затоа $\measuredangle MBA=180^\circ-2\alpha$, па од триаголникот ABM добиваме дека $\measuredangle AMB=\alpha$. Значи, триаголникот ABM е рамнокрак и важи $\overline{AB}=\overline{BM}=7k$. Со замена во $b=a+5,6$ добиваме $11k=7k+5,6$, од каде наоѓаме $k=1,4\,cm$. Според тоа, $a=7k=9,8\,cm$ и $b=11k=15,4\,cm$.



50. Даден е паралелограм $ABCD$: $A(2,1), B(14,1), D(6,5)$. Точката P припаѓа на полуправата AB, а точката S припаѓа на полуправата AD. Должините на страните на паралелограмот $APRS$ се за 25% поголеми

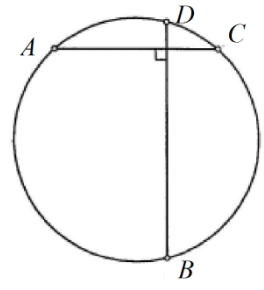
од соодветните должини на паралелограмот $ABCD$. Определи ги координатите на темињата на паралелограмот $APRS$. За колку проценти плоштината на паралелограмот $APRS$ е поголема од плоштината на паралелограмот $ABCD$?

Решение. Јасно, темето C на паралелограмот $ABCD$ има координати $C(18,5)$. Понатаму, должините на страните на паралелограмот $APRS$ се за 25%, т.е. за $\frac{1}{4}$ поголеми од должините на страните на паралелограмот $ABCD$. На долниот цртеж во ист координатен систем се нацртани двата паралелограми.



Координатите на темињата на паралелограмот $APRS$ се: $P(17,1)$, $R(22,6)$ и $S(7,6)$. За плоштината на паралелограмот $ABCD$ имаме $P_{ABCD}=12\cdot 4=48$, а за плоштината на паралелограмот $APRS$ имаме $P_{APRS}=15\cdot 5=75$. Имаме, $\frac{P_{APRS}}{P_{ABCD}}=\frac{75}{48}=1,5625$, што значи дека плоштината на паралелограмот $APRS$ е за $(1,5625-1)\cdot 100=56,25\%$ поголема од плоштината на паралелограмот $ABCD$.

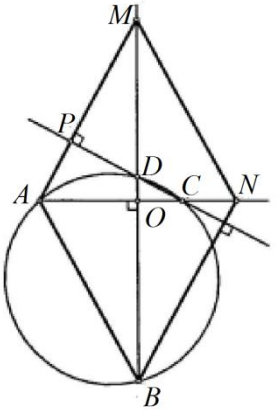
51. Нека AC и BD се две заемно нормални тетиви во кружница k кои се сечат како на цртежот десно. Нормалата повлечена од точката A на правата CD ја сече правата BD во точка M, а нормалата повлечена од точката B на правата CD ја сече AC во точката N. Докажи дека четириаголникот $ABNM$ е ромб.



Решение. Четириаголникот $ABNM$ е со нормални дијагонали AN и BM. Ќе докажеме дека сите страни на четириаголникот се еднакви.

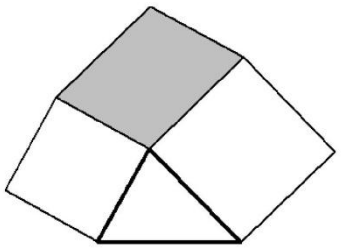
Имаме $\measuredangle DBA = \measuredangle DCA$ (агли над ист кружен лак) и $\measuredangle DCA = \measuredangle NBD$ (остри агли со нормални краци: $CA \perp BD$ и $CD \perp BN$). Според тоа

$$\measuredangle OBA = \measuredangle DBA = \measuredangle NBD = \measuredangle NBO.$$

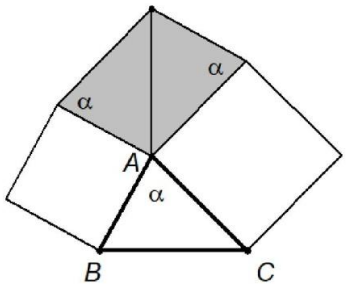


Сега, триаголниците ABO и NOB се правоаголни имаат заеднчка страна OB и $\measuredangle OBA = \measuredangle NBO$, па затоа се складни. Според тоа, $\overline{AB} = \overline{BN}$. Исто така, $\overline{AO} = \overline{ON}$, па затоа BM е симетрала на отсечката AN, од што следува $\overline{AM} = \overline{MN}$. Останува уште да докажеме дека $\overline{AB} = \overline{AM}$. Нека P е подножјето на нормалата од точката A на правата CD. Тогаш триаголниците ABO и ACP се правоаголни и имаат еднаков остар агол, т.е. $\measuredangle OBA = \measuredangle DCA = \measuredangle PCA$, па затоа се слични. Според тоа, $\measuredangle OAM = \measuredangle CAP = \measuredangle BAO$. Сега, AOM и AOB се правоаголни и имаат еднаков остар агол над заедничката катета AO, што значи дека се складни. Конечно, од складноста следува $\overline{AB} = \overline{AM}$, што значи дека четириаголникот $ABNM$ е ромб.

52. Должините на страните на квадратите нацртани над страните на триаголникот на цртежот десно се еднакви на $4\,cm$ и $5\,cm$. Плоштината на триаголникот е еднаква на $8\,cm^2$. Определи ја плоштината на осенчениот паралелограм.



Решение. Нека α е аголот во триаголникот меѓу страните со должини $4\,cm$ и $5\,cm$ (цртеж десно). Тогаш аголот при точката A на паралелограмот е еднаков на



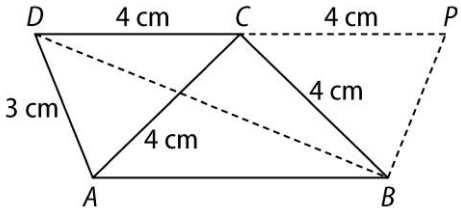
$$360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha,$$

па затоа остриот агол на паралелограмот е еднаков на α. Сега, ако ја повлечеме дијагоналата на паралелограмот наспроти аголот α, таа го дели паралелограмот на два триаголника, кои се складни со триаголникот ABC (Зошто?). Според тоа, плоштината на паралелограмот е

еднаква $2\cdot 8=16\,cm^2$.

53. Во трапез $ABCD$ краците се $\overline{AD}=3\,cm$ и $\overline{BC}=4\,cm$, пократката основа е $\overline{CD}=4\,cm$ и дијагоналата $\overline{AC}=4\,cm$. Определи ја должината на дијагоналата BD.

Решение. Основата CD ја продолжуваме преку темето C до точка P таква што $\overline{CP}=4\,cm$. Тогаш



$$\overline{CP}=\overline{CB} \text{ и } \overline{CD}=\overline{CB},$$

па триаголниците BCD и BCP се рамнокраки и $\sphericalangle CBP=\sphericalangle CPB$ и $\sphericalangle CDB=\sphericalangle CBD$, од каде следува

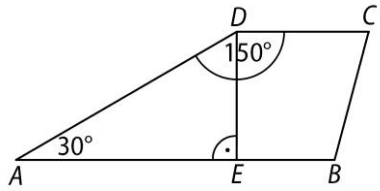
$$\sphericalangle DBP=\sphericalangle DBC+\sphericalangle CBP=\frac{\sphericalangle BCP}{2}+\frac{\sphericalangle BCD}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ.$$

Понатаму, триаголниците DAC и PBC се складни (Докажи!), па затоа $\overline{PB}=3\,cm$. Конечно, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{DP}^2-\overline{PB}^2}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}\,cm.$$

54. Периметарот на трапезот е еднаков на $135\,cm$. Подолгиот крак на трапезот е долг $36\,cm$ и тој зафаќа со пократката основа агол од 150°. Пократкиот крак на трапезот е еднаков на пократката основа и неговата должина изнесува 60% од должината на подолгата основа. Определи ја плоштината на овој трапез.

Решение. Нека AD е подолгиот крак, а AB е подолгата основа на трапезот $ABCD$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{AD}=36\,cm$ и $\overline{BC}=\overline{CD}=\frac{6}{10}\overline{AB}$. Од



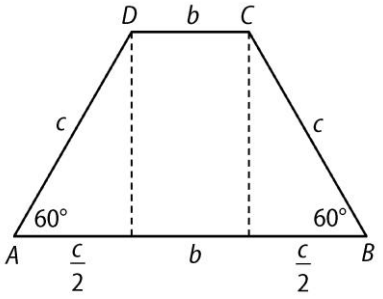
$$\overline{AB}+\frac{6}{10}\overline{AB}+\frac{6}{10}\overline{AB}+36=135$$

следува $\overline{AB}=45\,cm$, па затоа $\overline{BC}=\overline{CD}=27\,cm$. Отсечката DE е висина на трапезот и $\sphericalangle ADE=60^\circ$. Сега, од правоаголниот триаголник AED добиваме дека $\overline{AD}=2\overline{DE}$, па затоа $\overline{DE}=18\,cm$. Бараната плош-

тина е $P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\cdot\overline{DE}=684\,cm^2$.

55. Аглите на поголемата основа на трапезот се по 60°, а неговиот периметар е $200\,cm$. Определи ја должината на поголемата основа на трапезот така што неговата плоштина ќе биде максимална.

Решение. Јасно, трапезот е рамнокрак со краци $\overline{BC}=\overline{AD}=c$ и основи $\overline{CD}=b$ и $\overline{AB}=a=b+c$, цртеж десно. Плоштината на трапезот е

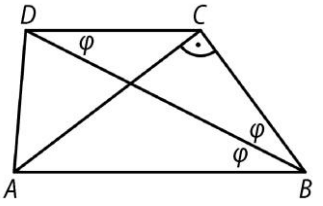


$$\begin{aligned}P&=\frac{a+b}{2}h=\frac{2b+c}{2}\cdot\frac{c}{2}\sqrt{3}\\&=(100-c)\frac{c}{2}\sqrt{3}\\&\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{100+c-c}{2}\right)^2\\&=1250\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Конечно, плоштината ќе биде максимална ако $100-c=c$, т.е. $c=50\,cm$ и $b=25\,cm$, па затоа должината на поголемата основа ќе биде $a=75\,cm$.

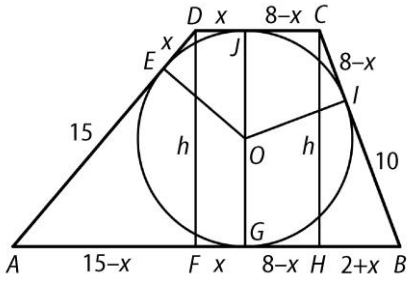
56. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=5\,cm$ и $\overline{CD}=3\,cm$. Дијагоналата AC е нормална на кракот BC, а дијагоналата BD е симетрала на аголот при подолгата основа. Определи ја висината на трапезот $ABCD$.

Решение. Имаме $\measuredangle ABD=\measuredangle BDC$, како агли со паралелни краци. Од условот на задачата имаме . Според тоа, триаголникот BCD е рамнокрак, па затоа $\overline{BC}=\overline{CD}=3\,cm$. Триаголникот ABC е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува $\overline{AC}=\sqrt{5^2-3^2}=4\,cm$. Конечно, висината на трапезот е еднаква на висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC. Затоа важи $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}$, од каде добиваме $h=2{,}4\,cm$.



57. Даден е трапез $ABCD$ во кој е впишана кружница која подолгата основа ја допира во точка G таква што $\overline{AG}=15\,cm$ и $\overline{BG}=10\,cm$, а пократката основа е $\overline{CD}=8\,cm$. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Нека E,J,I се допирните точки на впишаната кружница со страните AD,CD,BC, соодветно и нека DF и CH се висините h на трапезот. Да означиме $\overline{DJ}=x$. Тогаш



$$\overline{DJ}=\overline{DE}=\overline{FG}=x,$$
$$\overline{CJ}=\overline{CI}=\overline{HG}=8-x,$$
$$\overline{AE}=\overline{AG}=15,$$
$$\overline{BI}=\overline{BG}=15.$$

Триаголниците AFD и BHC се правоаголни и важи

$$\overline{DA}^2-\overline{AF}^2=\overline{DF}^2=\overline{CH}^2=\overline{CB}^2-\overline{BH}^2$$

од каде добиваме

$$(\overline{DE}+\overline{AE})^2-(\overline{AG}-\overline{GF})^2=(\overline{BI}+\overline{IC})^2-(\overline{BG}-\overline{GH})^2$$
$$(15+x)^2-(15-x)^2=(18-x)^2-(2+x)^2$$
$$x=\tfrac{16}{5}\,cm.$$

Според тоа,

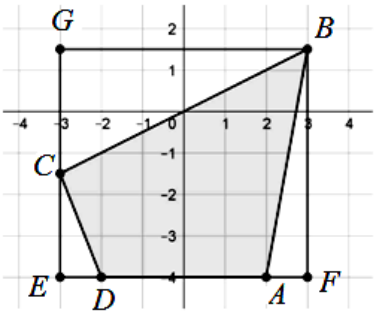
$$h=\sqrt{(15+x)^2-(15-x)^2}=\sqrt{60x}=\sqrt{60\cdot\tfrac{16}{5}}=8\sqrt{3}\,cm,$$

па плоштината е

$$P=\tfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=132\sqrt{3}\,cm^2.$$

58. Дадени се точките $A(2;-4)$ и $B(3;1,5)$. Точката C централно е симетрична на точката B во однос на координатниот почеток $O(0,0)$, а точката D е осносиметрична на точката A во однос на $y-$оската. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

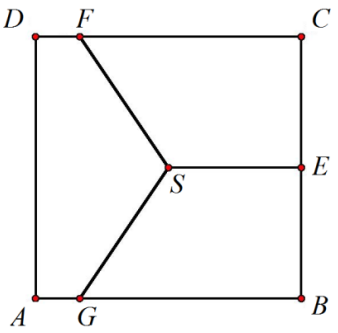
Решение. Точката C има координати $C(-3:-1,5)$, а точката D има координати $D(-2:-4)$. На цртежот долу десно е прикажан четириаголникот $ABCD$ и околу него е опишан правоаголник $EFBG$.



Имаме

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{EFBG} - P_{AFB} - P_{BGC} - P_{CED} \\ &= 6 \cdot 5{,}5 - \tfrac{1 \cdot 5{,}5}{2} - \tfrac{6 \cdot 3}{2} - \tfrac{1 \cdot 2{,}5}{2} \\ &= 33 - 2{,}75 - 9 - 1{,}25 \\ &= 33 - 13 = 20. \end{aligned}$$

59. Квадрат $ABCD$ со страна $1m$ е поделен на два складни четириаголници и еден петаголник како на цртежот десно. Двата четириаголници и петаголникот имаат еднакви плоштини. Ако точката S е средината на квадратот, определи ја должината на отсечката FC.



Решение. Плоштините на трите многуаголници се еднакви, па затоа плоштината на секој од нив е еднаква на $\frac{1}{3}m^2$. Според тоа, плоштината на трапезот $FCES$ е еднаква на $\frac{1}{3}m^2$. Основите на овој трапез се $\overline{FC}, \overline{SE} = \frac{1}{2}m$ и неговата висина е $\overline{CE} = \frac{1}{2}m$, па затоа $\frac{1}{3} = \frac{\overline{FC}+\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$, од каде добиваме $\overline{FC} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}m$.

60. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ со основи AB и CD се сечат во точката S. Со P, P_1 и P_2 да ги означиме плоштините на трапезот $ABCD$, триаголникот ABS и триаголникот CDS. Докажи дека

$$P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

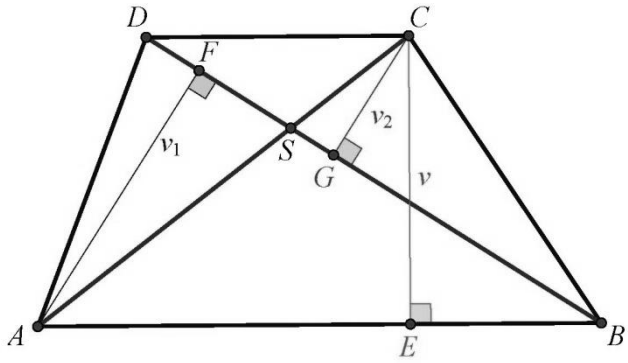
Решение. Триаголниците ABD и ABC имаат заедничка основа и еднакви висини, па затоа $P_{ABD} = P_{ABC}$. Понатаму,

$$P_{ASD} = P_{ABD} - P_{ABS} = P_{ABC} - P_{ABS} = P_{BCS},$$

т.е. $P_{ASD} = P_{BCS} = P_3$. Понатаму,

$$P_{ASD} = P_3 = \frac{\overline{SD} \cdot v_1}{2} \text{ и } P_{ABS} = \frac{\overline{SB} \cdot v_1}{2}.$$

Според тоа, $P_3 : P_1 = \overline{SD} : \overline{SB}$. Аналогно, разгледувајќи ги триаголниците CDS и BCS добиваме $P_2 : P_3 = \overline{SD} : \overline{SB}$.



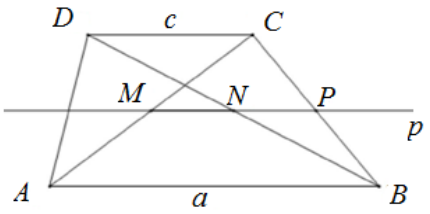
Од претходните разгледувања следува $P_2 : P_3 = P_3 : P_1$, од каде добиваме $P_3 = \sqrt{P_1 P_2}$. Кнечно, за плоштината на трапезот $ABCD$ имаме

$$\begin{aligned} P &= P_{ABS} + P_{CDS} + P_{ASD} + P_{BCS} \\ &= P_1 + P_2 + 2P_3 \\ &= P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} \\ &= (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

61. Нека $ABCD$ е трапез кај кој едната основа е два пати подолга од другата основа. Ако M и N се средини на неговите дијагонали, докажи дека должината на отсечката MN е еднаква на половина од должината на пократката основа.

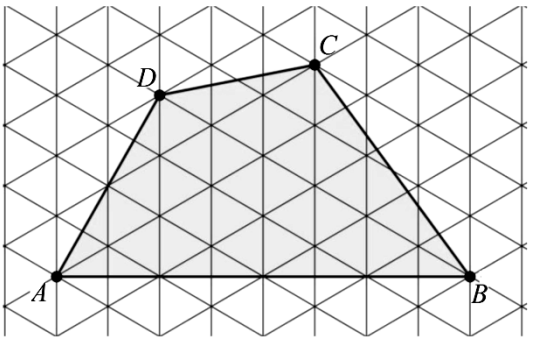
Решение. Трапезот да го означиме како на цртежот десно. Имаме $a = 2c$. Нека M и N се средините на дијагоналите. Со P да ја означиме средината на страната BC. Тогаш PN е средна линија на триаголникот BCD, па затоа $PN \parallel CD$ и $\overline{PN} = \frac{1}{2}c$. Понатаму, PM е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $PM \parallel AB$ и $\overline{PM} = \frac{1}{2}a = c$. Имаме $PN \parallel CD$ и $PM \parallel AB$, па како $AB \parallel CD$, заклучуваме дека точките M, N и P секолинеарни. Според тоа,



$$\overline{MN} = \overline{MP} - \overline{NP} = c - \tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}c,$$

што и требаше да се докаже.

62. Во мрежата формирана од рамностран триаголници со страна $1\,cm$ е нацртан четириаголник $ABCD$, цртеж десно. Определи ги плоштината и периметарот на овој четириаголник.



Решение. Јасно, висината на триаголниците од кои е формирана мрежата е $h=\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$. Сега, ако ги повлечеме нормалите од темињата C и D на страната AB, тогаш четириаголникот е поделен на два правоаголни триаголници со катети $3\,cm$ и $\sqrt{3}\,cm$, односно $\frac{7}{2}\,cm$ и $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,cm$, и еден правоаголен трапез со основи $3\,cm$ и $\frac{7}{2}\,cm$ и висина $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,cm$. Според тоа, плоштината на четириаголникот $ABCD$ е еднаква на

$$P_{ABCD}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}+\frac{3+\frac{7}{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(3+\frac{21}{4}+\frac{39}{4})=9\sqrt{3}\,cm^2.$$

Имаме,

$$\overline{AB}=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,cm,$$

$$\overline{AD}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,cm,$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(\frac{7}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{19}\,cm,$$

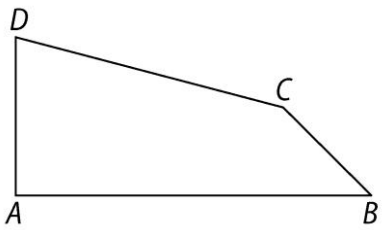
$$\overline{CD}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{7}\,cm,$$

па затоа $L=6\sqrt{3}+\sqrt{19}+\sqrt{7}\,cm$.

63. Во четириаголникот $ABCD$ (види цртеж) е:

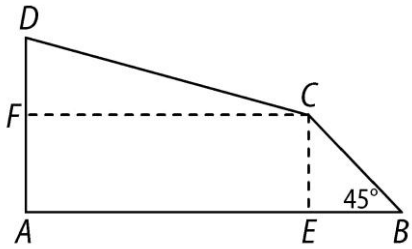
$AB\perp AD$ и $\measuredangle ABC=45^\circ$.

Ако важи $\overline{AB}=15\,cm$, $\overline{BC}=3\sqrt{2}\,cm$ и $\overline{AD}=8\,cm$, определи ја должина-



та на страната CD.

Решение. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од темето C на страната AB, а F е подножјето на нормалата повлечена од темето C на страната AD (види цртеж). Тогаш



$$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 12\,cm \text{ и}$$

$$\overline{CF} = \overline{AE} = 12\,cm.$$

Исто така

$$\overline{DF} = \overline{DA} - \overline{AF} = \overline{DA} - \overline{EC} = 5\,cm,$$

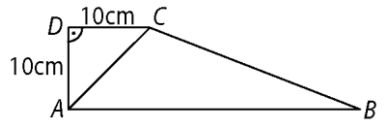
па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{FD}^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\,cm.$$

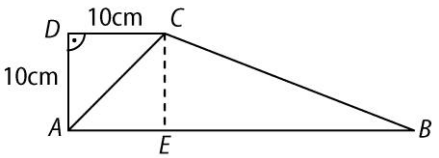
64. Продавницата во која Горјан го купил телевизорот продава само телевизори во кои размерот на должината и ширината на екранот е 7:4. Ако дијагоналата на екранот на телевизотор на Горјан е еднаква на $10\sqrt{65}\,cm$, определи ги должината и ширината на екранот.

Решение. Нека a и b се должината и ширината на екранот. Според условот на задачата постои $t \in \mathbb{R}$ таков што $a = 7t$ и $b = 4t$. Сега, од Питагортовата теорема следува $(7t)^2 + (4t)^2 = (10\sqrt{65})^2$, од каде добиваме $65t^2 = 6500$, па затоа $t = 10\,cm$. Значи, должината на екранот на телевизотор е $70\,cm$, а неговата ширина е $40\,cm$.

65. На цртежот десно е прикажан трапез $ABCD$. Плоштината на триаголникот ACD е пет пати помала од плоштината на триаголникот ABC. Определи ги плоштината и периметарот на трапезот $ABCD$.



Решение. Триаголниците ACD и ABC имаат еднакви висини, па затоа $\overline{AB} = 5\overline{CD} = 50\,cm$. Сега, $\overline{BE} = 40\,cm$, каде E е подножје-



то на нормалата повлечена од темето C на AB. Затоа

$$\overline{CB}=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{EB}^2}=\sqrt{10^2+40^2}=10\sqrt{17}\ cm.$$

Периметарот на трапезот е

$$L=50+10+10+10\sqrt{17}=10\cdot(7+\sqrt{17})\ cm,$$

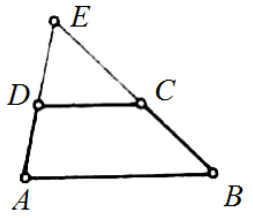
а неговата плоштина е

$$P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\cdot\overline{CE}=\frac{50+10}{2}\cdot 10=300\,cm^2.$$

66. Должините на основите на трапезот се $5{,}1\,cm$ и $4\frac{1}{4}\,cm$, а должината на едниот крак е еднаква на $4\,cm$. Колку треба да се продолжи овој крак за да се дојде до пресекот на продолжението на другиот крак?

Решение. Нека во трапезот $ABCD$ важи

$\overline{AB}=5{,}1\,cm$, $\overline{CD}=4{,}25\,cm$ и $\overline{AD}=4\,cm$,



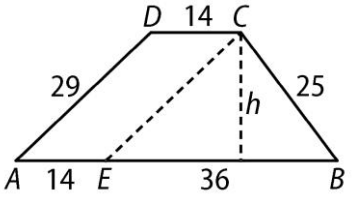
и нека E е точката во која се сечат продолженијата на краците AD и BC (цртеж десно). Триаголниците ABE и CDE се слични. Ако со $x=\overline{DE}$ го означиме бараното продолжување на кракот AD, тогаш од сличноста на триаголниците следува

$$\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{DE},\ \text{т.е. } 5{,}1:4{,}25=(x+4):x,$$

од каде добиваме $x=20\,cm$.

67. Даден е трапез со основи $50\,cm$ и $14\,cm$, а краци $25\,cm$ и $29\,cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

Решение. Нека E е точка од основата AB таква што $CE\parallel AD$ (цртеж десно). Тогаш четириаголникот $AECD$ е паралелограм па затоа $\overline{EC}=29\,cm$. Понатаму, $\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=36cm$. Од Хероновата формула за плоштината на триаголникот EBC добиваме



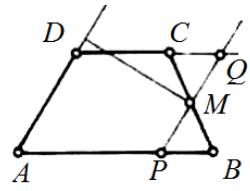
$$\begin{aligned}P_{EBC}&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{45\cdot(45-29)\cdot(45-36)\cdot(45-25)}\\&=360\,cm^2.\end{aligned}$$

Висината на овој триаголник е $h=\frac{2P}{EB}=\frac{720}{36}=20\,cm$ и таа е висина и на дадениот трапез. Конечно, за плоштината на трапезот добиваме

$$P_{ABCD}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=\frac{50+14}{2}\cdot 20=640\,cm^2.$$

68. Пресметај ја плоштината на трапезот кај кој должината на едниот крак е $8\,cm$, а растојанието од од средината на другиот крак до дадениот крак е $6\,cm$.

Решение. Нека во трапезот $ABCD$ важи $\overline{AD}=8\,cm$ и нека M е средината на кракот BC (цртеж десно). Понатаму, нека во точката M повлечеме отсечка $PQ\parallel AD$, $P\in AB$, $Q\in CD$ и нека $MN\perp AD$. Лесно се докажува дека триаголниците PBM и QCM се сладни, па затоа плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на плоштината на паралелограмот $APQD$. По конструкција DM е висина на паралелграмот $APQD$, па затоа $P_{ABCD}=P_{APQD}=8\cdot 6=48\,cm^2$.



69. Ако краците на трапезот се заемно нормални, докажи дека збирот на квадратите на неговите дијагонали е еднаков на збирот на квадратите на неговите основи.

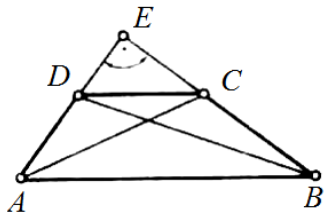
Решение. Од правоаголните триаголници ACE и BDE следува

$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2$ и $\overline{BD}^2=\overline{BE}^2+\overline{DE}^2$,

па затоа

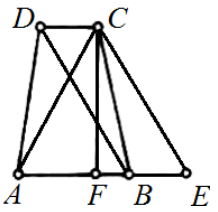
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2+\overline{BD}^2&=(\overline{AE}^2+\overline{CE}^2)+(\overline{BE}^2+\overline{DE}^2)\\&=(\overline{AE}^2+\overline{BE}^2)+(\overline{CE}^2+\overline{DE}^2)\\&=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2,\end{aligned}$$

бидејќи AB и CD се хипотенузи на правоаголните триаголници ABE и CDE.



70. Определи ја плоштината на трапез со дијагонали $25\,cm$ и $26\,cm$ и висина $25\,cm$.

Решение. Нека E е точака на продолќението на основата AB преку темето B таква што $\overline{BC}=\overline{CD}$ (цртеж десно). Тогаш $AE=\overline{AB}+\overline{CD}$. Нека CF е заедничката висина на триаголникот AEC и дадениот трапез. По конструкција четириаголникот $BECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{CE}=\overline{BD}$. Сега, од правоаголните триаголници AFC и BCE имаме $\overline{AF}^2=\overline{AC}^2-\overline{CF}^2=49$, па е $\overline{AF}=7\,cm$ и $\overline{EF}^2=\overline{CE}^2-\overline{CF}^2=100$, па е $\overline{EF}=10\,cm$. Оттука добиваме $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AE}=\overline{AF}+\overline{FE}=17\,cm$.

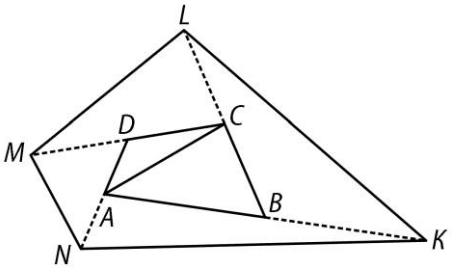


Конечно, плоштината на трапезот е

$$P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=\frac{17}{2}\cdot 24=204\,cm^2.$$

71. Плоштината на конвексниот четириаголник $ABCD$ е еднаква на $20\,cm^2$. Нека K,L,M и N се редоследно точки на правите AB, BC, CD и DA такви што точките B,C,D и A се средини на отсечките AK,BL,CM и DN. Определи ја плоштината на четириаголникот $KLMN$.

Решение. Важи $P_{\triangle BKL}=2P_{\triangle ABC}$ бидејќи имаат еднакви основи $\overline{AB}=\overline{BK}$, а висината на $\triangle BKL$ е два пати поголема од висината на $\triangle ABC$. Слично,



$$P_{\triangle MCL}=2P_{\triangle BCD},$$
$$P_{\triangle MDN}=2P_{\triangle ADC},$$
$$P_{\triangle ANK}=2P_{\triangle ABD}.$$

Според тоа,

$$P_{\triangle BKL}+P_{\triangle MCL}+P_{\triangle MDN}+P_{\triangle ANK}=2(P_{\triangle ABC}+P_{\triangle BCD}+P_{\triangle ADC}+P_{\triangle ABD})$$
$$=4P_{ABCD},$$

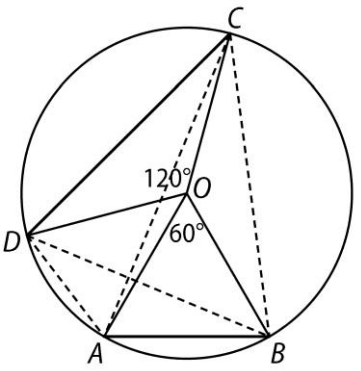
па затоа

$$P_{NKLM}=5P_{ABCD}=100\,cm^2.$$

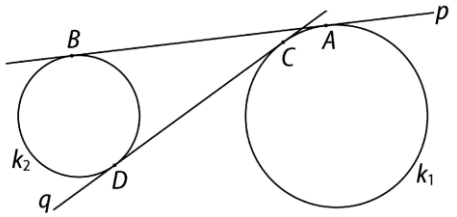
V.3. КРУЖНИЦА И КРУГ

72. Дадени се отсечките AB и CD. Отсечката AB се гледа од точките C и D под агол од 30°. Отсечката CD се гледа од точките A и B под агол од 60°. Определи ја должината на отсечката AB ако должината на отсечката CD е $10\sqrt{3}\,cm$.

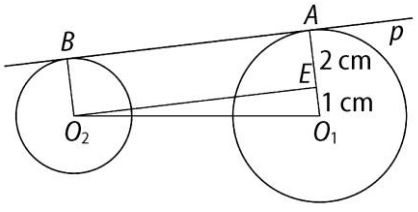
Решение. Бидејќи AB се гледа од точките C и D под ист агол, заклучуваме дека сите четири точки A,B,C,D припаѓаат на иста кружница $k(O,r)$. Понатаму, важи $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB = 60^\circ$ и $\measuredangle COD = 2\measuredangle CAD = 120^\circ$, па затоа $\triangle AOB$ е рамностран, т.е. $\overline{AB} = r$ и уште важи $\overline{CD} = r\sqrt{3}$. Според тоа, $r\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$, од каде $r = 10\,cm$, односно $\overline{AB} = 10\,cm$.

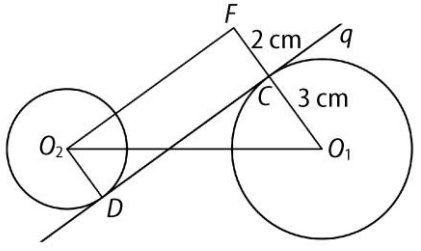


73. Правата p ги допира кружниците k_1 и k_2 во точките A и B, а правата q во точките C и D (види цртеж). Ако радиусот на кружницата k_1 е еднаков на $3\,cm$, а радиусот на кружницата k_2 е еднаков на $2\,cm$, определи ја вредноста на изразот $\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2$.



Решение. Во првиот случај (цртеж лево) со примена на Питагоровата теорема добиваме $\overline{AB}^2 = \overline{EO_2}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - 1^2$.





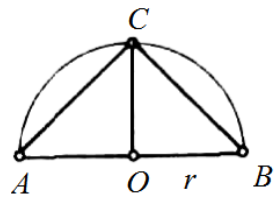
Во вториот случај (цртеж десно) со примена на Питагоровата теорема

добиваме $\overline{CD}^2 = \overline{FO_2}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - 5^2$.

Конечно, $\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - 1^2 - (\overline{O_1O_2}^2 - 5^2) = 25\,cm^2$.

74. Во кружница со радиус $r = 3\,cm$ впиши триаголник чии два внатрешни агли се еднакви на 45°. Колку проценти од плоштината на кругот зафаќа плоштината на тој триаголник?

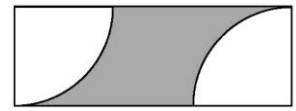
Решение. Нека ABC е бараниот триаголник со агли од 45° во темињата A и B (цртеж десно). Аголот во темето C е прав, па затоа AB е дијаметар на кружницата, а триаголникот ABC е половина од впишаниот квадрат во оваа кружница. Плоштината на овој кавдрат е $4 \cdot \frac{r \cdot r}{2} = 2r^2$, па затоа плоштината на триаголникот ABC е еднаква на r^2. Односот на плоштината на триаголникот и плоштината на кругот е



$$r^2 : \pi r^2 \approx 1 : 3{,}14 \approx 0{,}318,$$

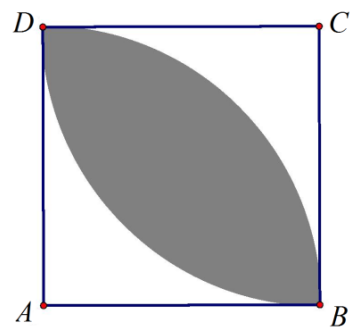
т.е. триаголникот зафажа приближно 31,8% од плоштината на кругот.

75. На цртежот десно е даден правоаголник со страни $5\,cm$ и $14\,cm$. Определи го периметарот на осенчената фигура.



Решение. Границата на осенчената фигура се состои од две четвртини на кружница со радиус $5\,cm$ и две отсечки со должини $14 - 5 = 9\,cm$. Затоа нејзиниот периметар е еднаков на $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 5\pi + 2 \cdot 9 = 5\pi + 18\,cm$.

76. Во квадрат со страна a е нацртан лист како на цртежот десно. Определи ја плоштината на листот. Колкав дел од плоштината на квадратот е плоштината на листот?

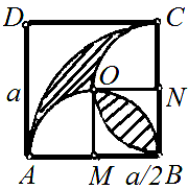


Решение. Плоштината на половината на листот е еднаква на разликата на четвртина од кругот со радиус a и рамнокрак правоаголен триаголник со катети a.

Според тоа, плоштината на листот е еднаква на $2(\frac{a^2\pi}{4}-\frac{a^2}{2})=a^2(\frac{\pi}{2}-1)$.

Плоштината на листот е $\frac{a^2(\frac{\pi}{2}-1)}{a^2}=\frac{\pi}{2}-1\approx 0,5708=57,08\%$ од плоштината на квадратот.

77. На цртежот десно е прикажан квадрат со должина на страна $6\,cm$. Определи ја плоштината на штрафираниот дел на овој квадрат.

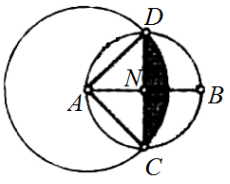


Решение. Квадратот $OMBN$ има страна $\frac{a}{2}$. Двата исечоци AMO и NCO заедно формираат половина круг. Бараната плоштина се добива кога од четвртина на кругот со радиус AB ги одземеме овие два исечоци и нештрафираниот дел на квадратот $OMBN$. Имаме

$$\begin{aligned}P&=\frac{a^2\pi}{4}-\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2\pi-2[(\frac{a}{2})^2-\frac{1}{4}(\frac{a}{2})^2\pi]\\&=\frac{1}{2}a^2(\frac{\pi}{2}-1)\\&=9\pi-18\,cm^2\approx 10,26\,cm^2.\end{aligned}$$

78. Во дадена кружница нацртај два заемно нормални дијаметри AB и CD, а потоа кружница со центар во A и радиус $\overline{AC}$. Спореди ги плоштините на триаголникот ACD и фигурата ограничена со помалиот лак CD на големата кружница и лакот CBD на малата кружница.

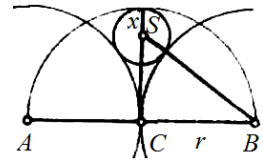
Решение. Триаголникот ACD е рамнокрак правоаголен (цртеж десно). Затоа, ако радиусот на малиот круг е r, тогаш радиусот на големиот круг е $r\sqrt{2}$. Според тоа, плоштината на четвртината од големиот круг $\frac{(r\sqrt{2})^2\pi}{4}=\frac{r^2\pi}{2}$ е еднаква



на половина од плоштината на малиот круг. Ако од ови плоштини ја одземеме плоштината на заедничкиот дел (отсечокот од поголеимиот круг над тетивата CD) добиваме еднакви плоштини, а тоа се плоштините кои треба да ги споредиме. Значи триаголникот ACD и фигурата ограничена со помалиот лак CD на големата кружница и лакот CBD на малата кружница имаат еднакви плоштини.

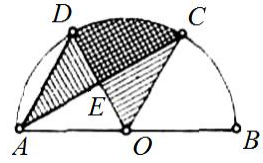
79. Во крајните точки A и B на дијаметарот AB, $\overline{AB}=2r$ на даден полукруг се опишани кружници со радиуси r. Определи ја плоштината на делот од полукругот определен со кружницата која ги допира полукружницата и двете кружници.

Решение. Нека C е средината на дијаметарот AB и S е центарот на кружницата која ги допира полукружницата и двете кружници (цртеж десно). Со x да го означиме радиусот на оваа кружница. Тогаш должините на страните на правоаголниот триаголник BSC се $r, r+x, r-x$, па од Питагоровата теорема следува $(r+x)^2=r^2+(r-x)^2$, од каде добиваме $x=\frac{r}{4}$. Конечно, бараната плоштина е еднаква на $(\frac{r}{4})^2\pi=\frac{r^2\pi}{16}$.



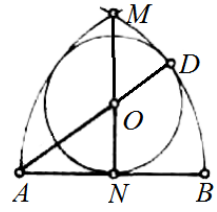
80. Дадена е полукружница со дијаметра $\overline{AB}=12\,cm$. Подели ја оваа полукружница на три еднакви лаци AC, CD, DB, па пресметај ја плоштината ограничена со лакот CD и тетивите AC и AD.

Решение. Нека E е пресечната точка на тетивите AC и OD (цртеж десно). Триаголниците AED и CEO се половина од складни рамностран триаголници, па затоа тие се складни. Затоа $P_{CD}=P_{OCD}=\frac{1}{6}r^2\pi=6\pi\,cm^2$.



81. Дадена е отсечка AB со должина $4\,cm$. Нека M е една од пресечните точки на кружниците со центри во A и B и радиуси $4\,cm$. Во така добиениот „криволиниски триаголник“ е впишана кружница. Определи го радиусот на оваа кружница.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница (цртеж десно). Допирната точка D на оваа кружница и лакот BM е на заедничката тангента на кружницата и лакот, па затоа нормалата повлечена на тангентата во оваа точка минува низ центарот O на кружницата и центарот A на лакот BM, т.е. точката D припаѓа на правата AO. Нека N е допирната точка на впишаната кружница и отсечката AB. Тогаш триагол-



никот ANO е правоаголен со катети $r, \frac{\overline{AB}}{2}=2\,cm$ и хипотенуза $\overline{OA}=$ $\overline{AB}-r=4-r$. Сега од Питагоровата теорема имаме $r^2+2^2=(4-r)^2$, од каде добиваме $r=1{,}5\,cm$.

82. Даден е правоаголен триаголник ABC таков што $\measuredangle A=30^\circ$.

а) Ако S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC определи го $\measuredangle BSC$.

б) Должината на помалата катета на триаголникот ABC е $5\,cm$. Определи ја разликата на опишаната кружница околу триаголникот ABC и неговиот периметар.

Решение. а) Бидејќи $\measuredangle BSC$ е централен агол над катетата BC, тој е два пати поголем од соодветниот периферискиагол, т.е. од $\measuredangle A=30^\circ$. Значи, $\measuredangle BSC=60^\circ$.

б) Од $\measuredangle A=30^\circ$ следува дека другиот остар агол на триаголникот е еднаков на 60°, што значи дека тој е половина од рамностран триаголник. Сега, помалата катета е еднаква на $5\,cm$, па затоа поголемата катета е еднаква на $5\sqrt{3}\,cm$ и хипотенузата е еднаква на $10\,cm$, што значи дека радиусот на опишаната кружница е еднаков на $5\,cm$. Конечно, периметарот на триаголникот е еднаков на $15+5\sqrt{3}\,cm$, а должината на опшишаната кружница е еднаква на $10\pi\,cm$ и бараната разлика е еднаква на

$$10\pi-15+5\sqrt{3}\approx 7{,}76\,cm.$$

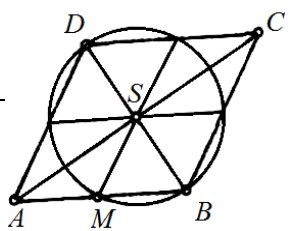
83. а) Конструирај ромб $ABCD$ со страна $a=4\,cm$ и внатрешен агол во темето A еднаков на 60°.

б) Нека S е пресекот на дијагоналите на ромбот и k е кружницата со центар во S која минува низ темињата B и D. Докажи дека k минува низ средината на секоја страна на ромбот $ABCD$.

в) Пресметај ја плоштината на оној дел од кругот кој се наоѓа надвор од ромбот $ABCD$.

Решение. а) Конструкцијата на ромбот $ABCD$ е едноставна, бидејќи триаголниците ABD и BCD се рамностранни (цртеж десно).

б) Нека M е средината на страната AB.



Тогаш SM е средна линија во триаголникот ABD па затоа $\overline{SM}=\frac{\overline{AD}}{2}=\frac{\overline{BD}}{2}=\overline{SB}$, што значи дека точката M припаѓа на кружницата k. На потополно ист начин се докажува дека и средините на другите страни припаѓаат на кружницата $\overline{SM}$.

в) Бараната плоштина е еднаква на збирот на четири отсечоци со централен агол од 60° и радиус $r=\frac{a}{2}=2\,cm$. Според тоа,

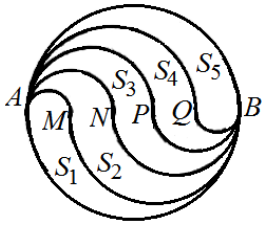
$$P=4\cdot(\frac{r^2\pi}{6}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4})=\frac{8}{3}\pi-\sqrt{3}\,cm^2.$$

84. На отсечката AB се дадени точките M,N,P,Q во овој редослед која отсечката ја делат на пет еднакви дела. Над отсечката AB се конструирани пет полукружници чии дијаметри се отсечките $AM,AN,$ AP,AQ и AB, а под отсечката AB се конструирани пет полукружници чии дијаметри се отсечките AB,MB,NB,PB и QB. Со тоа кругот чиј дијаметар е AB е поделен на пет делови. Докажи:

а) сите пет дела имаат еднаква плоштина,

б) сите пет дела имаат еднакви периметри, кои се еднакви на периметарот на големиот круг.

Решение. а) Дадениот круг е поделен на пет дела, при што во однос на центарот на кругот S_1 е симетричен на S_5, а S_2 е симетричен на S_4 (цртеж десно). Затоа за да докажеме дека сите делови имаат еднаква плоштина доволно е да докажеме дека $S_1=S_2=\frac{S}{5}$, каде S е плоштината на кругот конструиран над дијаметарот AB.



Нека $\overline{AB}=10m$. Тогаш $\overline{AM}=2m,\overline{AN}=4m,\overline{MB}=8m,\overline{NB}=6m$. Оттука следува дека плоштината на целиот круг е $S=(5m)^2\pi=25m^2\pi$. Понатаму,

$$S_1=\frac{m^2\pi}{2}+\frac{(5m)^2\pi-(4m)^2\pi}{2}=\frac{m^2\pi}{2}+\frac{9m^2\pi}{2}=5m^2\pi,$$

$$S_2=\frac{(2m)^2\pi-m^2\pi}{2}+\frac{(4m)^2\pi-(3m)^2\pi}{2}=\frac{3m^2\pi}{2}+\frac{7m^2\pi}{2}=5m^2\pi,$$

па затоа $S_1=S_2=\frac{S}{5}$.

б) Слично како погоре доволно е да докажеме дека $O_1=O_2=O_3=O$.

Имаме,

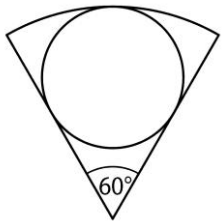
$$O = 2 \cdot 5m\pi = 10m\pi$$

и

$$O_1 = \frac{2m\pi}{2} + \frac{8m\pi}{2} + \frac{10m\pi}{2} = 10m\pi,$$
$$O_2 = \frac{2m\pi}{2} + \frac{4m\pi}{2} + \frac{6m\pi}{2} + \frac{8m\pi}{2} = 10m\pi,$$
$$O_2 = \frac{4m\pi}{2} + \frac{6m\pi}{2} + \frac{6m\pi}{2} + \frac{4m\pi}{2} = 10m\pi,$$

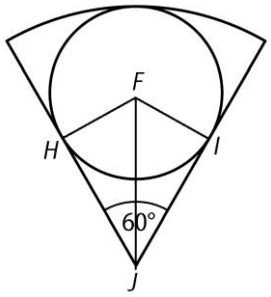
па затоа $O_1 = O_2 = O_3 = O$.

85. Определи ја плоштината на кругот впишан во кружен исечок со плоштина $150\pi\, cm^2$ чиј централен агол е 60°.



Решение. Плоштината на кружниот исечок е еднаква на шестина од плоштината на кругот од кој е тој исечен. Според тоа, плоштината на поголемиот круг е еднаква на $900\pi\, cm^2$, па затоа радиусот на поголемиот круг, односно радиусот на кружниот исечок е еднаков на $30\, cm$.

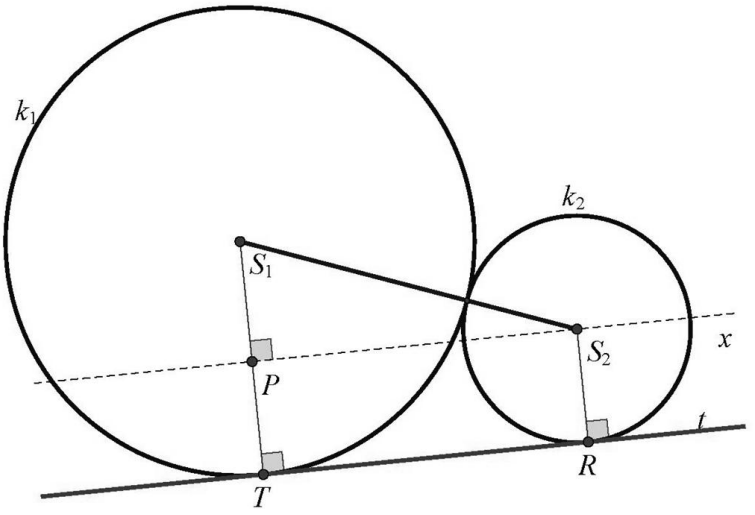
Нека F е центарот на кругот, а H и I се допирните точки на кругот и радиусите со кои тој е ограничен, а J е центарот на лакот кој го ограничува кружниот исечок (цртеж десно). Триаголникот FJH има агли 30°, $60^\circ, 90^\circ$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник, што значи $\overline{FJ} = 2\overline{FH}$. Но, $\overline{FJ} + \overline{FH} = 30\, cm$, па затоа $\overline{FH} = 10\, cm$. Конечно, плоштината на впишаниот круг е еднаква на $100\pi\, cm^2$.



86. Кружниците k_1 и k_2 се допираат надворешно. Односот на нивните радиуси е 2:1. Заедничката тангента ја допира кружницата k_1 во точката T, а кружницата k_2 во точката R. Определи го односот на должината на отсечката TR и должината на радиусот на поголемата кружница?

Решение. Со S_1 и S_2 да ги означиме центрите, а со r_1 и r_2 радиусите

на кружниците k_1 и k_2, соодветно. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1 > r_2$. Низ точката S_2 повлекуваме права x паралелна на TR. Нека P е пресекот на правата x и радиусот S_1T (види цртеж).



Триаголникот S_1S_2P е правоаголен, а четириаголникот S_2PTR е правоаголник и важи $\overline{S_2P} = \overline{TR}$. Понатаму,

$$r_1 = 2r_2 \text{ и } \overline{S_1S_2} = 3r_2,$$

па од Питагоровата теорема следува

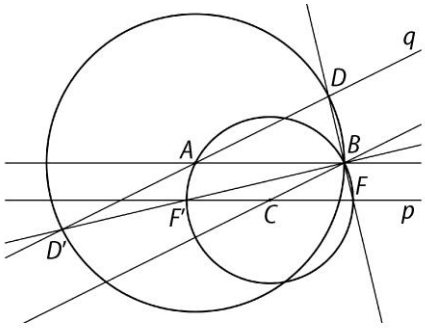
$$\overline{TR} = \overline{S_2P} = \sqrt{\overline{S_1S_2}^2 - \overline{S_1P}^2} = \sqrt{(3r_2)^2 - r_2^2} = 2r_2\sqrt{2}$$

Конечно,

$$\overline{TR} : \overline{S_1T} = 2r_2\sqrt{2} : 2r_2 = \sqrt{2} : 1$$

87. Нека A и B се две точки на кружницата $k_1(C,r)$ кои не се дијаметрално спротивни. Правата p минува низ точката C и е паралелна со правата AB, а правата q минува низ точката A и е паралелна со правата BC. Нека D е пресечната точка на правата q и кружницата $k_2(A,\overline{AB})$. Докажи дека правите p и DB се сечат на кружницата k_1.

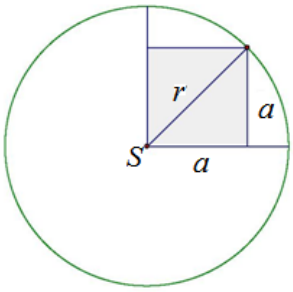
Решение. Нека F е пресечната точка на правите p и BD. Страните на триаголниците



ABD и CFB се паралелни, па затоа тие имаат еднакви внатрешни агли, т.е. се слични. Сега, бидејќи $\overline{AB}=\overline{AD}$, важи $\overline{CF}=\overline{CB}=r$, што значи дека $F\in k_1$. Аналогно се дока-жува и ако D е другата пресечна точка на правата q и кружни-цата $k_2(A,\overline{AB})$, која на цртежот е означена со D'.

88. Во кружен исечок со централен агол 90° е впишан квадрат така што едното теме е во центарот на кружниот исечок. Определи го односот на плоштините на квадратот и кружниот исечок.

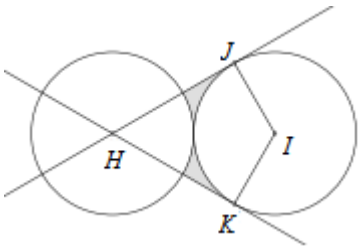
Решение. Нека r е радиусот на кружниот исечок и a е должината на страната на квадратот (цртеж десно). Од Питагоровата теорема следува $a^2+a^2=r^2$, па затоа $a=\frac{\sqrt{2}}{2}r$. Значи, плоштината на квадратот е



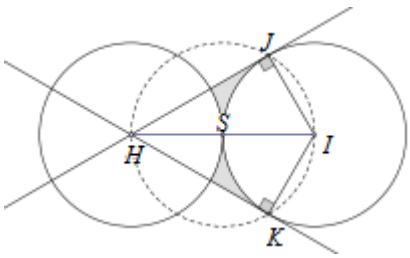
$$P_1=a^2=(\tfrac{\sqrt{2}}{2}r)^2=\tfrac{1}{2}r^2,$$

а плоштината на кружниот исечок е $P_2=\frac{1}{4}\pi r^2$. Конечно, бараниот однос е $P_1:P_2=\frac{1}{2}r^2:\frac{1}{4}\pi r^2$, т.е. $P_1:P_2=2:\pi$.

89. Две кружници со еднакви радиуси се допираат надворешно. Од центарот на едната кружница се повлечени тангенти на другата кружница. Определи го односот на плоштината на четириаголникот чии темиња се центрите на кружниците и допирните точки на тангентите и плоштината на ликот определен со тангентите и круговите определени со дадените кружници (осенчениот дел на цртежот).



Решение. Нека радиусот на кружниците е еднаков на r, а допирната точка на кружниците е S. Плоштината на четириаголникот $HKIJ$ е еднаква на плоштината на рамностран триаголник со



должина на страна $2r$, т.е.

$$P_{HKIJ} = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{44} = r^2\sqrt{3}.$$

Плоштината P_d на делот од рамнината меѓу тангентите и двата круга определени со кружниците е еднаква на разликата од плоштината на четириаголникот $HKIJ$ и збирот на плоштините на двата кружни исечоци радиуси r и со централни агли $2\cdot 30^\circ = 60^\circ$ и $2\cdot 60^\circ = 120^\circ$ (триаголникот HIJ е правоаголен со остри агли 30° и 60°). Според тоа,

$$P_d = r^2\sqrt{3} - \pi r^2\left(\frac{60}{360} + \frac{120}{360}\right) = r^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi r^2.$$

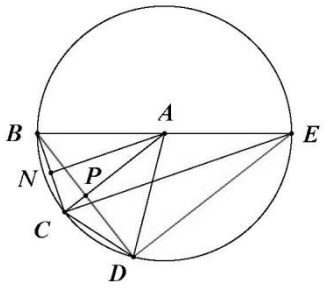
Конечно, бараниот однос е

$$P_{HKIJ} : P_d = r^2\sqrt{3} : \left(r^2\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\pi r^2\right) = 2\sqrt{3} : (2\sqrt{3} - \pi).$$

90. Нека A, B, C, D, E се точки во рамнината такви што:
- точката A е еднакво оддалечена од точките B, C, D, E и тоа растојание е 1,
- точката C е еднакво оддалечена од точките B и D и тоа растојание е еднакво на $\frac{1}{2}$,
- растојанието меѓу точките B и E е 2.

Определи ги преостанатите растојанија меѓу овие точки.

Решение. Според условот на задачата точките B, C, D, E лежат на кружницата со центар A и радиус 1, а BE е дијаметар на оваа кружница. Треба да ги определиме должините на отсечките BD, CE и DE.



Според Талесовата теорема $\measuredangle ECB$ е прав, па затоа триаголникот CEB е правоаголен и од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CE} = \sqrt{\overline{BE}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Понатаму, четириаголникот $ABCD$ е делтоид, па затоа $AC \perp BD$, т.е. AP, каде P е пресекот на AC и BD, е висина на триаголникот ABC. Нека N е подножјето на висината на триаголникот ABC спуштена од темето A. Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа

$$\overline{AN}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CN}^2}=\sqrt{1^2-(\tfrac{1}{4})^2}=\tfrac{\sqrt{15}}{4}.$$

Сега,

$$P_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AN}}{2}=\frac{\overline{BP}\cdot\overline{AC}}{2}\text{, т.е. }\overline{BP}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AN}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}{1}=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Понатаму,

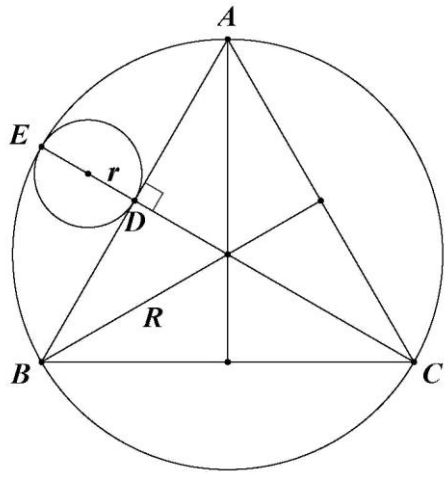
$$\overline{BD}=2\overline{BP}=2\cdot\tfrac{\sqrt{15}}{8}=\tfrac{\sqrt{15}}{4}.$$

Конечно, според Талесовата теорема $\measuredangle EDB$ е прав, т.е. триаголникот DEB е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{DE}=\sqrt{\overline{BE}^2-\overline{BD}^2}=\sqrt{2^2-(\tfrac{\sqrt{15}}{4})^2}=\tfrac{7}{4}.$$

91. Околу рамностран триаголник ABC е опишана кружница. Помала кружница внатрешно ја допира поголемата кружница и страната AB на триаголникот ABC. Определи го односот на плоштините на поголемиот и помалиот круг ограничени со овие кружници.

Решение. Со a да ја означиме должината на страната на рамностраниот триаголник ABC, со R радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и со r радиусот на помалата кружница (цртеж десно).



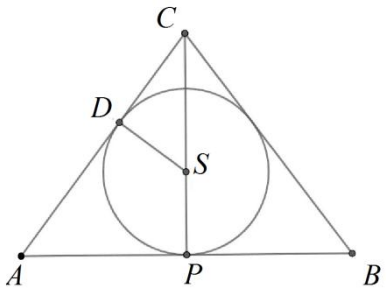
Висината на рамностраниот триаголник е $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Но, висината е и тежишна линија и затоа $R=\frac{2}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Понатаму, $R=2r+\frac{h}{3}$, т.е. $r=\frac{1}{2}(R-\frac{h}{3})=\frac{1}{2}(\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{6})=\frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Плоштините на двата круга се $P=\pi R^2=\frac{\pi a^2}{3}$ и $P'=\pi r^2=\frac{\pi a^2}{48}$, па нивниот однос е $P:P'=16:1$

92. Односот на должината на основата на рамнокрак триаголник и радиусот на впишаната кружница во тој триаголник е еднаков на $4:1$.

Определи го односот на плоштините на триаголникот и впишаната во него кружница.

Решение. Со S да го означиме центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC, со P средината на основата AB и со D допирната точка на кружницата и кракот AC, види цртеж



Од условот на задачата следува $\overline{AP}=2r$. Триаголниците APS и ASD се правоаголни со заедничка хипотенуза и еднакви катети, па затоа тие се складни. Според тоа, $\overline{AD}=2r$. Со b да ја означиме должината на кракот на триаголникот ABC. Триаголниците APC и SDC се правоаголни и имаат заеднички остар агол, па затоа тие се слични. Според тоа,

$$2=\frac{2r}{r}=\frac{h}{b-2r}=\frac{b}{h-r}.$$

Оттука следува

$$h=2(b-2r) \text{ и } b=2(h-r),$$

па затоа

$$h=2(2h-2r-2r)=4h-8r,$$

т.е.

$$h=\frac{8r}{3}.$$

Конечно, бараниот однос на плоштините е

$$P':P''=\frac{4r\cdot\frac{8}{3}2}{2}:(r^2\pi),$$

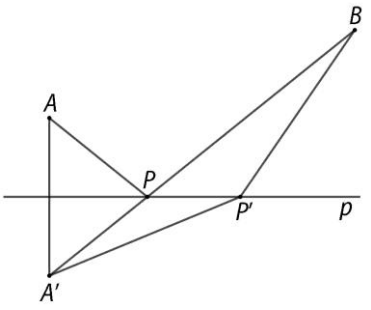
т.е.

$$P':P''=16:(3\pi).$$

V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

93. Даден се точки $A(0,4)$ и $B(-1,5)$. На правата $y=-x$ определи точка P таква што збирот на должините на отсечките AP и BP е најмал.

Решение. Нека е дадена права p и точки A и B надвор од неа. Ќе докажеме дека збирот на должините на отсечките AP и BP е најмал ако $P=p\cap A'B$, каде A' е точка симетрична на точката A во однос на правата p. Нека $P'\neq P$ е точка од правата p. Тогаш

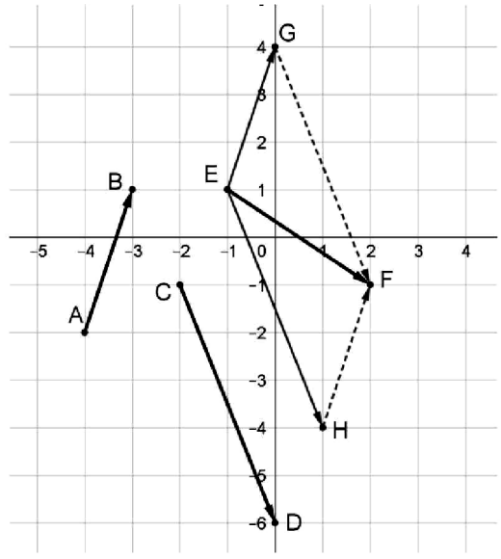


$$\overline{AP'}+\overline{P'B}=\overline{A'P'}+\overline{P'B}>\overline{A'B}=\overline{A'P}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB}.$$

Точката симетрична на точката A во однос на правата $y=-x$ е $A'(-4,0)$. Равенката на правата $A'B$ е $y=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$, а нејзиниот пресек со правата $y=-x$ е точката $P(-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$.

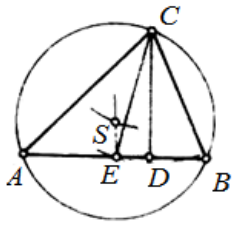
94. Во правоаголен координатен систем во рамнината се дадени точките $A(-4,-2), B(-3,1), C(-2,-1), D(0,-6)$ и $E(-1,1)$. Нацртај вектор еднаков на векторот $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ така што точката E е неговата почетна точка. Определи ги координатите на крајната точка F на така добиениот вектор $\overrightarrow{EF}$.

Решение. На цртежот десно е даден координатен систем во кој се нацртани дадените точки и векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Потоа векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ги транслатираме во точката E и користејќи го правилото на паралелограм го цртаме векторот $\overrightarrow{EF}$. Конечно добиваме $F(2,-1)$.



95. Конструирај триаголник ако се дадени висината и тежишната линија кои соодветствуваат на иста страна и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. Нека се дадени h_c, t_c и радиусот r на опишаната кружница (цртеж десно). Прво го конструираме правоаголниот триаголник CDE така што прво го конструираме правиот агол во темето D, потоа катетата $\overline{CD} = h_c$, па во пресекот на кружницата со радиус t_c и центар C, и правата на која лежи страната AB ја добиваме точката E. Бидејќи E е средина на страната AB, нормалата на страната во точката E ќе биде симетрала на страната AB. На оваа нормала наоѓаме точка S таква што $\overline{CS} = r$. Точката s е центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC. Ја конструираме оваа кружница и во пресек со правата ED ги наоѓаме темињата A и B.

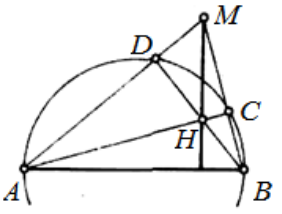


96. Дадена е кружница k и нејзин дијаметар AB. Центарот на кружницата не е означен. Од дадена точка M повлечи нормала на правата AB користејќи само еден линијар. Разгледај ги случаите кога

а) точката M е надвор од дадената кружница,

б) точката M е внатре во дадената кружница.

Решение. а) Ако ги повлечеме отсечките MA и MB (цртеж десно), го добиваме триаголникот ABM. Точките C и D во кои MB и MA ја сечат кружницата се подножја на висините на триаголникот ABM (периферискиот агол над дијаметарот е прав агол). Точката H во која се сечат AC и BD е ортоцентар на триаголникот ABM, па затоа MH е бараната нормала.



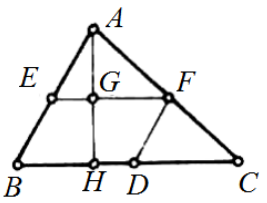
б) Кога точката M е во кружницата, точките M и H ги менуваат улогите.

97. Конструирај триаголник ABC ако се дадени средината F на страната AC, средината D на страната BC и подножјето H на висината повлечена од темето A на страната BC.

Решение. Нека триаголникот ABC е конструиран и нека D, F и H се дадените точки (цртеж долу десно). Нека E е средината на стра-

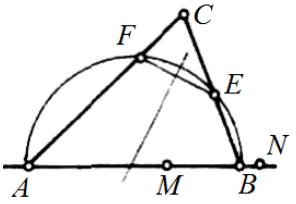
ната AB. Тогаш $EF \| BC$ и ја полови висината AH. Сега конструкцијата е очигледна.

Низ точката H повлекуваме права нормална на правата HD и во точката F повлекуваме права паралелна со правата HD. Во пресекот на овие две прави ја добиваме точката G која е средина на висината, па лесно ја конструираме точката A. Понатаму $AB \| FD$, а во пресекот на правите AF и DH е точката C.



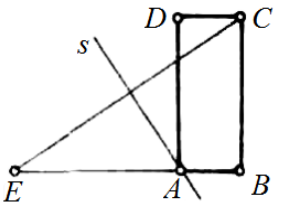
98. Конструирај триаголник ABC ако се дадени подножјето E на висината повлечена од темето A кон страната BC, подножјето F на висината повлечена од темето B кон страната AC и две произволни точки M и N од правата AB

Решение. Според условот на задачата важи $\measuredangle AEB = \measuredangle AFB = 90^\circ$, па затоа кружницата чиј дијаметар е страната AB ги содржи точките E и F. Страната AB припаѓа на правата MN, па затоа симетралата на отсечката EF ја сече правата MN во центарот на споменатата кружница. Ја конструираме оваа кружница и во пресекот со правата MN ги добиваме точките A и B. Конечно, во пресекот на правите AF и BE ја добиваме точката C.



99. Дадена е страната $b = 10\,cm$ и збирот на дијагоналата и другата страна на правоаголник $a + d = 15\,cm$. Конструирај го овој правоаголник.

Решение. Нека $ABCD$ е даденият правоаголник (цртеж десно). Нека $\overline{BC} = 10\,cm$. Ја продолжуваме страната AB преку темето A и на продолжението ја определуваме точката E така што $\overline{AE} = \overline{AC}$. Според условот на задачата $\overline{BE} = 15\,cm$. Сега бараната конструкција е очигледна.



Прво го конструираме правоаголниот триаголник BCE со катети $\overline{BC} = 10\,cm$ и $\overline{BE} = 15\,cm$. Точката A е еднакво оддалечена од точките E и C, па затоа во пресекот на правата BE и симетралата на

отсечката EC е точката A. Останува уште да го конструираме четвртото теме D на правоаголникот.

100. Дадена е права p и две точки D и M такви што $D \in p$ и $M \notin p$. Конструирај кружница која минува низ точката M и во точката D ја допира правата p.

Решение. Центарот S на кружницата е во пресекот на нормалата на правата p повлечена во точката D и симетралата ма отсечката MD, а нејзиниот радиус е еднаков на $\overline{SD}$.

101. Дадена е кружница k и две точки E и M такви што $E \in k$ и $M \notin k$. Конструирај кружница која ја допира кружницата k во точката E и минува низ точката M.

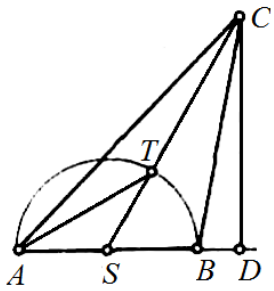
Решение. Со O да го означиме центарот на дадената кружница. Центарот S на бараната кружница е пресекот на правата OE и симетралата на отсечката EM, а нејзиниопт радиус е еднаков на $\overline{SM}$.

102. Тежиштето T на триаголникот ABC припаѓа на кружницата конструирана над страната AB како над дијаметар и важи $\measuredangle TAB = 30^\circ$.

а) Конструирај го триаголникот ABC ако $\overline{AB} = c = 8\,cm$.

б) Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

Решение. а) Прво конструираме полукружница над дијаметар AB и во точката A конструираме агол над AB еднаков на 30°. Во пресекот на вториот крак на овој агол и полукружницата е тежиштето T. Ја определуваме средината S на AB и ја повлекуваме полуправата ST на која определуваме точка C таква што $\overline{SC} = 3\overline{ST}$, со што триаголникот ABC е конструиран.



б) Нека CD е висина на триаголникот ABC повлечена кон страната AB. Триаголникот ABT е правоаголен, па затоа $\overline{ST} = \frac{c}{2}$. Понатаму, $\overline{SC} = \frac{3c}{2}$ и како $\measuredangle CSD = \measuredangle TSB = 60^\circ$, добиваме дека

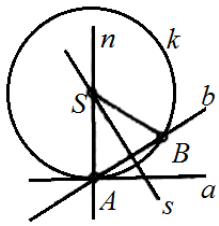
$$\overline{CD} = \frac{\overline{SC}\sqrt{3}}{2} = \frac{3c\sqrt{3}}{4}.$$

Конечно, за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P=\frac{1}{2}\frac{3c\sqrt{3}}{4}c=\frac{3c^2\sqrt{3}}{8}=24\sqrt{3}\,cm^2.$$

103. Правите a и b се сечат во точката A под агол од 30° и на правата b е земена точка B така што $\overline{AB}=4\,cm$. Конструирај кружница која минува низ точката B, а правата a ја допира во точката A. Пресметај ги периметарот и плоштината на кругот определен со оваа кружница.

Решение. Бараната кружница ја допира правата a во точката A, па затоа нејзиниот центар припаѓа на нормалата n на правата a во точката A. Понатаму, кружницата минува низ точките A и B, па затоа нејзиниот центар припаѓа на симетралата s на отсечката AB. Значи, $S=s\cap n$ и $r=\overline{SA}$ (цртеж десно).



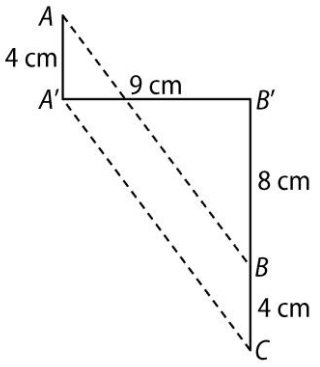
Имаме $\measuredangle aAb=30^\circ$, па затоа $\measuredangle SAB=60^\circ$ и како $r=\overline{SA}=\overline{SB}$ заклучуваме дека триаголникот ABS е рамностран. Оттука добиваме дека $r=4\,cm$, па затоа $O=2r\pi=8\pi\,cm$ и $P=\pi r^2=16\pi\,cm^2$.

V.5. СТЕРЕОМЕТРИЈА

104. Точките A и B се наоѓаат на различни страни на рамнината α. Точката A од рамнината α е оддалечена $4\,cm$. Точката B од рамнината α е оддалечена $8\,cm$. Определи ја должината на отсечката AB, ако должината на нејзината ортогонална проекција е еднаква на $9\,cm$.

Решение. Со A' и B' да ги означиме ортогоналните проекции на точките A и B на рамнината α (цртеж десно). Нека C е точка на правата BB' таква што $\overline{BC}=4\,cm$ и четириаголникот $A'CBA$ е паралелограм. Тогаш важи $\overline{A'C}=\overline{AB}$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{A'C}=\sqrt{\overline{A'B'}^2+\overline{B'C}^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15\,cm.$$



105. Ако ширината на еден квадар се зголеми за 25%, должината се зголеми за една своја третина и висината се намали за 10%, за колку проценти ќе се зголеми волуменот на тој квадар?

Решение. Ако a,b и c се димензиите на даден квадар, тогаш димензиите на новиот квадар ќе биудат $1,25a,\frac{4}{3}b$ и $0,90c$, па затоа неговиот волумен ќе биде $V'=1,25a\cdot\frac{4}{3}b\cdot 0,9c=1,5abc=1,5V$. Значи, новиот квадар ќе има 50% поголем волумен од почетниот квадар.

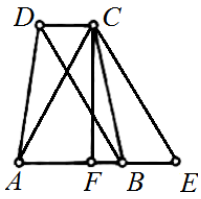
106. Димензиите на еден квадар се $3\,cm,4\,cm$ и $12\,cm$. Определи го раб на коцка таква што плоштините на овие две тела се однесуваат како нивните волумени.

Решение. За даден квадар имаме $P=192\,cm^2$ и $V=144\,cm^3$, а за коцка со раб a имаме $P'=6a^2$ и $V'=a^3$. Работ на коцката ќе го пресметаме од пропорцијата $6a^2:a^3=192:144$, од каде добиваме $a=4,5\,cm$.

107. Определи го волуменот на права призма со висина $5\,cm$ и основа

трапез $ABCD$ со дијагонали $\overline{AC}=17\,cm$ и $\overline{BD}=113\,cm$, а висината на трапезот е $15\,cm$.

Решение. Нека E е точка на продолжението на основата AB преку темето B таква што $\overline{BC}=\overline{CD}$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{CD}$. Нека CF е заедничката висина на триаголникот AEC и дадениот трапез. По конструкција четириаголникот $BECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{CE}=\overline{BD}$. Сега, од правоаголните триаголници AFC и BCE имаме $\overline{AF}^2=\overline{AC}^2-\overline{CF}^2=64$, па е $\overline{AF}=8\,cm$ и $\overline{EF}^2=\overline{CE}^2-\overline{CF}^2=12544$, па е $\overline{EF}=112\,cm$. Оттука добиваме $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AE}=\overline{AF}+\overline{FE}=120\,cm$. Конечно, плоштината на трапезот е $B=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=\frac{120}{2}\cdot 15=900\,cm^2$. Значи, волуменот на дадената призма е $V=BH=900\cdot 5=4500\,cm^3$.



108. Парче мраз добиено од дестилирана вода, кое има форма на квадар со димензии $0,6\,m$, $0,6\,m$ и $0,4\,m$, е ставено во цилиндричен сад со дијаметар $90\,cm$. Колкава ќе биде висината на слојот на водата во тој сад откако мразот ќе се стопи? Специфичната тежина на мразот е $0,92\,g/cm^3$.

Решение. Тежината на мразот ќе ја пресметаме така што волуменот ќе го помножиме со специфичната тежина. Имаме

$$T=0,6^2\cdot 0,4\,m^3\cdot 0,92\,g/cm^3=132480\,g.$$

Бидејќи специфичната тежина на водата е $1\,g/cm^3$, добиваме дека тежината на мразот е еднаква на волуменот на водата по топењето. Значи, длабочината на водата во цилиндричниот сад (висината на цилиндарот) е

$$H=T:\pi r^2\approx 132480:636171975\approx 20,82\,cm.$$

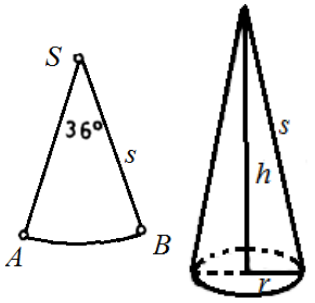
109. Сад во форма на рамностран цилиндар, кој има дијаметар $10\,cm$, е наполнет со вода до $\frac{11}{12}$ од неговата висина. Определи го радиусот на најголемата топка која може да се потопи во водата и да не дојде до прелевање на водата.

Решение. Висината на рамностраниот цилиндар е еднаква на дијаметарот, па затоа висината на неисполнетиот дел од садот е $\frac{1}{12}\cdot 10=\frac{5}{6}\,cm$. Волуменот на топката која треба да се потопи може да биде најмногу еднаков на волуменот на неисполнетиот дел од садот. Сега, ако r е радиусот на топката, добиваме $\frac{4}{3}\pi r^3=5^2\pi\cdot\frac{5}{6}$, па затоа $r^3=\frac{125}{8}$, од каде добиваме $r=2,5\,cm$.

110. Вода која се наоѓа во конусен сад со висина $0,18\,m$ и дијаметар на основата $0,24\,m$, се претура во цилиндричен сад со дијаметар на основата $0,1\,m$. До која висина ќе се наоѓа водата во цилиндричниот сад?

Решение. Сите пресметувања ќе ги направиме во сантиметри. Волуменот на водата во конусниот сад е $V=\frac{\pi}{3}\cdot 12^2\cdot 18=864\pi\,cm^3$. Ако со h ја означиме висината на водата во цилиндричниот сад, изразена во сантиметри, тогаш го добиваме равенството $5^2\pi h=864\pi$, од каде добиваме $h=34,56\,cm$.

111. Омотачот на правилен конус е развиен во рамнина и е добиен кружен исечок со централен агол 36° и плоштина $110\pi\,cm^2$. Определи ги плоштината и волуменот овој конус.



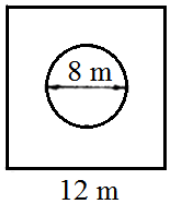
Решение. Нека со r,h,s ги означиме радиусот на основата, висината и изводницата на конусот. Од условот на задачата за плоштината на омотачот ја добиваме равенката $\frac{36\pi s^2}{360}=110\pi$, од каде добиваме $s=10\sqrt{11}\,cm$. Понатаму, лакот AB е еднаков на периметарот на основата, па затоа $2r\pi=\frac{10\sqrt{11}\cdot 36\pi}{180}$, односно $r=\sqrt{11}\,cm$. За плоштината на конусот добиваме $P=11\pi+110\pi=121\pi$. Понатаму, $h=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{1089}=33\,cm$, па затоа волуменот на конусот е $V=\frac{\pi}{3}r^2h=121\pi\,cm^3$.

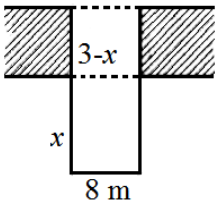
112. Основата на конусот има плоштина $7\pi\,cm^2$. Кога ќе се развие омотачот на конусот се добива осмина круг. Определи ги плоштината и волуменот на овој конус.

Решение. Од $r^2\pi = 7\pi$ добиваме $r = \sqrt{7}\,cm$. Кога ќе се развие омотачот се добива кружен исечок со лак $2r\pi$ и радиус s. Од условот на задачата следува дека $\frac{1}{8}s^2\pi = \frac{1}{2}2rs\pi$, од каде добиваме $s = 8r = 8\sqrt{7}$. Сега висината на конусот е $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{441} = 21\,cm$. Конечно, за плоштината на конусот се добива $P = 63\pi\,cm^2$, а за волуменот на конусот се добива $V = 49\pi\,cm^3$.

113. На земјиште во форма на квадрат со страна $12\,m$ се копа цилиндрична јама со дијаметар $8\,m$. Ископаната земја рамномерно се растура на преостанатиот дел од земјиштето и силно се набива. Колку длабоко треба да копаме за да јамата биде длабока $3\,m$.

Решение. Плоштината на земјиштето на кое се растура ископаната земја е еднаква на $144 - 16\pi\,m^2$, цртеж десно. Ако со x ја означиме длабочината на копањето, тогаш дебелината на слојот набиена земја ќе биде $3 - x$ (на цртежот лево тоа е штрафираниот дел). Понатаму, волуменот на набиената земја треба да е еднаков на волуменот на ископаната земја, па затоа точна е равенката $16\pi x = (144 - 16\pi)(3 - x)$, од каде добиваме $144x = 432 - 48\pi$. Решението на последната равенка е $x = 3 - \frac{\pi}{3} \approx 1{,}95\,m$. Според тоа, за да јамата биде длабока $3\,m$ треба да се копа $1{,}95\,m$.

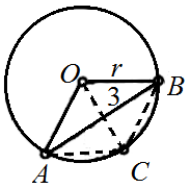




114. Рамнина нормална на основата на прав цилиндар отсекува на основата тетива долга $6\,cm$. На оваа тетива и соодветствува централен агол од 120°. Определи го волуменот на помалиот дел на цилиндарот, поделен со оваа рамнина, ако висината на цилиндарот е еднаква на дијаметарот на основата.

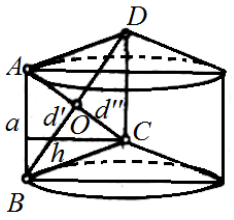
Решение. На цртежот долу десно е прикажан пресекот на дадената рамнина со основата на цилиндарот. Висината на рамностраниот

триаголник OBC со страна r е еднаква на $3\,cm$, па затоа $\frac{r\sqrt{3}}{2}=3$, од каде добиваме $r=2\sqrt{3}\,cm$. Според тоа, висината на цилиндерот е $h=2r=4\sqrt{3}$. Плоштината на кружниот отсечок отсечен со тетивата AB е $P'=\frac{1}{3}r^2\pi-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}=(4\pi-3\sqrt{3})\,cm^2$, па затоа бараниот волумен е $V=P'h=(16\pi\sqrt{3}-36)\,cm^3$.



115. Ромб со дијагонали $8\,cm$ и $6\,cm$ ротира околу едната своја страна. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

Решение. Бидејќи дијагоналите на ромбот се нормални меѓу себе и се половат, од правоаголниот триаголник ABO за страната на ромбот добиваме $a=\sqrt{(\frac{d'}{2})^2+(\frac{d''}{2})^2}=5\,cm$. Плоштината на ромбот е $P=\frac{d'd''}{2}=ah$, од каде добиваме $h=4{,}8\,cm$.



Ротационото тело е цилиндар во кој од едната страна е издлабен конус, а од другата страна истиот тој конус е додаден. Според тоа, $V=V_c=h^2a\pi=115{,}2\pi\,cm^3$. Плоштината на телото е еднаква на збирот на плоштината на омотачот на цилиндарот и две плоштини на конусите, па затоа $P=M_c+2M_k=96\pi\,cm^2$.

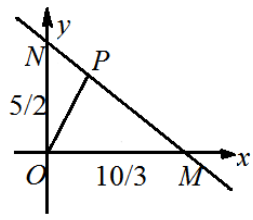
116. Дадена е права со равенка $3x+4y=10$. Определи ги:

а) должината на отсечокот MN на таа права меѓу координатните оски,

б) растојанието од координатниот почеток до таа права,

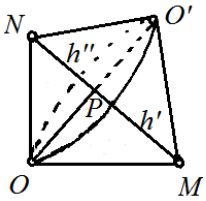
в) волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот MNO околу страната MN.

Решение. Ќе ги определиме пресеците на правата со кординатните оски. За $x=0$ добиваме $4y=10$, т.е. $y=\frac{5}{2}$, а за $y=0$ добиваме $x=\frac{10}{3}$.



а) Имаме $\overline{MN}=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{ON}^2}=\sqrt{\frac{625}{36}}=\frac{25}{6}$.

б) За плоштината на триаголникот OMN имаме $P=\frac{\overline{OM}\cdot\overline{ON}}{2}=\frac{\overline{OP}\cdot\overline{MN}}{2}$, и $\overline{OP}=\frac{\overline{OM}\cdot\overline{ON}}{\overline{MN}}=\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{3}}{\frac{26}{6}}=2$ е бараното растојание.



в) Со ротација на триаголникот OMN околу MN се добиваат два конуси со заедничка основа со радиус $r=\overline{OP}=2$ (види цртеж). Оттука следува

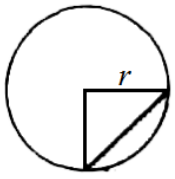
$$V=\tfrac{1}{3}r^2\pi h'+\tfrac{1}{3}r^2\pi h''=\tfrac{1}{3}r^2\pi(h'+h'')=\tfrac{1}{3}r^2\pi\cdot\overline{MN}=\tfrac{1}{3}\cdot 4\pi\cdot\tfrac{25}{6}=\tfrac{50\pi}{9}.$$

117. Паралелно со оската на прав цилиндар е поставена рамнина која основата на цилиндарот ја сече во тетива која соодветствува на централен агол од 90°.

а) Определи го односот на волумените на деловите на кои е поделен цилиндарот.

б) Определи го односот на плоштините на деловите на кои е поделен цилиндарот, ако цилиндарот е рамностран.

Решение. а) Двата дела на цилиндарот имаат заедничка висина (висината на цилиндарот), па затоа нивните волумени се однесуваат како плоштините на деловите на кругот кои се бази на двете тела. Поголемиот отсечок е збир на $\frac{3}{4}$ од кругот и $\frac{1}{2}$ од квадрат со страна r, т.е. $B'=\frac{3}{4}r^2\pi+\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{4}r^2(3\pi+2)$. Помалиот дел од кругот е $B''=B-B'=\frac{1}{4}r^2(\pi-2)$. Затоа



$$V':V''=B':B''=(3\pi+2):(\pi-2).$$

б) Бидејќи цилиндарот е рамностран, за плоштините на деловите имаме

$$P'=2B'+M'=\tfrac{1}{2}r^2(3\pi+2)+2r(\tfrac{3}{4}\cdot 2\pi r+r\sqrt{2})=r^2(\tfrac{9\pi}{2}+1+2\sqrt{2}),$$

$$P''=2B''+M''=\tfrac{1}{2}r^2(\pi-2)+2r(\tfrac{1}{4}\cdot 2\pi r+r\sqrt{2})=r^2(\tfrac{3\pi}{2}-1+2\sqrt{2}).$$

Според тоа, $P':P''=(9\pi+2+4\sqrt{2}):(3\pi-2+4\sqrt{2})$.

118. Дадена е отсечка $\overline{MN}=2a$.

а) Конструирај полукружница над дијаметар MN и на неа определи точка P која оваа полукружница ја дели во однос $1:2$.

б) Изрази ги периметарот и плоштината на триаголникот MNP во функција од a.

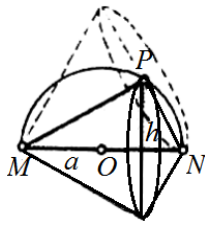
в) Определи ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот MNP околу страната MN.

г) Определи го односот на волумените на телата кои се добиваат со ротација на триаголникот MNP околу страните MN и MP.

Решение. а) Бидејќи точката P ја дели полукружницата во однос 1:2 добиваме дека $\measuredangle PON = 60^\circ$, т.е. триаголникот ONP е рамностран. Значи $\overline{PN} = a = \frac{\overline{MN}}{2}$.

б) Триаголникот ONP е рамностран, па затоа триаголникот MNP има висина $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и плоштина $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. За страните на триаголникот MNP имаме $\overline{MN} = 2a$, $\overline{PN} = a$ и $\overline{MP} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, па затоа неговиот периметар е $L = a(3+\sqrt{3})$.

в) Добиеното тело се состои од два споени конуси со изводници a и $a\sqrt{3}$, радиуси $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и висини $\frac{a}{2}$ и $\frac{3a}{2}$. За плоштината на ова тело имаме



$$P = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \pi a + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \pi a\sqrt{3} = \frac{a^2\pi}{2}(3+\sqrt{3}),$$

а за волуменот добиваме

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \pi \cdot 2a = \frac{a^3\pi}{2}.$$

г) Со ротација околу MP се добива конус со радиус $\overline{PN} = a$ и висина $\overline{MP} = a\sqrt{3}$. Според тоа, $V' = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}$, па затоа $V : V' = \frac{a^3\pi}{2} : \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

119. Триаголник е ограничен со апсцисната оска и правите чии равенки се $5x+12y=60$ и $3x+4y=12$. Определи ги:

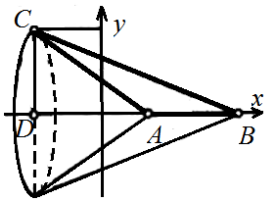
а) координатите на темињата на овој триаголникот,

б) плоштината на овој триаголник,

в) периметарот на овој триаголник,

г) волуменот и плоштината на телото кое се добива со ротација на овој триаголник околу апсцисната оска.

Решение. а) Двете темиња се во пресекот на дадените прави со апсцисната оска, а третото теме е во пресекот на правите (цртеж десно). Лесно се добива дека $A(4,0)$, $B(12,0)$ и $C(-6,\frac{15}{2})$.



б) Основата на триаголникот е $\overline{AB}=12$, а неговата висина е $\overline{CD}=\frac{15}{2}$, па затоа плоштината на триаголникот е $P=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{15}{2}=30$.

в) Должините на страните AC и BC се хипотенузи на правоаголните триаголници ACD и ABD, па затоа $\overline{AC}=\frac{25}{2}$ и $\overline{BC}=\frac{39}{2}$. Според тоа, периметарот на триаголникот ABC е $L=8+\frac{25}{2}+\frac{39}{2}40$.

г) Со ротација на триаголникот ABC околу апсцисата се добива конус од кој е издлабен друг конус со иста основа. Радиусите на основите на овие два конуси се $\overline{CD}=\frac{15}{2}$, нивните висини се $\overline{AD}=10$ и $\overline{BD}=18$, а нивните изводници се $\overline{AC}=\frac{25}{2}$ и $\overline{BC}=\frac{39}{2}$. Според тоа, волуменот на телото кое се добива е

$$V=\tfrac{1}{3}(\tfrac{15}{2})^2\pi\cdot(18-10)=150\pi,$$

а неговата плоштина е

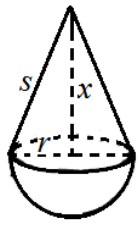
$$P=\tfrac{15}{2}\pi(\tfrac{25}{2}+\tfrac{39}{2})=240\pi$$

120. Чиграта се состои од полутопка и конус кои имаат заедничка основа (круг). Радиусот на полутопката е $2\,dm$, а висината на конусот во сантиметри е решение на равенката

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{2x+\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}}+x+10=0.$$

Определи ги плоштината и волуменот на чиграта.

Решение. Решението на дадената равенка е $x=50\,cm=5\,dm$. Изводницата на конусот е $s=\sqrt{r^2+x^2}=\sqrt{29}$.



Сега имаме

$$P=2\pi r^2+\pi rs=2\pi(4+\sqrt{29})\,dm^2$$

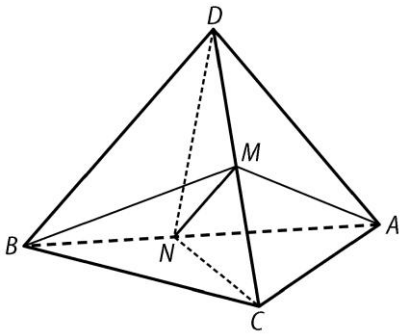
и

$$V = \frac{2r^3\pi}{3} + \frac{r^2 x\pi}{3} = 12\pi\, dm^3.$$

121. Дадена е тристрана пирамида $ABCD$ со рабови $\overline{AB} = 5\,cm$, $\overline{AC} = 3\,cm$, $\overline{BC} = 4\,cm$, $\overline{BD} = 4\,cm$, $\overline{AD} = 3\,cm$, $\overline{CD} = \frac{12}{5}\sqrt{2}\,cm$. Рамнината, која минува низ правата AB и е нормална на CD, ја сече отсечката CD во точката M. Рамнината, која минува низ правата CD и е нормална на AB, ја сече AB во точката N. Определи ја должината на отсечката MN.

Решение. Од обратната Питагорова теорема следува дека триаголниците ABC и ABD се правоаголни. Понатаму, триаголниците BCD и ACD се рамнокраки со основа CD.

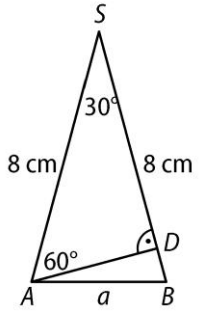
Рамнината која ја содржи правата AB и е нормална на CD ја сече оваа отсечка во нејзината средина (AM и BM се висини на рамнокраки триаголници со темиња при врвот).



Точката N е заедничко подножје на висините од темињата C и D на AB во триаголниците ABC и ABD. Бидејќи висините CN и DN се еднакви (висини од темињата на правите агли на складни триаголници), добиваме дека MN е висина на рамнокракиот триаголник CDN. Од $\overline{CN} = \overline{DN} = \frac{12}{5}\,cm$, добиваме

$$\overline{MN} = \sqrt{(\tfrac{12}{5})^2 - (\tfrac{12}{10}\sqrt{2})^2} = \frac{6}{5}\sqrt{2}\,cm.$$

122. Бочниот ѕид на правилна тристрана пирамида е рамнокрак триаголник со агол од 30° при врвот. Должината на бочниот раб е $8\,cm$. Определи ја плоштината на оваа пирамида.



Решение. Со a да го означиме основниот раб на пирамидата $ABCS$ (цртеж десно). Триаголникот ADS е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AD} = 4\,cm$. Плоштината на бочниот ѕид ABS

е еднаква на $\frac{\overline{BS}\cdot\overline{AD}}{2}=16cm^2$, па затоа плоштината на омотачот на пирамидата е $M=3\cdot 16=48\,cm^2$. Од триаголникот ADS имаме

$$\overline{DS}=\sqrt{\overline{AS}^2-\overline{AD}^2}=4\sqrt{3}\,cm.$$

Понатаму, од триаголникот ABD следува

$$a^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=4^2+(8-4\sqrt{3})^2=64(2-\sqrt{3})\,cm^2,$$

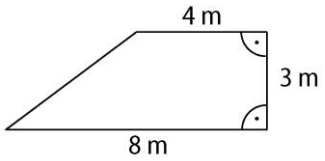
па затоа плоштината на основата е

$$B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=16(2\sqrt{3}-3)\,cm^2.$$

Конечно, плоштината на пирамидата е

$$P=B+M=32\sqrt{3}\,cm^2.$$

123. За основа на бетонски столб, столбот е во вид на права призма, потребно е да се ископа дупка длабока $1,5\,m$(основата е прикажана на цртежот десно). За колку часови дупката ќе ја ископаат тројца работници ако секој од нив копа по $0,75\,m^3$ за еден час?



Решение. Волуменот на дупката е

$$V=\frac{8+4}{2}\cdot 3\cdot 1,5=27\,m^3.$$

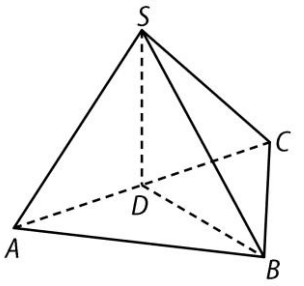
Тројца работници за еден час ископуваат $3\cdot 0,75=2,25\,m^3$ земја. Според тоа, дупката ќе биде ископана за $27:2,25=12$ часа.

124. Основата на права четиристрана призма е ромб со страна со должина $12\,cm$ и остар агол 60°. Определи го волуменот на оваа призма ако висината е еднаква на половина од подолгата дијагонала на ромбот во основата.

Решение. Плоштината на основата е еднаква на збирот на плоштините на два рамностран триаголници со должина на страна $12\,cm$, што значи дека $B=72\sqrt{3}\,cm^2$. Подолгата дијагонала е два пати поголема од висината на рамностраниот триаголник со страна $12\,cm$, што значи дека $d'=12\sqrt{3}\,cm$. Конечно, волуменот на призмата е $V=Bh=B\cdot\frac{d'}{2}=1296\,cm^3$.

125. Основата на тристрана пирамида $ABCS$ е рамнокрак правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B, а нормалната проекција на врвот S на рамнината на основата е средината D на работ AC. Ако бочниот ѕид ACS е правоаголен триаголник со прав агол во темето S и $\overline{SD}=\sqrt{2}\,cm$, определи ја плоштината на пирамидата $ABCS$.

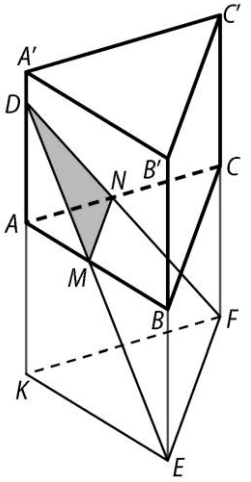
Решение. Точката S се наоѓа на симетралата на страната AC, па затоа $\overline{AS}=\overline{CS}$. Според тоа, триаголникот ACS е рамнокрак правоаголен, па затоа триаголниците ABC и ACS се складни и плоштината на секој од нив е $\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=2\,cm^2$. Триаголниците SDC и SDB се рамнокраки правоаголни, па со примена на Питагоровата теорема добиваме дека $\overline{SC}=\overline{SB}=\overline{SA}=\overline{BC}=\overline{BA}=2\,cm$. Оттука следува дека триаголниците ABS и BCS се рамностранни и плоштината на секој од нив е еднаква на $\sqrt{3}\,cm^2$. Конечно, плоштината на пирамидата е



$$P=2(P_{\triangle ABC}+P_{\triangle ABS})=2(2+\sqrt{3})\,cm^2.$$

126. Дадена е правилна тристрана призма $ABCA'B'C'$. Нека D е точка на работ AA' таква што $\overline{AD}:\overline{DA'}=4:1$. Нека E и F се односиметрични точки на темињата B' и C' во однос на правата BC. Во кој однос рамнината DEF го дели волуменот на призмата?

Решение. Нека a е основниот раб, а H е висината на призмата $ABCA'B'C'$. Тогаш волуменот на призмата $ABCA'B'C'$ е $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$. Рамнината DEF ја дели призмата $ABCA'B'C'$ на два дела, еден од кои е тристраната пирамида $DAMN$ (цртеж десно). Нека K е точка на правата AA', симетрична на точката A' во однос на точката A. Тогаш триаголниците ABC и KEF се складни. Нека отсечките DE и DF ги сечат рабовите AB и AC соодветно во точките M и N. Триаголниците DKE и DAM се слични (имаат заеднички агол кај темето D



и аглите кај темињата A и K се прави). Триаголникот AMN е рамностран. Да ја означиме неговата страна со x. Тогаш $a:x=\overline{KD}:\overline{AD}$, односно

$$a:x=(\tfrac{9}{5}H):(\tfrac{4}{5}H),$$

па затоа $x=\frac{4}{9}a$. Значи, волуменот на пи-рамидата $DAMN$ е

$$V'=\frac{(\frac{4}{9}a)^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\frac{4}{5}H}{3}=\frac{16}{1215}a^2H\sqrt{3},$$

а волуменот на преостанатиот дел на призмата е

$$V''=V-V'=\frac{1151}{4860}a^2H\sqrt{3}.$$

Конечно, бараниот однос е $V':V''=64:1151.$

127. Малиот дијагонален пресек на правилна шестстрана пирамида е рамностран триаголник со периметар $18\sqrt{3}\,cm$. Определи го волуменот на оваа пирамида.

Решение. Со a да го означиме работ на основата на пирамидата. Тогаш пократката дијагоннала на правилниот шестаголник е еднаква на $a\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 18\sqrt{3}$, па затоа $a=6\,cm$. Висината на пирамидата е

$$H=\sqrt{(a\sqrt{3})^2-a^2}=a\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,cm.$$

Конечно, волуменот е

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}\cdot a\sqrt{2}=108\sqrt{6}\,cm^3.$$

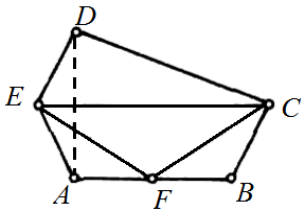
128. Определи го волуменот на правилна осумстрана призма чиј најголем дијагонален пресек е квадрат со должина на страна $12\,cm$.

Решение. Висината на призмата и надолгата дијагонала на основата се еднакви на $12\,cm$. Правилниот осумаголник се состои од четири складни делтоиди чии дијагонали се еднакви на $6\,cm$ и $6\sqrt{2}\,cm$, па затоа плоштината на основата е $B=72\sqrt{2}\,cm^2$. Конечно, волуменот на призмата е $V=BH=864\sqrt{2}\,cm^3$.

V.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

129. Во петаголникот $ABCDE$ важи $\overline{AB}=2\overline{BC}=2\overline{DE}=2\overline{AE}=6\,cm$ и $\sphericalangle A=\sphericalangle B=\sphericalangle E=120^\circ$. Определи ја плоштината на овој петаголник.

Решение. Нека F е средината на страната AB на петаголникот $ABCDE$. Тогаш триаголниците AFE, FBC и ADE се рамнокраки, кои се складни, должините на нивните краци се $3\,cm$ и должините на нивните основи се $3\sqrt{3}\,cm$ (секој од овие триаголници расечен по симетралата на неговата основа се дели на две половини на рамностран триаголник со должина на страна $3\,cm$. Според тоа, триаголникот EFC е рамнокрак и сличен на триаголникот AFE, па затоа $\overline{EC}=\overline{EF}\sqrt{3}=3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=9\,cm$. Според тоа, четириаголникот $ABCE$ е трапез со основи $6\,cm$ и $9\,cm$ и висина $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,cm$. Понатаму, триаголникот CDE има основа $\overline{EC}=9\,cm$ и соодветна висина $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,cm$. Конечно, за плоштината на петаголникот $ABCDE$ добиваме $P=P_{ABCE}+P_{CDE}=\frac{6+9}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}\,cm^2$.



130. Средините на страните на правилен шестаголник се темиња на нов шестаголник. Определи го односот на плоштините на овие шестаголници.

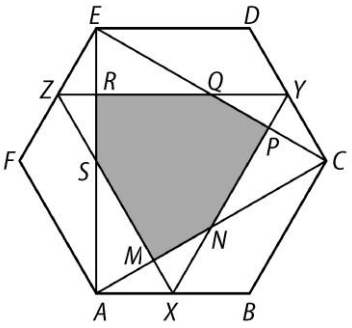
Решение. Новиот шестаголник исто така е правилен и должината на неговата страна b е еднаква на половина од пократката дијагонала на почетниот правилен шестаголник со страна a (направи цртеж). Пократката дијагонала на почетниот правилен шестаголник е еднаква на $d=a\sqrt{3}$, па затоа $b=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, односот на плоштините на почетниот и новиот шестаголник е

$$(\tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}):(\tfrac{3}{2}b^2\sqrt{3})=a^2:b^2=a^2:(\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2=\tfrac{4}{3}.$$

131. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник со страна 1. Со X,Y,Z да ги означиме средините на страните AB, CD, EF, соодветно. Определи ги

периметарот и плоштината на шестаголникот кој се добива во пресекот на триаголниците ACE и XYZ.

Решение. Нека $MNPQRS$ е бараниот шестаголник.Отсечката XY е средна линија на трапезот $ABCD$, па затоа $XY \| AD \| BC$ и $\overline{XY} = \frac{3}{2}\,cm$. Понатаму, отсечката YQ е средна линија на триаголникот ECD, па затоа $YQ \| ED \| FC$ и $\overline{YQ} = \frac{1}{2}\,cm$. Бидејќи $\measuredangle QYP = 60^\circ$, заклучуваме дека $\overline{YP} = \frac{1}{2}\overline{YQ} = \frac{1}{4}\,cm$. На



ист начин добиваме дека $\overline{NX} = \overline{ZS} = \frac{1}{2}\,cm$ и $\overline{MX} = \overline{ZR} = \frac{1}{2}\,cm$, па затоа бараниот периметар е

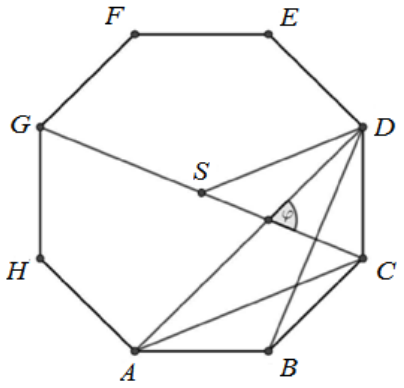
$$\begin{aligned} L &= \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{SM} + \overline{MN} \\ &= 3\overline{NP} + 3\overline{MN} \\ &= 3\cdot(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) + 3\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{3} \\ &= \tfrac{9+3\sqrt{3}}{4}\,cm. \end{aligned}$$

За плоштината на шестаголникот добиваме

$$P = P_{\triangle XYZ} - 3P_{\triangle QPY} = \tfrac{15}{32}\sqrt{3}\,cm^2.$$

132. Определи го аголот меѓу дијагоналите AD и CG во правилниот осумаголник $ABCDEFGH$.

Решение. Нека S е центарот на опишаната кружница околу правилниот осумаголник $ABCDEFGH$. Триаголникот CSD е рамнокрак и $\measuredangle CSD = \frac{1}{8}\cdot 360^\circ = 45^\circ$, од каде следува $\measuredangle SCD = \measuredangle SDC = 67{,}5^\circ$. Понатаму, триаголникот ASD е рамнокрак и $\measuredangle ASD = \frac{3}{8}\cdot 360^\circ = 135^\circ$, па затоа $\measuredangle SAD = \measuredangle SDA = 22{,}5^\circ$. Имаме,



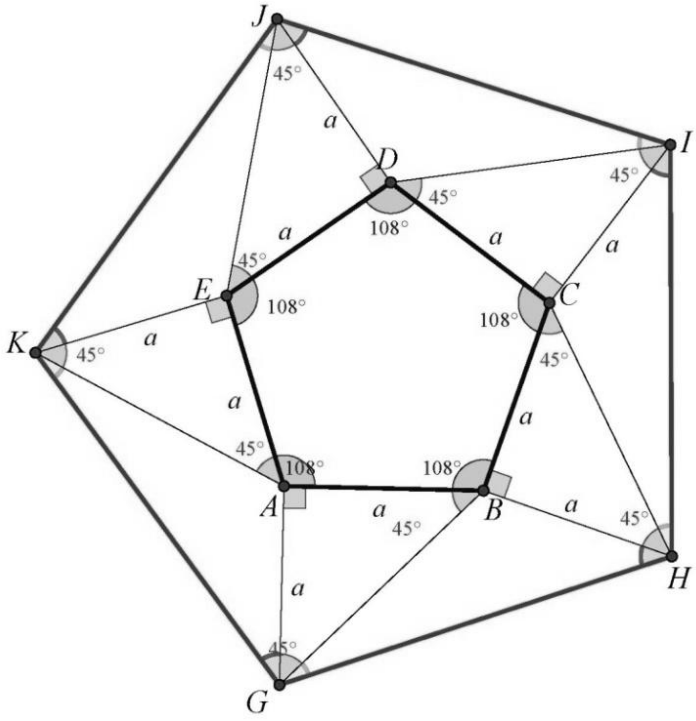
$$\measuredangle ADC = \measuredangle SDC - \measuredangle SDA = 67,5^\circ - 22,5^\circ = 45^\circ.$$

Конечно, бараниот агол е

$$\varphi = 180^\circ - \measuredangle ADC - \measuredangle SCD = 180^\circ - 45^\circ - 67,5^\circ = 67,5^\circ.$$

133. Даден е правилен петаголник $ABCDE$. Над страните на петаголникот, надвор од него, се конструирани рамнокраки правоаголни триаголници ABG, BCH, CDI, DEJ, EAK така што правите агли на триаголниците се во темињата на петаголникот. Докажи дека $GHIJK$ е правилен петаголник.

Решение. Нека a е должината на страната на правилниот петаголник $ABCDE$. Внатрешните агли на правилниот петаголник се еднакви на $180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$. Триаголниците ABG, BCH, CDI, DEJ, EAK се рамнокраки правоаголни триаголници со катети со должина a, па затоа тие се по парови складни. Острите агли во тие триаголници се еднаквин на 45°, види цртеж.



Од складноста на овие триаголници следува

$$\overline{GB} = \overline{HC} = \overline{ID} = \overline{JE} = \overline{KA},$$

$$\measuredangle KAG = \measuredangle FBH = \measuredangle IDJ = \measuredangle JEK = \measuredangle HCI$$
$$= 360^\circ - (108^\circ + 90^\circ + 45^\circ) = 117^\circ.$$

Сега, од признакот САС следува дека триаголниците $HGB, ICH, JDI,$ KEJ, GAK се по парови складни. Од оваа скалдност следува

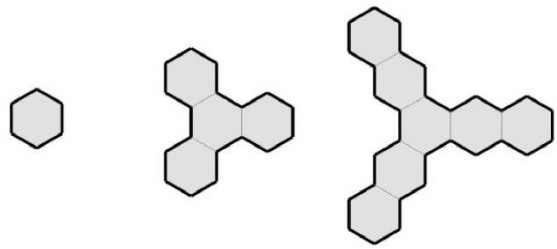
$$\overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JK} = \overline{KG},$$
$$\measuredangle BGH = \measuredangle CHI = \measuredangle DIJ = \measuredangle EJK = \measuredangle AKG,$$
$$\measuredangle GHB = \measuredangle HIC = \measuredangle IJD = \measuredangle JKE = \measuredangle KGA.$$

Според тоа, петаголникот $GHIJK$ има еднакви страни и за неговите агли важи

$$\measuredangle KGH = \measuredangle GHI = \measuredangle HIJ = \measuredangle IJK = \measuredangle JKG,$$

што значи дека тој е правилен.

134. На цртежот десно се прикажани првите три фигури на низата фигури формирана од правилни шестаголници. Низата ја продолжуваме според истото правило.



а) Дали некоја фигура во низата може да биде составена од 2021 правилни шестаголници?

б) Определи го периметарот на 2021-та фигура во низата, ако периметарот на шестаголникот е $30\,cm$.

Решение. Страната на еден од правилните шестаголници е еднаква на $a = 30:6 = 5\,cm$. Првата фигура во низата има 1 шестаголник, т.е. има 6 страни. Секоја следна фигура се добива со додавање на 3 нови шестаголници, а бројот на страните со додавање на секој шестаголник се зголемува за 4. Според тоа,

- втората фигура има $1+3\cdot 1=4$ шестаголници, а нејзиниот периметар е $6a+3\cdot 4a=18a=3\cdot 6a$,
- третата фигура има $1+3\cdot 2=7$ шестаголници, а нејзиниот периметар е $6a+6\cdot 4a=30a=5\cdot 6a$,

  .....
- $n-$тата фигура има $1+3(n-1)=3n-2$ шестаголници, а нејзниот периметар е $6a+3(n-1)\cdot 4a=(12n-6)a=(2n-1)\cdot 6a$.

а) Ако постои фигура составена од 2021 шестаголник, тогаш треба да важи $3n-2=2021$, т.е. $n=\frac{2023}{3}$, што не е можно, бидејќи бројот 2023 не е делив со 3.

б) Периметарот на 2021 фигура ќе биде

$$L_{2021}=(2\cdot 2021-1)\cdot 6\cdot 5=121230\,cm.$$

135. Колкав е најмалиот можен збир на четири внатрешни агли на конвексен седумаголник чии мери на аглите изразени во степени се природни броеви?

Решение. Збирот на аглите на конвексен седумаголник е

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=(7-2)\cdot 180^\circ=900^\circ.$$

За да збирот $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ е минимален, потребно е збирот $\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7$ да е максимален. Бидејќи седумаголникот е конвексен и мерите на аглите изразени во степени се природни броеви, збирот $\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7$ ќе биде масимален ако $\alpha_5=\alpha_6=\alpha_7=179^\circ$. Конечно, збирот $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ е минимален ако е еднаков

$$900^\circ-3\cdot 179^\circ=363^\circ.$$